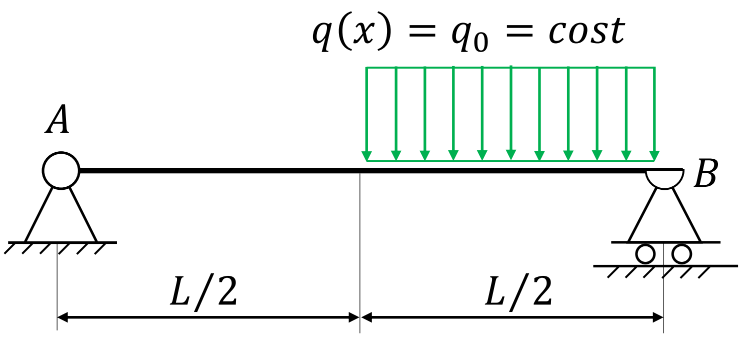
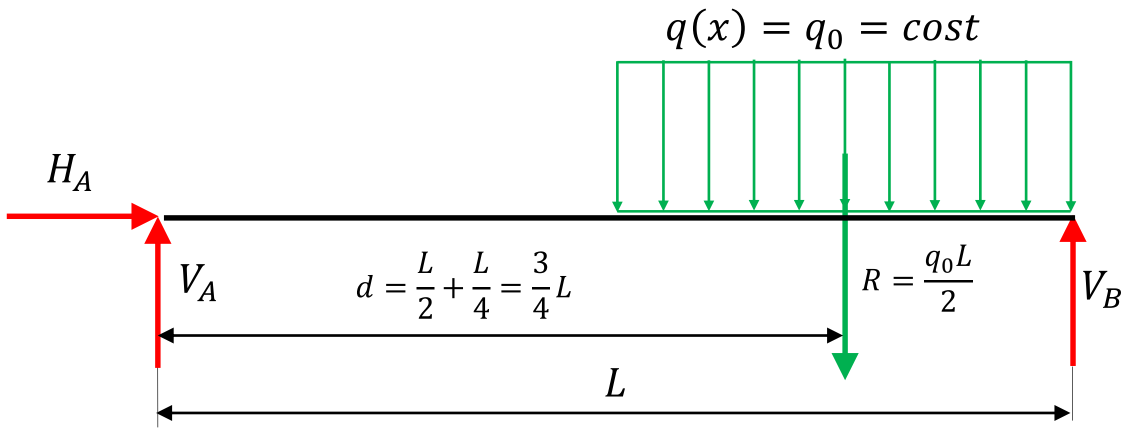
La lezione è stata registrata ed è reperibile all'indirizzo:
https://unica.adobeconnect.com/pgr1c60xkb49/

ESEMPI DI CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

ESERCIZIO N.1

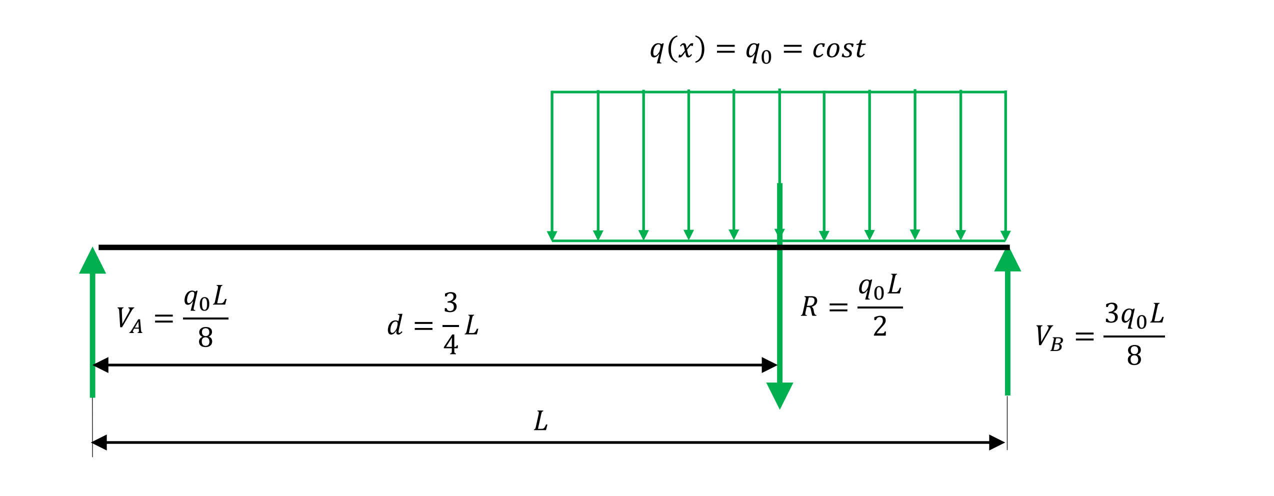


Calcolo delle reazioni vincolari



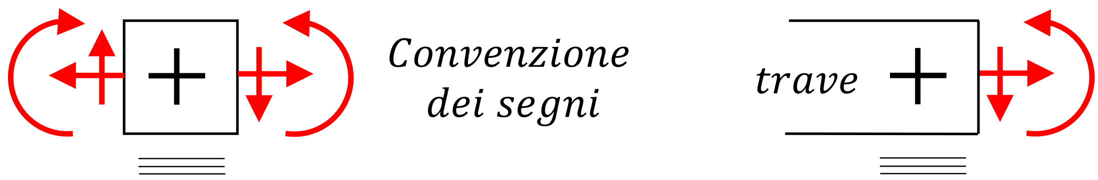
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - R = 0 \\ \sum_A M_z = V_B L - Rd = 0 \end{cases}$$

da cui: $V_B = R\frac{d}{L} = \frac{q_0 L}{2}\frac{3}{4} = \frac{3}{8}q_0 L$; $\quad V_A = R - V_B = \frac{q_0 L}{2} - \frac{3}{8}q_0 L = \frac{q_0 L}{8}$

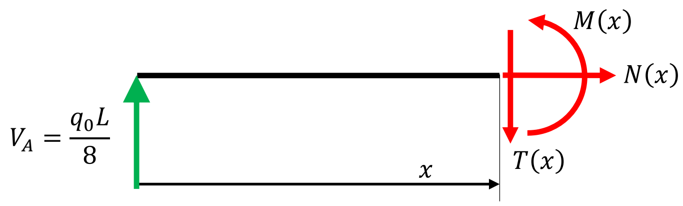


Calcolo delle azioni interne con il metodo diretto

Si stabilisce un sistema di riferimento e una convenzione dei segni; si procede ipotizzando un taglio e sostituendo le azioni interne incognite.



Tratto $0 \leq x < \frac{L}{2}$

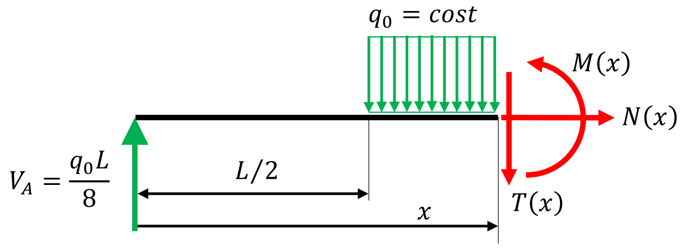


Si scrivono le equazioni cardinali della statica:

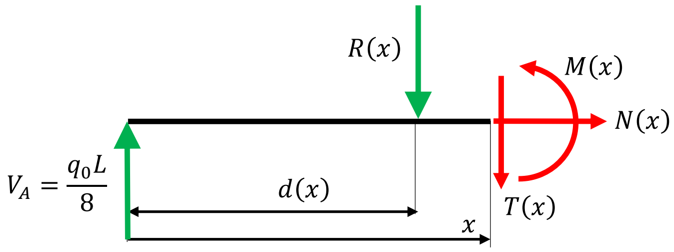
$$
\begin{cases}
\sum F_x = N(x) = 0 \\
\sum F_y = V_A - T(x) = 0 \\
\sum_x M_z = M(x) - V_A x = 0
\end{cases}
$$

Da cui: $N(x) = 0$; $T(x) = V_A = \frac{q_0 L}{8}$; $M(x) = V_A x = \frac{q_0 L}{8} x$

Tratto $\frac{L}{2} \leq x \leq L$



Si sostituisce il carico distribuito con la propria risultante $R(x)$:



Il carico agisce tra la coordinata $\frac{L}{2}$ e x quindi la sua risultante vale:

$$R(x) = q_0 \left(x - \frac{L}{2}\right).$$

Questo risultato si può ottenere anche applicando la formula generale:

$$R(x) = \int_{L/2}^{x} q(x)dx = q_0 x|_{L/2}^{x} = q_0 \left(x - \frac{L}{2}\right)$$

La risultante è applicata nel punto medio della zona di applicazione, cioè:

$$d(x) = \frac{\frac{L}{2} + x}{2} = \frac{L}{4} + \frac{x}{2}$$

Questo risultato si può ottenere anche applicando la formula generale:

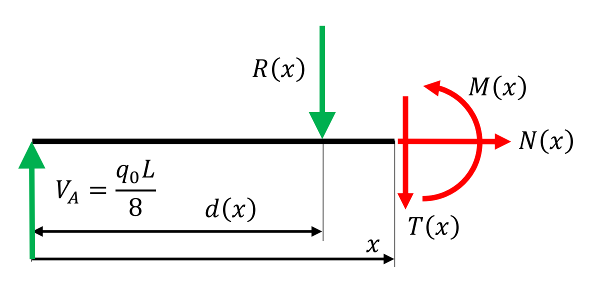
$$d(x)=\frac{\int_{L/2}^{x} dM}{R(x)}=\frac{\int_{L/2}^{x} q(x)xdx}{R(x)}=\frac{q_0\left.\frac{x^2}{2}\right|_{L/2}^{x}}{q_0\left(x-\frac{L}{2}\right)}=\frac{x^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2\left(x-\frac{L}{2}\right)}$$

Poiché: $x^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2=\left(x+\frac{L}{2}\right)\left(x-\frac{L}{2}\right)$ semplificando si ottiene:

$$d(x)=\frac{x+\frac{L}{2}}{2}=\frac{L}{4}+\frac{x}{2}$$

Quando $x=L$ si ottiene: $d=\frac{L}{4}+\frac{L}{2}=\frac{3}{4}L$ come volevasi dimostrare.

Si scrivono le equazioni cardinali della statica:

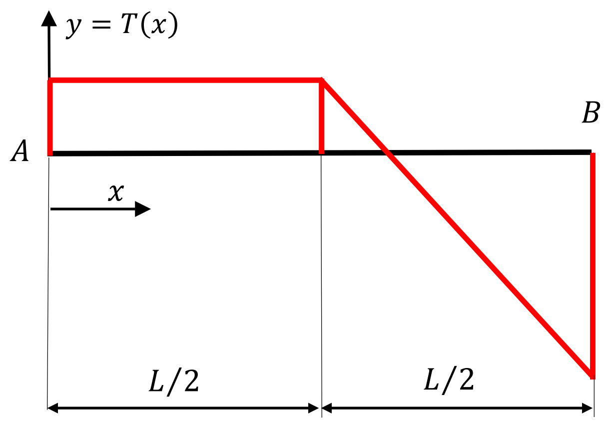


$$\begin{cases}\sum F_x=N(x)=0\\ \sum F_y=V_A-R(x)-T(x)=0\\ \sum_x M_z=M(x)+R(x)[x-d(x)]-V_Ax=0\end{cases}$$

Sostituendo il valore di $R(x)$ e di $d(x)$ si ottiene:

$$\begin{cases}N(x)=0\\ T(x)=V_A-R(x)=\frac{q_0L}{8}-q_0\left(x-\frac{L}{2}\right)=-q_0x+\frac{q_0L}{8}+\frac{q_0L}{2}=-q_0x+\frac{5q_0L}{8}\\ M(x)=V_Ax-R(x)[x-d(x)]=\frac{q_0L}{8}x-q_0\left(x-\frac{L}{2}\right)\left[x-\left(\frac{L}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]\end{cases}$$

Si osserva che quando $0\le x<\frac{L}{2}$ l'andamento del taglio è costante e varia in modo lineare nell'intervallo $\frac{L}{2}\le x<L$.



$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{q_0 L}{8} & in\ x = 0 \\ \dfrac{q_0 L}{8} & in\ x = \dfrac{L}{2} \\ 0 & in\ x = \dfrac{5L}{8} \\ -\dfrac{3q_0 L}{8} & in\ x = L \end{cases}$$

Si osserva che quando $0 \leq x < \frac{L}{2}$ allora $M(x) = \frac{q_0 L}{8} x$ **lineare**

mentre nell'intervallo $\frac{L}{2} \leq x < L$:

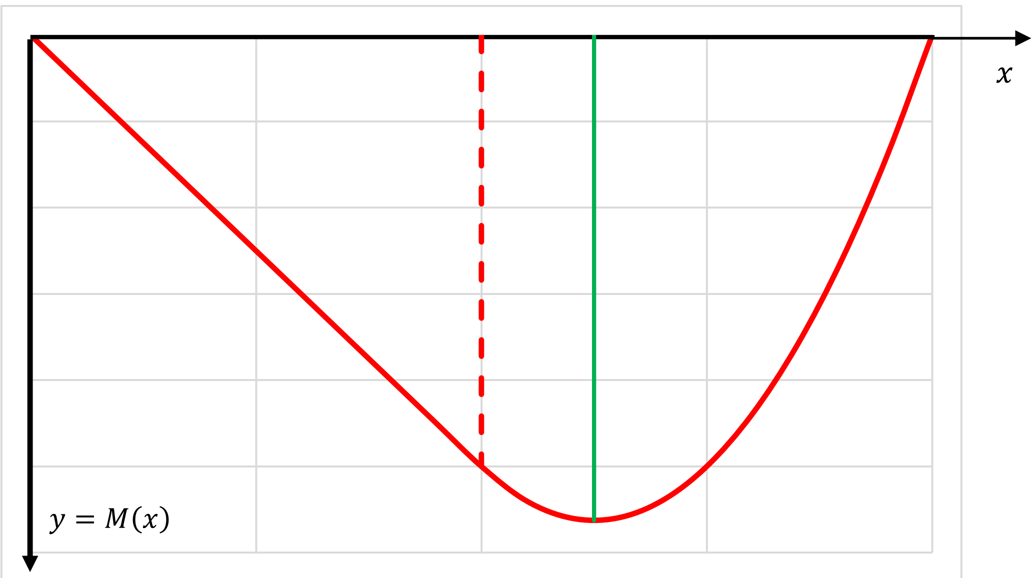
$$M(x) = \frac{q_0 L}{8} x - q_0 \left(x - \frac{L}{2}\right) \left[x - \left(\frac{L}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]$$

Semplificando si ottiene:

$$M(x) = \frac{q_0}{8} (-4x^2 + 5Lx - L^2)$$

Quindi il momento ha andamento **parabolico**, la sua **concavità è negativa**, in $x = \frac{5L}{8}$ c'è un punto di **stazionarietà** dove la funzione raggiunge il suo valore massimo **positivo** che vale:

$$M\left(x = \frac{5L}{8}\right) = \frac{9 q_0 L^2}{128}$$



Calcolo delle azioni interne con il metodo differenziale

Le equazioni differenziali da integrare sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dx} = -q_{\parallel}(x) \\ \dfrac{dT}{dx} = -q_{\perp}(x) \\ \dfrac{dM}{dx} = T(x) \end{cases}$$

Azione normale è ovunque assente

Azione di taglio

Le zone d'integrazione sono due:

a) $0 \leq x < \frac{L}{2}$ dove $q_{\perp}(x) = 0$ da cui: $\frac{dT}{dx} = 0$

da cui $T(x) = cost = T(0)$

Il taglio in $x = 0$ è uguale a $V_A = \frac{q_0 L}{8}$ quindi si ottiene:

$$T(x) = V_A = \frac{q_0 L}{8}$$

stesso risultato ottenuto con il metodo diretto.

b) $\frac{L}{2} \leq x < L$ dove $q_{\perp}(x) = q_0$ da cui: $\frac{dT}{dx} = -q_0$ cioè: $dT = -q_0 dx$

Integrando: $\int_{L/2}^{x} dT = -q_0 \int_{L/2}^{x} dx$

da cui $T(x) - T\left(\frac{L}{2}\right) = -q_0 \int_{L/2}^{x} dx = -q_0 \left(x - \frac{L}{2}\right).$

In $x = \frac{L}{2}$ il taglio vale $T\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L}{8}$ da cui:

$$T(x) = -q_0\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{q_0 L}{8} = -q_0 x + \frac{q_0 L}{2} + \frac{q_0 L}{8} = q_0\left(-x + \frac{5L}{8}\right)$$

stesso risultato ottenuto con il metodo diretto.

Momento flettente

Le zone d'integrazione sono due:

a) $0 \leq x < \frac{L}{2}$ dove $\frac{dM}{dx} = T(x) = \frac{q_0 L}{8}$ cioè: $dM = \frac{q_0 L}{8} dx$

Integrando: $M(x) - M(0) = \frac{q_0 L}{8} \int_0^x dx = \frac{q_0 L}{8} x.$

Poiché $M(0) = 0$ risulta: $M(x) = \frac{q_0 L}{8} x$

stesso risultato ottenuto con il metodo diretto.

b) $\frac{L}{2} \leq x < L$ dove $\frac{dM}{dx} = T(x) = q_0 \left(-x + \frac{5L}{8}\right)$ da cui:

$$dM = q_0 \left(-x + \frac{5L}{8}\right) dx$$

Integrando:

$$M(x) - M\left(\frac{L}{2}\right) = q_0 \int_{L/2}^{x} \left(-x + \frac{5L}{8}\right) dx = q_0 \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{5L}{8} x\right]_{L/2}^{x}$$

Nel punto $x = \frac{L}{2}$, il momento vale: $M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L^2}{16}$; quindi:

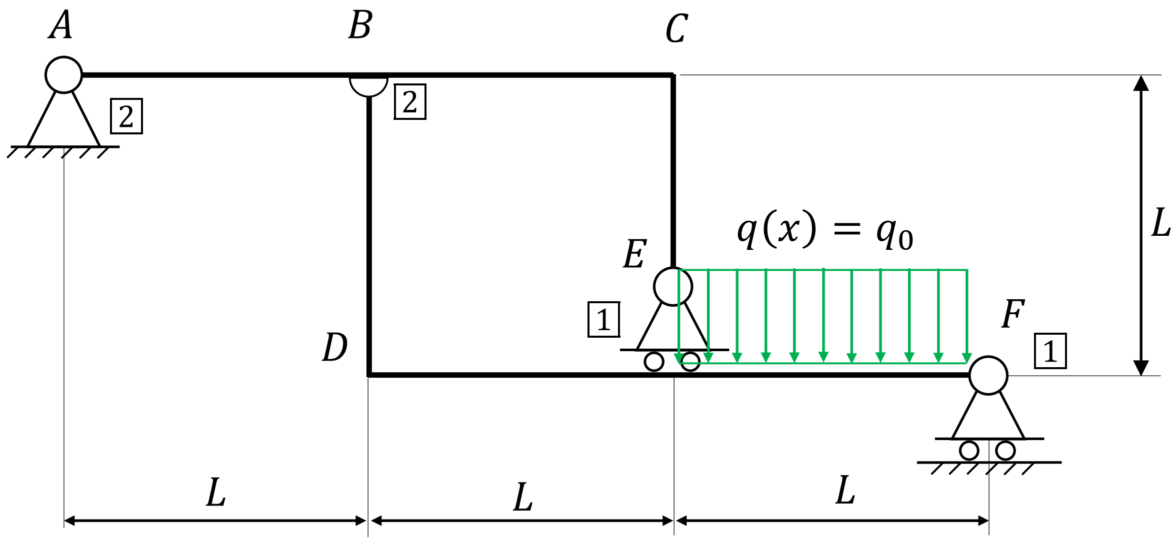
$$M(x) - \frac{q_0 L^2}{16} = q_0 \left[\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{5L}{8} x\right) - \left(-\frac{L^2}{8} + \frac{5L^2}{16}\right)\right]$$

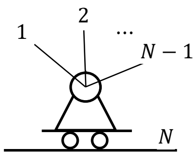
Sviluppando e semplificando si ottiene:

$$M(x) = \frac{q_0}{8}[-4x^2 + 5Lx - L^2]$$

stesso risultato ottenuto con il metodo diretto.

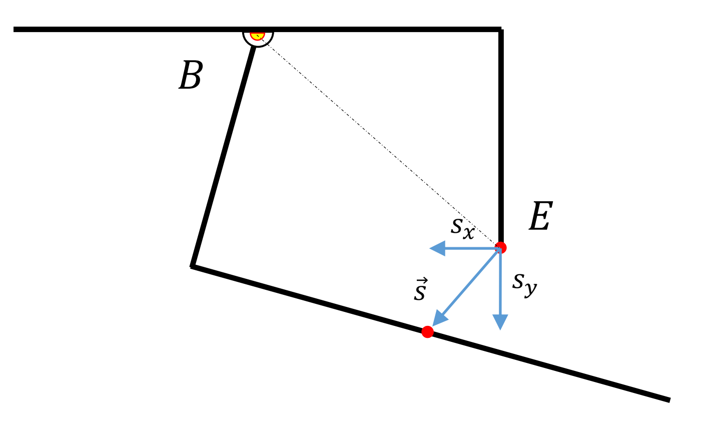
ESERCIZIO N.2



Vincolo	Schema	GdL	GdL_R	GdV
Carrello su trave libera		$3N$	3: GdL della trave N-esima di appoggio; $N-1$: rotazioni delle $N-1$ travi collegate alla cerniera; 1: spostamento del carrello sulla trave di appoggio.	$2N-3$

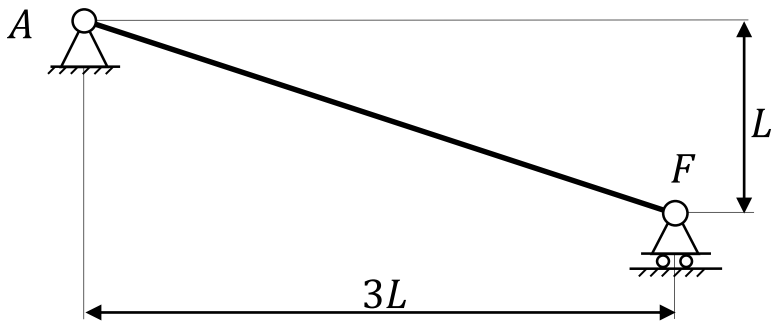
Analisi cinematica

Eliminati i vincoli a terra in A ed F, ai fini dell'analisi cinematica la struttura può essere considerata un corpo rigido. Infatti si immagini di svincolarla nel nodo E e si proceda all'esame dei movimenti relativi consentiti alle due travi dalla cerniera in B.

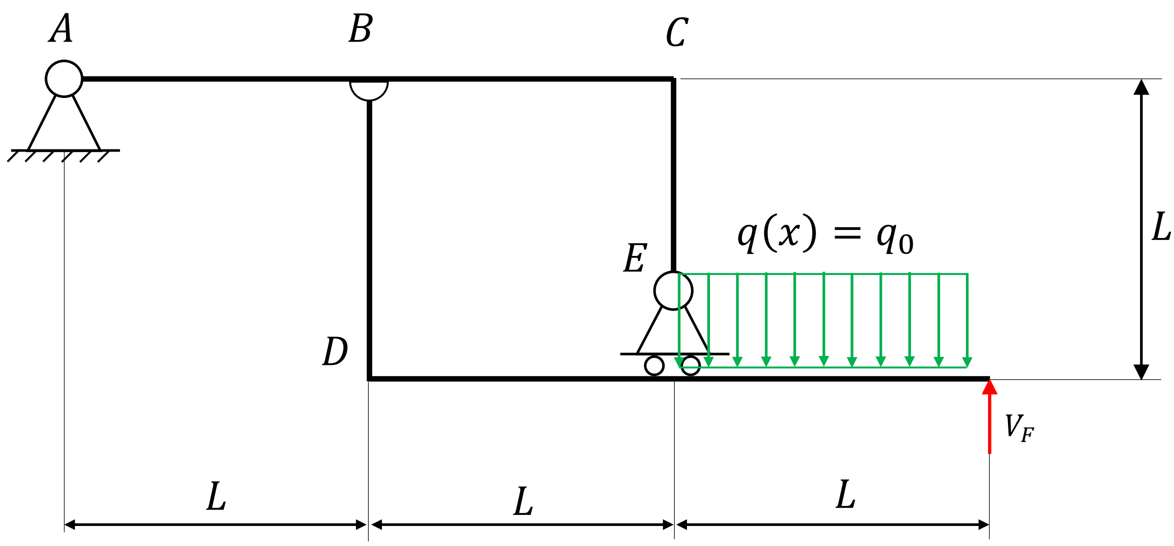


Come si può osservare dallo schema a lato, il ripristino del carrello in E impedisce la rotazione relativa intorno al perno in B perché lo spostamento s_y è vincolato.

Ne consegue che l'intera struttura può essere sostituita da un unico corpo rigido da vincolare a terra. La struttura risulta quindi isostatica e non labile.



Calcolo delle reazioni vincolari



Eliminazione parziale e progressiva dei vincoli

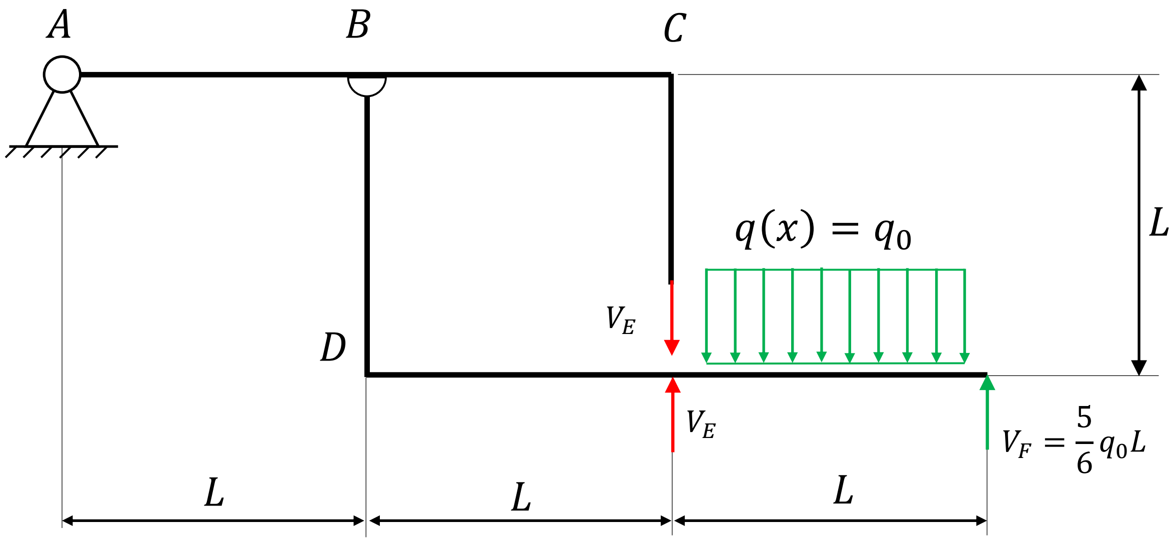
1) Si elimina il carrello in F e si imposta l'equazione di equilibrio alla rotazione di tutta la struttura intorno alla cerniera a terra in A.

   La risultante del carico distribuito è verticale, vale $R = q_0 L$ e la sua distanza da A vale: $d = 2L + \frac{L}{2} = \frac{5L}{2}$.

$$\sum_A M_z(tutta\ la\ struttura) = V_F 3L - q_0 L \frac{5L}{2} = 0$$

da cui: $$V_F = \frac{5}{6} q_0 L$$

2) Si apre la struttura in E eliminando il secondo carrello e si imposta l'equazione di equilibrio alla rotazione della trave BDEF intorno al perno in B.

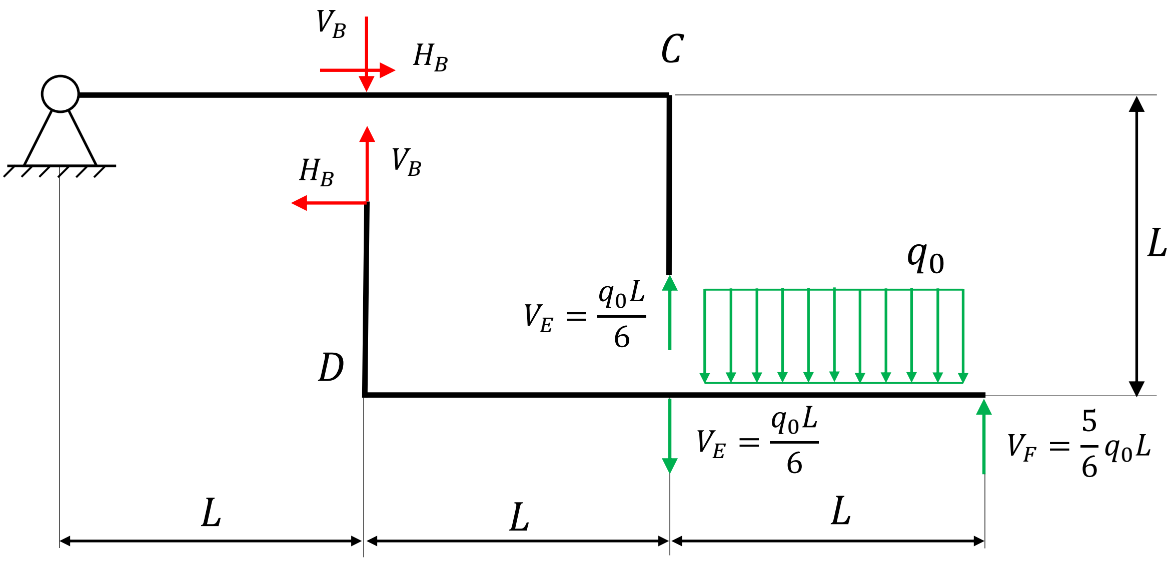


$$\sum_B M_z(asta\ BDEF) = V_E L + V_F 2L - q_0 L \frac{3L}{2} += 0$$

da cui: $V_E = \frac{3}{2} q_0 L - \frac{5}{3} q_0 L = -\frac{1}{6} q_0 L$

Cambio verso e segno alle reazioni vincolari in E.

3) Si apre la struttura in B eliminando la cerniera e si impostano le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale della trave BDEF.



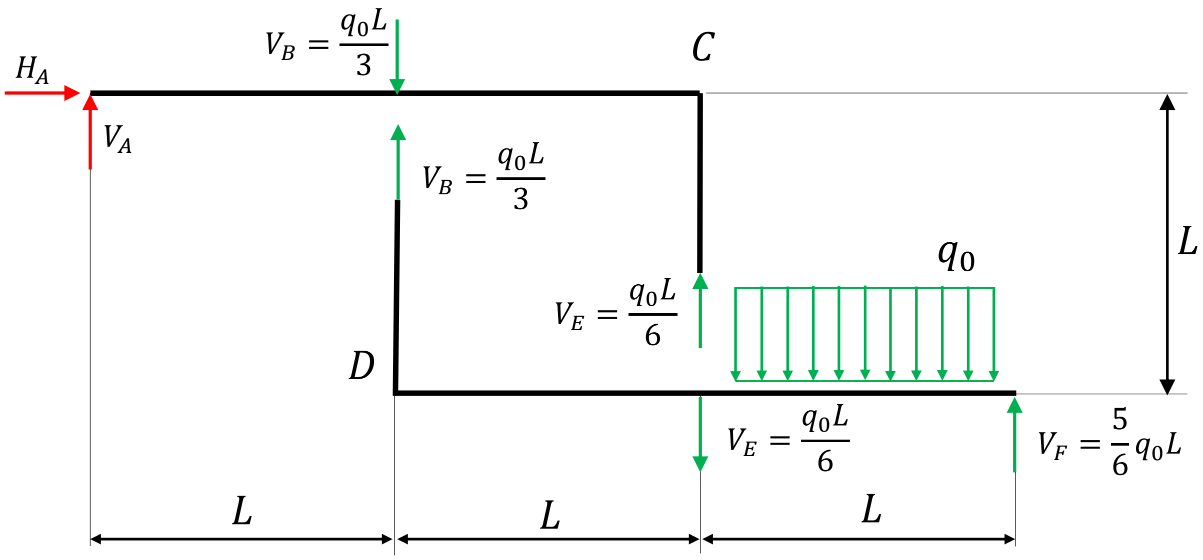
$$\sum F_x(Asta\ BDEF) = H_B = 0$$

$$\sum F_y(Asta\ BDEF) = V_B - V_E + V_F - q_0 L = 0$$

da cui, sostituendo i valori ormai noti:

$$V_B = V_E - V_F + q_0 L = \frac{q_0 L}{6} - \frac{5}{6} q_0 L + q_0 L = \frac{q_0 L}{3}$$

4) Per finire si elimina la cerniera a terra in A e se ne calcolano le reazioni scrivendo le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale dell'asta ABCE.



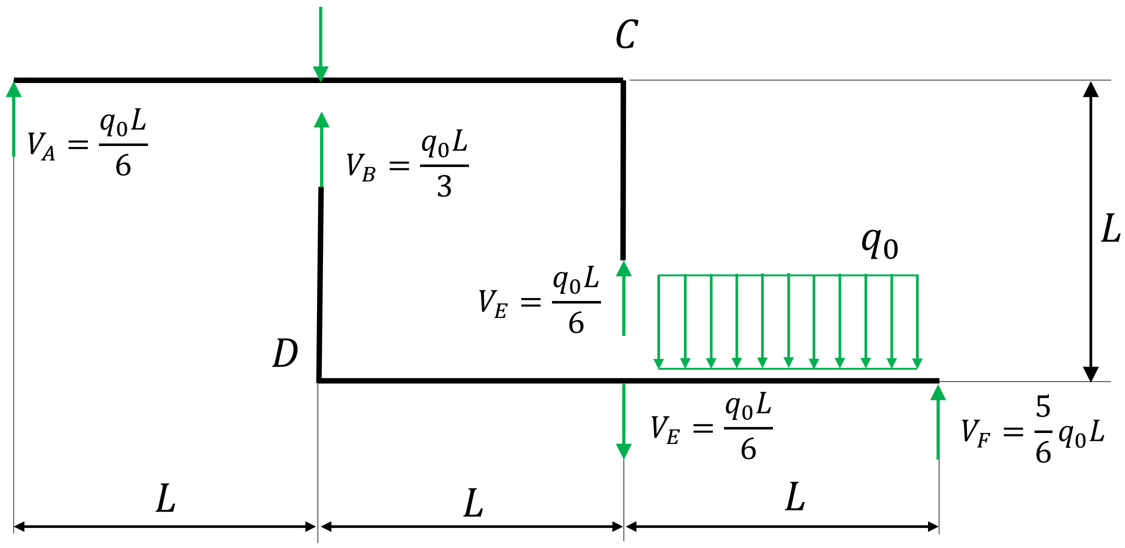
$$\sum F_x(Asta\ ABCE) = H_A = 0$$

$$\sum F_y(Asta\ ABCE) = V_A - V_B + V_E = 0$$

da cui, sostituendo i valori ormai noti:

$$V_A = V_B - V_E = \frac{q_0 L}{3} - \frac{q_0 L}{6} = \frac{q_0 L}{6}$$

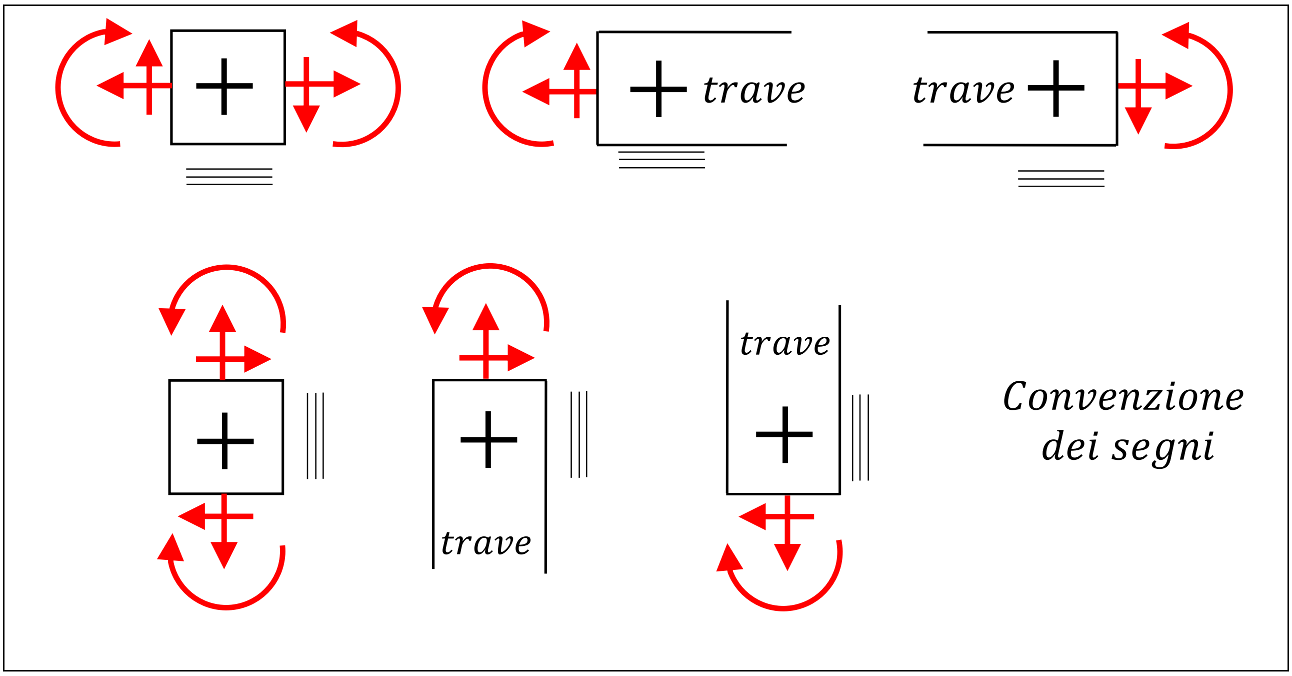
In sintesi:



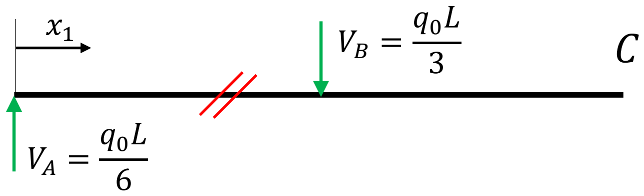
Calcolo delle azioni interne con il metodo diretto

Scelta la convenzione dei segni, si determinano 4 sistemi di riferimento come indicato nello schema seguente:

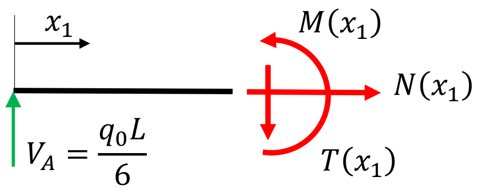
1) Tratto ABC: origine in A e direzione positiva verso destra (x_1);
2) Tratto FED: origine in F e direzione positiva verso sinistra (x_2);
3) Tratto BD: origine in B e direzione positiva verso il basso (x_3);
4) Tratto EC: origine in E e direzione positiva verso l'alto (x_4);



Tratto ABC: origine in A e direzione positiva verso destra (x_1)

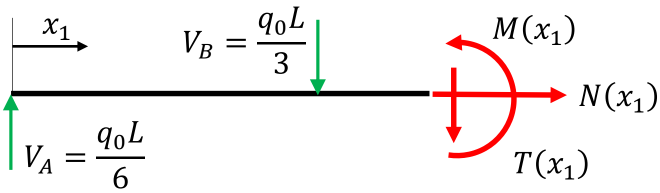


Esaminiamo il tratto: $0 \leq x_1 < L$



$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_1) = 0 \\ \sum F_y = V_A - T(x_1) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_1) - V_A x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad \begin{cases} N(x_1) = 0 \\ T(x_1) = V_A \\ M(x_1) = V_A x_1 \end{cases}$$

Esaminiamo il tratto: $L \leq x_1 < 2L$

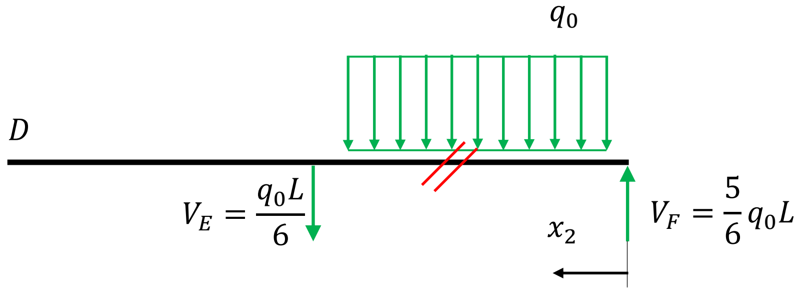


$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_1) = 0 \\ \sum F_y = V_A - V_B - T(x_1) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_1) + V_B(x_1 - L) - V_A x_1 = 0 \end{cases}$$

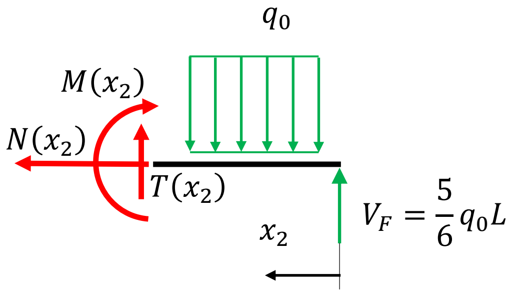
da cui:

$$\begin{cases} N(x_1) = 0 \\ T(x_1) = V_A - V_B \\ M(x_1) = (V_A - V_B)x_1 + V_B L \end{cases}$$

Tratto FED: origine in F e direzione positiva verso sinistra (x_2);



Esaminiamo il tratto: $0 \leq x_2 < L$

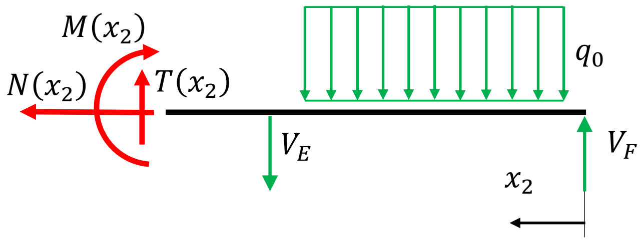


$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_2) = 0 \\ \sum F_y = V_F + T(x_2) - q_0 x_2 = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_2) + q_0 x_2 \frac{x_2}{2} - V_F x_2 = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} N(x_2) = 0 \\ T(x_2) = q_0 x_2 - V_F \\ M(x_2) = V_F x_2 - \frac{q_0 x_2^2}{2} \end{cases}$$

Esaminiamo il tratto: $L \leq x_2 < 2L$



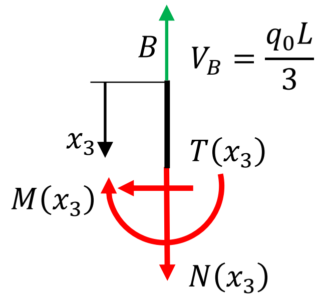
$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_2) = 0 \\ \sum F_y = T(x_2) - V_E + V_F - q_0 L = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_2) + V_E(x_2 - L) - V_F x_2 + q_0 L \left(x_2 - \frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} N(x_2) = 0 \\ T(x_2) = V_E - V_F + q_0 L \\ M(x_2) = (V_F - V_E - q_0 L) x_2 + V_E L + \frac{q_0 L^2}{2} \end{cases}$$

Tratto BD: origine in B e direzione positiva verso il basso (x_3);

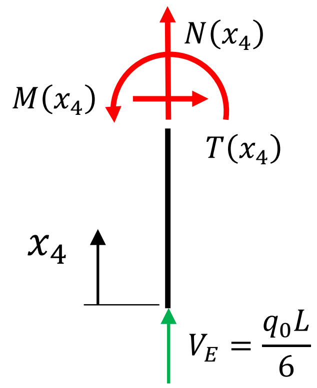
Esaminiamo il tratto: $0 \leq x_3 < L$



$$\begin{cases} \sum F_x = V_B - N(x_3) = 0 \\ \sum F_y = T(x_3) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_3) = 0 \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad \begin{cases} N(x_3) = V_B \\ T(x_3) = 0 \\ M(x_3) = 0 \end{cases}$$

Tratto EC: origine in E e direzione positiva verso l'alto (x_4);

Esaminiamo il tratto: $0 \leq x_3 < L$



$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_4) + V_E = 0 \\ \sum F_y = T(x_4) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_4) = 0 \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad \begin{cases} N(x_4) = -V_E \\ T(x_4) = 0 \\ M(x_4) = 0 \end{cases}$$

Disegno dei diagrammi delle azioni interne

Le reazioni vincolari valgono:

$$V_A = \frac{q_0 L}{6} \;\; ; \;\; V_B = \frac{q_0 L}{3} \;\; ; \;\; V_E = \frac{q_0 L}{6} \;\; ; \;\; V_F = \frac{5 q_0 L}{6}$$

Riassumendo le azioni interne valgono:

Tra il nodo A ed il nodo B: $\begin{cases} N(x_1) = 0 \\ T(x_1) = V_A = \frac{q_0 L}{6} \\ M(x_1) = V_A x_1 = \frac{q_0 L}{6} x_1 \end{cases}$

Tra il nodo B e il nodo C: $\begin{cases} N(x_1) = 0 \\ T(x_1) = V_A - V_B = -\frac{q_0 L}{6} \\ M(x_1) = (V_A - V_B) x_1 + V_B L = -\frac{q_0 L}{6} x_1 + \frac{q_0 L^2}{3} \end{cases}$

Tra il nodo F e il nodo E: $\begin{cases} N(x_2) = 0 \\ T(x_2) = q_0 x_2 - V_F = q_0 x_2 - \frac{5 q_0 L}{6} \\ M(x_2) = V_F x_2 - \frac{q_0 x_2^2}{2} = \frac{5 q_0 L}{6} x_2 - \frac{q_0 x_2^2}{2} \end{cases}$

Tra il nodo E e il nodo D: $\begin{cases} N(x_2) = 0 \\ T(x_2) = V_E - V_F + q_0 L = \frac{q_0 L}{3} \\ M(x_2) = -\frac{q_0 L}{3} x_2 + \frac{2 q_0 L^2}{3} \end{cases}$

Tra il nodo B e il nodo D: $\begin{cases} N(x_3) = \frac{q_0 L}{3} \\ T(x_3) = 0 \\ M(x_3) = 0 \end{cases}$

Tra il nodo E e il nodo C: $\begin{cases} N(x_4) = -\frac{q_0 L}{6} \\ T(x_4) = 0 \\ M(x_4) = 0 \end{cases}$

Azione normale:

Tra il nodo A ed il nodo B: $N(x_1) = 0$

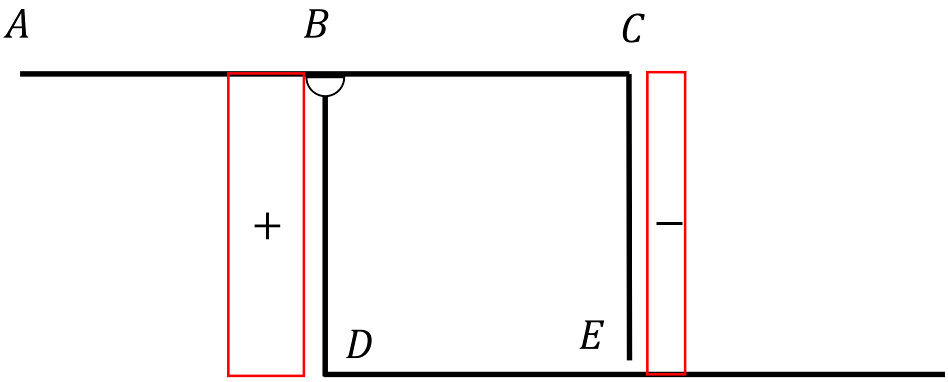
Tra il nodo B e il nodo C: $N(x_1) = 0$

Tra il nodo F e il nodo E: $N(x_2) = 0$

Tra il nodo E e il nodo D: $N(x_2) = 0$

Tra il nodo B e il nodo D: $N(x_3) = \frac{q_0 L}{3}$

Tra il nodo E e il nodo C: $N(x_4) = -\frac{q_0 L}{6}$



Azione di taglio:

Tra il nodo A ed il nodo B: $T(x_1) = \frac{q_0 L}{6}$

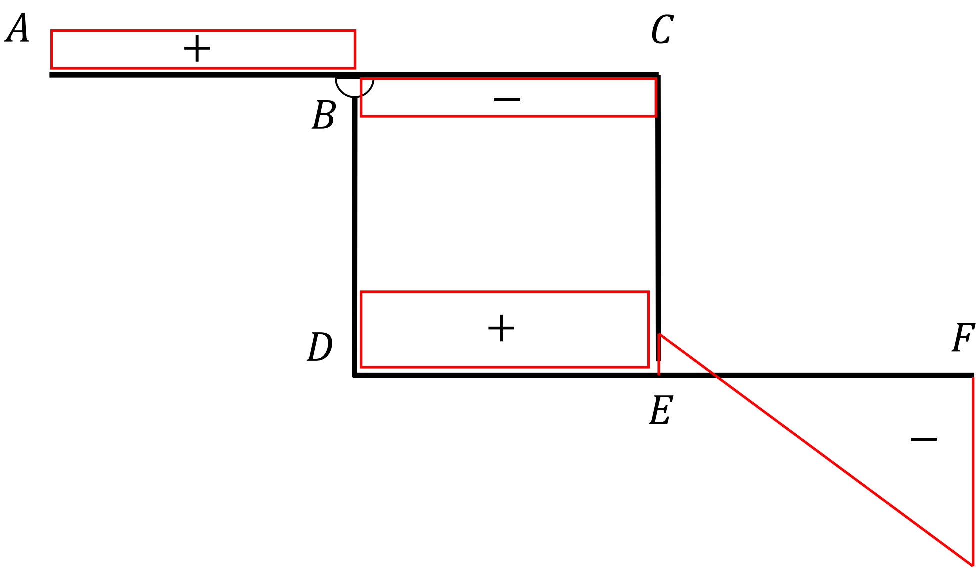
Tra il nodo B e il nodo C: $T(x_1) = -\frac{q_0 L}{6}$

Tra il nodo F e il nodo E: $T(x_2) = q_0 x_2 - \frac{5 q_0 L}{6} = \begin{cases} -\frac{5 q_0 L}{6} & in\ x_2 = 0 \\ 0 & in\ x_2 = \frac{5L}{6} \\ \frac{q_0 L}{6} & in\ x_2 = L \end{cases}$

Tra il nodo E e il nodo D: $T(x_2) = \frac{q_0 L}{3}$

Tra il nodo B e il nodo D: $T(x_3) = 0$

Tra il nodo E e il nodo C: $T(x_4) = 0$



Azione flettente:

Tra il nodo A ed il nodo B: $M(x_1) = \frac{q_0 L}{6} x_1$

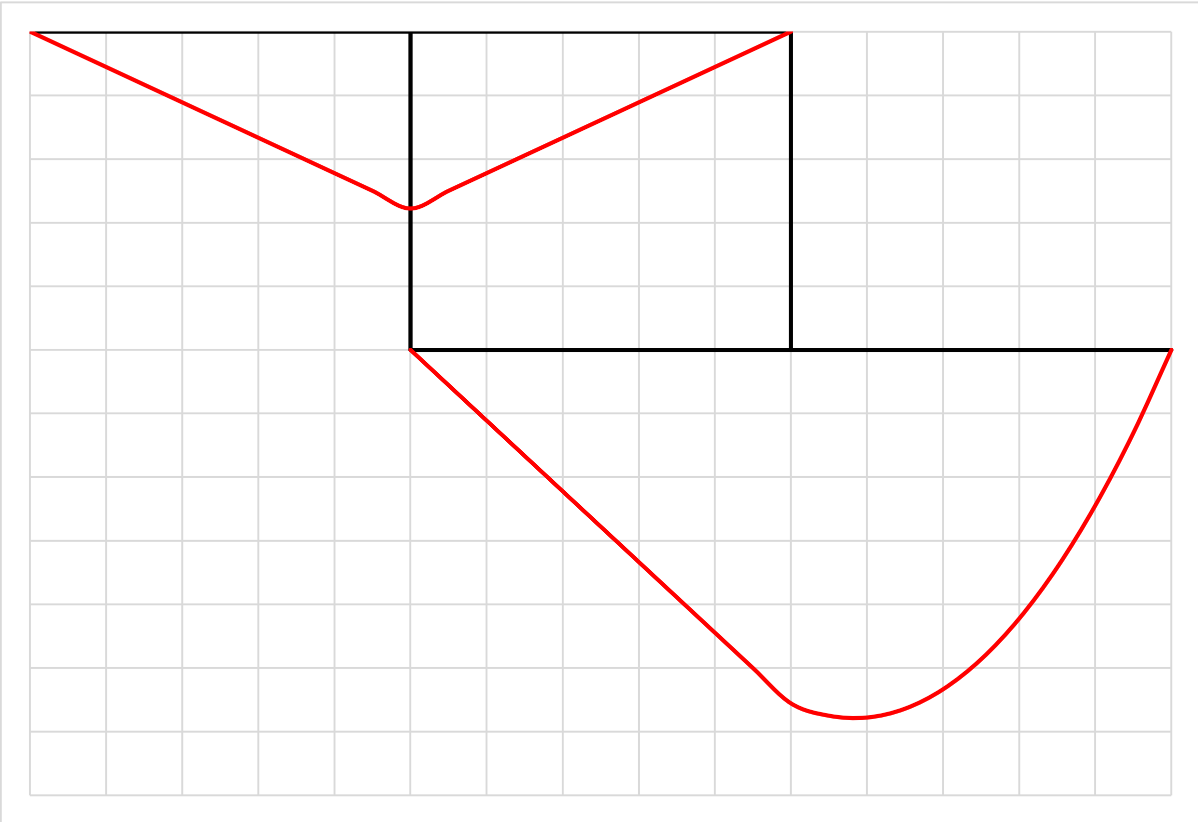
Tra il nodo B e il nodo C: $M(x_1) = -\frac{q_0 L}{6} x_1 + \frac{q_0 L^2}{3}$

Tra il nodo F e il nodo E: $M(x_2) = \frac{5 q_0 L}{6} x_2 - \frac{q_0 x_2^2}{2}$

Tra il nodo E e il nodo D: $M(x_2) = -\frac{q_0 L}{3} x_2 + \frac{2 q_0 L^2}{3}$

Tra il nodo B e il nodo D: $M(x_3) = 0$

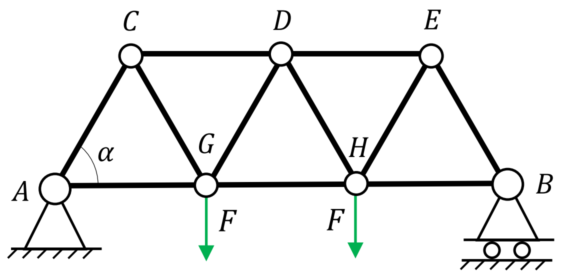
Tra il nodo E e il nodo C: $M(x_4) = 0$

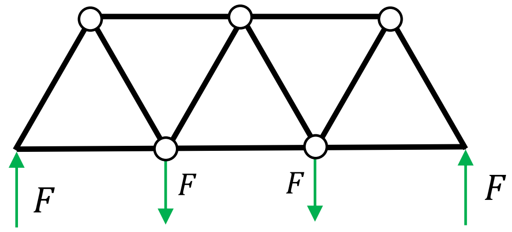


Nella trave FED il momento flettente raggiunge il massimo dove il taglio si annulla, cioè in $x_2 = \frac{5L}{6}$;

$$M\left(x_2 = \frac{5L}{6}\right) = \frac{25 q_0 L^2}{72}$$

Esercizio N.3: Struttura reticolare

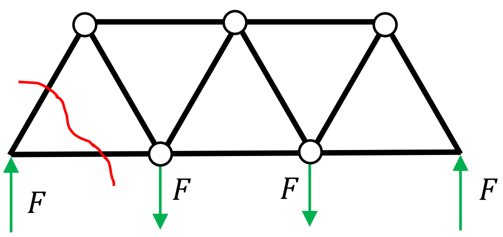


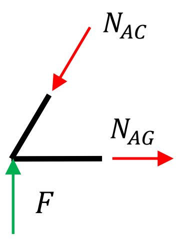


Per il calcolo delle azioni interne si possono scegliere due metodi:

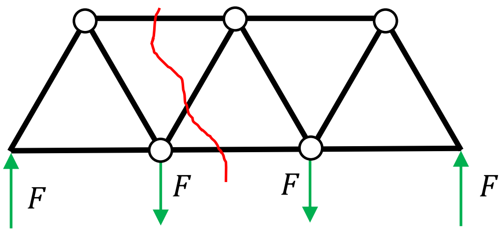
a) il primo, già analizzato, consiste nell'isolare i nodi e nello scrivere per ognuno di essi le due equazioni di equilibrio alla traslazione;

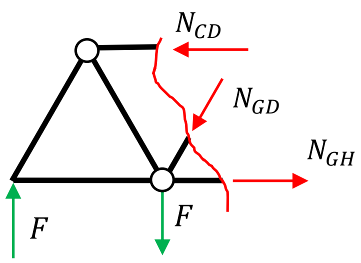
b) il secondo, che verrà qui descritto, consiste nel tagliare l'intera struttura e nel calcolare le azioni interne che garantiscono l'equilibrio delle due parti separate dal taglio.





$$\begin{cases} \sum F_x = N_{AG} - N_{AC}cos(\alpha) = 0 \\ \sum F_y = F - N_{AC}sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$





$$\begin{cases} \sum F_x = N_{GH} - N_{CD} - N_{GD}cos(\alpha) = 0 \\ \sum F_y = F - F - N_{GD}sin(\alpha) = 0 \\ \sum_G M_z = N_{CD}Lsin(\alpha) - FL = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} N_{GH} = N_{CD} \\ N_{GD} = 0 \\ N_{CD} = \dfrac{F}{sin(\alpha)} \end{cases}$$

etc. etc. con il resto delle aste.