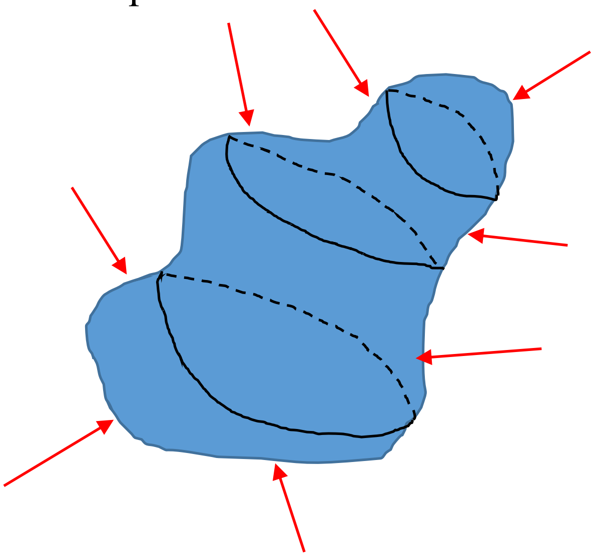
La lezione è stata registrata ed è reperibile all'indirizzo:
https://unica.adobeconnect.com/psicdfkl7b3c/

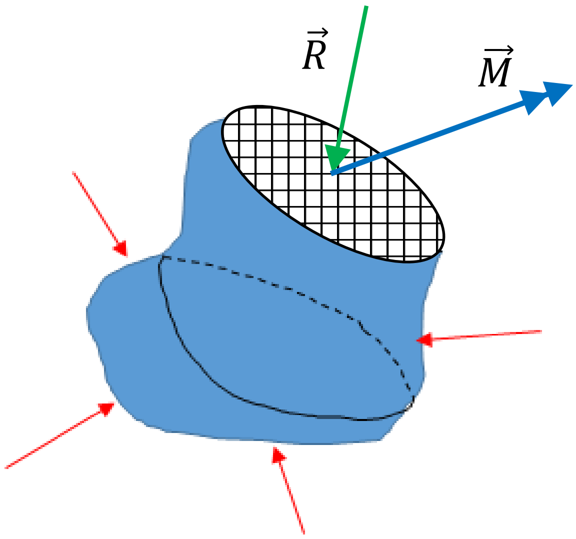
AZIONI INTERNE

Oltre al calcolo delle reazioni vincolari viste precedentemente, quando si considera una struttura è molto importante valutare come le forze applicate e le reazioni si trasmettano all'interno delle varie parti.

La corretta valutazione delle azioni interne è il passo più importante per stabilire se la struttura sarà in grado di sopportare con sicurezza i carichi applicati.

Si consideri il solido rappresentato in figura, sottoposto ad un sistema di forze equilibrate:





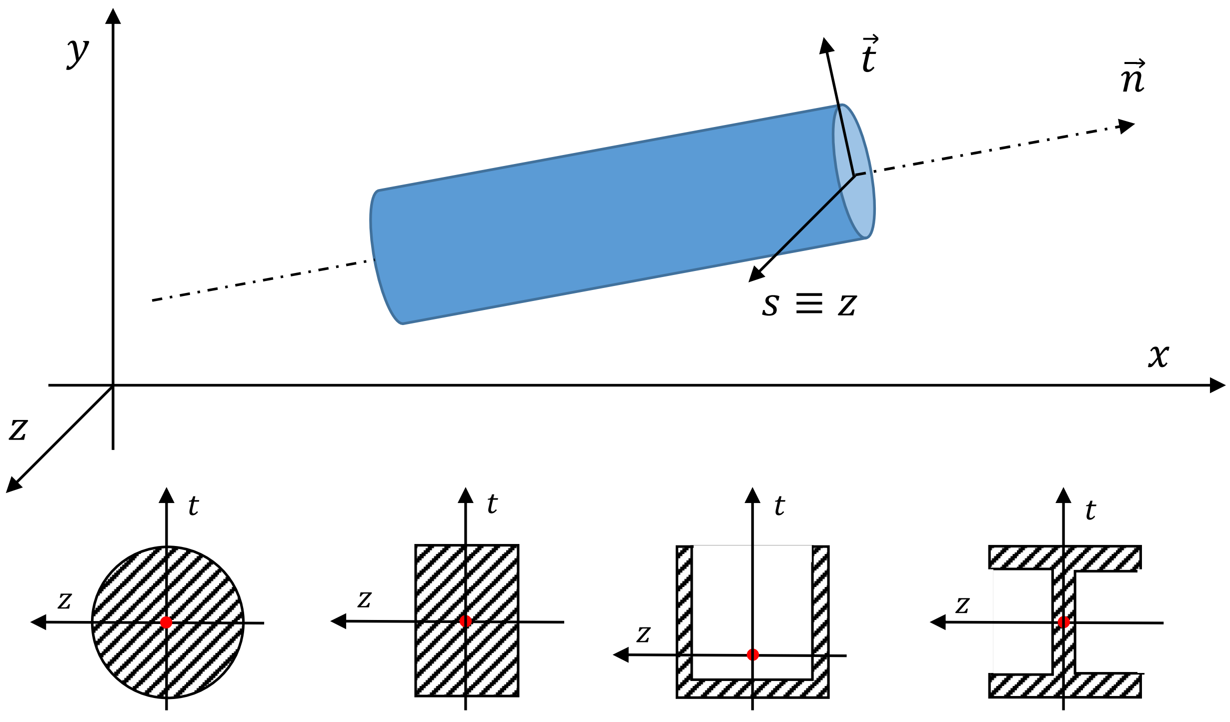
Si immagini di sezionare il corpo con un piano di taglio: perché una parte del solido continui a rimanere in equilibrio sarà necessario applicare nel baricentro del piano di sezione una reazione $\vec{R}$ ed un momento $\vec{M}$ adeguati: $\vec{R}$ ed $\vec{M}$ prendono il nome di "**azioni interne**".

In generale la forza $\vec{R}$ ed il momento $\vec{M}$ hanno ognuna tre componenti:

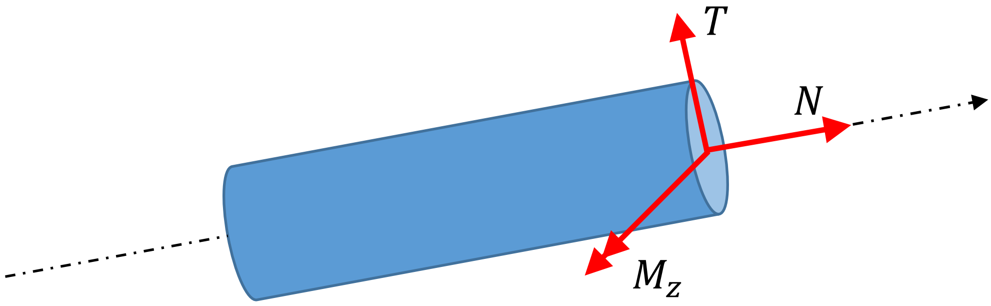
$$\vec{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

Si prenda in considerazione una trave il cui asse giaccia su un piano, per esempio il piano xy; si supponga che la sua sezione trasversale sia simmetrica rispetto allo stesso piano, che il suo materiale sia omogeneo e che anche le forze e le reazioni agiscano sul piano xy; in questo caso si può parlare di "**problema piano**" e le 6 componenti delle azioni interne si riducono a 3 sole grandezze scalari:

$$\vec{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{M} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{Bmatrix}$$



Sezioni simmetriche rispetto al piano xy.

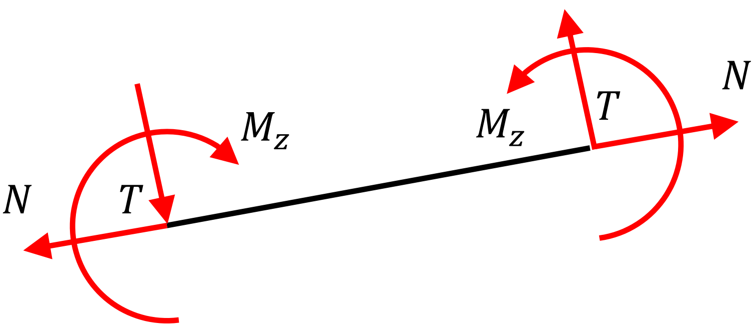


N indica **l'azione normale**, perpendicolare alla sezione trasversale e tangente all'asse della trave; si considera positiva se di trazione;

T indica **l'azione di taglio**, perpendicolare all'asse della trave e giacente nel piano di simmetria xy e nel piano della sezione trasversale;

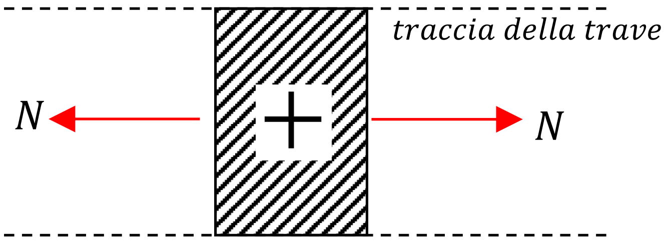
M è il **momento flettente** diretto come l'asse z, perpendicolare al piano xy.

Le azioni interne vengono anche rappresentate nel modo seguente:

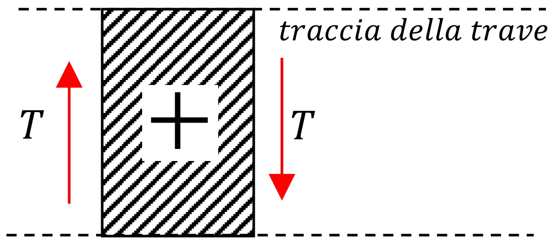


CONVENZIONE SUI SEGNI

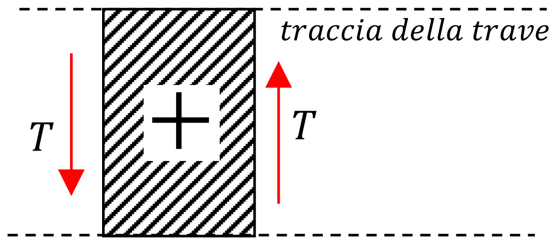
Normalmente **l'azione normale** N si considera positiva se di trazione;



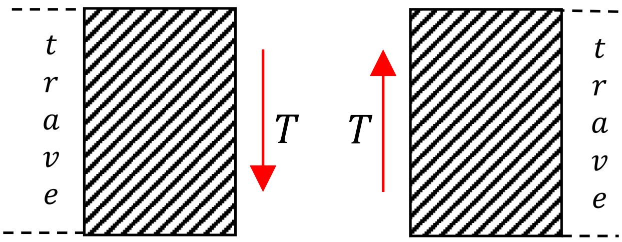
Per il **taglio** non esiste una convenzione accettata universalmente, quindi all'inizio dei calcoli è <u>obbligatorio dichiarare quale convenzione si adotterà</u>.



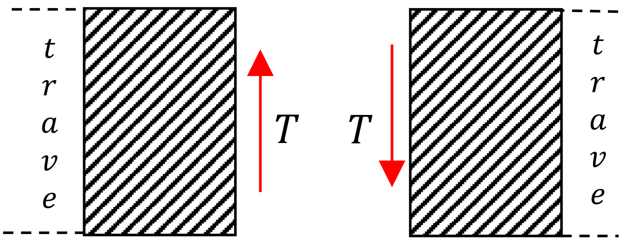
senso orario



senso antiorario

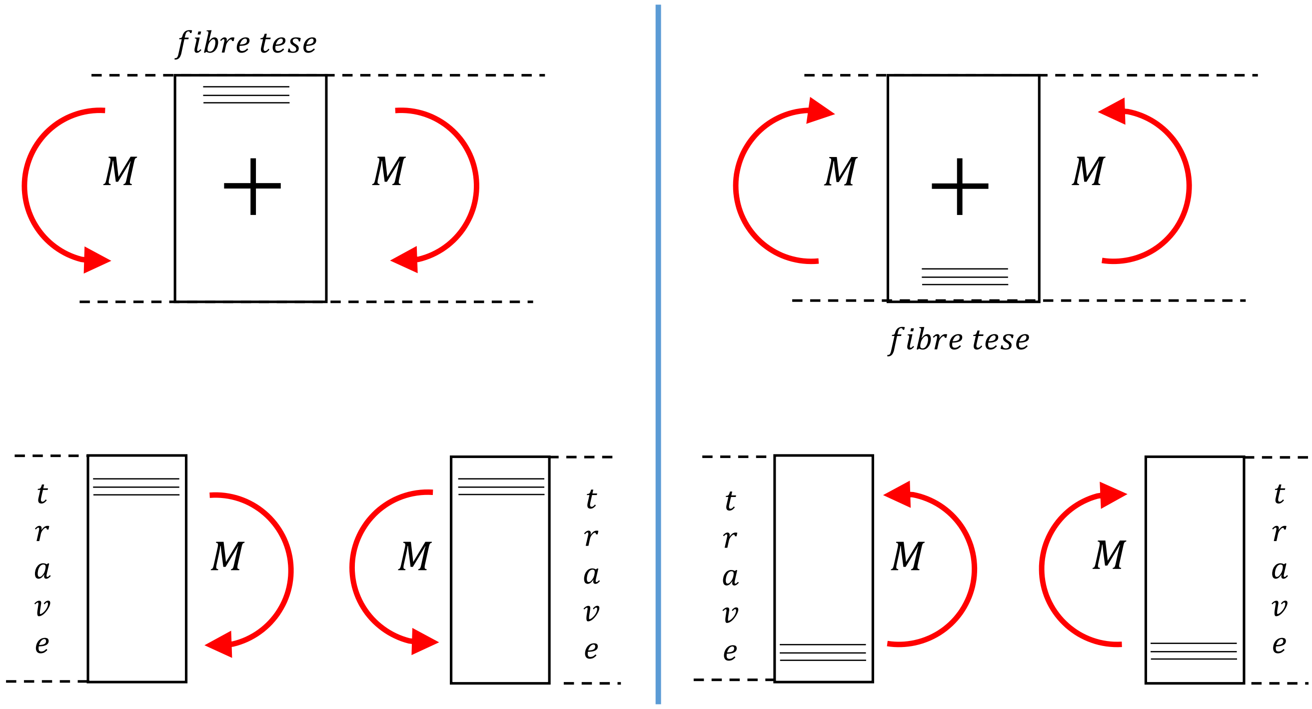


senso orario



senso antiorario

Anche per il **momento flettente** non esiste una convenzione accettata universalmente, quindi all’inizio dei calcoli è obbligatorio dichiarare quale convenzione si adotterà.



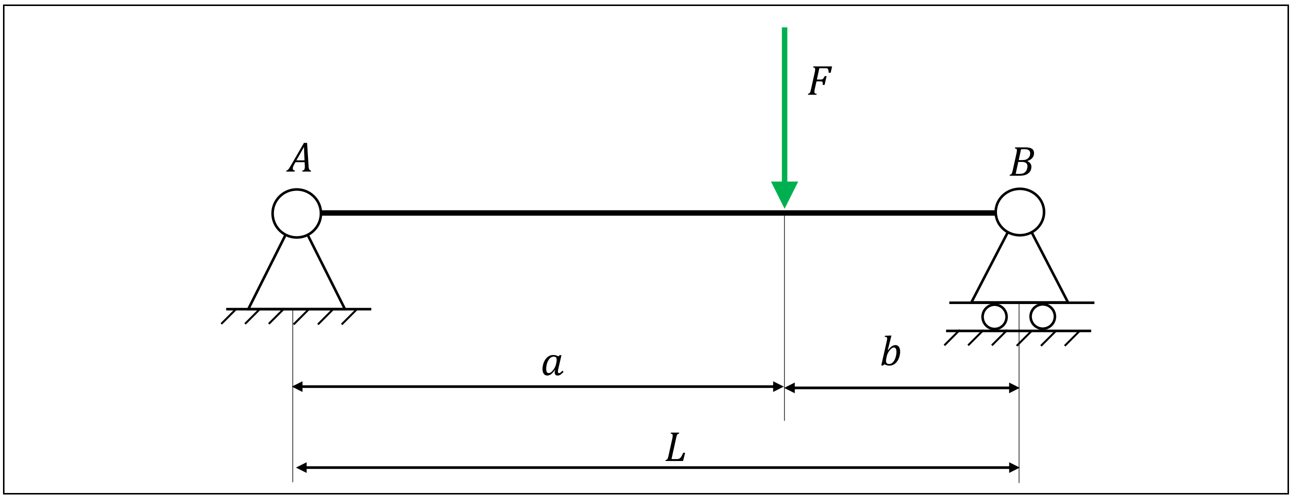
La situazione **fisica** è unica, indipendentemente dalla convenzione di segno adottata.

Si ipotizzi, ad esempio, che siano tese le **fibre inferiori** della trave.
Se nei calcoli si adotta la convenzione che considera positivi i momenti che tendono le fibre superiori, i risultati forniranno momenti negativi.
Se, viceversa, si adotta la convenzione contraria (cioè quella che considera positivi i momenti che tendono le fibre inferiori), i risultati forniranno momenti positivi.

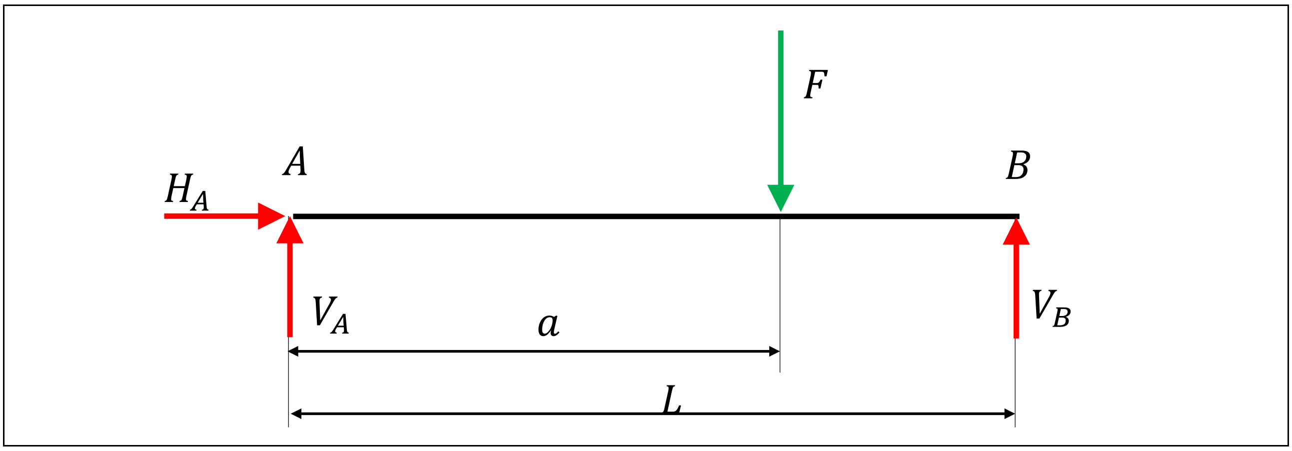
Quando si disegnano i diagrammi dei momenti flettenti è **OBBLIGATORIO** disegnarli dalla parte delle fibre tese.

ESEMPI DI CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

1) Trave su due appoggi caricata da una forza concentrata



Calcolo delle reazioni vincolari

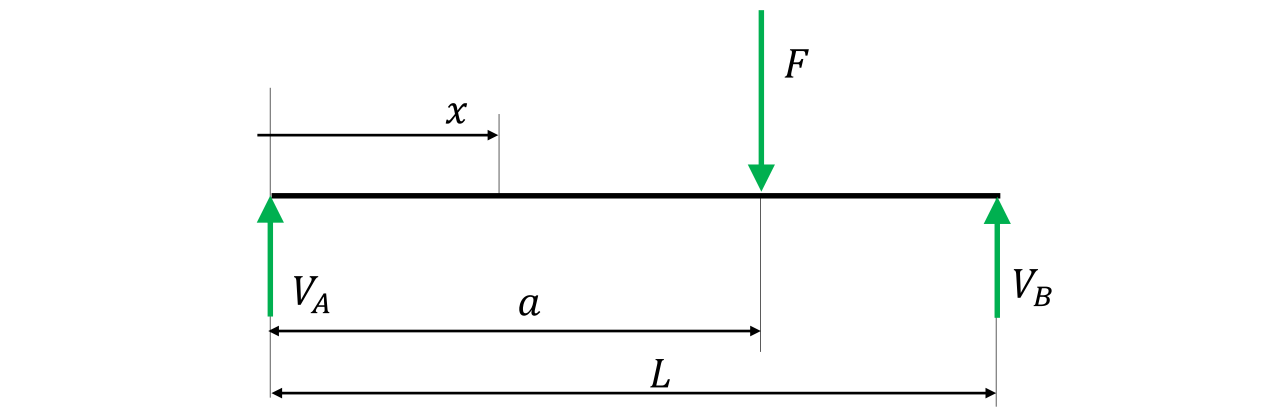


EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

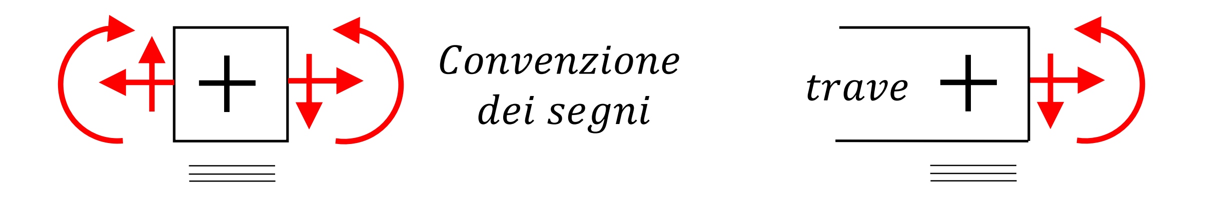
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - F = 0 \\ \sum_A M_z = V_B L - Fa = 0 \end{cases}$$

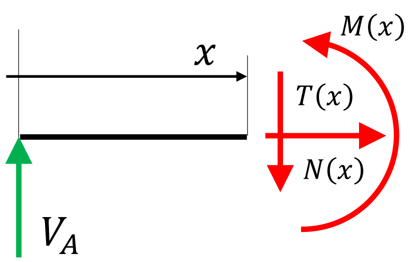
Risolvendo si ricava: $H_A = 0$, $V_B = F\frac{a}{L}$, $V_A = \frac{b}{L}F$

Calcolo delle azioni interne (1° metodo: unico sistema di riferimento)



1) Si sceglie un sistema di riferimento:
   in questo caso con l'origine nel punto A e diretto verso destra.
2) Si ipotizza di tagliare la trave alla coordinata generica $x < a$;
3) Si sceglie una convenzione dei segni;
4) Nel punto di taglio si inseriscono le azioni interne incognite.
5) Si scrivono le equazioni di equilibrio e si calcolano le azioni interne.





$$\begin{cases} \sum F_x = N(x) = 0 \\ \sum F_y = V_A - T(x) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x) - V_A x = 0 \end{cases}$$

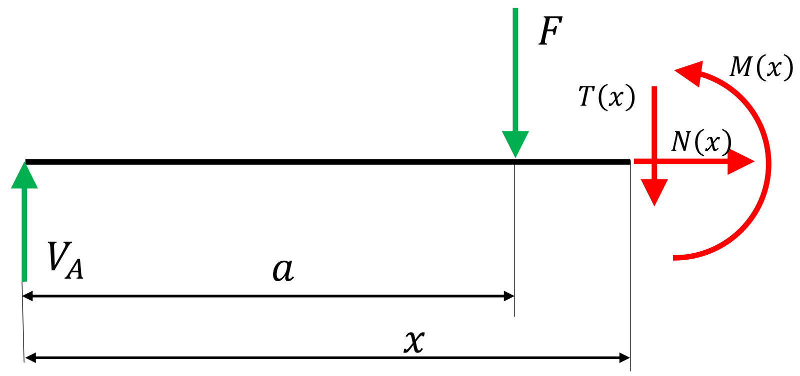
valide per $0 \le x \le a$

Risolvendo si ricava: $\begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = V_A = \frac{b}{L}F \\ M(x) = V_A x = \frac{b}{L}Fx \end{cases}$

6) Si esamina il resto della trave; ciò che si scriverà sarà valido per $a \leq x \leq L$;

7) Nel punto di taglio si inseriscono le azioni interne incognite.

8) Si scrivono le equazioni di equilibrio e si calcolano le azioni interne.



$$\begin{cases} \sum F_x = N(x) = 0 \\ \sum F_y = V_A - T(x) - F = 0 \\ \sum_x M_z = M(x) + F(x-a) - V_A x = 0 \end{cases}$$

valide per $a \leq x \leq L$

Risolvendo:

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = V_A - F = \frac{b}{L}F - F = \frac{b-L}{L}F = -\frac{a}{L}F = -V_B \\ M(x) = V_A x - F(x-a) = \frac{b}{L}Fx - Fx + Fa = -\frac{L-b}{L}Fx + Fa \end{cases}$$

Semplificando la terza equazione, si ottiene l'equazione di una retta: $M(x) = Fa\left(-\frac{x}{L} + 1\right)$

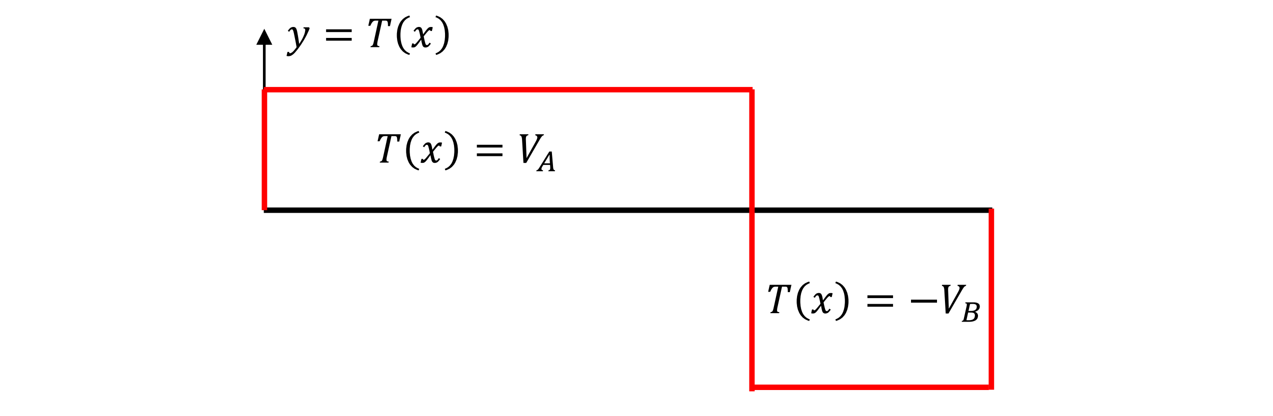
Disegno dei diagrammi delle azioni interne

Sintesi dei risultati:

per $0 \leq x \leq a$	per $a \leq x \leq L$
$\begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = \frac{b}{L}F \\ M(x) = \frac{b}{L}Fx \end{cases}$	$\begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = -\frac{a}{L}F \\ M(x) = Fa\left(-\frac{x}{L}+1\right) \end{cases}$
$M(x=a) = \frac{ab}{L}F$	$M(x=a) = \frac{ab}{L}F$

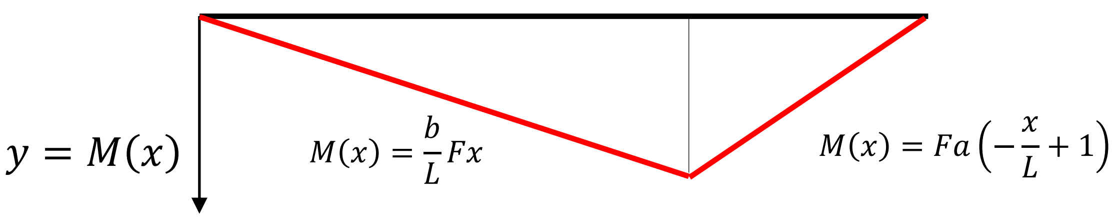
L'azione normale è ovunque nulla.

Azione di taglio

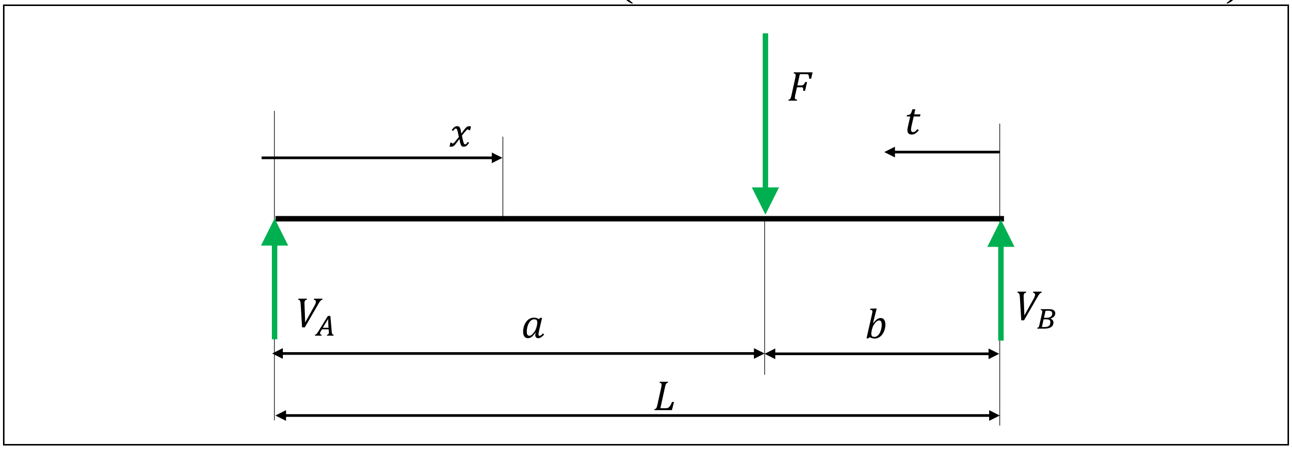


Momento flettente

Il diagramma dei momenti si DEVE disegnare dalla parte delle fibre tese.



Calcolo delle azioni interne (2° metodo: due sistemi di riferimento)

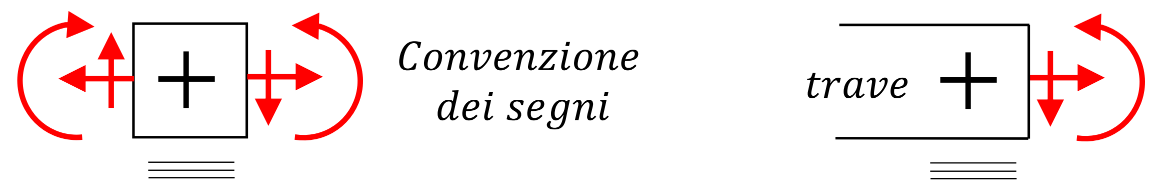


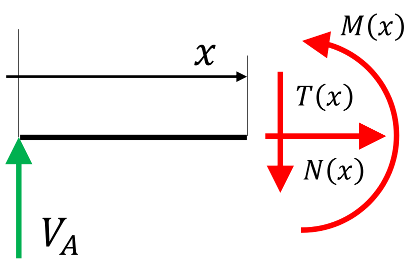
1) Si scelgono due sistemi di riferimento:

   uno con l'origine nel punto A e diretto verso destra;

   l'altro con l'origine nel punto B e diretto verso sinistra.

2) Si ipotizza di tagliare la trave alla coordinata generica $x < a$;
3) Si sceglie una convenzione dei segni;
4) Nel punto di taglio si inseriscono le azioni interne incognite.
5) Si scrivono le equazioni di equilibrio e si calcolano le azioni interne.





$$\begin{cases} \sum F_x = N(x) = 0 \\ \sum F_y = V_A - T(x) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x) - V_A x = 0 \end{cases}$$

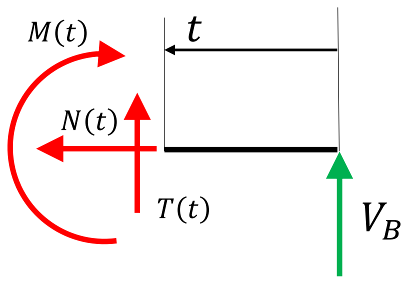
valide per $0 \leq x \leq a$

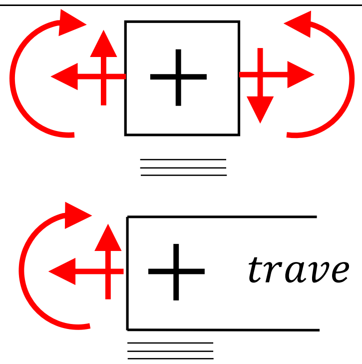
Risolvendo si ricava: $\begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = V_A = \frac{b}{L}F \\ M(x) = V_A x = \frac{b}{L}Fx \end{cases}$

6) Si esamina il resto della trave; ciò che si scriverà sarà valido per $0 \leq t \leq b$;

7) Nel punto di taglio si inseriscono le azioni interne incognite.

8) Si scrivono le equazioni di equilibrio e si calcolano le azioni interne.





$$\begin{cases} \sum F_x = N(t) = 0 \\ \sum F_y = V_B + T(t) = 0 \\ \sum_t M_z = M(t) - V_B t = 0 \end{cases}$$ valide per $0 \leq t \leq b$

Risolvendo:

$$\begin{cases} N(t) = 0 \\ T(t) = -V_B = -\frac{a}{L}F \\ M(t) = V_B t = \frac{a}{L}Ft \end{cases}$$

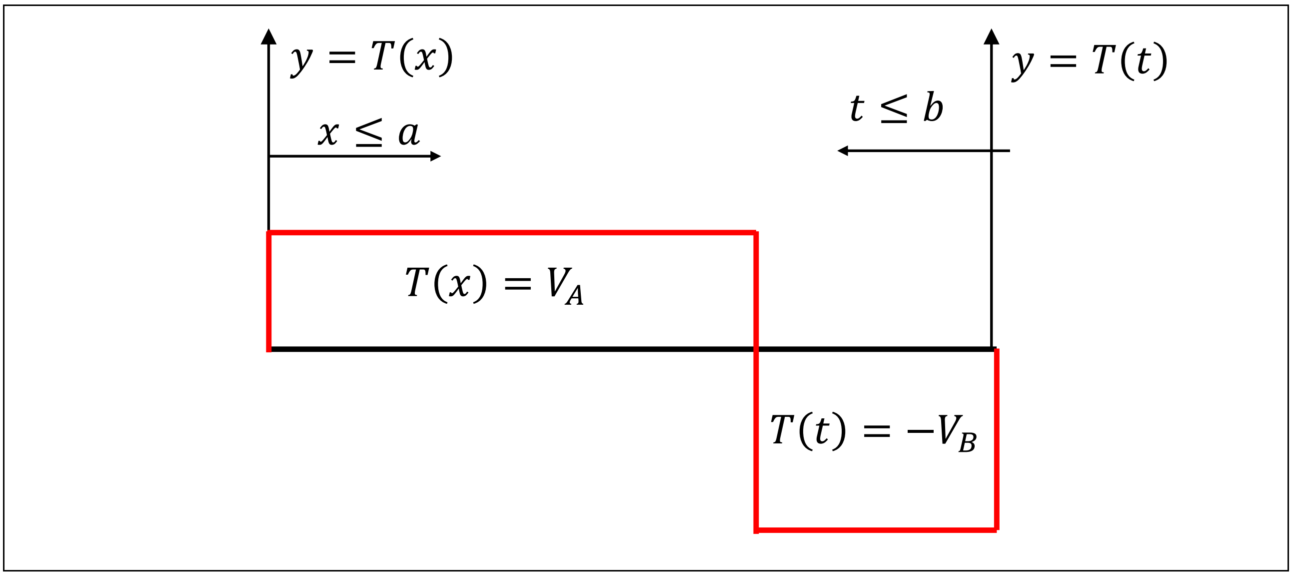
Disegno dei diagrammi delle azioni interne

Sintesi dei risultati:

per $0 \le x \le a$	per $0 \le t \le b$
$\begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = \dfrac{b}{L}F \\ M(x) = \dfrac{b}{L}Fx \end{cases}$ $M(x = a) = \dfrac{ab}{L}F$	$\begin{cases} N(t) = 0 \\ T(t) = -\dfrac{a}{L}F \\ M(t) = \dfrac{a}{L}Ft \end{cases}$ $M(t = b) = \dfrac{ab}{L}F$

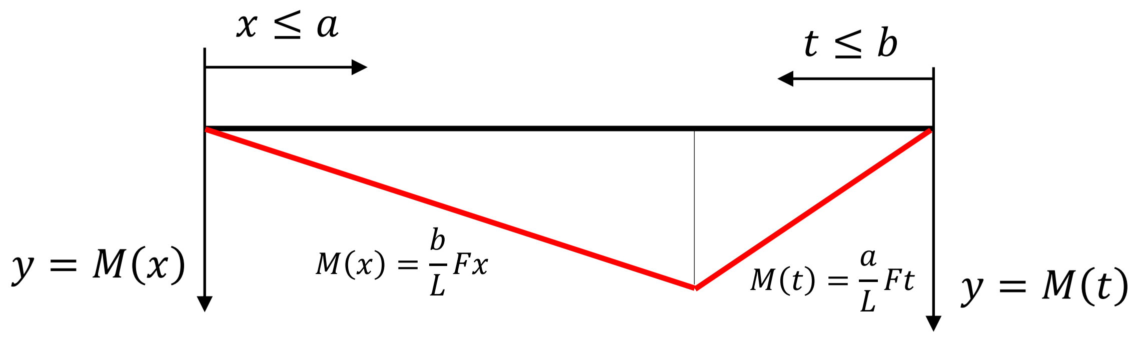
L'azione normale è ovunque nulla.

Azione di taglio

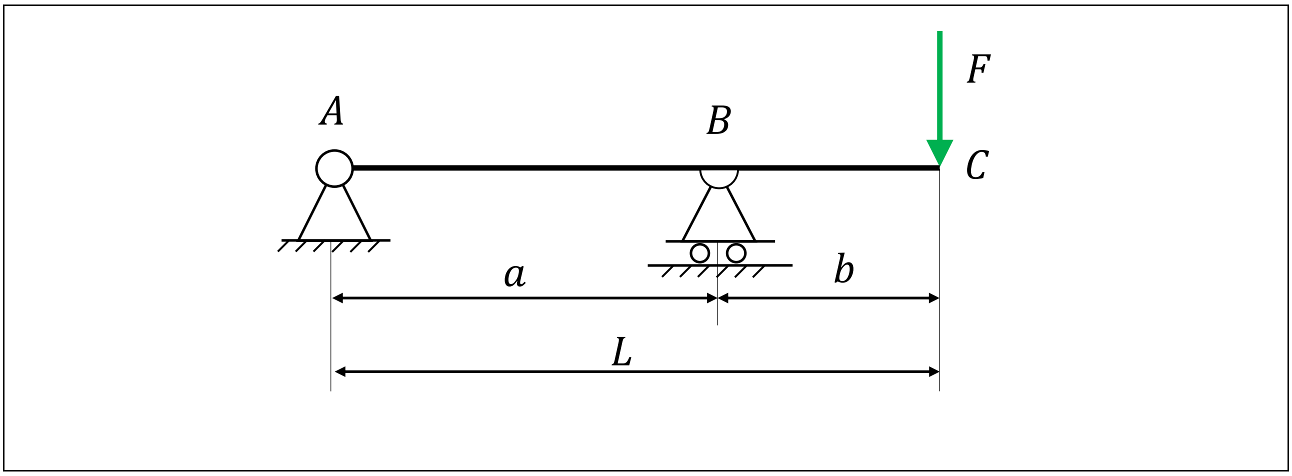


Momento flettente

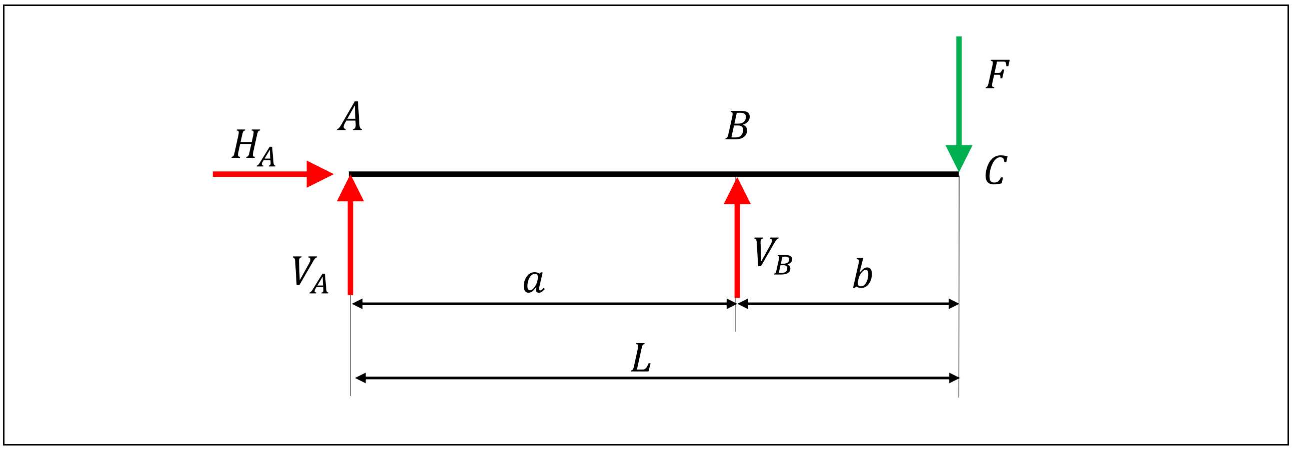
Il diagramma dei momenti si DEVE disegnare dalla parte delle fibre tese.



ESERCIZIO N.2



Calcolo delle reazioni vincolari



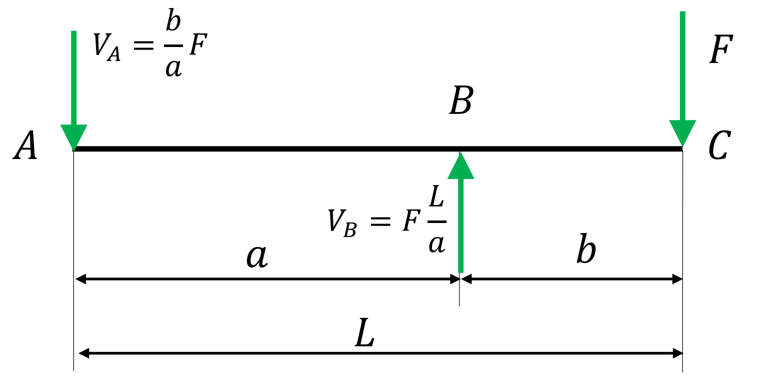
EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

$$
\begin{cases}
\sum F_x = H_A = 0 \\
\sum F_y = V_A + V_B - F = 0 \\
\sum_A M_z = V_B a - FL = 0
\end{cases}
$$

Risolvendo si ricava: $H_A = 0$, $V_B = F\frac{L}{a}$, $V_A = -\frac{b}{a}F$

Si cambia verso e segno al valore della reazione V_A.

Calcolo delle azioni interne

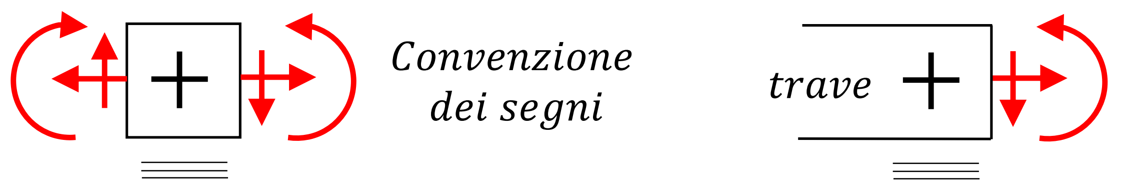


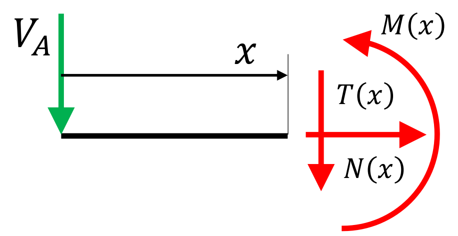
1) Si scelgono due sistemi di riferimento:

   uno con l'origine nel punto A e diretto verso destra;

   l'altro con l'origine in C e diretto verso sinistra.

2) Si ipotizza di tagliare la trave alla coordinata generica $x < a$;
3) Si sceglie una convenzione dei segni;
4) Nel punto di taglio si inseriscono le azioni interne incognite.
5) Si scrivono le equazioni di equilibrio e si calcolano le azioni interne.

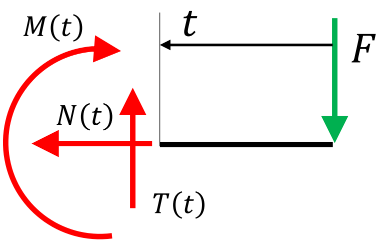


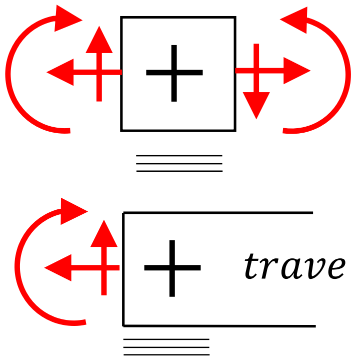


$$\begin{cases} \sum F_x = N(x) = 0 \\ \sum F_y = -T(x) - V_A = 0 \\ \sum_x M_z = M(x) + V_A x = 0 \end{cases}$$

valide per $0 \le x \le a$

6) Si esamina il resto della trave; ciò che si scriverà sarà valido per $0 \leq t \leq b$;
7) Nel punto di taglio si inseriscono le azioni interne incognite.
8) Si scrivono le equazioni di equilibrio e si calcolano le azioni interne.





$$\begin{cases} \sum F_x = N(t) = 0 \\ \sum F_y = T(t) - F = 0 \\ \sum_t M_z = -M(t) - Ft = 0 \end{cases}$$

valide per $0 \leq t \leq b$

Risolvendo:

$$\begin{cases} N(t) = 0 \\ T(t) = F \\ M(t) = -Ft \end{cases}$$

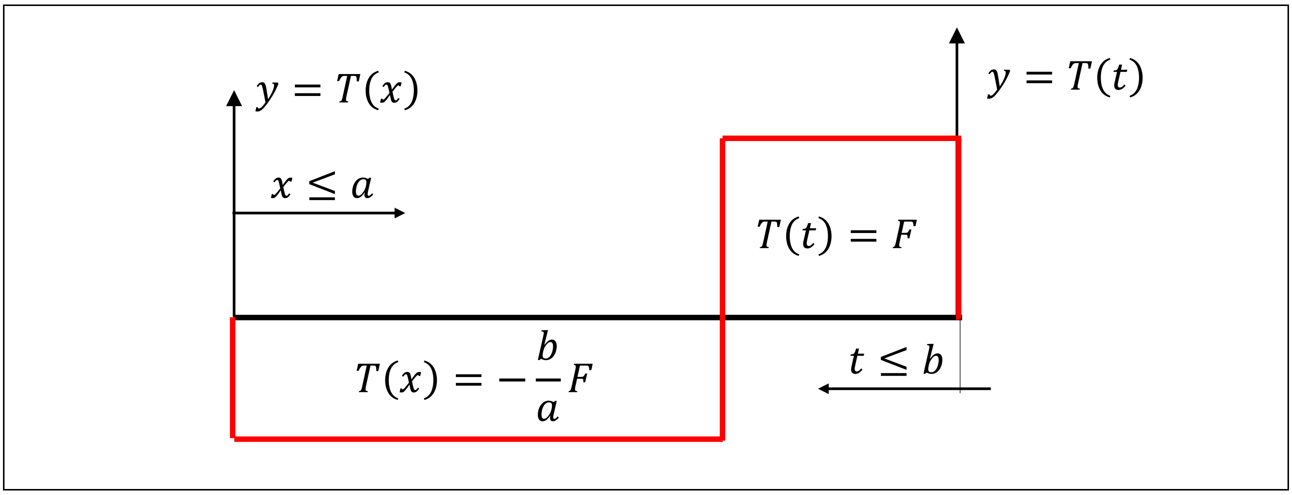
Disegno dei diagrammi delle azioni interne

Sintesi dei risultati:

per $0 \le x \le a$	per $0 \le t \le b$
$\begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = -V_A = -\frac{b}{a}F \\ M(x) = -V_A x = -\frac{b}{a}Fx \end{cases}$	$\begin{cases} N(t) = 0 \\ T(t) = F \\ M(t) = -Ft \end{cases}$
$M(x = a) = -Fb$	$M(t = b) = -Fb$

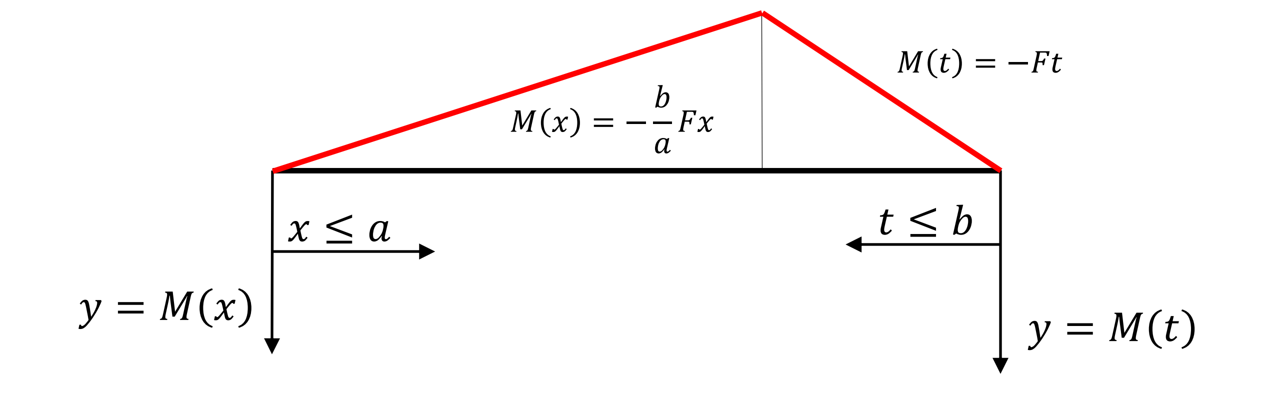
L'azione normale è ovunque nulla.

Azione di taglio

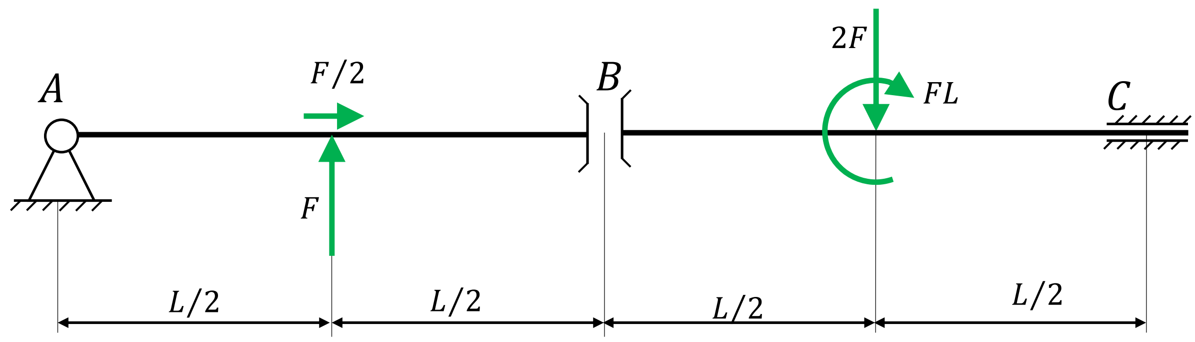


Momento flettente

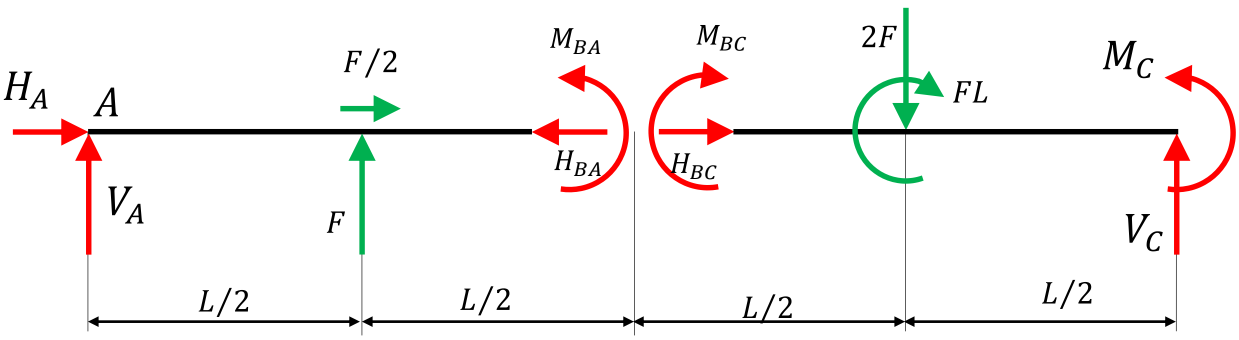
Il diagramma dei momenti si DEVE disegnare dalla parte delle fibre tese.



ESERCIZIO N.3



Calcolo delle reazioni vincolari



1) Equazione di equilibrio delle forze orizzontali nell'asta BC

$$\sum F_x(asta\ BC) = H_{BC} = 0$$

Quindi $H_{BA} = 0$.

2) Equazione di equilibrio delle forze orizzontali nell'asta AB

$$\sum F_x(asta\ AB) = H_A + \frac{F}{2} = 0$$

da cui $H_A = -\frac{F}{2}$

3) Equazione di equilibrio delle forze verticali nell'asta AB

$$\sum F_y(asta\ AB) = V_A + F = 0$$

da cui $V_A = -F$

4) Equazione di equilibrio delle forze verticali nell'asta BC

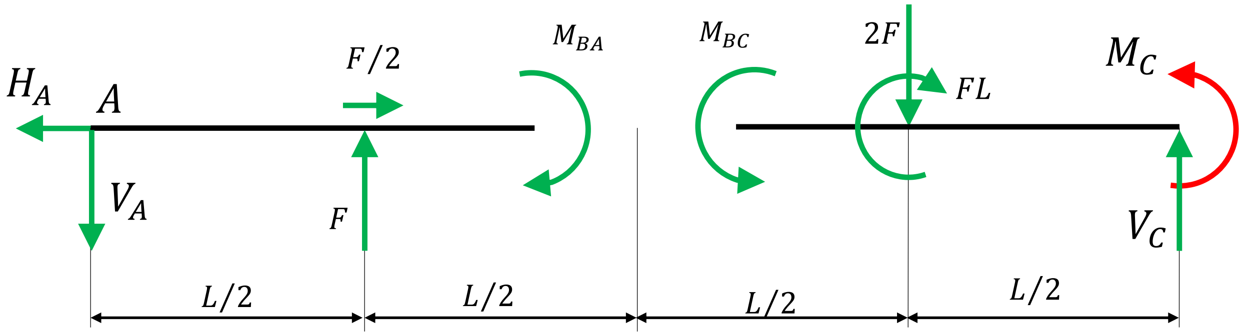
$$\sum F_y(asta\ BC) = V_C - 2F = 0$$

da cui $V_C = 2F$

5) Equazione di equilibrio dei momenti nell'asta AB

$$\sum_A M_z(asta\ AB) = M_{BA} + F\frac{L}{2} = 0$$

da cui $M_{BA} = -F\frac{L}{2}$; di conseguenza $M_{BC} = -F\frac{L}{2}$



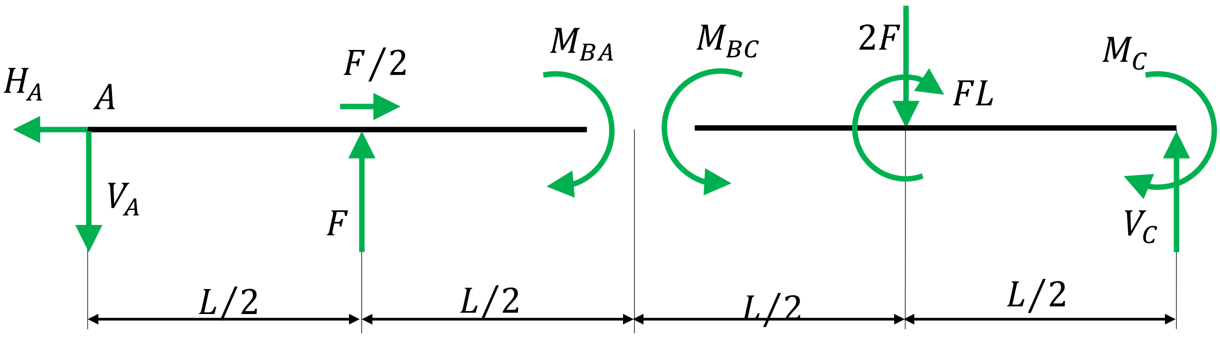
6) Equazione di equilibrio dei momenti nell'asta BC

$$\sum_C M_z(asta\ BC) = M_C + 2F\frac{L}{2} - FL + F\frac{L}{2} = 0$$

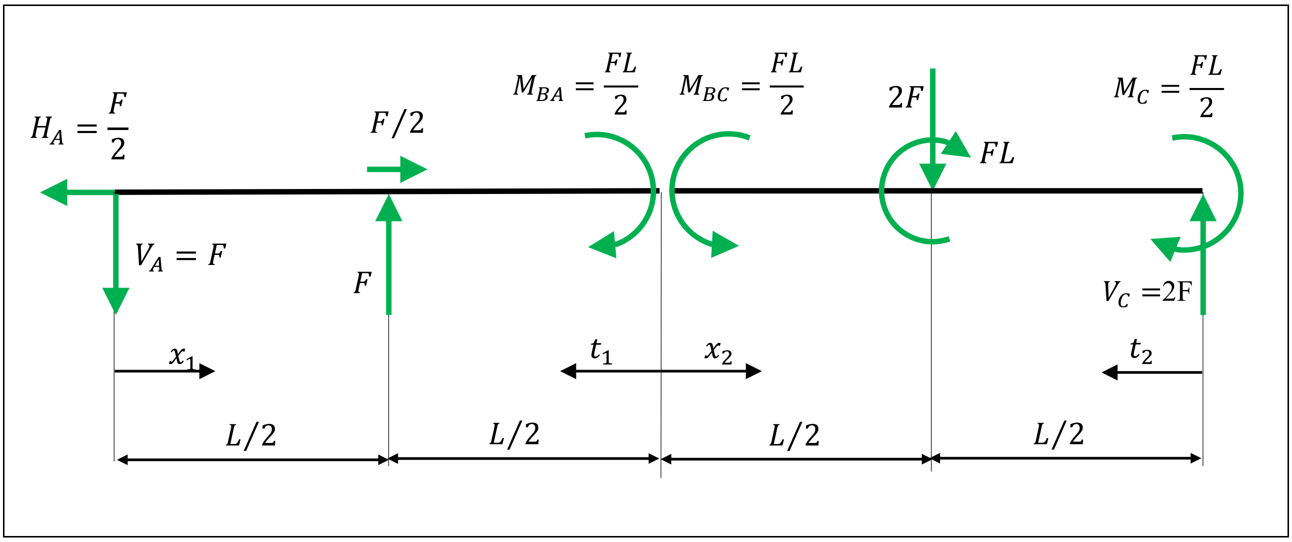
da cui:

$$M_C = -2F\frac{L}{2} + FL - F\frac{L}{2} = -F\frac{L}{2}$$

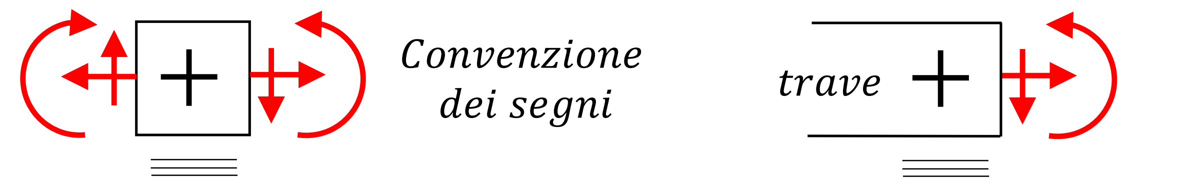
E' necessario cambiare verso e segno al momento M_C.

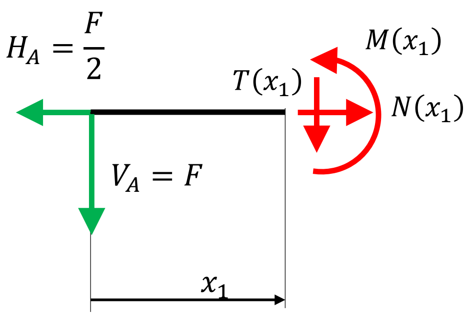


Calcolo delle azioni interne



1) Si sceglie una convenzione dei segni
2) Si studiano separatamente le due aste;
3) Per l'asta AB si utilizzano due sistemi di riferimento:
   uno con origine in A e diretto verso destra (x_1);
   l'altro con origine in B e diretto verso sinistra (t_1).
4) Si ipotizza di tagliare la trave AB alla coordinata $x_1 < \frac{L}{2}$;
5) Nel punto di taglio si inseriscono le azioni interne incognite.
6) Si scrivono le equazioni di equilibrio e si calcolano le azioni interne.





$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_1) - H_A = 0 \\ \sum F_y = -T(x_1) - V_A = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_1) + V_A x_1 = 0 \end{cases}$$

valide per $0 \leq x_1 \leq \frac{L}{2}$

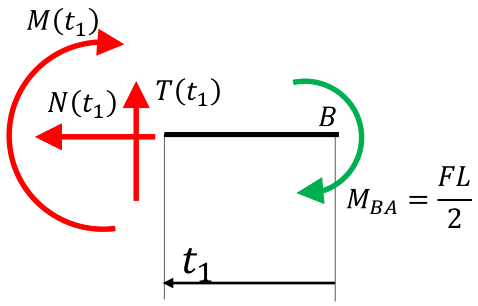
da cui:

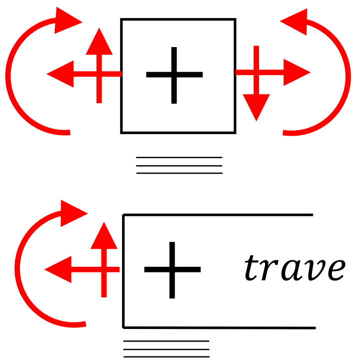
$$\begin{cases} N(x_1) = H_A = \frac{F}{2} \\ T(x_1) = -V_A = -F \\ M(x_1) = -V_A x_1 = -F x_1 \end{cases}$$

7) Si esamina il resto della trave; ciò che si scriverà sarà valido per $0 \leq t_1 \leq \frac{L}{2}$;

8) Nel punto di taglio si inseriscono le azioni interne incognite.

9) Si scrivono le equazioni di equilibrio e si calcolano le azioni interne.



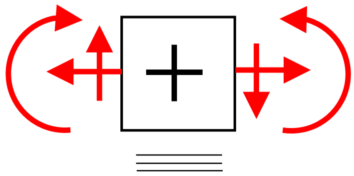


$$\begin{cases} \sum F_x = N(t_1) = 0 \\ \sum F_y = T(t_1) = 0 \\ \sum_t \; M_z = -M(t_1) - M_{BA} = 0 \end{cases}$$

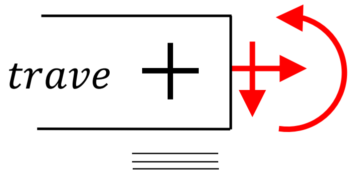
valide per $0 \leq t_1 \leq b$

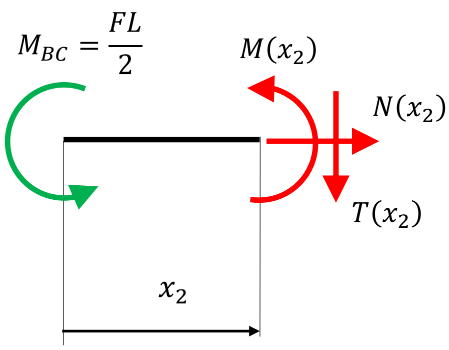
Risolvendo:
$$\begin{cases} N(t_1) = 0 \\ T(t_1) = 0 \\ M(t_1) = -\frac{FL}{2} \end{cases}$$

1) Per l’asta BC si utilizzano due sistemi di riferimento: uno con l’origine in B e diretto verso destra (x_2); l’altro con l’origine in C e diretto verso sinistra (t_2).
2) Si ipotizza di tagliare la trave BC alla coordinata $x_2 < \frac{L}{2}$;
3) Nel punto di taglio si inseriscono le azioni interne incognite.
4) Si scrivono le equazioni di equilibrio e si calcolano le azioni interne.



Convenzione dei segni





$$\begin{cases} \sum F_x = N(x_2) = 0 \\ \sum F_y = -T(x_2) = 0 \\ \sum_x M_z = M(x_2) + M_{BC} = 0 \end{cases}$$

valide per $0 \leq x_2 \leq \frac{L}{2}$

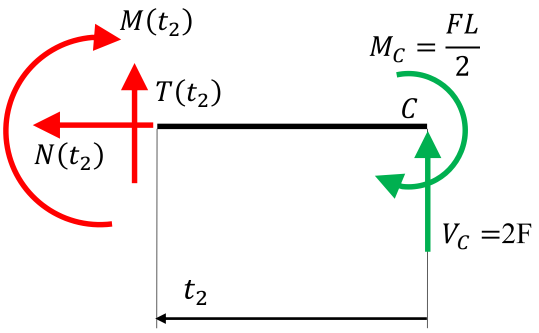
da cui:

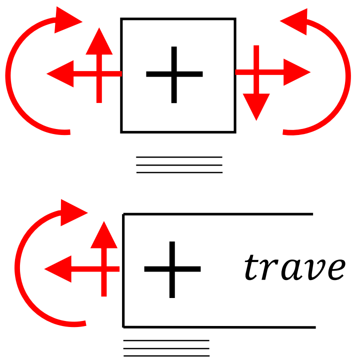
$$\begin{cases} N(x_2) = 0 \\ T(x_2) = 0 \\ M(x_2) = -M_{BC} = -\frac{FL}{2} \end{cases}$$

5) Si esamina il resto della trave; ciò che si scriverà sarà valido per $0 \leq t_2 \leq \frac{L}{2}$;

6) Nel punto di taglio si inseriscono le azioni interne incognite.

7) Si scrivono le equazioni di equilibrio e si calcolano le azioni interne.





$$\begin{cases} \sum F_x = N(t_2) = 0 \\ \sum F_y = T(t_2) + V_C = 0 \\ \sum_t \; M_z = -M(t_2) - M_C + V_C t_2 = 0 \end{cases}$$

valide per $0 \leq t_2 \leq \frac{L}{2}$

Risolvendo:

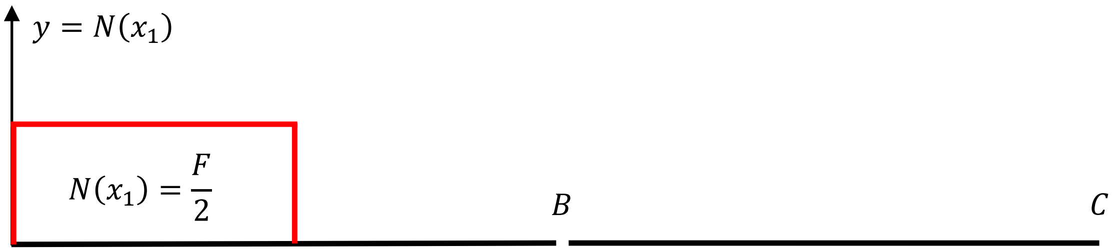
$$\begin{cases} N(t_2) = 0 \\ T(t_2) = -V_C = -2F \\ M(t_2) = V_C t_2 - M_C = 2Ft_2 - \frac{FL}{2} \end{cases}$$

Disegno dei diagrammi delle azioni interne

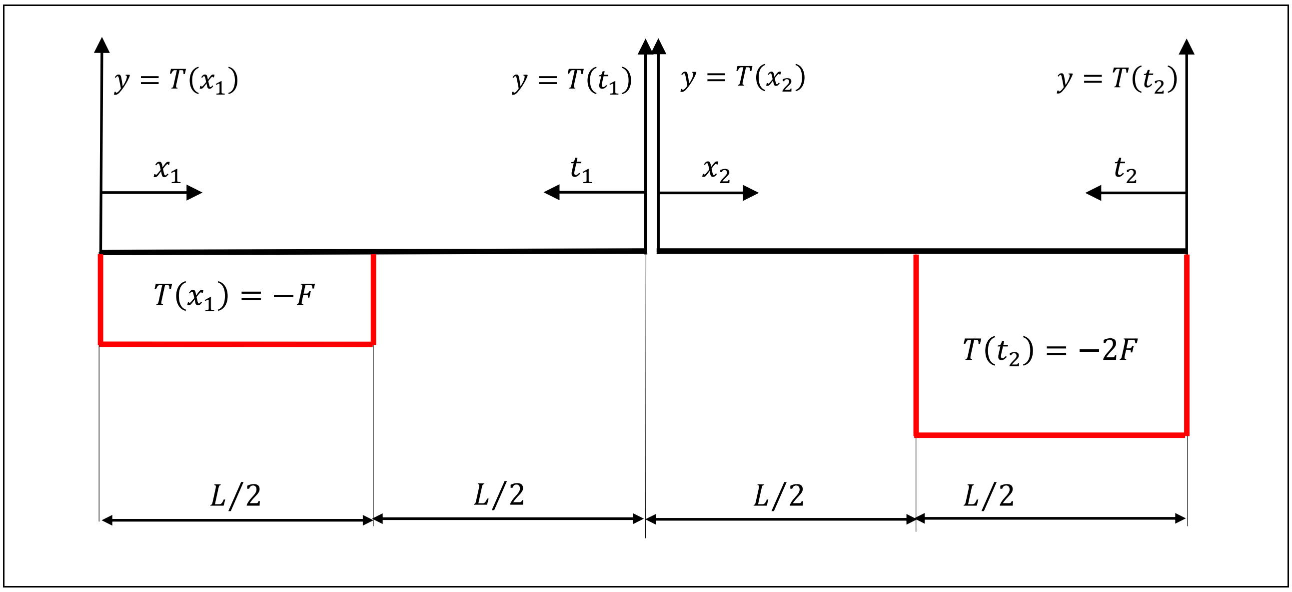
Sintesi dei risultati:

Asta AB	Asta BC
per $0 \le x_1 \le \frac{L}{2}$ $\begin{cases} N(x_1) = \dfrac{F}{2} \\ T(x_1) = -F \\ M(x_1) = -Fx_1 \end{cases}$ $M\left(x_1 = \dfrac{L}{2}\right) = -F\dfrac{L}{2}$	per $0 \le x_2 \le \frac{L}{2}$ $\begin{cases} N(x_2) = 0 \\ T(x_2) = 0 \\ M(x_2) = -M_{BC} = -\dfrac{FL}{2} \end{cases}$
per $0 \le t_1 \le \frac{L}{2}$ $\begin{cases} N(t_1) = 0 \\ T(t_1) = 0 \\ M(t_1) = -\dfrac{FL}{2} \end{cases}$	per $0 \le t_2 \le \frac{L}{2}$ $\begin{cases} N(t_2) = 0 \\ T(t_2) = -2F \\ M(t_2) = 2Ft_2 - \dfrac{FL}{2} \end{cases}$ $M\left(t_2 = \dfrac{L}{2}\right) = \dfrac{FL}{2}$

Azione normale.



Azione di taglio



Momento flettente

Il diagramma dei momenti si DEVE disegnare dalla parte delle fibre tese.