La lezione è stata registrata ed è reperibile all'indirizzo:
https://unica.adobeconnect.com/pcazldilftd8/

CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE IN PRESENZA DI CARICHI DISTRIBUITI

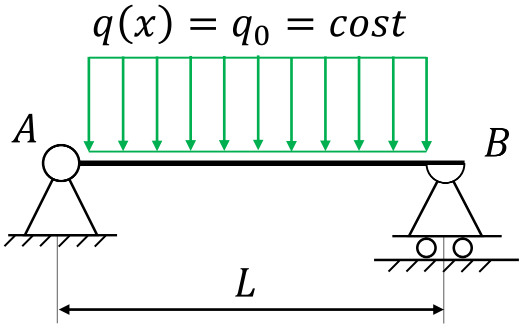
Se sulla struttura agiscono carichi distribuiti, esistono due metodi per calcolare le azioni interne.

Il primo, detto "***metodo diretto***" è molto simile al metodo tradizionale già esaminato e verrà illustrato attraverso un esempio;

il secondo, detto "***metodo differenziale***" consiste nell'estrarre dalla trave un generico elemento di lunghezza infinitesima, nel trovare le relazioni tra carichi e azioni interne ed nell'integrare sull'intera trave le equazioni differenziali risultanti attraverso una procedura che verrà tra breve illustrata.

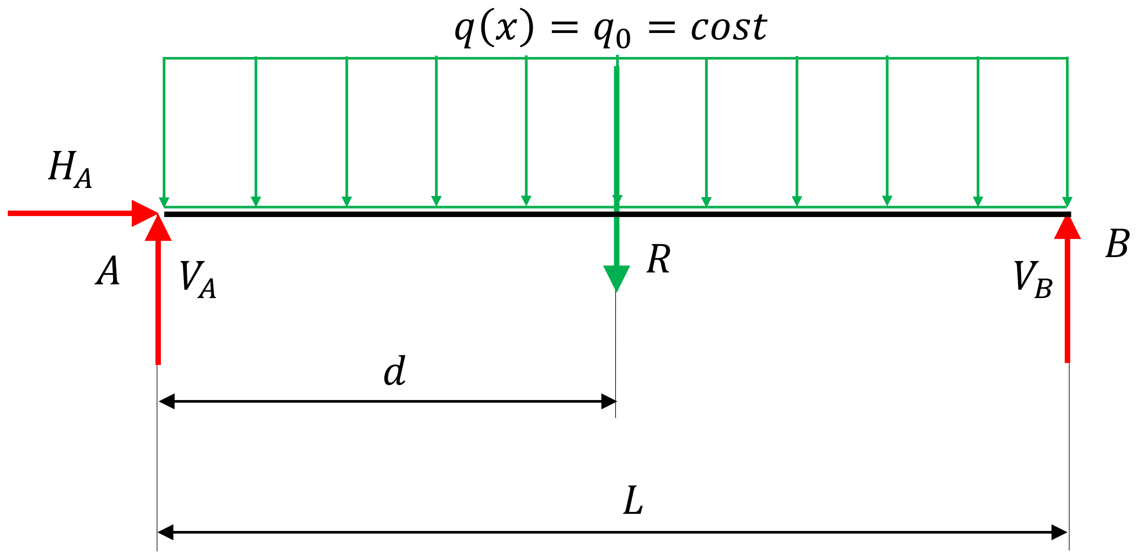
METODO DIRETTO

Si calcolino le azioni interne della seguente trave appoggiata agli estremi e sottoposta ad un carico distribuito uniforme.



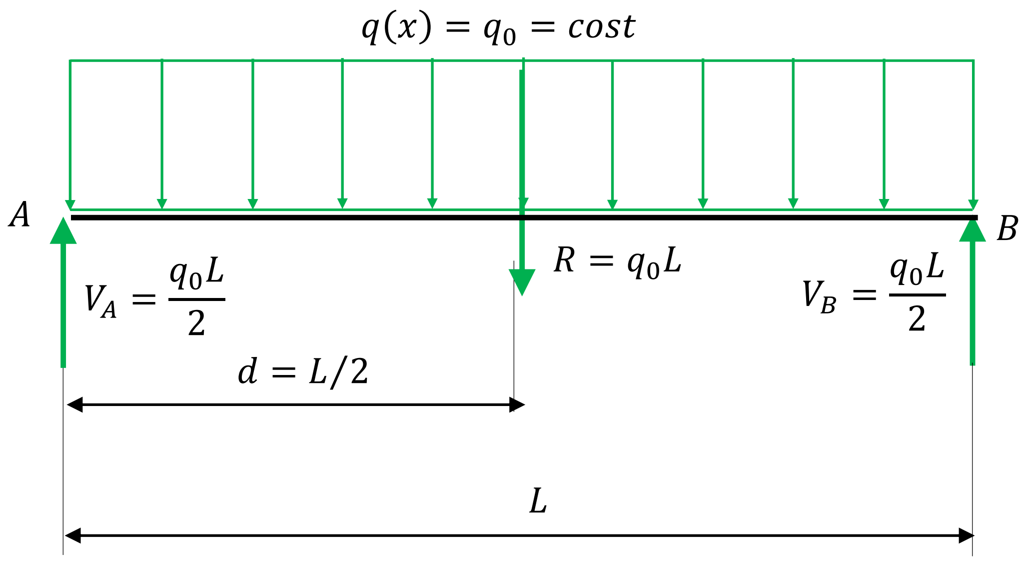
Dopo avere calcolato le reazioni vincolari, si ipotizza di eseguire un taglio in un punto generico tra la cerniera in A ed il carrello in B, si sostituiscono le azioni interne incognite e si procede alla loro stima scrivendo, per un tratto di trave, le equazioni cardinali della statica.

Calcolo delle reazioni vincolari



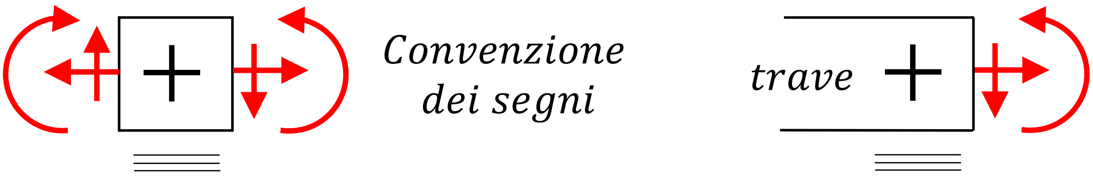
Il calcolo delle reazioni vincolari è stato già descritto nei capitoli precedenti e non verrà qui ripetuto: si riportano solo i risultati finali.

$$R = q_0 L \quad ; \quad d = \frac{L}{2} \quad ; \quad H_A = 0 \qquad V_A = V_B = \frac{q_0 L}{2}$$

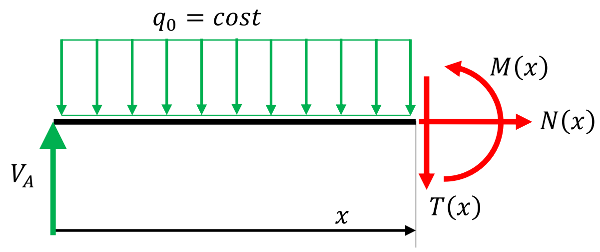


Calcolo delle azioni interne con il metodo diretto

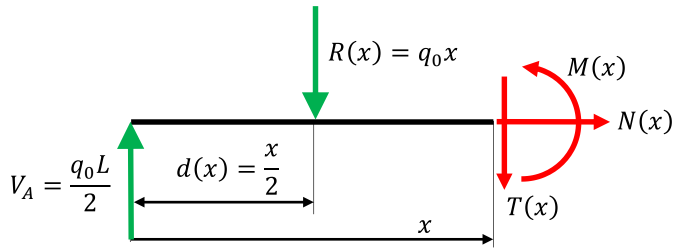
Si stabilisce un sistema di riferimento e una convenzione dei segni; si procede ipotizzando un taglio e sostituendo le azioni interne incognite.



Tratto $0 \leq x \leq L$



Si sostituisce il carico distribuito con la propria risultante $R(x)$:



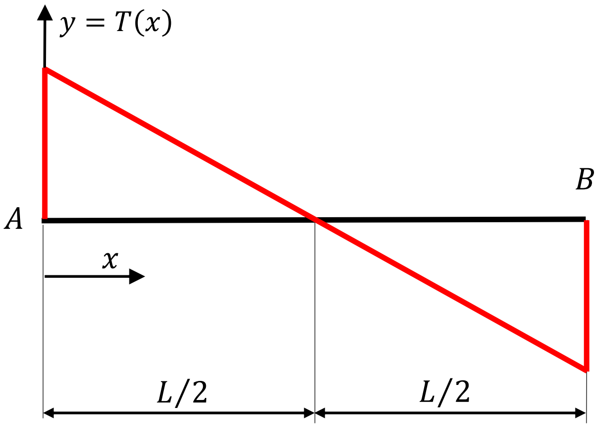
Si scrivono le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \sum F_x = N(x) = 0 \\ \sum F_y = V_A - R(x) - T(x) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x) + R(x)[x - d(x)] - V_A x = 0 \end{cases}$$

Quando il carico distribuito è uniforme, cioè quando: $q(x) = q_0 = cost$, la risultante vale $R(x) = q_0 x$ ed è disposta in $d(x) = \frac{x}{2}$; sostituendo si ottiene:

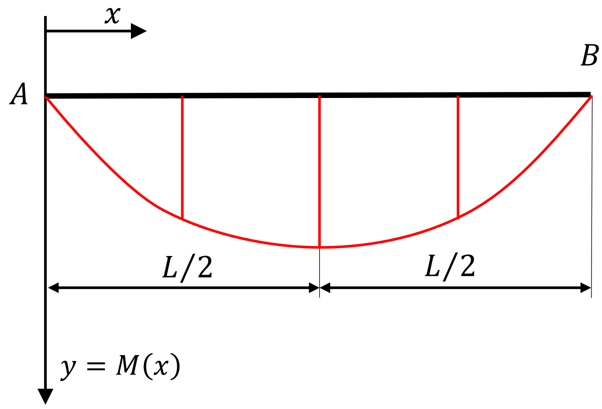
$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = V_A - R(x) = \dfrac{q_0 L}{2} - q_0 x = q_0\left(\dfrac{L}{2} - x\right) \\ M(x) = V_A x - R(x)[x - d(x)] = \dfrac{q_0 L}{2}x - q_0 x\left(x - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{q_0}{2}(-x^2 + Lx) \end{cases}$$

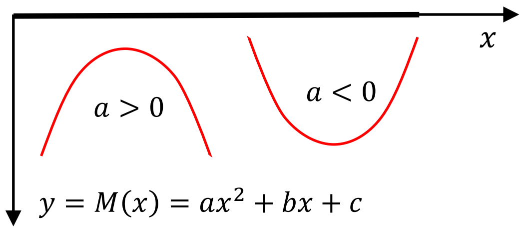
Si osserva che l'andamento del taglio è rettilineo e che si annulla in $x = \frac{L}{2}$.



$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{q_0 L}{2} & in\ x = 0 \\ 0 & in\ x = \dfrac{L}{2} \\ -\dfrac{q_0 L}{2} & in\ x = L \end{cases}$$

Si osserva che l'andamento del momento flettente è **parabolico**, che la sua **concavità è negativa**, che in mezzeria c'è un punto di **stazionarietà** dove la funzione raggiunge il suo valore massimo **positivo**.

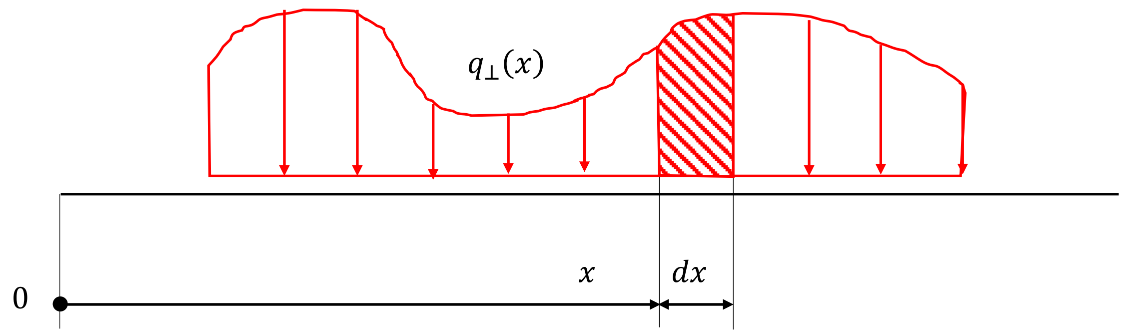


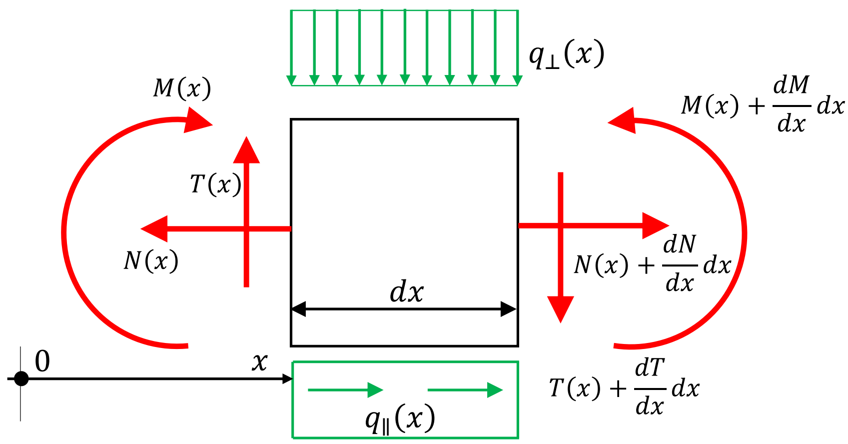


$$M(x) = \begin{cases} 0 & in\ x = 0 \\ \dfrac{q_0 L^2}{8} & in\ x = \dfrac{L}{2} \\ 0 & in\ x = L \end{cases}$$

Metodo differenziale

Si estrae dalla trave un generico elemento di lunghezza infinitesima caricato da una forza distribuita e si trovano le relazioni tra carichi e azioni interne. Dopo di che le equazioni differenziali vengono integrate sull'intera trave.





In generale sul tratto di trave lungo dx agiscono sia carichi distribuiti $q_{\perp}(x)$ perpendicolari all'asse della trave che $q_{\parallel}(x)$ ad esso paralleli.

Le funzioni $N(x)$, $T(x)$ e $M(x)$ in generale variano da sezione a sezione, quindi a destra e a sinistra del concio il loro valore cambia.

Per esempio il momento flettente a sinistra del taglio vale $M(x)$ mentre a destra vale $M(x) + \frac{dM}{dx}dx$.

Si scrivono le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \sum F_x = \left[N(x) + \frac{dN}{dx}dx\right] + q_{\parallel}(x)dx - N(x) = 0 \\ \sum F_y = T(x) - q_{\perp}(x)dx - \left[T(x) + \frac{dT}{dx}dx\right] = 0 \\ \sum_{dx} M_z = \left[M(x) + \frac{dM}{dx}dx\right] - M(x) + q_{\perp}(x)dx\frac{dx}{2} - T(x)dx = 0 \end{cases}$$

Sviluppando e semplificando si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} = -q_{\parallel}(x) \\ \frac{dT}{dx} = -q_{\perp}(x) \\ \frac{dM}{dx} = T(x) - q_{\perp}(x)\frac{dx}{2} \end{cases}$$

Nella terza equazione è possibile trascurare l'ultimo termine perché, a differenza dei primi due, contiene un quantità infinitesima. In definitiva si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} = -q_{\parallel}(x) \\ \frac{dT}{dx} = -q_{\perp}(x) \\ \frac{dM}{dx} = T(x) \end{cases}$$

I segni dipendono dalle convenzioni adottate.

Se si esegue la derivata rispetto ad x della terza equazione si ottiene:

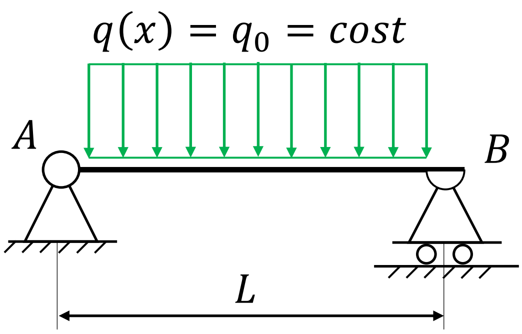
$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q_{\perp}(x)$$

Ottenute queste equazioni differenziali, è possibile integrarle lungo la trave per il calcolo delle azioni interne.

METODO DIFFERENZIALE

1° ESEMPIO

Si calcolino le azioni interne della seguente trave appoggiata agli estremi e sottoposta ad un carico distribuito uniforme.



Calcolate le reazioni vincolari, si integrano le equazioni differenziali viste precedentemente.

Azione normale

In questo esempio $q_{\parallel}(x) = 0$, di conseguenza si ottiene:

$$\frac{dN}{dx} = -q_{\parallel}(x) = 0 \qquad \text{da cui} \quad N(x) = cost$$

Poiché non agiscono carichi orizzontale, $H_A = 0$ e l'azione normale è ovunque nulla.

Azione di taglio

L'equazione da integrare è la seguente:

$$\frac{dT}{dx} = -q_{\perp}(x) = -q_0$$

da cui $$T(x) = -\int_0^x q_{\perp}(x)dx = -[q_0 x - T(0)] = T(0) - q_0 x$$

Il taglio alla coordinata $x = 0$ è uguale a $V_A = \frac{q_0 L}{2}$ quindi si ottiene:

$$T(x) = \frac{q_0 L}{2} - q_0 x = q_0 \left(\frac{L}{2} - x\right)$$

stesso risultato ottenuto con il metodo diretto.

Momento flettente

L'equazione da integrare è la seguente:

$$\frac{dM}{dx} = T(x) = q_0\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

da cui $\quad M(x) = \int_0^x q_0\left(\frac{L}{2} - x\right)dx = \frac{q_0 L}{2}x - \frac{q_0 x^2}{2} - M(0)$

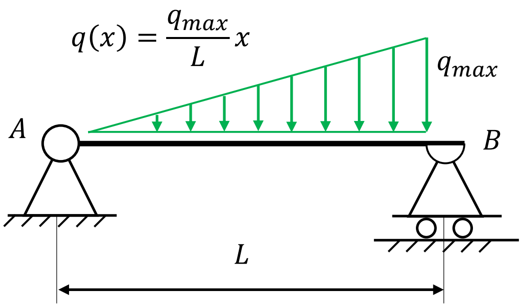
Nel punto A dove $x = 0$, il momento è nullo, di conseguenza l'equazione è la seguente:

$$M(x) = \frac{q_0}{2}(-x^2 + Lx)$$

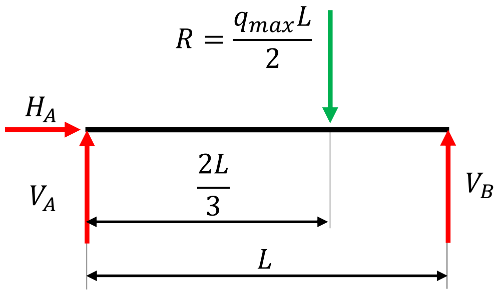
stesso risultato ottenuto con il metodo diretto.

2° ESEMPIO

Si calcolino le azioni interne della seguente trave appoggiata agli estremi e sottoposta ad un carico distribuito crescente linearmente.



Calcolo delle reazioni vincolari



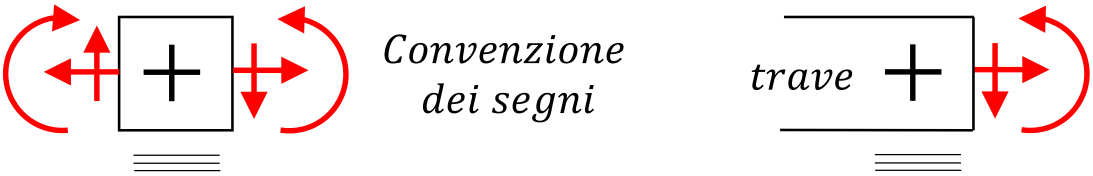
Equazioni cardinali della statica

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - R = 0 \\ \sum_x M_z = V_B L - R\frac{2L}{3} = 0 \end{cases}$$

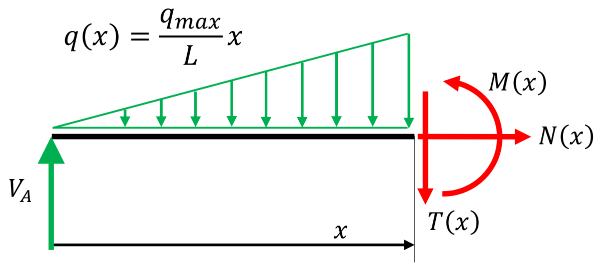
Da cui: $H_A = 0$, $V_B = \frac{2}{3}R = \frac{q_{max}L}{3}$, $V_A = \frac{R}{3} = \frac{q_{max}L}{6}$

Calcolo delle azioni interne con il metodo diretto

Si stabilisce un sistema di riferimento e una convenzione dei segni; si procede ipotizzando un taglio e sostituendo le azioni interne incognite.



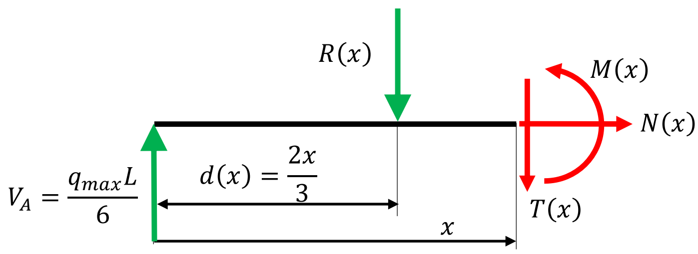
Tratto $0 \leq x < L$



Si sostituisce il carico distribuito con la propria risultante:

$$R(x) = \frac{x \frac{q_{max}}{L} x}{2} = \frac{q_{max}}{2L} x^2$$

disposta alla coordinata $d(x) = \frac{2}{3} x$.



Si scrivono le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \sum F_x = N(x) = 0 \\ \sum F_y = V_A - R(x) - T(x) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x) + R(x)[x - d(x)] - V_A x = 0 \end{cases}$$

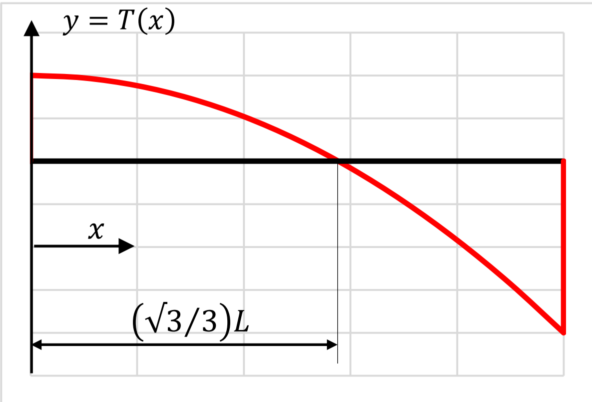
sostituendo si ottiene:

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = V_A - R(x) = \dfrac{q_{max}L}{6} - \dfrac{q_{max}}{2L}x^2 = \dfrac{q_{max}L}{6}\left[1 - 3\left(\dfrac{x}{L}\right)^2\right] \\ M(x) = V_A x - R(x)[x - d(x)] = \dfrac{q_{max}L}{6}x - \dfrac{q_{max}}{2L}x^2\left(x - \dfrac{2x}{3}\right) \end{cases}$$

L'andamento del taglio è **parabolico** e si annulla quando:

$$1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 = 0 \qquad \text{ovvero per} \qquad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}L \cong \pm 0.5574 \cdot L$$

Chiaramente il valore negativo non ha senso fisico perché la trave si trova nell'intervallo $0 \leq x \leq L$.



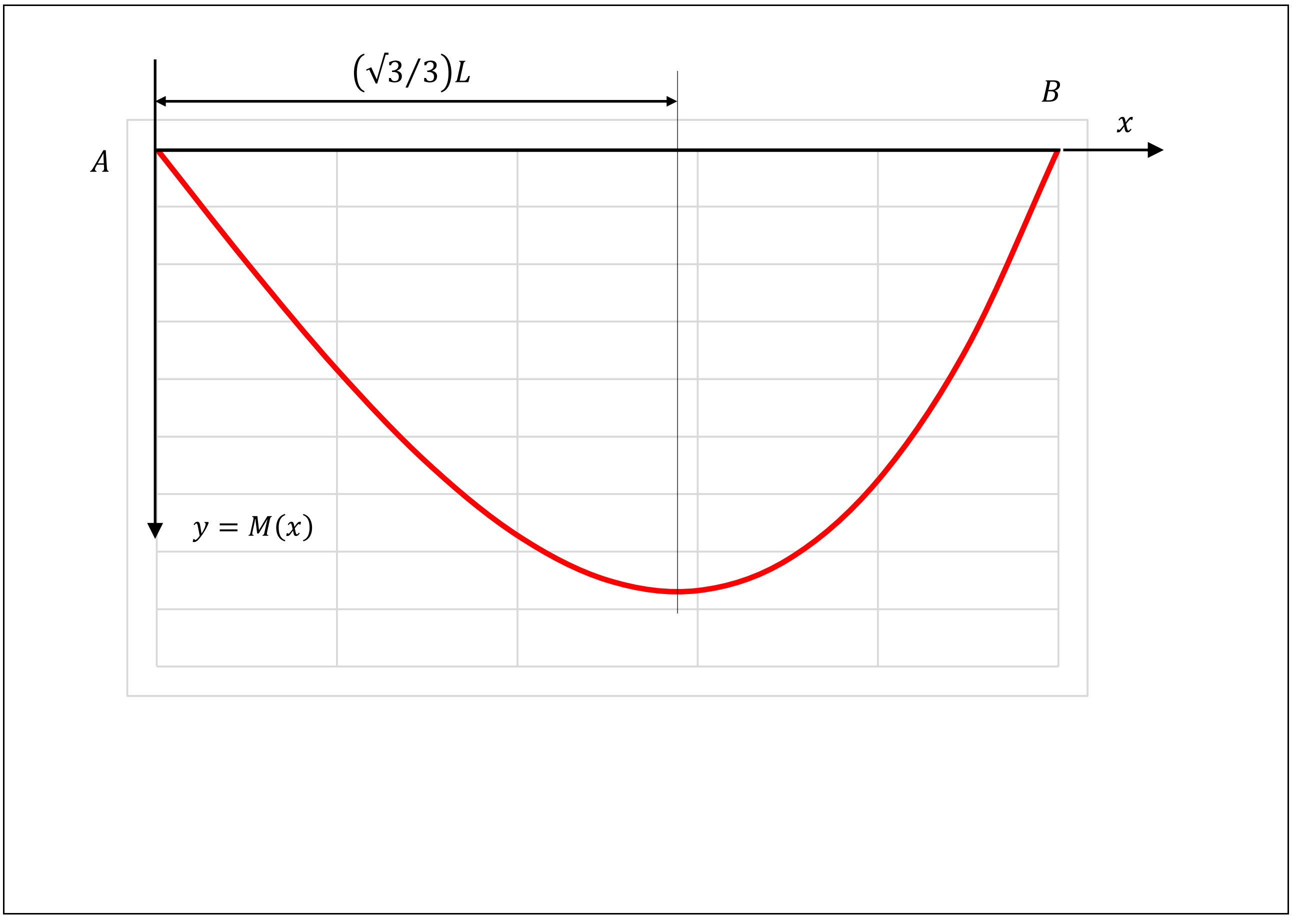
$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{q_{max}L}{6} & in\ x = 0 \\ 0 & in\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}L \\ -\dfrac{q_{max}L}{3} & in\ x = L \end{cases}$$

Dalla terza equazione di equilibrio si ottiene:

$$M(x) = \frac{q_{max}L}{6}x - \frac{q_{max}}{6L}x^3 = \frac{q_{max}L}{6}x\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

Si osserva che l'andamento del momento flettente è **cubico**, che in $x = 0$ e in $x = L$ il suo valore è nullo e che nel suo punto di stazionarietà (dove $T(x) = 0$, ovvero in $x = \frac{\sqrt{3}}{3}L$) il suo valore è:

$$M\left(x = \frac{\sqrt{3}}{3}L\right) = \frac{\sqrt{3}q_{max}L^2}{18}\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{\sqrt{3}q_{max}L^2}{27}$$



$(\sqrt{3}/3)L$
B
x
A
$y = M(x)$

Calcolo delle azioni interne con il metodo differenziale

Le equazioni differenziali da integrare sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dx} = -q_{\parallel}(x) \\ \dfrac{dT}{dx} = -q_{\perp}(x) \\ \dfrac{dM}{dx} = T(x) \end{cases}$$

Azione normale

In questo esempio $q_{\parallel}(x) = 0$, di conseguenza si ottiene:

$$\frac{dN}{dx} = -q_{\parallel}(x) = 0 \qquad \text{da cui} \quad N(x) = cost$$

Poiché non agiscono carichi orizzontale, $H_A = 0$ e l'azione normale è ovunque nulla.

Azione di taglio

L'equazione da integrare è la seguente:

$$\frac{dT}{dx} = -q_{\perp}(x) = -\frac{q_{max}}{L}x$$

da cui $\quad T(x) = -\int_0^x q_{\perp}(x)dx = -\left[\frac{q_{max}}{L}\frac{x^2}{2} - T(0)\right] = T(0) - \frac{q_{max}}{2L}x^2$

Il taglio alla coordinata $x = 0$ è uguale a $V_A = \frac{q_{max}L}{6}$ quindi si ottiene:

$$T(x) = \frac{q_{max}L}{6} - \frac{q_{max}}{2L}x^2 = \frac{q_{max}L}{6}\left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

stesso risultato ottenuto con il metodo diretto.

Momento flettente

L'equazione da integrare è la seguente:

$$\frac{dM}{dx} = T(x) = \frac{q_{max}L}{6}\left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

da cui $M(x) = \int_0^x \frac{q_{max}L}{6}\left[1 - \frac{3x^2}{L^2}\right]dx = \frac{q_{max}L}{6}\left[x - \frac{x^3}{L^2}\right] - M(0)$

Nel punto A dove $x = 0$, il momento è nullo, di conseguenza l'equazione è la seguente:

$$M(x) = \frac{q_{max}L}{6}x\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

stesso risultato ottenuto con il metodo diretto.