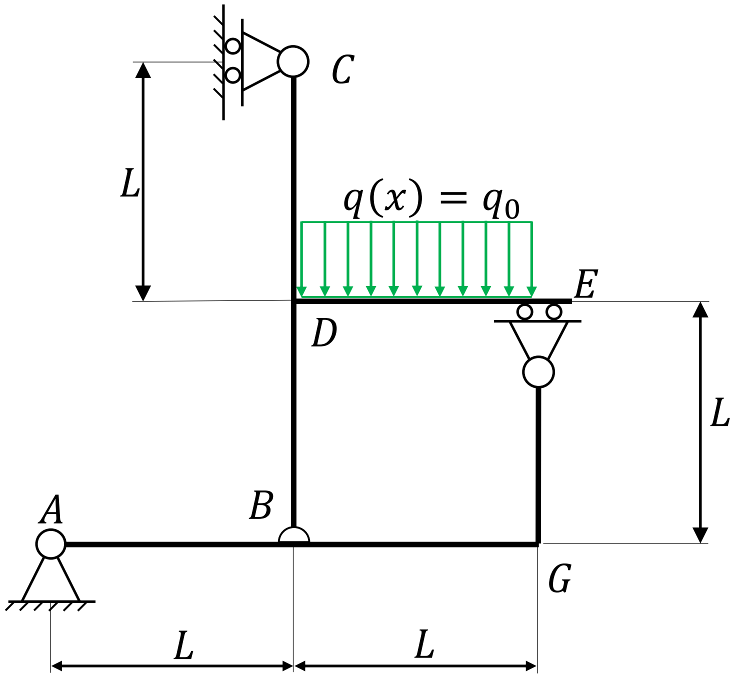
La lezione è stata registrata ed è reperibile all'indirizzo:
https://unica.adobeconnect.com/pwc1whcoy9lh/

ALTRI ESEMPI DI CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

ESERCIZIO N.4



Analisi cinematica

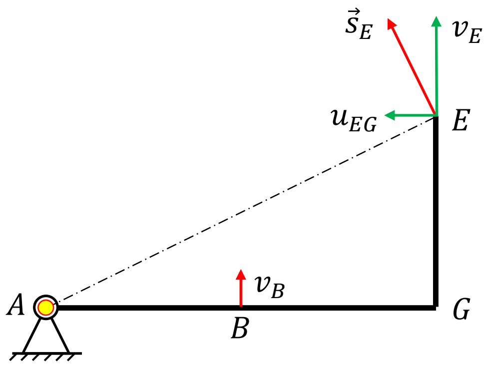
La struttura è formata da 2 travi che prima di essere vincolate avevano nel piano 6 GdL; in A c'è una cerniera a terra (2 GdV), in B c'è una cerniera libera (2 GdV), in C c'è un carrello a terra (1 GdV) e in E c'è un carrello che scorre su una trave ($2N - 3 = 1$ GdV, dove N indica il numero di travi che convergono nel nodo E).

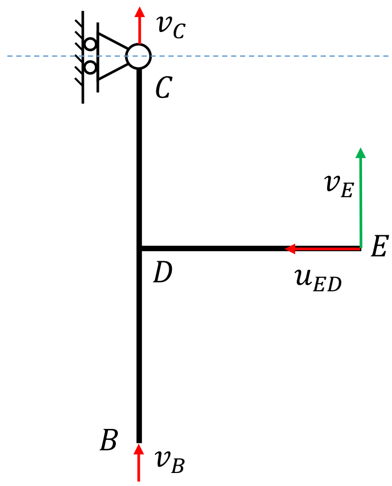
Quindi la struttura è isostatica.

I vincoli sono posti correttamente o si tratta di una struttura labile?

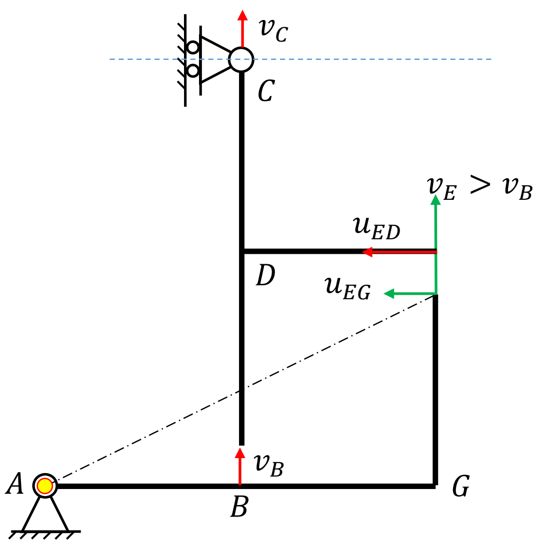
Seguendo il ragionamento fatto in occasione del 2° esercizio, noto che la struttura, liberata dai vincoli a terra, è equivalente, dal punto di vista dell'analisi cinematica, ad un corpo rigido, e quindi il ripristino dei vincoli a terra (complessivamente 3 GdV) garantisce l'equilibrio della struttura.

Ma qui seguirò un ragionamento un po' diverso: separo le due aste e le esamino separatamente.





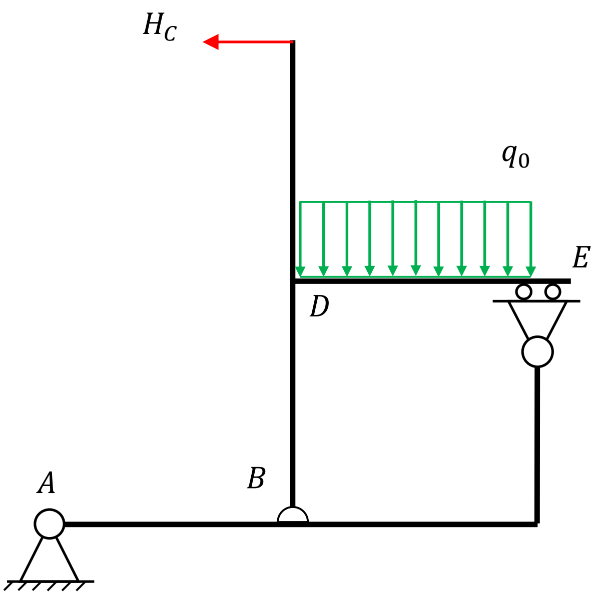
L'asta ABGE può ruotare intorno al perno in A e subisce gli spostamenti infinitesimi che ho indicato in rosso nello schema. L'asta BDCE è vincolata all'asta ABGE, quindi il punto B deve subire lo stesso spostamento verticale v_B; nel punto E c'è un carrello libero di traslare sull'asta ED (quindi, in generale, $u_{EG} \neq u_{ED}$), ma che obbliga le due aste a subire, nel punto E, lo stesso spostamento verticali infinitesimo v_E. Notiamo che i nodi B, C ed E subiscono uno spostamento verticale: se il loro valore fosse identico e se la u_{ED} fosse nulla, il centro d'istantanea rotazione sarebbe un punto improprio (all'infinito) in direzione orizzontale. Ma dall'esame dell'asta ABGE abbiamo visto che $v_B \neq v_E$, quindi l'asta BDCE non può subire uno spostamento rigido. Se ne deduce che la struttura non è labile.



Calcolo delle reazioni vincolari

Eliminazione parziale e progressiva dei vincoli

Si elimina il carrello nel nodo C e se ne calcola la reazione vincolare.

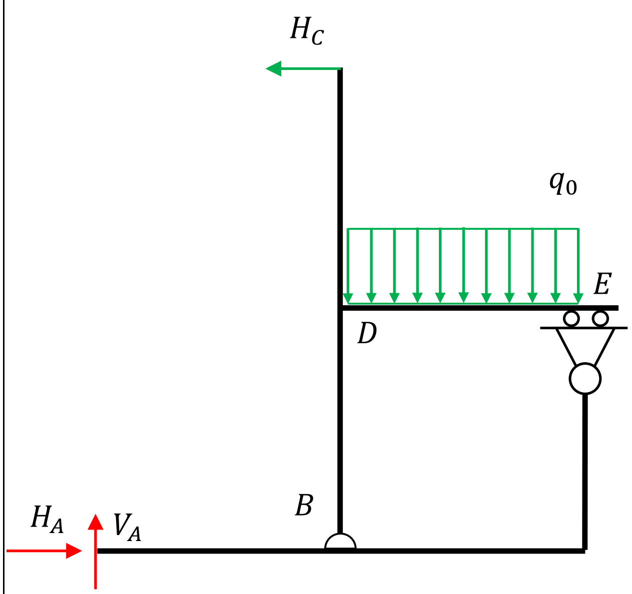


$$\sum_A M_z = H_C 2L - q_0 L \frac{3L}{2} = 0$$

da cui:

$$H_C = \frac{3q_0 L}{4}$$

Si elimina la cerniera a terra in A e se ne calcolano le reazioni.

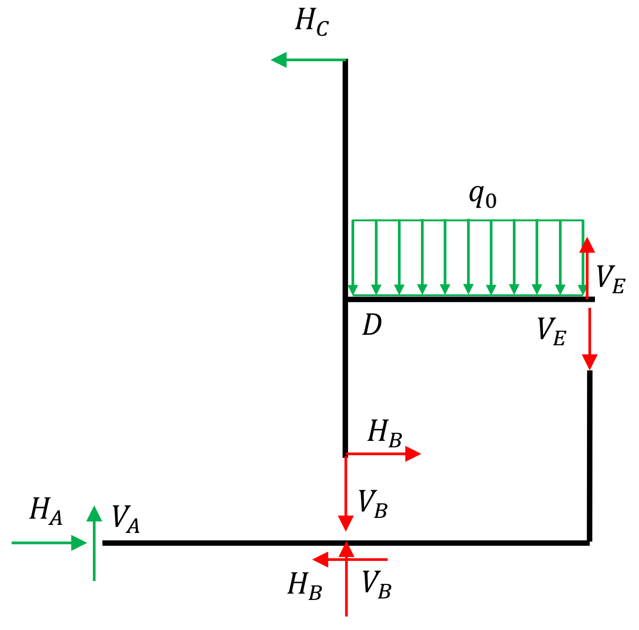


$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - H_C = 0 \\ \sum F_y = V_A - q_0 L = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} H_A = H_C = \dfrac{3q_0 L}{4} \\ V_A = q_0 L \end{cases}$$

Si eliminano i vincoli interni in B ed E.



Asta ABE:

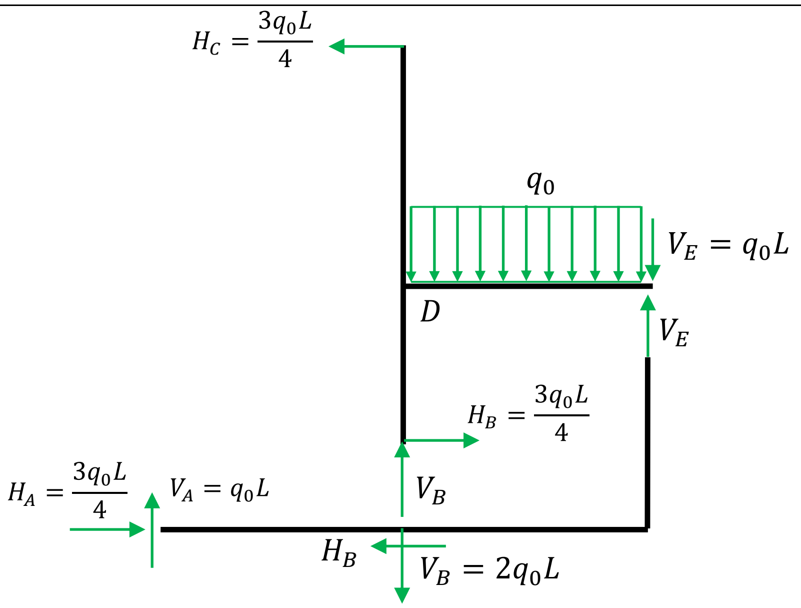
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - H_B = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - V_E = 0 \\ \sum_B M_z = -V_A L - V_E L = 0 \end{cases}$$

da cui: $\begin{cases} H_B = H_A = \frac{3q_0L}{4} \\ V_B = V_E - V_A \\ V_E = -V_A \end{cases}$

da cui: $$\begin{cases} H_B = \frac{3q_0L}{4} \\ V_E = -q_0L \\ V_B = -2q_0L \end{cases}$$

Si cambia verso e segno alle reazioni V_B e V_E.

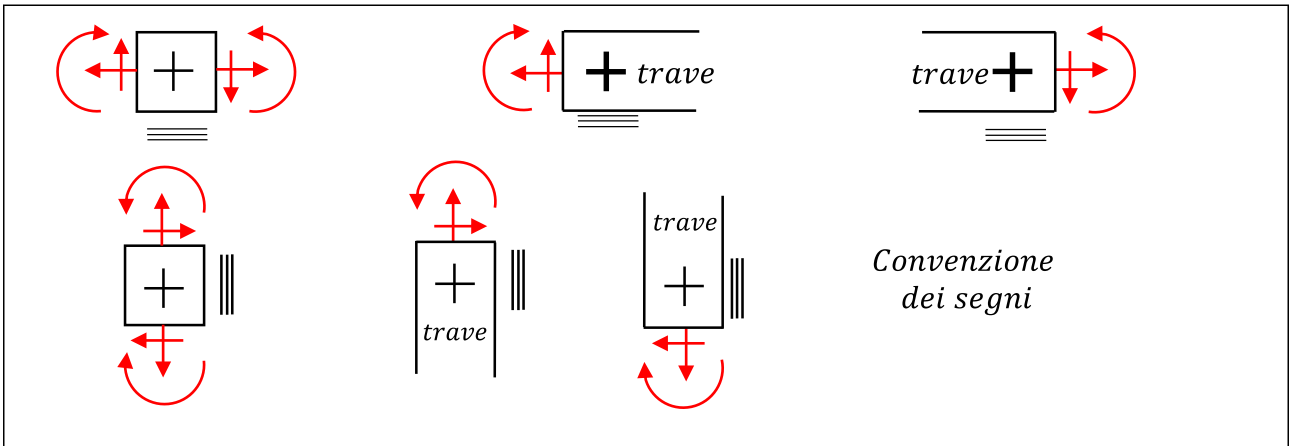
In sintesi:



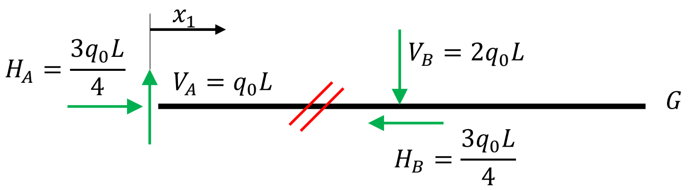
Calcolo delle azioni interne con il metodo diretto

Scelta la convenzione dei segni, si determinano 4 sistemi di riferimento come indicato nello schema seguente:

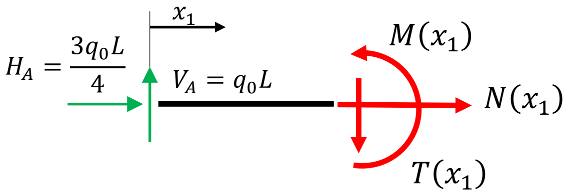
1) Tratto ABG: origine in A e direzione positiva verso destra (x_1);
2) Tratto BDC: origine in B e direzione positiva verso l'alto (x_2);
3) Tratto ED: origine in E e direzione positiva verso sinistra (x_3);
4) Tratto EG: origine in E e direzione positiva verso il basso (x_4);



Tratto ABG: origine in A e direzione positiva verso destra (x_1)

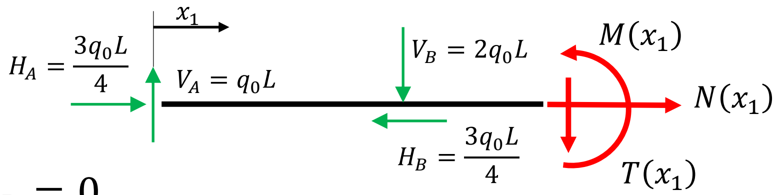


Esaminiamo il tratto: $0 \leq x_1 < L$



$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_1) + H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A - T(x_1) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_1) - V_A x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad \begin{cases} N(x_1) = -\frac{3q_0L}{4} \\ T(x_1) = q_0L \\ M(x_1) = q_0 L x_1 \end{cases}$$

Esaminiamo il tratto: $L \leq x_1 < 2L$

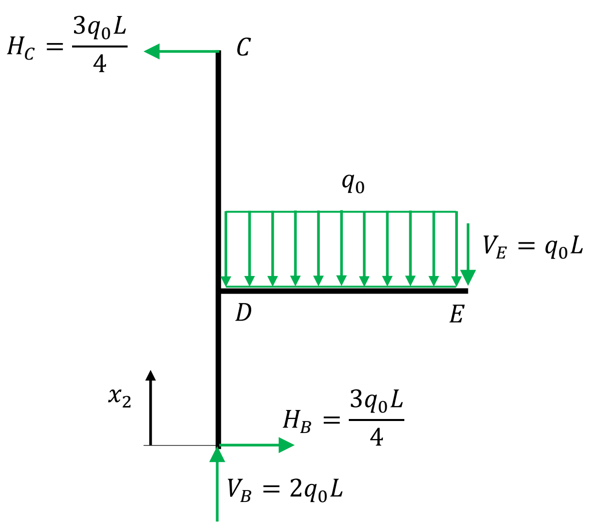


$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_1) + H_A - H_B = 0 \\ \sum F_y = V_A - V_B - T(x_1) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_1) + V_B(x_1 - L) - V_A x_1 = 0 \end{cases}$$

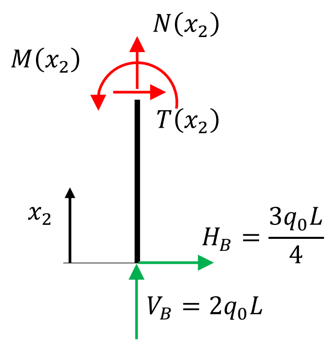
da cui:

$$\begin{cases} N(x_1) = H_B - H_A = 0 \\ T(x_1) = V_A - V_B = -q_0L \\ M(x_1) = -q_0Lx_1 + 2q_0L^2 \end{cases}$$

Tratto BDC: origine in B e direzione positiva verso l'alto (x_2)



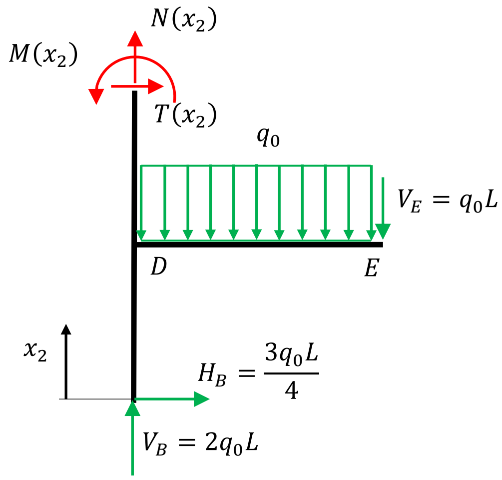
Esaminiamo il tratto: $0 \leq x_2 < L$



$$\begin{cases} \sum F_x = H_B + T(x_2) = 0 \\ \sum F_y = N(x_2) + V_B = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_2) + H_B x_2 = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} T(x_2) = -H_B = -\frac{3q_0L}{4} \\ N(x_2) = -V_B = -2q_0L \\ M(x_2) = -H_B x_2 = -\frac{3q_0L}{4} x_2 \end{cases}$$



Esaminiamo il tratto: $L \leq x_2 < 2L$

$$\begin{cases} \sum F_x = H_B + T(x_2) = 0 \\ \sum F_y = N(x_2) + V_B - q_0 L - V_E = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_2) + H_B x_2 - q_0 L \frac{L}{2} - V_E L = 0 \end{cases}$$

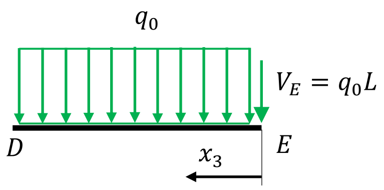
da cui:

$$\begin{cases} T(x_2) = -H_B = -\frac{3q_0L}{4} \\ N(x_2) = q_0 L + V_E - V_B = 0 \\ M(x_2) = q_0 L \frac{L}{2} + V_E L - H_B x_2 = \frac{3q_0L^2}{2} - \frac{3q_0L}{4} x_2 \end{cases}$$

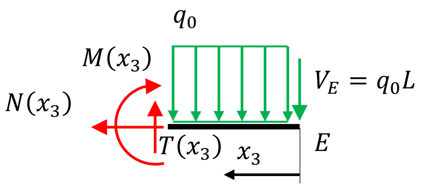
da cui:

$$M(x_2) = \begin{cases} \frac{3q_0L^2}{4} & in \quad x_2 = L \\ 0 & in \quad x_2 = 2L \end{cases}$$

Tratto ED: origine in E e direzione positiva verso sinistra (x_3)



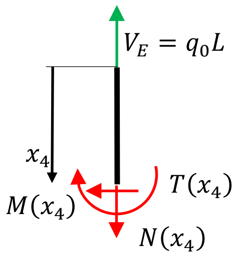
Esaminiamo il tratto: $0 \leq x_3 < L$



$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_3) = 0 \\ \sum F_y = T(x_3) - q_0 x_3 - V_E = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_3) + q_0 x_3 \frac{x_3}{2} + V_E x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui:
$$\begin{cases} N(x_3) = 0 \\ T(x_3) = q_0 x_3 + V_E = q_0(x_3 + L) \\ M(x_3) = -q_0 x_3 \frac{x_3}{2} - V_E x_3 = -q_0 x_3 \left(\frac{x_3}{2} + L\right) \end{cases}$$

Tratto EG: origine in E e direzione positiva verso il basso (x_4);



$$\begin{cases} \sum F_x = T(x_4) = 0 \\ \sum F_y = V_E - N(x_4) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_4) = 0 \end{cases}$$

da cui:
$$\begin{cases} T(x_4) = 0 \\ N(x_4) = V_E = q_0 L \\ M(x_4) = 0 \end{cases}$$

Disegno dei diagrammi delle azioni interne

Riassumendo le azioni interne valgono:

Tratto ABG: origine in A e direzione positiva verso destra (x_1):

per $0 \leq x_1 < L$ $\begin{cases} N(x_1) = -\frac{3q_0L}{4} \\ T(x_1) = q_0L \\ M(x_1) = q_0Lx_1 \end{cases}$

per $L \leq x_1 < 2L$ $\begin{cases} N(x_1) = 0 \\ T(x_1) = -q_0L \\ M(x_1) = -q_0Lx_1 + 2q_0L^2 \end{cases}$

Tratto BDC: origine in B e direzione positiva verso l'alto (x_2)

per $0 \leq x_2 < L$ $\begin{cases} N(x_2) = -2q_0L \\ T(x_2) = -\frac{3q_0L}{4} \\ M(x_2) = -\frac{3q_0L}{4}x_2 \end{cases}$

per $L \leq x_2 < 2L$ $\begin{cases} N(x_2) = 0 \\ T(x_2) = -\frac{3q_0L}{4} \\ M(x_2) = \frac{3q_0L^2}{2} - \frac{3q_0L}{4}x_2 \end{cases}$

Tratto ED: origine in E e direzione positiva verso sinistra (x_3)

per $0 \leq x_3 < L$ $\begin{cases} N(x_3) = 0 \\ T(x_3) = q_0(x_3 + L) \\ M(x_3) = -q_0x_3\left(\frac{x_3}{2} + L\right) \end{cases}$

Tratto EG: origine in E e direzione positiva verso il basso (x_4);

per $0 \leq x_4 < L$ $\begin{cases} N(x_4) = q_0L \\ T(x_4) = 0 \\ M(x_4) = 0 \end{cases}$

Azione normale:

Tra il nodo A ed il nodo B: $N(x_1) = -\frac{3q_0L}{4}$

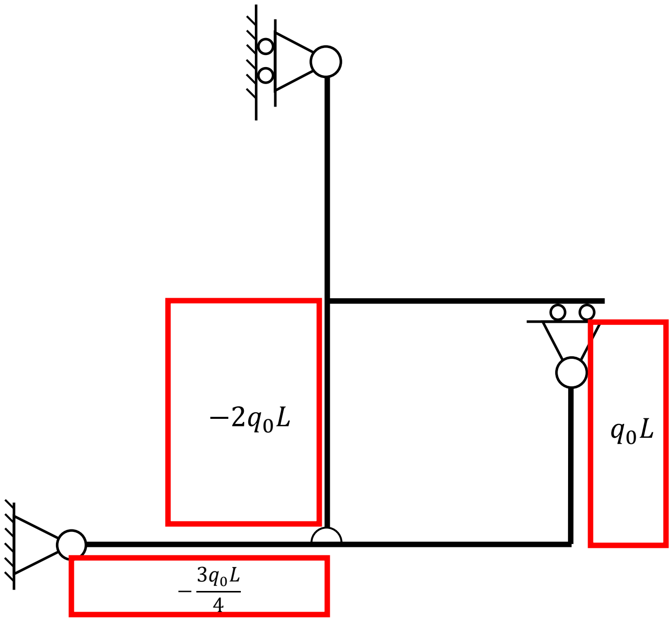
Tra il nodo B e il nodo G: $N(x_1) = 0$

Tra il nodo B e il nodo D: $N(x_2) = -2q_0L$

Tra il nodo D e il nodo C: $N(x_2) = 0$

Tra il nodo E e il nodo D: $N(x_3) = 0$

Tra il nodo E e il nodo G: $N(x_4) = q_0L$



Azione di taglio:

Tra il nodo A ed il nodo B: $T(x_1) = q_0 L$

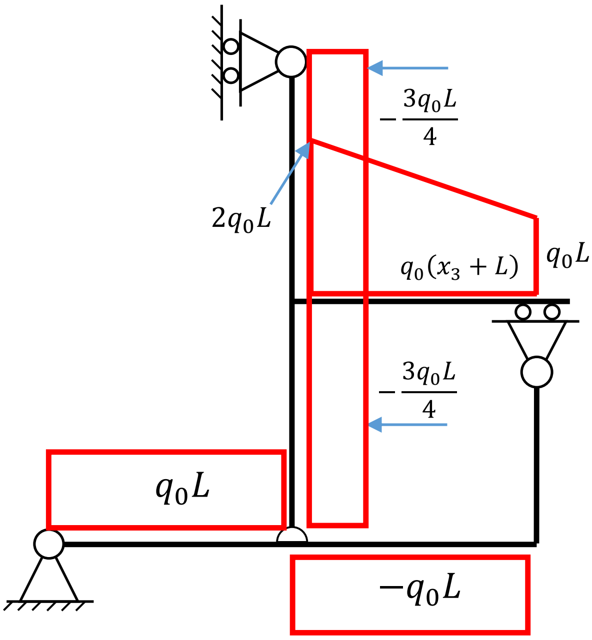
Tra il nodo B e il nodo G: $T(x_1) = -q_0 L$

Tra il nodo B e il nodo D: $T(x_2) = -\frac{3q_0L}{4}$

Tra il nodo D e il nodo C: $T(x_2) = -\frac{3q_0L}{4}$

Tra il nodo E e il nodo D: $T(x_3) = q_0(x_3 + L)$

Tra il nodo E e il nodo G: $T(x_4) = 0$



Momento flettente:

Tra il nodo A ed il nodo B: $M(x_1) = q_0 L x_1$

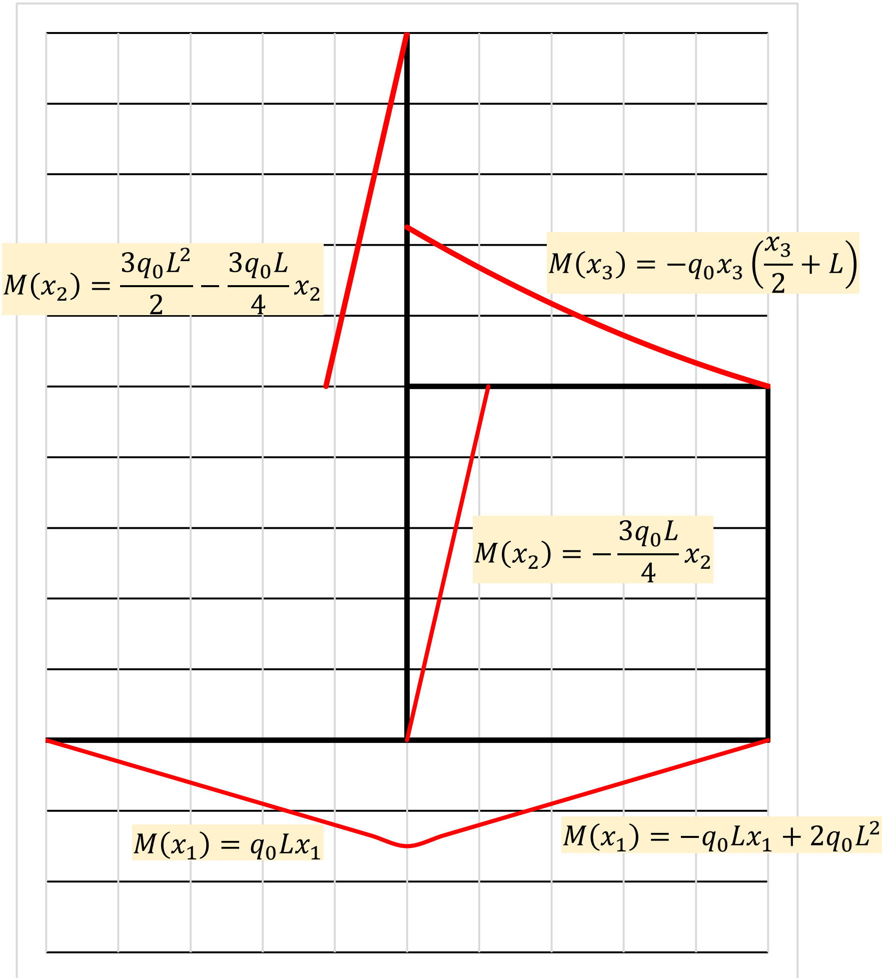
Tra il nodo B e il nodo G: $M(x_1) = -q_0 L x_1 + 2q_0 L^2$

Tra il nodo B e il nodo D: $M(x_2) = -\frac{3q_0 L}{4} x_2$

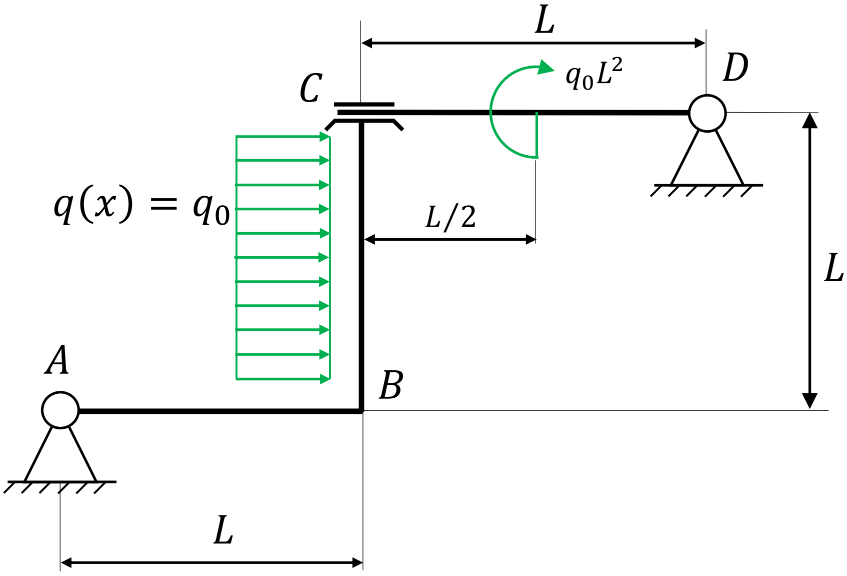
Tra il nodo D e il nodo C: $M(x_2) = \frac{3q_0 L^2}{2} - \frac{3q_0 L}{4} x_2$

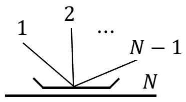
Tra il nodo E e il nodo D: $M(x_3) = -q_0 x_3 \left(\frac{x_3}{2} + L\right)$

Tra il nodo E e il nodo G: $M(x_4) = 0$



ESERCIZIO N.5



Pattino su trave libera		$3N$	3: GdL della trave N-esima di appoggio; 1: spostamento del pattino sulla trave di appoggio.	$3N-4$

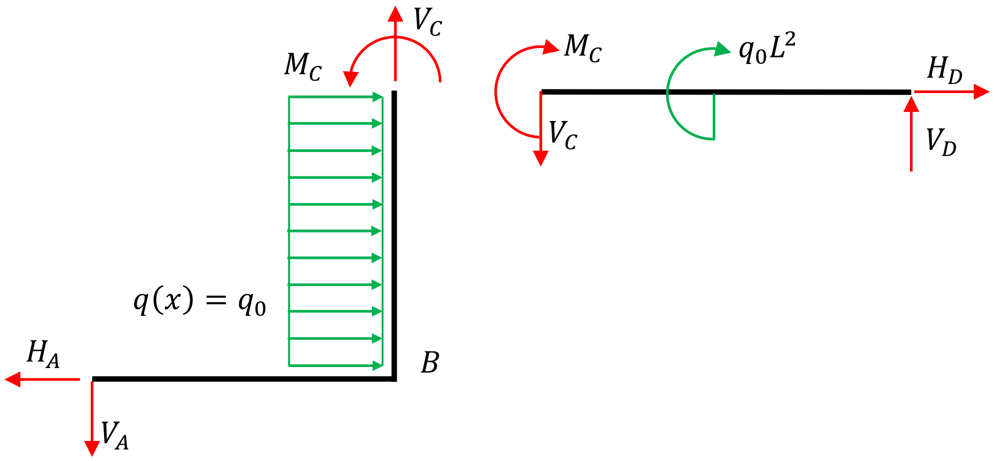
Analisi cinematica

La struttura è formata da due aste che prima di essere vincolate avevano nel piano 6 GdL. In A e in D ci sono due cerniera a terra per complessivi 4 GdV e in C c'è un pattino che consente ad una trave di scorrere sull'altra: poiché in C convergono N=2 aste, il pattino impone 3N-4=2 GdV.

La struttura è isostatica non labile: si tratta di un particolare "arco a tre cerniere", le cui cerniere non sono allineate (il CIR del pattino è in un punto improprio in direzione verticale, cioè in direzione perpendicolare al movimento consentito).

Calcolo delle reazioni vincolari

Eliminazione completa dei vincoli



Poiché il pattino non è in grado di sopportare carichi orizzontali, la reazione H_D che ho disegnato sull'asta CD deve essere nulla.

Per l'equilibrio delle forze orizzontali della struttura ABC si ottiene:

$$H_A = q_0 L$$

Per l'equilibrio alla rotazione di tutta la struttura intorno al nodo A si ottiene (le reazioni vincolari in corrispondenza del pattino sono interne e la loro somma è nulla):

$$\sum_A M_z = V_D 2L - q_0 L \frac{L}{2} - q_0 L^2 = 0 \quad \text{da cui:} \qquad V_D = \frac{3q_0 L}{4}$$

Per l'equilibrio delle forze verticali che agiscono sull'asta CD:

$$V_C = V_D = \frac{3q_0 L}{4}$$

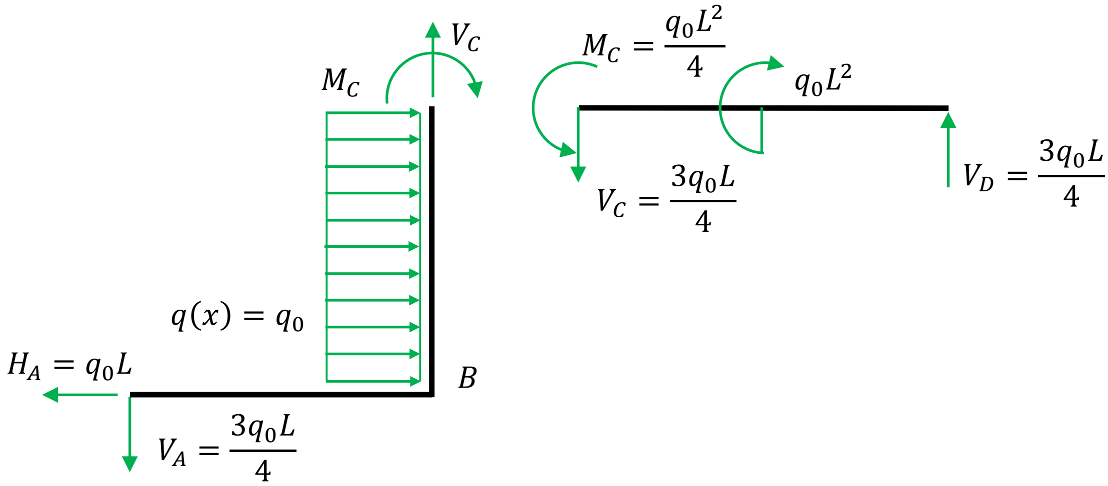
Per l'equilibrio alla rotazione dell'asta CD:

$M_C = V_D L - q_0 L^2 = -\frac{q_0 L^2}{4}$: è necessario cambiare verso e segno.

Per l'equilibrio delle forze verticali che agiscono sull'asta ABC:

$$V_A = V_C = \frac{3q_0 L}{4}$$

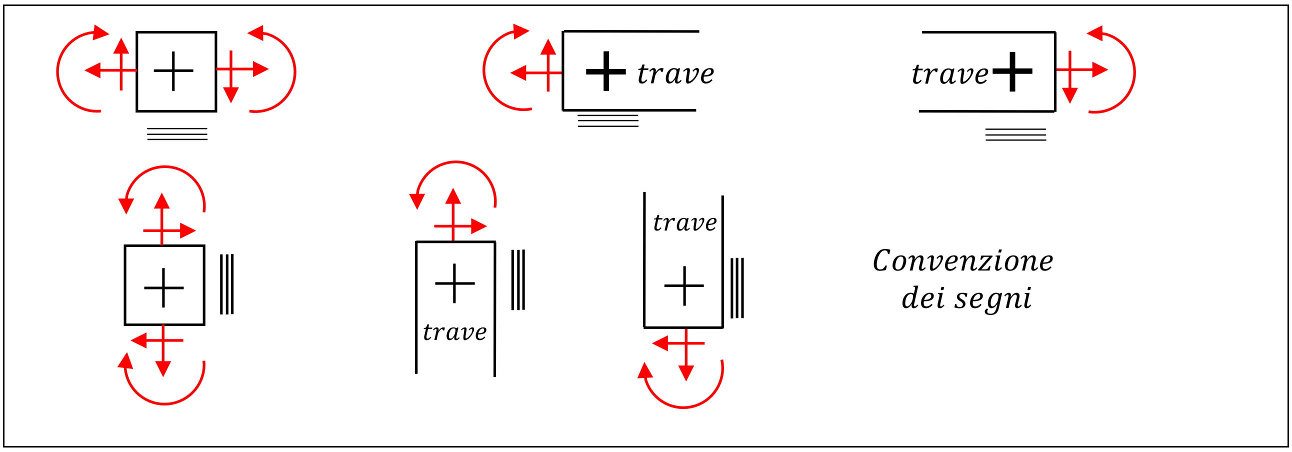
Riassumendo:



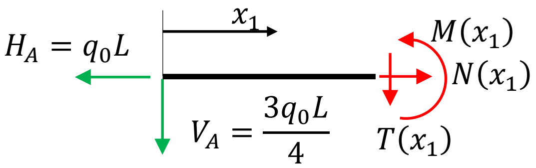
Calcolo delle azioni interne con il metodo diretto

Scelta la convenzione dei segni, si determinano 3 sistemi di riferimento come indicato nello schema seguente:

1) Tratto AB: origine in A e direzione positiva verso destra (x_1);
2) Tratto BC: origine in B e direzione positiva verso l'alto (x_2);
3) Tratto DC: origine in D e direzione positiva verso sinistra (x_3);



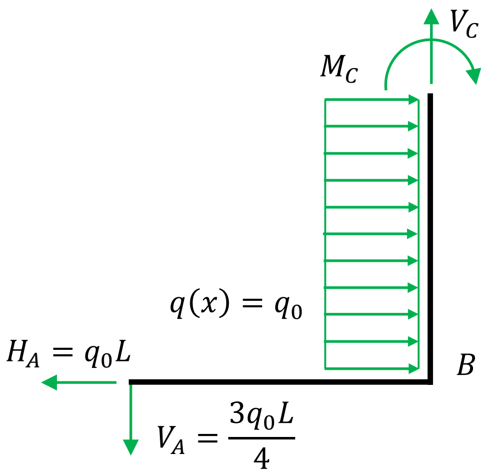
Tratto AB: origine in A e direzione positiva verso destra (x_1)



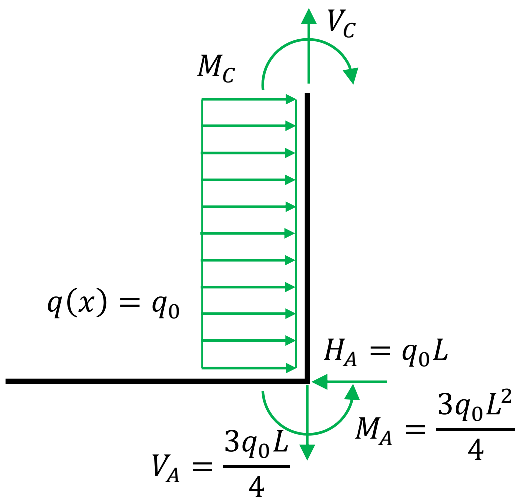
$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_1) - H_A = 0 \\ \sum F_y = -V_A - T(x_1) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_1) + V_A x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad \begin{cases} N(x_1) = q_0 L \\ T(x_1) = -\frac{3q_0L}{4} \\ M(x_1) = -\frac{3q_0L}{4} x_1 \end{cases}$$

Tratto BC: origine in B e direzione positiva verso l'alto (x_2);

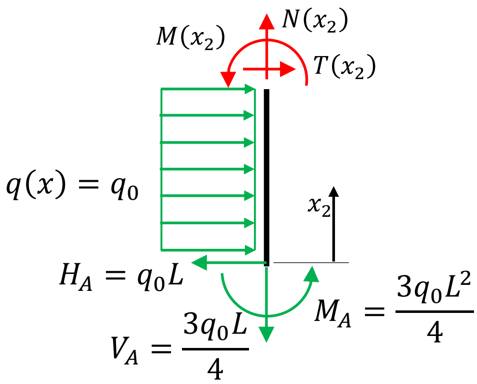
Il seguente schema:



è equivalente al seguente:



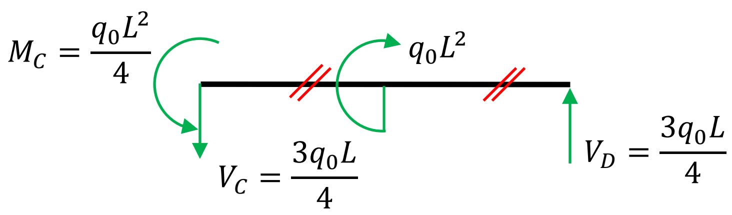
ottenuto trasportando la forza H_A, la forza V_A ed aggiungendo il momento di trasporto M_A. Tagliando a distanza x_2 dal punto B si ottiene:



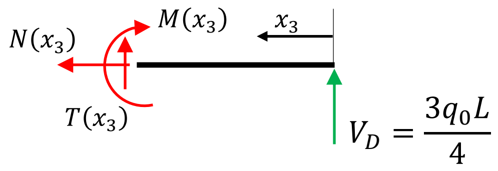
$$\begin{cases} \sum F_x = q_0 x_2 - H_A + T(x_2) = 0 \\ \sum F_y = N(x_2) - \dfrac{3q_0L}{4} = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_2) + M_A - H_A x_2 + q_0 x_2 \dfrac{x_2}{2} = 0 \end{cases}$$

da cui:
$$\begin{cases} N(x_2) = \frac{3q_0L}{4} \\ T(x_2) = H_A - q_0 x_2 = q_0(L - x_2) \\ M(x_2) = -M_A + H_A x_2 - \frac{q_0 x_2^2}{2} = -\frac{3q_0L^2}{4} + q_0 L x_2 - \frac{q_0 x_2^2}{2} \end{cases}$$

Tratto DC: origine in D e direzione positiva verso sinistra (x_3);



Esaminiamo il tratto: $0 \leq x_3 < \frac{L}{2}$

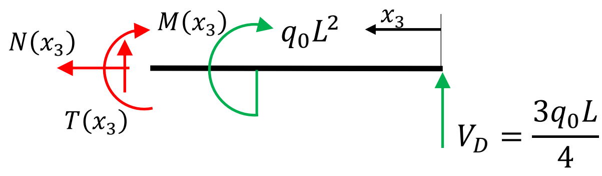


$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_3) = 0 \\ \sum F_y = T(x_3) + \frac{3q_0L}{4} = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_3) - V_D x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} N(x_3) = 0 \\ T(x_3) = -\frac{3q_0L}{4} \\ M(x_3) = \frac{3q_0L}{4} x_3 \end{cases}$$

Esaminiamo il tratto: $\frac{L}{2} \leq x_3 < L$



$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_3) = 0 \\ \sum F_y = T(x_3) + \frac{3q_0L}{4} = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_3) + q_0L^2 - V_D x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} N(x_3) = 0 \\ T(x_3) = -\frac{3q_0L}{4} \\ M(x_3) = \frac{3q_0L}{4}x_3 - q_0L^2 \end{cases}$$

Disegno dei diagrammi delle azioni interne

Riassumendo le azioni interne valgono:

Tratto AB: origine in A e direzione positiva verso destra (x_1):

$$\begin{cases} N(x_1) = q_0L \\ T(x_1) = -\frac{3q_0L}{4} \\ M(x_1) = -\frac{3q_0L}{4}x_1 \end{cases}$$

Tratto BC: origine in B e direzione positiva verso l'alto (x_2):

$$\begin{cases} N(x_2) = \frac{3q_0L}{4} \\ T(x_2) = q_0(L - x_2) \\ M(x_2) = -\frac{3q_0L^2}{4} + q_0Lx_2 - \frac{q_0x_2^2}{2} \end{cases}$$

Tratto DC: origine in D e direzione positiva verso sinistra (x_3)

tratto: $0 \leq x_3 < \frac{L}{2}$

$$\begin{cases} N(x_3) = 0 \\ T(x_3) = -\frac{3q_0L}{4} \\ M(x_3) = \frac{3q_0L}{4}x_3 \end{cases}$$

tratto: $\frac{L}{2} \leq x_3 < L$

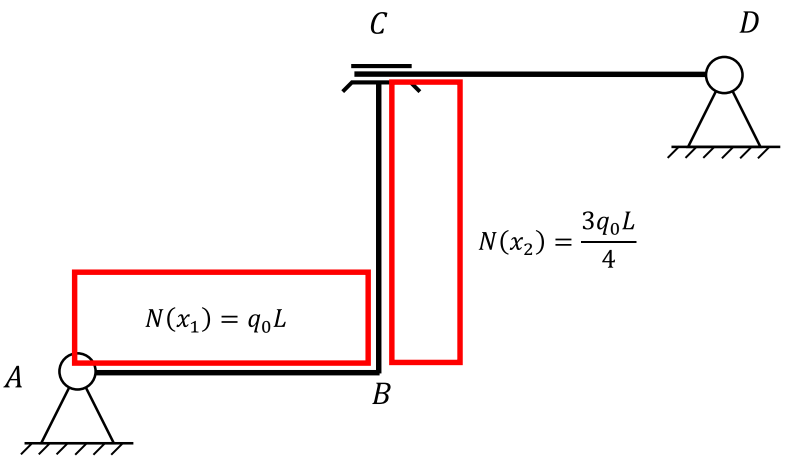
$$\begin{cases} N(x_3) = 0 \\ T(x_3) = -\frac{3q_0L}{4} \\ M(x_3) = \frac{3q_0L}{4}x_3 - q_0L^2 \end{cases}$$

Azione normale:

Tra il nodo A ed il nodo B: $N(x_1) = q_0 L$

Tra il nodo B e il nodo C: $N(x_2) = \frac{3q_0L}{4}$

Tra il nodo D e il nodo C: $N(x_3) = 0$

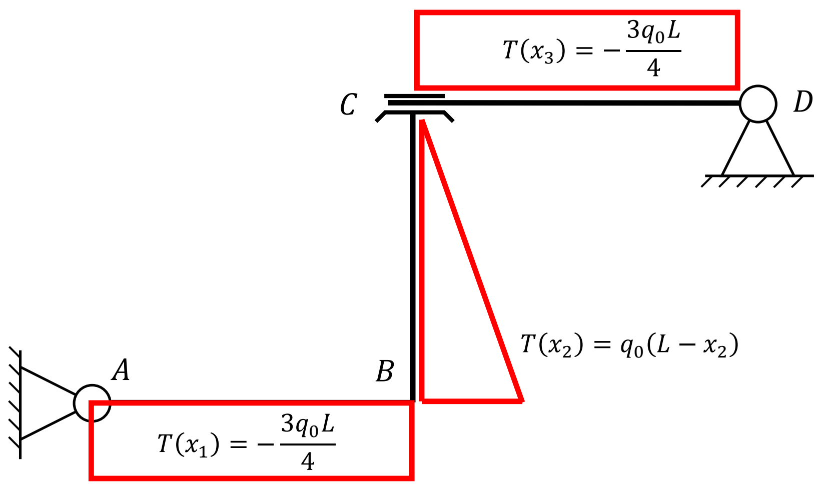


Azione di taglio:

Tra il nodo A ed il nodo B: $T(x_1) = -\frac{3q_0L}{4}$

Tra il nodo B e il nodo C: $T(x_2) = q_0(L - x_2)$

Tra il nodo D e il nodo C: $T(x_3) = -\frac{3q_0L}{4}$



Momento flettente:

Tra il nodo A ed il nodo B: $M(x_1) = -\frac{3q_0L}{4}x_1$

Tra il nodo B e il nodo C: $M(x_2) = -\frac{3q_0L^2}{4} + q_0Lx_2 - \frac{q_0x_2^2}{2}$

Tra il nodo D e il nodo C:

tratto: $0 \leq x_3 < \frac{L}{2}$: $M(x_3) = \frac{3q_0L}{4}x_3$

tratto: $\frac{L}{2} \leq x_3 < L$: $M(x_3) = \frac{3q_0L}{4}x_3 - q_0L^2$