CAP 6 – EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELASTICITÀ E PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

6.1 Introduzione

Per determinare la distribuzione degli spostamenti e degli sforzi in una struttura sottoposta a dati carichi e temperature esterne, è necessario risolvere le equazioni fondamentali della Teoria dell'Elasticità che devono soddisfare le condizioni al contorno sulle forze e sugli spostamenti. Le equazioni sono le seguenti:

1) 6 Equazioni deformazioni/spostamenti
2) 6 Equazioni sforzi/deformazioni
3) 3 Equazioni di equilibrio

Per determinare le 15 variabili incognite (cioè il tensore degli sforzi, quello delle deformazioni ed il campo di spostamento) sono quindi disponibili 15 equazioni. Nel caso bidimensionale per trovare il campo di spostamento $\{u \quad v\}^T$, gli sforzi $\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$ e le deformazioni $\{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T$ abbiamo a disposizione otto equazioni. E' inoltre necessario soddisfare alcune equazioni che riguardano la continuità delle deformazioni e degli spostamenti (*equazioni di compatibilità*) e le condizioni al contorno sulle forze e/o gli spostamenti.

Qui di seguito verranno esposte in modo sintetico tutte le equazioni citate.

6.2 Equazioni deformazioni/spostamenti

La forma deformata di una struttura elastica sottoposta ad un dato sistema di carichi e ad una data distribuzione di temperature può essere descritta completamente da tre spostamenti:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} \qquad [6.2.1]$$

I vettori che rappresentano questi tre spostamenti in un punto $P(x,y,z)$ della struttura sono mutuamente ortogonali e la loro direzione positiva coincide con la direzione positiva degli assi coordinati. Le deformazioni della struttura possono essere espresse come derivate parziali degli spostamenti. L'ipotesi fondamentale è che le funzioni spostamento siano continue e derivabili: in questo caso è possibile esprimerle usando lo sviluppo in serie di Taylor. Per esempio, se lo spostamento u fosse funzione solo della coordinata x potremmo scrivere:

$$u(x_0+\Delta x) = u(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{d^i u}{dx^i}(x_0)}{i!}\Delta x^i = u(x_0) + \frac{du}{dx}(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3u}{dx^3}(x_0)\Delta x^3 + \cdots$$

Portando il termine $u(x_0)$ a sinistra del segno di uguaglianza e dividendo tutto per Δx abbiamo:

$$\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}(x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_0)\Delta x + \frac{1}{6}\frac{d^3u}{dx^3}(x_0)\Delta x^2 + \cdots$$

Quando, al limite, la variazione Δx tende a zero, abbiamo l'espressione della deformazione nel punto di coordinata x_0:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{1}{6}\frac{d^3u}{dx^3}(dx)^2 + \cdots$$

Se le deformazioni sono piccole è lecito trascurare i termini di ordine superiore; inoltre, poiché le deformazioni in generale sono funzioni anche delle coordinate y e z è necessario usare le derivate parziali: abbiamo quindi le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \qquad [6.2.2]$$

Queste relazioni possono essere scritte in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Le deformazioni possono essere espresse in forma tensoriale:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Poiché il tensore delle deformazioni è simmetrico, cioè $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ e $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, le incognite si riducono a sei e possono esprimersi in forma vettoriale: $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}$.

6.3 Equazioni sforzi/deformazioni

Le deformazioni elastiche sono legate agli sforzi dalla legge di Hooke. Se il materiale è isotropo, la relazione assume la seguente forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [E]^{-1}\{\sigma\}$$

dove E indica il modulo di Young e ν è il coefficiente di Poisson. La relazione inversa è la seguente:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$$

dove la matrice del materiale $[E]$ assume la seguente forma:

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

6.3.1 Equazioni sforzi/deformazioni nel caso di uno stato di sforzo piano

Quando la distribuzione degli sforzi è piana, le espressioni precedenti si semplificano. In questo caso abbiamo:

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Di conseguenza possiamo scrivere: $\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{-\nu}{E}\left[\sigma_x + \sigma_y\right]$

L'espressione matriciale diventa: $\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [E]^{-1}\{\sigma\}$

e la sua inversa: $\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [E]\{\varepsilon\}$

6.3.2 Equazioni sforzi/deformazioni nel caso di uno stato di deformazione piano

Se gli spostamenti non dipendono dalla coordinata z, allora le relative variazioni si annullano e risulta:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Osservando le relazioni spostamenti/deformazioni (6.2.2) possiamo scrivere:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

da cui risulta che gli sforzi di taglio τ_{yz} e τ_{zx} sono nulli. Inoltre poiché $\varepsilon_z = 0$ possiamo scrivere:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

Le relazione sforzi/deformazioni diventano

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

6.4 Equazioni indefinite dell'equilibrio

Le equazioni dell'equilibrio interno che mettono in relazione le nove componenti degli sforzi con le sei componenti delle deformazioni si possono ottenere considerando l'equilibrio dei momenti e delle forze che agiscono su un piccolo parallelepipedo di materiale. Per l'equilibrio dei momenti è necessario che il tensore degli sforzi sia simmetrico, cioè che tra gli sforzi di taglio siano verificate le seguenti relazioni:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \text{e} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Invece perché sia soddisfatto l'equilibrio delle forze è necessario che siano soddisfatte le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \qquad [6.4.1]$$

dove $\{X \quad Y \quad Z\}$ è il vettore delle forze di massa per unità di volume. Queste equazioni devono essere verificate in tutti i punti del mezzo continuo. Gli sforzi variano da punto a punto e sulla superficie devono essere in equilibrio con le forze esterne applicate. Di conseguenza sulla superficie esterna devono essere soddisfatte le seguenti equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = \Phi_x \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = \Phi_y \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = \Phi_z \end{cases} \qquad [6.4.2]$$

dove $\{\Phi_x \quad \Phi_y \quad \Phi_z\}$ rappresentano i carichi esterni distribuiti per unità di superficie e $\bar{n} = \{l \quad m \quad n\}$ è la normale alla superficie diretta verso l'esterno del corpo. Queste ultime equazioni si possono sintetizzare nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{Bmatrix} \qquad \text{o ancora} \qquad [\sigma]\{\bar{n}\} = \{\Phi\}$$

6.5 Equazioni di compatibilità

Le deformazioni e gli spostamenti in un corpo elastico devono variare con continuità da punto a punto e ciò impone che le loro derivate siano funzioni continue. Di conseguenza nelle equazioni (6.2.2) è possibile eliminare gli spostamenti ed ottenere le seguenti sei equazioni di compatibilità:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) ; \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Nei problemi bidimensionali, le sei equazioni di compatibilità si riducono alla sola equazione:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

6.6 Il Principio dei Lavori Virtuali

Consideriamo un mezzo continuo in condizioni di equilibrio: in ogni suo punto sono verificate le equazioni indefinite dell'equilibrio. Applichiamo al corpo uno spostamento virtuale infinitesimo compatibile con i vincoli e che soddisfi la congruenza interna. Possiamo allora scrivere la seguente relazione:

$$\int_{vol} \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X\right)\delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y\right)\delta v + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z\right)\delta w\right] dvol = 0$$

Dobbiamo sviluppare l'integrale calcolando le diverse sue componenti, ma prima introduciamo il Teorema di Green. Definiamo la seguente funzione:

$$g(x) = \Phi(x)\Psi(x)$$

La sua derivata vale:

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\Psi(x) + \Phi(x)\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}$$

da cui possiamo scrivere:

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\Psi(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} - \Phi(x)\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}$$

Integrando otteniamo:

$$\int_x \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\Psi(x)dx = \int_x \frac{\partial g(x)}{\partial x}dx - \int_x \Phi(x)\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}dx = g(x) - \int_x \Phi(x)\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}dx$$

da cui, ricordando la definizione della funzione $g(x)$:

$$\int_x \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\Psi(x)dx = \Phi(x)\Psi(x) - \int_x \Phi(x)\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}dx$$

Se la variabile dipende anche dalle coordinate y e z possiamo scrivere le seguenti equazioni:

$$\int_x \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Psi dx = \Phi\Psi - \int_x \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx \quad ; \quad \int_y \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Psi dy = \Phi\Psi - \int_y \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy \quad ; \quad \int_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Psi dz = \Phi\Psi - \int_z \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}dz$$

dove per brevità si è posto: $\Phi = \Phi(x, y, z)$ e $\Psi = \Psi(x, y, z)$.

Osserviamo inoltre che se proiettiamo un elemento infinitesimo di dimensione dS e di normale $\bar{n}$ appartenente alla superficie del solido sui piani coordinati otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} dS\cdot cos(\widehat{nx}) = dS\cdot l = dy\cdot dz \\ dS\cdot cos(\widehat{ny}) = dS\cdot m = dz\cdot dx \\ dS\cdot cos(\widehat{nz}) = dS\cdot n = dx\cdot dy \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \bar{n} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \qquad [6.6.1]$$

Adesso possiamo sviluppare i termini del primo integrale.

1) Poniamo: $\Phi = \sigma_x$ e $\Psi = \delta u$

$$\int_{vol}\left[\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta u\right]dvol = \int_{sup}\left[\int_x \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta u\right)dx\right]dydz \qquad [6.6.2]$$

Applicando il Teorema di Green all'integrale in x e osservando che $\frac{\partial(\delta u)}{\partial x} = \frac{\delta(\partial u)}{\partial x} = \delta\varepsilon_x$ abbiamo:

$$\int_x \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta u\right)dx = \sigma_x\delta u - \int_x \left(\sigma_x\frac{\partial(\delta u)}{\partial x}\right)dx = \sigma_x\delta u - \int_x (\sigma_x\delta\varepsilon_x)dx$$

Sostituendo nella (6.6.2) abbiamo:

$$\int_{sup}\left[\int_x \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta u\right)dx\right]dydz = \int_{sup}\sigma_x\delta u\cdot dydz - \int_{sup}\left[\int_x (\sigma_x\delta\varepsilon_x)dx\right]dydz$$

Applicando le eq.(6.6.1) ed osservando che $dvol = dxdydz$ possiamo scrivere:

$$\int_{sup}\left[\int_x \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta u\right)dx\right]dydz = \int_{sup}\sigma_x\delta u\cdot l\cdot dS - \int_{vol}(\sigma_x\delta\varepsilon_x)dvol \qquad [6.6.3]$$

2) Poniamo: $\Phi = \tau_{yx}$ e $\Psi = \delta u$

$$\int_{vol}\left[\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\right)\delta u\right]dvol = \int_{sup}\left[\int_y \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\delta u\right)dy\right]dzdx \qquad [6.6.4]$$

Applicando il Teorema di Green all'integrale in y e osservando che $\frac{\partial(\delta u)}{\partial y} = \frac{\delta(\partial u)}{\partial y}$ abbiamo:

$$\int_y \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\delta u\right)dy = \tau_{yx}\delta u - \int_y \left(\tau_{yx}\frac{\partial(\delta u)}{\partial y}\right)dy = \tau_{yx}\delta u - \int_y \left(\tau_{yx}\frac{\delta(\partial u)}{\partial y}\right)dy$$

Sostituendo nella (6.6.4) abbiamo:

$$\int_{sup}\left[\int_y \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\delta u\right)dy\right]dzdx = \int_{sup}\tau_{yx}\delta u\cdot dzdx - \int_{sup}\left[\int_y \left(\tau_{yx}\frac{\delta(\partial u)}{\partial y}\right)dy\right]dzdx$$

Applicando le eq.(6.6.1) ed osservando che $dvol = dxdydz$ possiamo scrivere:

$$\int_{sup}\left[\int_y \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\delta u\right)dy\right]dzdx = \int_{sup}\tau_{yx}\delta u\cdot m\cdot dS - \int_{vol}\left(\tau_{yx}\frac{\delta(\partial u)}{\partial y}\right)dvol \qquad [6.6.5]$$

3) Poniamo: $\Phi = \tau_{zx}$ e $\Psi = \delta u$

$$\int_{vol}\left[\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\delta u\right]dvol = \int_{sup}\left[\int_z \left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\delta u\right)dz\right]dxdy \qquad [6.6.6]$$

Applicando il Teorema di Green all'integrale in z e osservando che $\frac{\partial(\delta u)}{\partial z} = \frac{\delta(\partial u)}{\partial z}$ abbiamo:

$$\int_z \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta u\right) dz = \tau_{zx}\delta u - \int_z \left(\tau_{zx}\frac{\partial(\delta u)}{\partial z}\right) dz = \tau_{zx}\delta u - \int_z \left(\tau_{zx}\frac{\delta(\partial u)}{\partial z}\right) dz$$

Sostituendo nella (6.6.6) abbiamo:

$$\int_{sup}\left[\int_z \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta u\right) dz\right] dxdy = \int_{sup} \tau_{zx}\delta u \cdot dxdy - \int_{sup}\left[\int_z \left(\tau_{zx}\frac{\delta(\partial u)}{\partial z}\right) dz\right] dxdy$$

Applicando le eq.(6.6.1) ed osservando che $dvol = dxdydz$ possiamo scrivere:

$$\int_{sup}\left[\int_z \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta u\right) dz\right] dxdy = \int_{sup} \tau_{zx}\delta u \cdot n \cdot dS - \int_{vol}\left(\tau_{zx}\frac{\delta(\partial u)}{\partial z}\right) dvol \qquad [6.6.7]$$

4) Poniamo: $\Phi = \tau_{xy}$ e $\Psi = \delta v$

$$\int_{vol}\left[\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right)\delta v\right] dvol = \int_{sup}\left[\int_x \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\delta v\right) dx\right] dydz \qquad [6.6.8]$$

Applicando il Teorema di Green all'integrale in x e osservando che $\frac{\partial(\delta v)}{\partial x} = \frac{\delta(\partial v)}{\partial x}$ abbiamo:

$$\int_x \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\delta v\right) dx = \tau_{xy}\delta v - \int_x \left(\tau_{xy}\frac{\partial(\delta v)}{\partial x}\right) dx = \tau_{xy}\delta v - \int_x \left(\tau_{xy}\frac{\delta(\partial v)}{\partial x}\right) dx$$

Sostituendo nella (6.6.8) abbiamo:

$$\int_{sup}\left[\int_x \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\delta v\right) dx\right] dydz = \int_{sup} \tau_{xy}\delta v \cdot dydz - \int_{sup}\left[\int_x \left(\tau_{xy}\frac{\delta(\partial v)}{\partial x}\right) dx\right] dydz$$

Applicando le eq.(6.6.1) ed osservando che $dvol = dxdydz$ possiamo scrivere:

$$\int_{sup}\left[\int_x \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\delta v\right) dx\right] dydz = \int_{sup} \tau_{xy}\delta v \cdot l \cdot dS - \int_{vol}\left(\tau_{xy}\frac{\delta(\partial v)}{\partial x}\right) dvol \qquad [6.6.9]$$

5) Poniamo: $\Phi = \sigma_y$ e $\Psi = \delta v$

$$\int_{vol}\left[\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)\delta v\right] dvol = \int_{sup}\left[\int_y \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\delta v\right) dy\right] dzdx \qquad [6.6.10]$$

Applicando il Teorema di Green all'integrale in y e osservando che $\frac{\partial(\delta v)}{\partial y} = \frac{\delta(\partial v)}{\partial y} = \delta\varepsilon_y$ abbiamo:

$$\int_y \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\delta v\right) dy = \sigma_y\delta v - \int_y \left(\sigma_y\frac{\partial(\delta v)}{\partial y}\right) dy = \sigma_y\delta v - \int_y \left(\sigma_y\delta\varepsilon_y\right) dy$$

Sostituendo nella (6.6.10) abbiamo:

$$\int_{sup}\left[\int_y \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\delta v\right) dy\right] dzdx = \int_{sup} \sigma_y\delta v \cdot dzdx - \int_{sup}\left[\int_y \left(\sigma_y\delta\varepsilon_y\right) dy\right] dzdx$$

Applicando le eq.(6.6.1) ed osservando che $dvol = dxdydz$ possiamo scrivere:

$$\int_{sup}\left[\int_y \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\delta v\right) dy\right] dzdx = \int_{sup} \sigma_y\delta v \cdot m \cdot dS - \int_{vol}\left(\sigma_y\delta\varepsilon_y\right) dvol \qquad [6.6.11]$$

6) Poniamo: $\Phi = \tau_{zy}$ e $\Psi = \delta v$

$$\int_{vol}\left[\left(\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\delta v\right]dvol=\int_{sup}\left[\int_z\left(\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\delta v\right)dz\right]dxdy \qquad [6.6.12]$$

Applicando il Teorema di Green all'integrale in z e osservando che $\frac{\partial(\delta v)}{\partial z}=\frac{\delta(\partial v)}{\partial z}$ abbiamo:

$$\int_z\left(\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\delta v\right)dz=\tau_{zy}\delta v-\int_z\left(\tau_{zy}\frac{\partial(\delta v)}{\partial z}\right)dz=\tau_{zy}\delta v-\int_z\left(\tau_{zy}\frac{\delta(\partial v)}{\partial z}\right)dz$$

Sostituendo nella (6.6.12) abbiamo:

$$\int_{sup}\left[\int_z\left(\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\delta v\right)dz\right]dxdy=\int_{sup}\tau_{zy}\delta v\cdot dxdy-\int_{sup}\left[\int_z\left(\tau_{zy}\frac{\delta(\partial v)}{\partial z}\right)dz\right]dxdy$$

Applicando le eq.(6.6.1) ed osservando che $dvol=dxdydz$ possiamo scrivere:

$$\int_{sup}\left[\int_z\left(\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\delta v\right)dz\right]dxdy=\int_{sup}\tau_{zy}\delta v\cdot n\cdot dS-\int_{vol}\left(\tau_{zy}\frac{\delta(\partial v)}{\partial z}\right)dvol \qquad [6.6.13]$$

7) <u>Poniamo: $\Phi=\tau_{xz}$ e $\Psi=\delta w$</u>

$$\int_{vol}\left[\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\right)\delta w\right]dvol=\int_{sup}\left[\int_x\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\delta w\right)dx\right]dydz \qquad [6.6.14]$$

Applicando il Teorema di Green all'integrale in x e osservando che $\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}=\frac{\delta(\partial w)}{\partial x}$ abbiamo:

$$\int_x\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\delta w\right)dx=\tau_{xz}\delta w-\int_x\left(\tau_{xz}\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}\right)dx=\tau_{xz}\delta w-\int_x\left(\tau_{xz}\frac{\delta(\partial w)}{\partial x}\right)dx$$

Sostituendo nella (6.6.14) abbiamo:

$$\int_{sup}\left[\int_x\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\delta w\right)dx\right]dydz=\int_{sup}\tau_{xz}\delta w\cdot dydz-\int_{sup}\left[\int_x\left(\tau_{xz}\frac{\delta(\partial w)}{\partial x}\right)dx\right]dydz$$

Applicando le eq.(6.6.1) ed osservando che $dvol=dxdydz$ possiamo scrivere:

$$\int_{sup}\left[\int_x\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\delta w\right)dx\right]dydz=\int_{sup}\tau_{xz}\delta w\cdot l\cdot dS-\int_{vol}\left(\tau_{xz}\frac{\delta(\partial w)}{\partial x}\right)dvol \qquad [6.6.15]$$

8) <u>Poniamo: $\Phi=\tau_{yz}$ e $\Psi=\delta w$</u>

$$\int_{vol}\left[\left(\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)\delta w\right]dvol=\int_{sup}\left[\int_y\left(\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\delta w\right)dy\right]dzdx \qquad [6.6.16]$$

Applicando il Teorema di Green all'integrale in y e osservando che $\frac{\partial(\delta w)}{\partial y}=\frac{\delta(\partial w)}{\partial y}$ abbiamo:

$$\int_y\left(\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\delta w\right)dy=\tau_{yz}\delta w-\int_y\left(\tau_{yz}\frac{\partial(\delta w)}{\partial y}\right)dy=\tau_{yz}\delta w-\int_y\left(\tau_{yz}\frac{\delta(\partial w)}{\partial y}\right)dy$$

Sostituendo nella (6.6.16) abbiamo:

$$\int_{sup}\left[\int_y\left(\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\delta w\right)dy\right]dzdx=\int_{sup}\tau_{yz}\delta w\cdot dzdx-\int_{sup}\left[\int_y\left(\tau_{yz}\frac{\delta(\partial w)}{\partial y}\right)dy\right]dzdx$$

Applicando le eq.(6.6.1) ed osservando che $dvol=dxdydz$ possiamo scrivere:

$$\int_{sup}\left[\int_y\left(\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\delta w\right)dy\right]dzdx=\int_{sup}\tau_{yz}\delta w\cdot m\cdot dS-\int_{vol}\left(\tau_{yz}\frac{\delta(\partial w)}{\partial y}\right)dvol \qquad [6.6.17]$$

9) Poniamo: $\Phi = \sigma_z$ e $\Psi = \delta w$

$$\int_{vol} \left[\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \delta w \right] dvol = \int_{sup} \left[\int_z \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta w \right) dz \right] dxdy \qquad [6.6.18]$$

Applicando il Teorema di Green all'integrale in z e osservando che $\frac{\partial(\delta w)}{\partial z} = \frac{\delta(\partial w)}{\partial z} = \delta \varepsilon_z$ abbiamo:

$$\int_z \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta w \right) dz = \sigma_z \delta w - \int_z \left(\sigma_z \frac{\partial(\delta w)}{\partial z} \right) dz = \sigma_z \delta w - \int_z (\sigma_z \delta \varepsilon_z) dz$$

Sostituendo nella (6.6.18) abbiamo:

$$\int_{sup} \left[\int_z \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta w \right) dz \right] dxdy = \int_{sup} \sigma_z \delta w \cdot dxdy - \int_{sup} \left[\int_z (\sigma_z \delta \varepsilon_z) dz \right] dxdy$$

Applicando le eq.(6.6.1) ed osservando che $dvol = dxdydz$ possiamo scrivere:

$$\int_{sup} \left[\int_z \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta w \right) dz \right] dxdy = \int_{sup} \sigma_z \delta w \cdot n \cdot dS - \int_{vol} (\sigma_z \delta \varepsilon_z) dvol \qquad [6.6.19]$$

Riassumendo le equazioni (6.6.3), (6.6.5), (6.6.7), (6.6.9), (6.6.11), (6.6.13), (6.6.15), (6.6.17) e (6.6.19); otteniamo:

$$\int_{vol} \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u \right] dvol = \int_{sup} \sigma_x l \, \delta u \, dS - \int_{vol} (\sigma_x \cdot \delta \varepsilon_x) dvol$$

$$\int_{vol} \left[\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta u \right] dvol = \int_{sup} \tau_{yx} m \, \delta u \, dS - \int_{vol} \left[\tau_{yx} \cdot \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dvol$$

$$\int_{vol} \left[\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta u \right] dvol = \int_{sup} \tau_{zx} n \, \delta u \, dS - \int_{vol} \left[\tau_{zx} \cdot \delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dvol$$

$$\int_{vol} \left[\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \delta v \right] dvol = \int_{sup} \tau_{xy} l \, \delta v \, dS - \int_{vol} \left[\tau_{xy} \cdot \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dvol$$

$$\int_{vol} \left[\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \delta v \right] dvol = \int_{sup} \sigma_y m \, \delta v \, dS - \int_{vol} (\sigma_y \cdot \delta \varepsilon_y) dvol$$

$$\int_{vol} \left[\left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \delta v \right] dvol = \int_{sup} \tau_{zy} n \, \delta v \, dS - \int_{vol} \left[\tau_{zy} \cdot \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dvol$$

$$\int_{vol} \left[\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \delta w \right] dvol = \int_{sup} \tau_{xz} l \, \delta w \, dS - \int_{vol} \left[\tau_{xz} \cdot \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dvol$$

$$\int_{vol} \left[\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \delta w \right] dvol = \int_{sup} \tau_{yz} m \, \delta w \, dS - \int_{vol} \left[\tau_{yz} \cdot \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dvol$$

$$\int_{vol} \left[\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \delta w \right] dvol = \int_{sup} \sigma_z n \, \delta w \, dS - \int_{vol} (\sigma_z \cdot \delta \varepsilon_z) dvol$$

Osserviamo che le deformazioni virtuali di scorrimento valgono:

$$\delta\gamma_{xy} = \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\delta\gamma_{yz} = \delta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \delta\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\delta\gamma_{zx} = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Quindi sommando ed ordinando abbiamo:

$$\int_{sup}(\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n)\delta u\, dS + \int_{sup}(\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n)\,\delta v\, dS + \int_{sup}(\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n)\,\delta w\, dS -$$

$$-\left[\int_{vol}(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx})dvol\right]$$

Ricordando le eq.(6.4.2) che rappresentano le equazioni di equilibrio sulla superficie del solido, i primi tre integrali dell'ultima espressione possono sintetizzarsi nel modo seguente:

$$\int_{sup}\Phi_x\delta u\, dS + \int_{sup}\Phi_y\,\delta v\, dS + \int_{sup}\Phi_z\,\delta w\, dS = \int_{sup}\{\Phi\}^T\begin{Bmatrix}\delta u\\ \delta v\\ \delta w\end{Bmatrix} dS = \int_{sup}\{\Phi\}^T\{\delta s\}\, dS$$

Invece l'integrale di volume dell'ultima espressione assume la forma:

$$\int_{vol}(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx})dvol = \int_{vol}\{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\}dvol$$

dove $\{\sigma\}$ rappresenta il tensore degli sforzi in forma vettoriale e $\{\delta\varepsilon\}$ il corrispondente tensore delle deformazioni virtuali.

In sintesi l'integrale di volume delle equazioni indefinite dell'equilibrio moltiplicate per i rispettivi spostamenti virtuali assume la forma:

$$\int_{sup}\{\Phi\}^T\{\delta s\}\, dS + \int_{vol}\{\mathrm{F}_v\}^T\{\delta s\}\, dvol - \int_{vol}\{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\}\, dvol = 0 \qquad [6.6.20]$$

dove $\{\mathrm{F}_v\}^T = \{X \quad Y \quad Z\}$ rappresenta il vettore delle forze di massa per unità di volume. Indicando con $\mathcal{L}_{int}$ il lavoro delle forze interne e con $\mathcal{L}_{ext}$ quello delle forze esterne, abbiamo:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_{vol}\{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\}\, dvol \qquad ; \qquad \mathcal{L}_{ext} = \int_{sup}\{\Phi\}^T\{\delta s\}\, dS + \int_{vol}\{\mathrm{F}_v\}^T\{\delta s\}\, dvol$$

e quindi $\mathcal{L}_{ext} = \mathcal{L}_{int}$

Questa non è altro che l'espressione del Principio dei Lavori Virtuali che afferma:

> "*Condizione necessaria e sufficiente perché una struttura permanga nel suo stato di equilibrio è che per ogni spostamento virtuale compatibile con i vincoli, il lavoro delle forze esterne sia uguale a quello delle forze interne*".

L'espressione $\sigma^T\delta\varepsilon$ rappresenta l'incremento di energia elastica conseguente alla deformazione virtuale $\delta\varepsilon$:

$$\delta U_e = \{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\}$$

La derivata dell'energia elastica rispetto alle deformazioni vale quindi:

$$\frac{\partial U_e}{\partial \varepsilon} = \{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$$

L'energia elastica U_e è una quantità scalare, prodotto del vettore degli sforzi $\{\sigma\}$ per il vettore delle deformazioni $\{\varepsilon\}$. La sua derivata rispetto al vettore delle deformazioni è pari al vettore degli sforzi $\{\sigma\}$.
Se la deformazione cresce da zero al suo valore ultimo, l'energia elastica totale si ottiene integrando i suoi incrementi infinitesimi:

$$U_e = \int [E]\{\varepsilon\}\, d\varepsilon = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[E]\{\varepsilon\}$$

L'integrale deve essere esteso anche ai carichi esterni, in quanto gli spostamenti crescono e il lavoro delle forze esterne diventa:

$$U_f = \{\Phi\}^T\{s\} + \{\mathrm{F}_v\}^T\{s\}$$

dove $\{s\}^T = \{u \quad v \quad w\}$. E' importante osservare che forze e spostamenti sono indipendenti: mentre gli spostamenti crescono fino al loro valore finale, le forze rimangono costanti.

In conclusione, l'integrale dell'espressione (6.6.20) diventa:

$$\pi_{pt} = U_e + U_f = \frac{1}{2}\int_{vol}\{\varepsilon\}^T[E]\{\varepsilon\}\, dvol - \int_{sup}\Phi^T\{s\}\, dS - \int_{vol}\mathrm{F}_v{}^T\{s\}\, dvol \qquad [6.6.21]$$

Poiché l'energia è una quantità scalare si può scrivere: $U_f^T = U_f$.

Ricordando la proprietà dei prodotti matriciali per cui $\{a\}^T\{v\} = \{v\}^T\{a\}$, possiamo scrivere che

$$\{\Phi\}^T\{s\} = \{s\}^T\{\Phi\} \qquad \text{e} \qquad \{\mathrm{F}_v\}^T\{s\} = \{s\}^T\{\mathrm{F}_v\}$$

da cui:

$$\pi_{pt} = U_e + U_f = \frac{1}{2}\int_{vol}\{\varepsilon\}^T[E]\{\varepsilon\}\, dvol - \int_{sup}\{s\}^T\{\Phi\}\, dS - \int_{vol}\{s\}^T\{\mathrm{F}_v\}\, dvol \qquad [6.6.22]$$