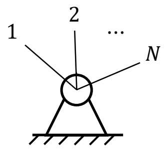
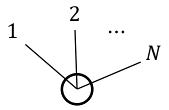
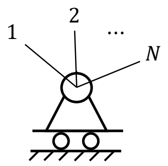
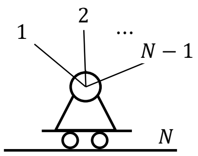
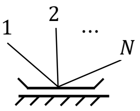
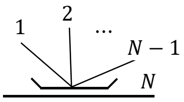
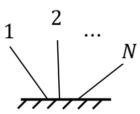
La lezione è stata registrata ed è reperibile all'indirizzo:
https://unica.adobeconnect.com/pizqbv8dx9og/

EQUILIBRIO DI UN INSIEME ISOSTATICO DI CORPI RIGIDI

All'inizio di queste diapositive si riassumono gli schemi dei vincoli maggiormente utilizzati negli esercizi che seguiranno.

Vincolo	Schema	GdL	GdL_R	GdV
Cerniera a terra		$3N$	N: rotazioni delle travi	$2N$
Cerniera libera		$3N$	N: rotazioni delle travi 2: spostamenti della cerniera	$2N-2$
Carrello a terra		$3N$	N: rotazioni delle travi; 1: spostamento del carrello in direzione parallela al terreno.	$2N-1$
Carrello su trave libera		$3N$	3: GdL della trave N-esima di appoggio; $N-1$: rotazioni delle $N-1$ travi collegate alla cerniera; 1: spostamento del carrello sulla trave di appoggio.	$2N-3$
Pattino a terra		$3N$	1: spostamento del pattino in direzione parallela al terreno	$3N-1$
Pattino su trave libera		$3N$	3: GdL della trave N-esima di appoggio; 1: spostamento del pattino sulla trave di appoggio.	$3N-4$
Incastro		$3N$	0	$3N$

N: numero di travi che concorrono sul vincolo
GdL : gradi di libertà prima dell'applicazione del vincolo
GdL_R : gradi di libertà residui dopo l'applicazione del vincolo
GdV : gradi di libertà impediti dal vincolo, cioè gradi di vincolo: $GdV = GdL - GdL_R$

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER L'EQUILIBRIO DI UN INSIEME DI CORPI RIGIDI VINCOLATI TRA DI LORO E' CHE OGNI CORPO DELL'INSIEME STIA IN EQUILIBRIO.

ESEMPI

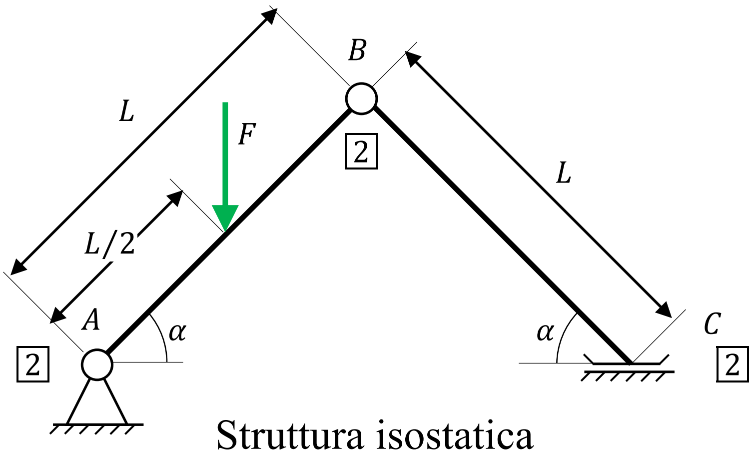
Negli esempi che seguono ho indicato con il colore **rosso** le forze incognite ed in **verde** quelle note.

1) ARCO A TRE CERNIERE (CON PATTINO A TERRA)

$Travi: N = 2$

$GdL = 3N = 6$

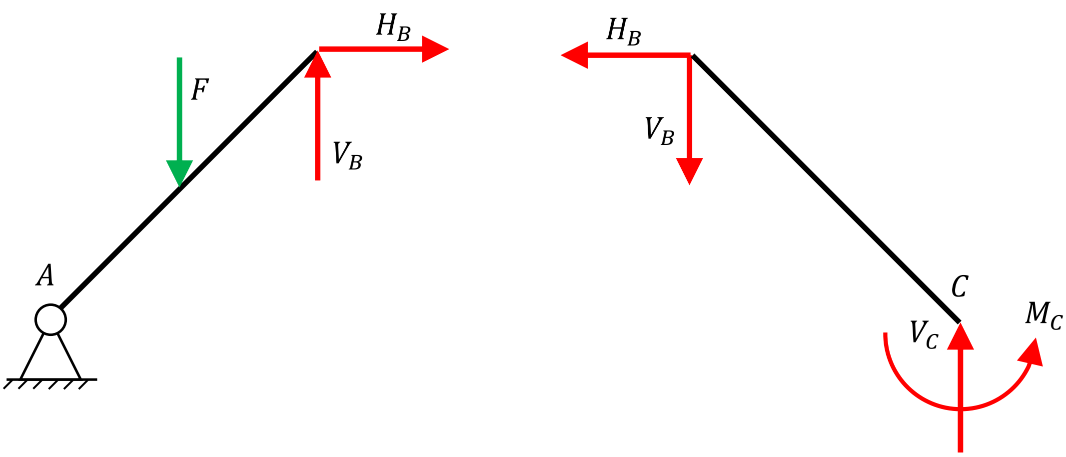
$GdV = 2 + 2 + 2 = 6$



Struttura isostatica

CANCELLAZIONE PARZIALE DEI VINCOLI:

a) si elimina la cerniera in B ed il pattino in C;



1) Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione dell'asta AB intorno al nodo A:

$$\sum_A M = V_B L \cdot cos(\alpha) - H_B L \cdot sin(\alpha) - F\frac{L}{2} \cdot cos(\alpha) = 0$$

da cui si ricava: $V_B = H_B \cdot tang(\alpha) + \frac{F}{2}$

2) Si scrive l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale dell'asta BC:

$$\sum F_x = H_B = 0$$

perché questo pattino non impedisce gli spostamenti orizzontali. Sostituendo il valore di H_B nell'equazione precedente si ottiene:

$$V_B = \frac{F}{2}$$

3) Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione dell'asta BC:

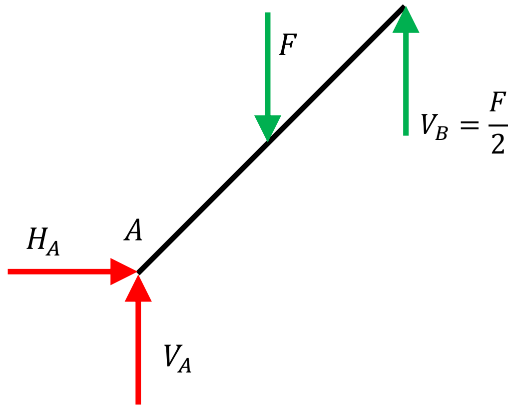
$$\sum_C M = M_C + V_B L \cdot cos(\alpha) = 0$$

da cui si ricava:

$$M_C = -V_B L \cdot cos(\alpha) = -\frac{FL}{2} cos(\alpha)$$

Il momento M_C risulta quindi orario.

b) si elimina la cerniera a terra in A



1) Si scrive l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale dell'asta AB:

$$\sum F_x = H_A = 0$$

2) Si scrive l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale dell'asta AB:

$$\sum F_y = V_A + V_B - F = 0$$

da cui:

$$V_A = F - V_B = F - \frac{F}{2} = \frac{F}{2}$$

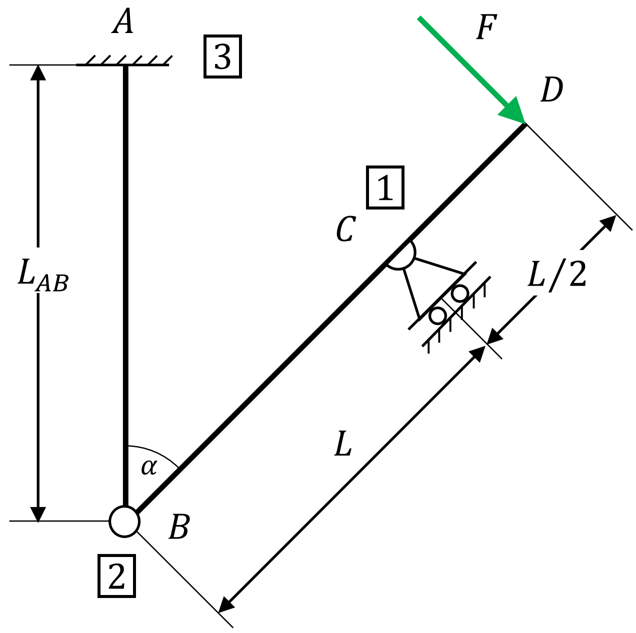
2) CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI DI UN INSIEME ISOSTATICO COMPOSTO DA DUE ASTE RIGIDE.

$Travi: N = 2$

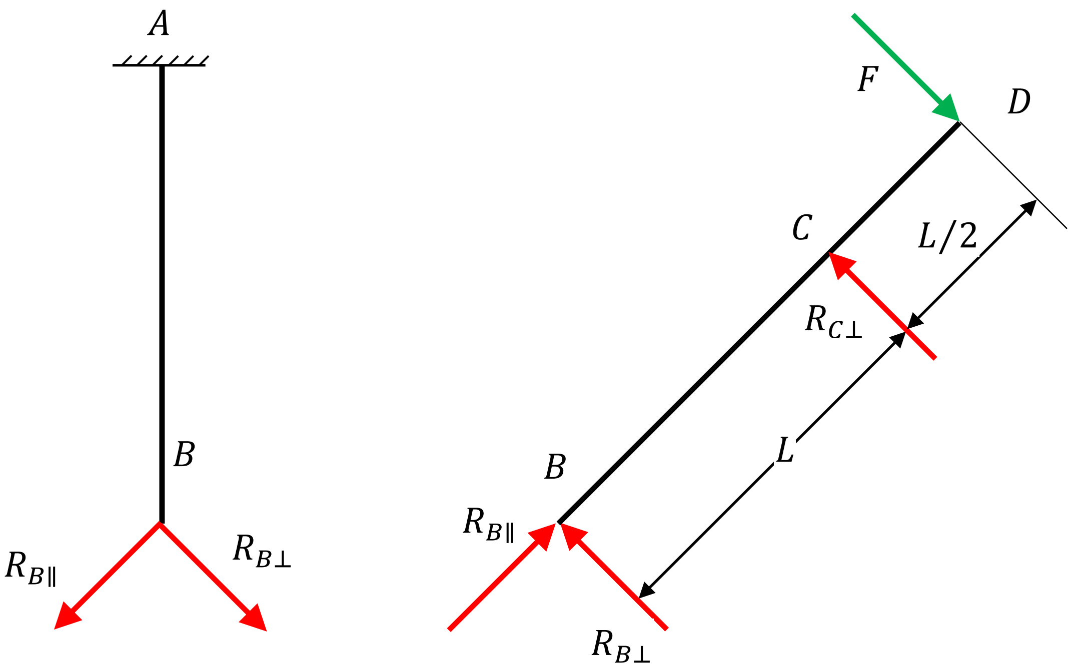
$GdL: 3N = 6$

$GdV: 3 + 2 + 1 = 6$

$ISOSTATICA\ NON\ LABILE$



a) Si elimina la cerniera in B e il carrello in C



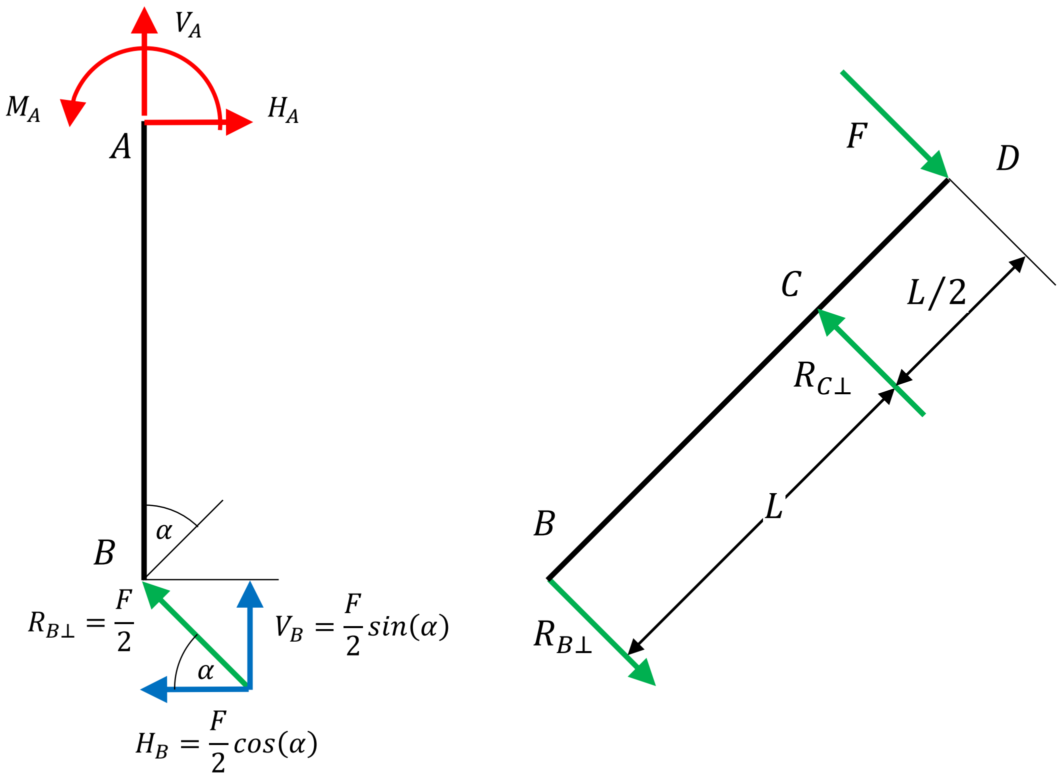
1) Si scrivono le equazioni cardinali della statica per l'equilibrio dell'asta BCD:

Asta BCD:
$$\begin{cases} \sum F_{\parallel} = R_{B\parallel} = 0 \\ \sum F_{\perp} = R_{B\perp} + R_{C\perp} - F = 0 \\ \sum_B M = R_{C\perp} L - F\frac{3}{2}L = 0 \end{cases}$$

da cui:
$$\begin{cases} R_{B\parallel} = 0 \\ R_{B\perp} = F - R_{C\perp} = F - \frac{3}{2}F = -\frac{F}{2} \\ R_{C\perp} = \frac{3}{2}F \end{cases}$$

Si cambia il verso ed il segno alla forza $R_{B\perp}$

b) Si elimina l'incastro in A



1) Si scrivono le equazioni cardinali della statica per l'equilibrio dell'asta AB:

Asta AB:
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - H_B = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B = 0 \\ \sum_A M = M_A - H_B L_{AB} = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} H_A = H_B = \dfrac{F}{2} cos(\alpha) \\ V_A = -V_B = -\dfrac{F}{2} sin(\alpha) \\ M_A = H_B L_{AB} = \dfrac{F L_{AB}}{2} cos(\alpha) \end{cases}$$

Si cambia il verso ed il segno alla forza V_A.

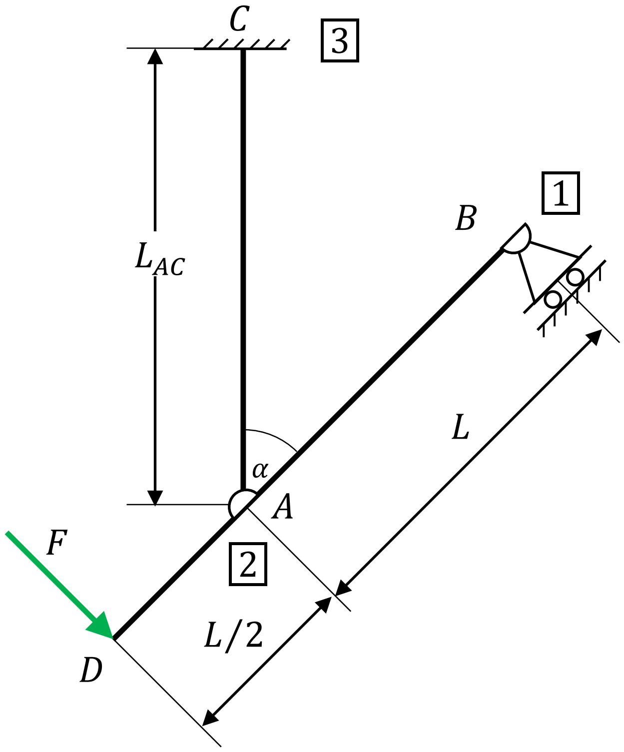
3) CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI DI UN INSIEME ISOSTATICO COMPOSTO DA DUE ASTE RIGIDE.

$Travi: N = 2$

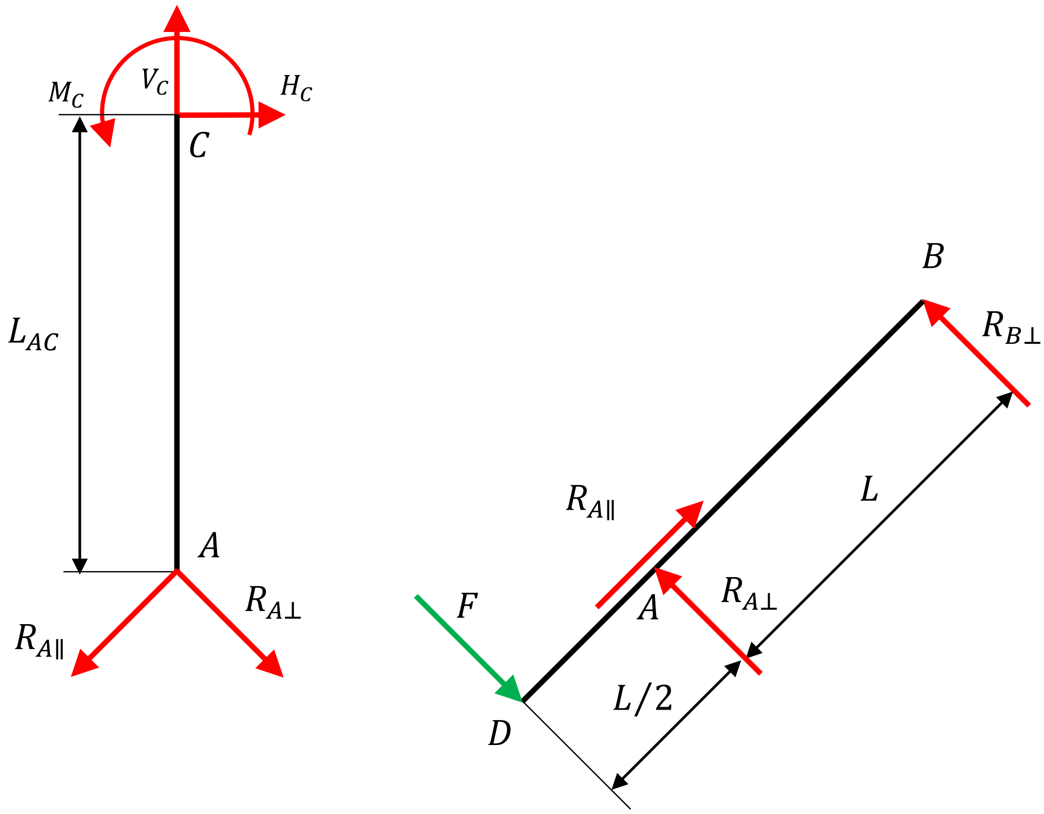
$GdL: 3N = 6$

$GdV: 2 + 1 + 3 = 6$

$ISOSTATICA\ NON\ LABILE$



a) Si eliminano tutti i vincoli e si sostituiscono le reazioni:



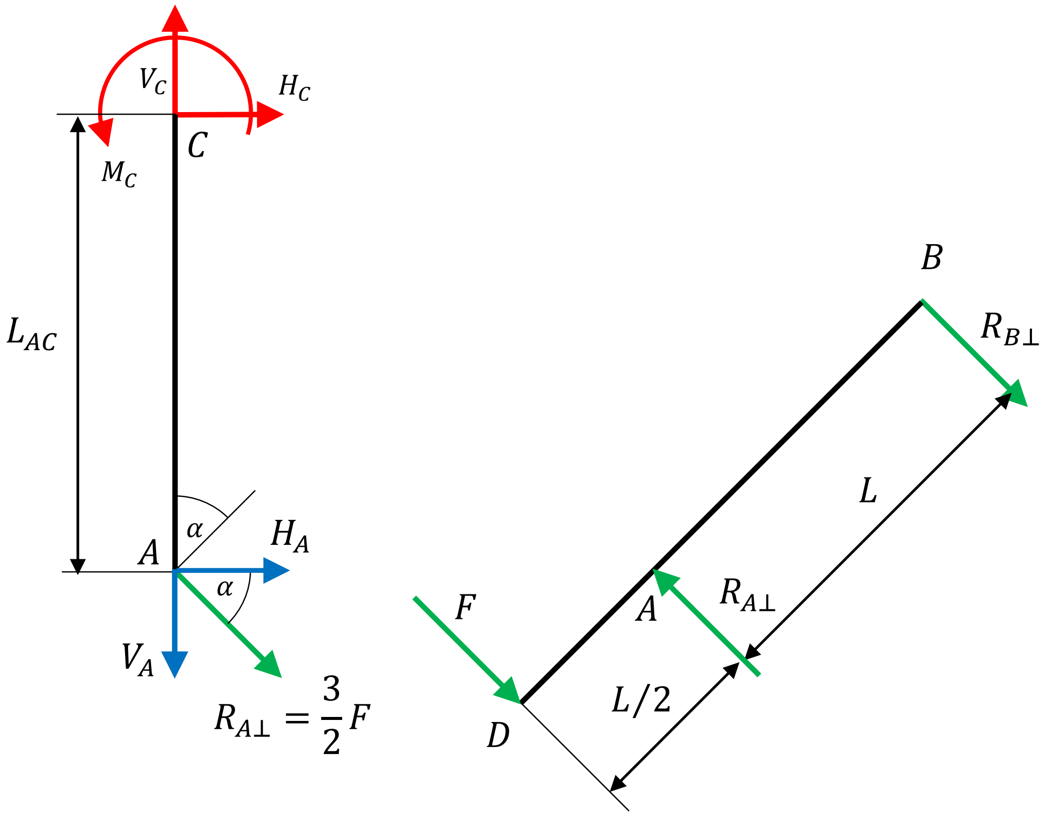
1) Si scrivono le equazioni cardinali della statica per l'equilibrio dell'asta DAB:

Asta DAB:
$$\begin{cases} \sum F_{\parallel} = R_{A\parallel} = 0 \\ \sum F_{\perp} = R_{A\perp} + R_{B\perp} - F = 0 \\ \sum_A M = R_{B\perp} L + F\frac{L}{2} = 0 \end{cases}$$

da cui:
$$\begin{cases} R_{A\parallel} = 0 \\ R_{A\perp} = F - R_{B\perp} = F + \frac{F}{2} = \frac{3}{2}F \\ R_{B\perp} = -\frac{F}{2} \end{cases}$$

Si cambia il verso ed il segno alla forza $R_{B\perp}$

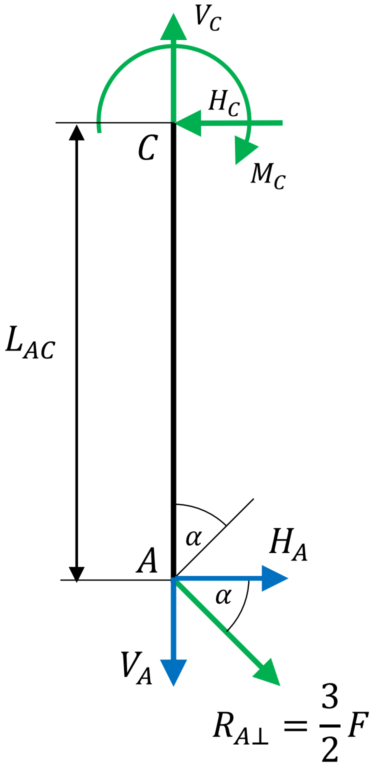
2) Si scrivono le equazioni cardinali della statica per l'equilibrio dell'asta AC:



Asta AC:
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A + H_C = 0 \\ \sum F_y = V_C - V_A = 0 \\ \sum_C M = M_C + H_A L_{AC} = 0 \end{cases}$$

da cui:
$$\begin{cases} H_C = -H_A = -R_{A\perp}cos(\alpha) = -\frac{3F}{2}cos(\alpha) \\ V_C = V_A = \frac{3F}{2}sin(\alpha) \\ M_C = -H_A L_{AC} = -\frac{3}{2}F L_{AC}cos(\alpha) \end{cases}$$

Si cambia il verso ed il segno alla forza H_C ed al momento M_C.



$$\begin{cases} H_C = \dfrac{3F}{2}cos(\alpha) \\ V_C = \dfrac{3F}{2}sin(\alpha) \\ M_C = \dfrac{3}{2}F L_{AC}cos(\alpha) \end{cases}$$

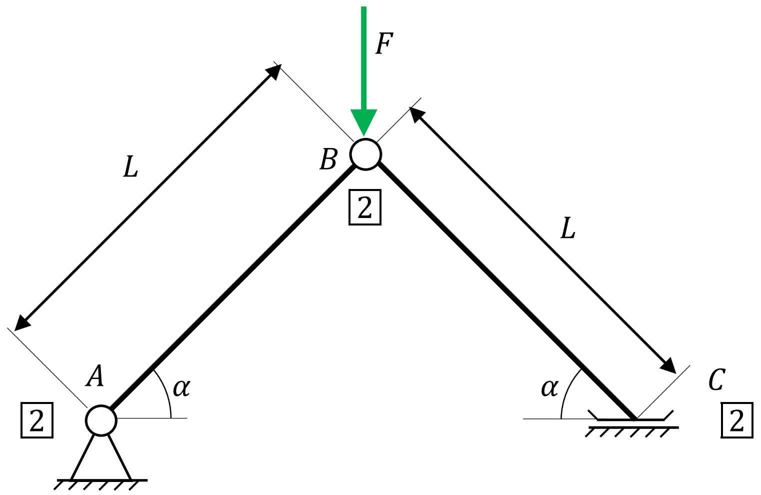
4) CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI IN UN ARCO A TRE CERNIERE CARICATO SULLA CERNIERA COMUNE

$Travi: N = 2$

$GdL = 3N = 6$

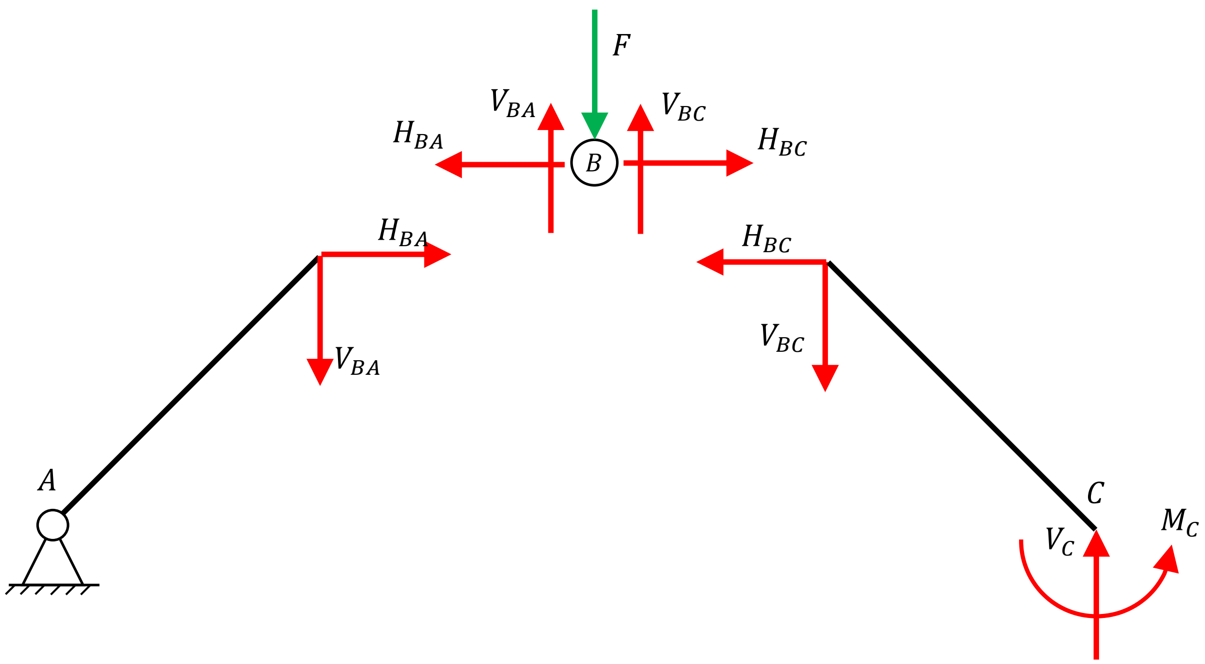
$GdV = 2 + 2 + 2 = 6$

Struttura isostatica

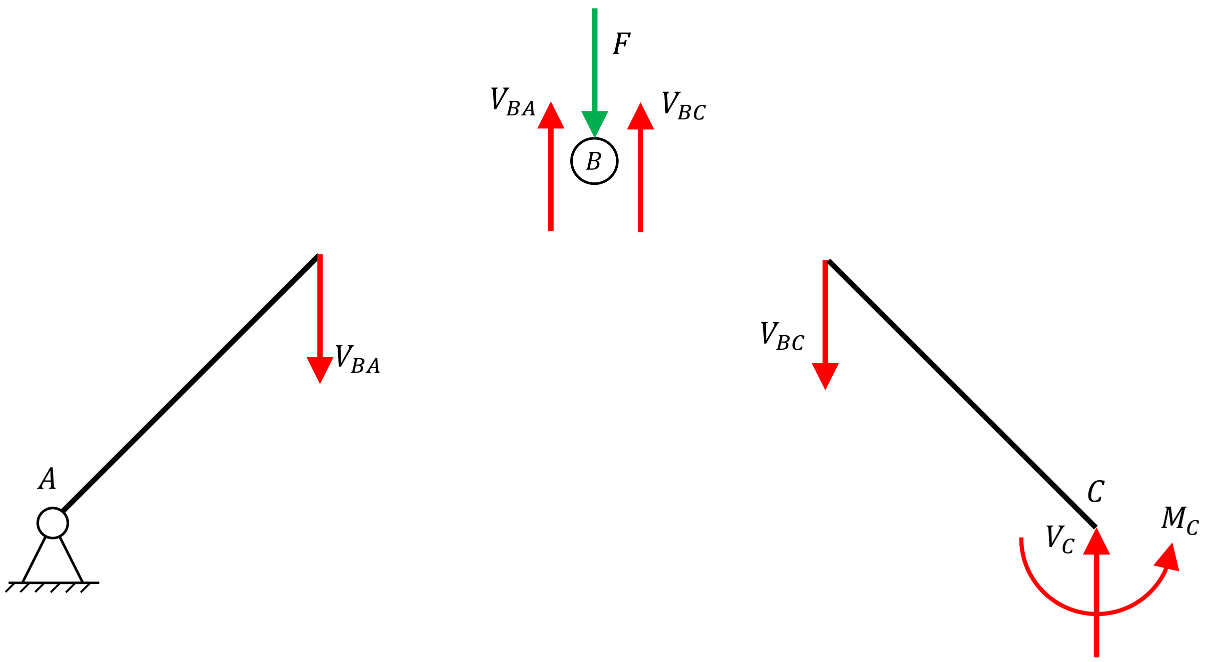


Cancellazione parziale dei vincoli:

1) si isola la cerniera in B e si elimina il pattino in C;



Osservando l'asta BC si ricava che $H_{BC} = 0$ (unica forza orizzontale); passando al nodo B si osserva che $H_{BA} = 0$. Si ottiene:



Osservando l'asta AB, vediamo che per l'equilibrio alla rotazione deve valere: $V_{BA} = 0$. Tornando alla cerniera B osserviamo che $V_{Bc} = F$.

In fine è possibile calcolare le reazioni in C:

$$\begin{cases} \sum F_y = V_C - V_{BC} = 0 \\ \sum_C M = M_C + V_{BC} L \cdot cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} V_C = V_{BC} = F \\ M_C = -V_{BC} L \cdot cos(\alpha) = -FL \cdot cos(\alpha) \end{cases}$$

Si cambia verso e segno al momento M_C.

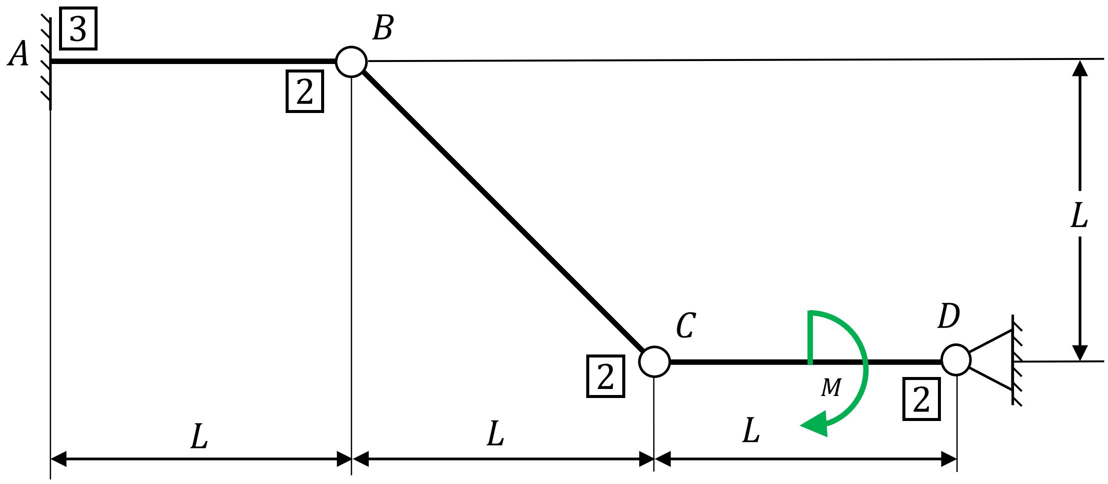
E' interessante notare che l'asta AB è totalmente scarica, quindi non contribuisce a sostenere il carico F.

5) CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI DI UN INSIEME ISOSTATICO COMPOSTO DA TRE ASTE RIGIDE.

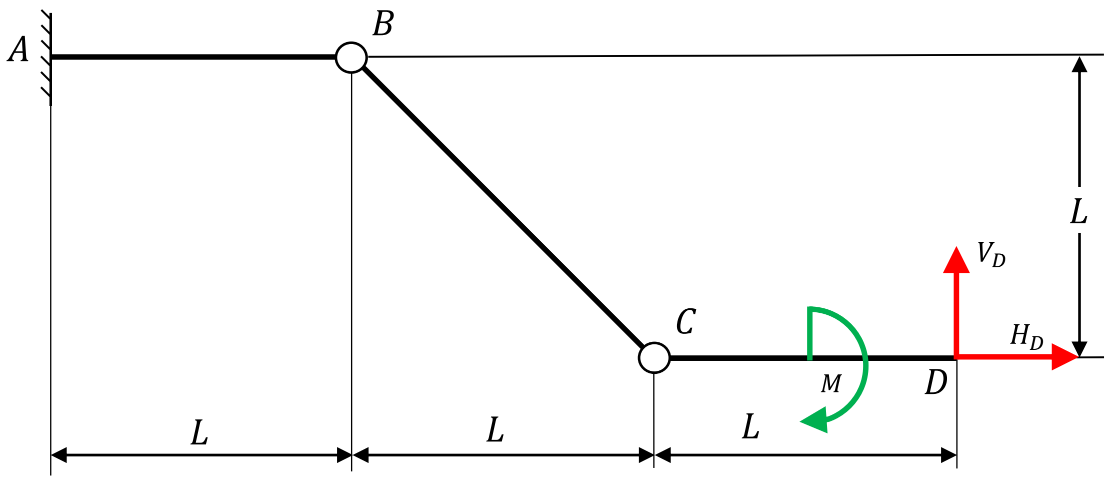
$Travi: N = 3$

$GdL: 3N = 9$ $\quad$ *ISOSTATICA NON LABILE*

$GdV: 3 + 2 + 2 + 2 = 9$



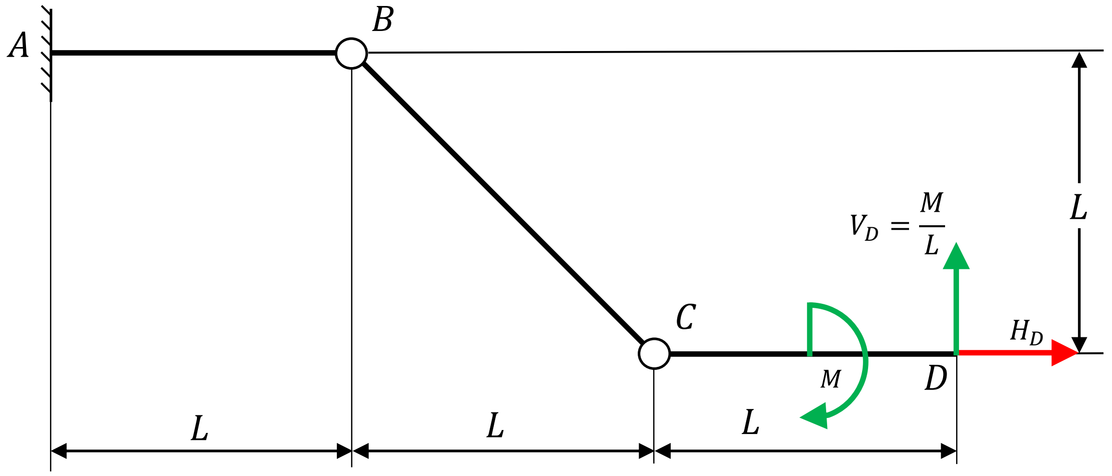
1) Si elimina la cerniera a terra in D.



Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione della sola asta CD:

$$\sum_C M = V_D L - M = 0$$

da cui: $$V_D = \frac{M}{L}$$



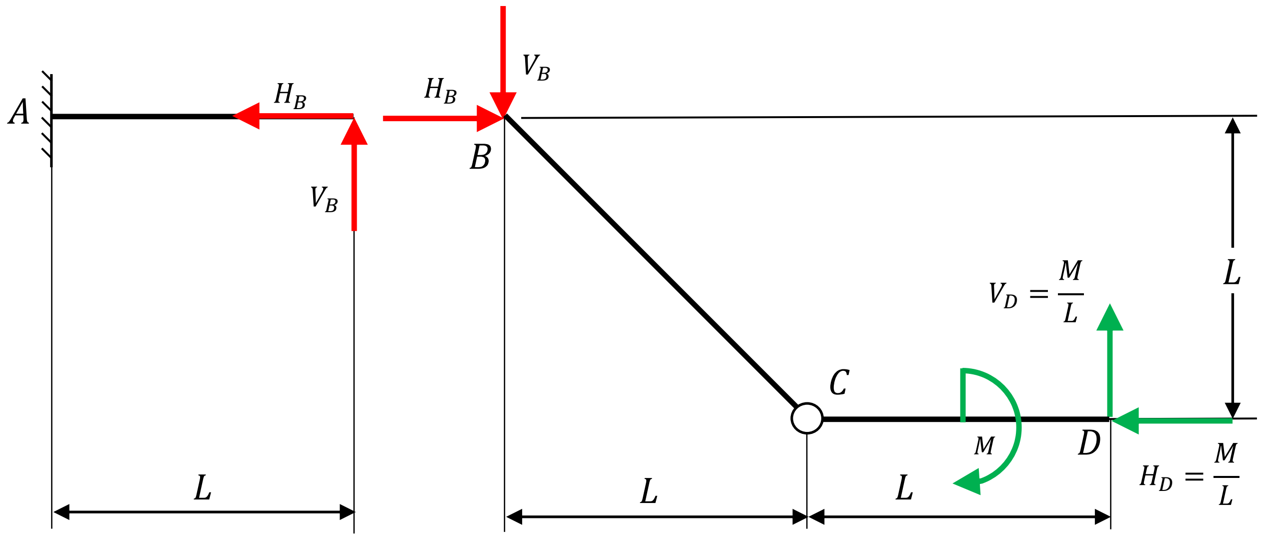
Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione delle aste BC e CD intorno al nodo B:

$$\sum_B M = V_D 2L + H_D L - M = 0$$

da cui: $$H_D = \frac{M}{L} - 2V_D = \frac{M}{L} - 2\frac{M}{L} = -\frac{M}{L}$$

Si cambia verso e segno alla forza H_D.

2) Si elimina la cerniera in B.



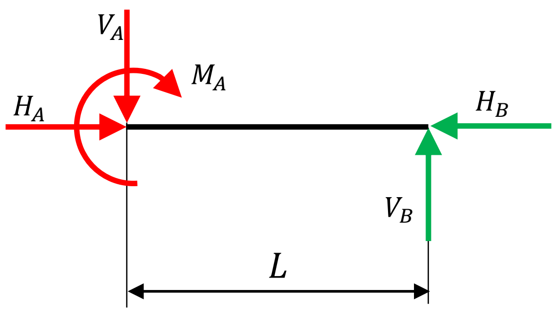
Si scrivono le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale delle aste BCD:

$$\begin{cases} \sum F_x = H_B - H_D = 0 \\ \sum F_y = V_D - V_B = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} H_B = H_D = \dfrac{M}{L} \\ V_B = V_D = \dfrac{M}{L} \end{cases}$$

3) Si elimina l'incastro in A e si scrivono le equazioni cardinali della statica per l'asta AB.



Asta AB:

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - H_B = 0 \\ \sum F_y = V_B - V_A = 0 \\ \sum_A M = V_B L - M_A = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} H_A = H_B = \dfrac{M}{L} \\ V_A = V_B = \dfrac{M}{L} \\ M_A = V_B L = M \end{cases}$$

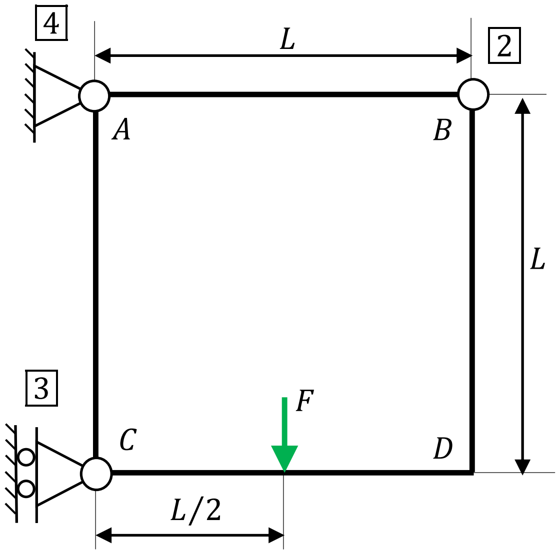
6) CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI DI UN INSIEME ISOSTATICO COMPOSTO DA TRE ASTE RIGIDE (ANELLO CHIUSO).

$Travi: N = 3$

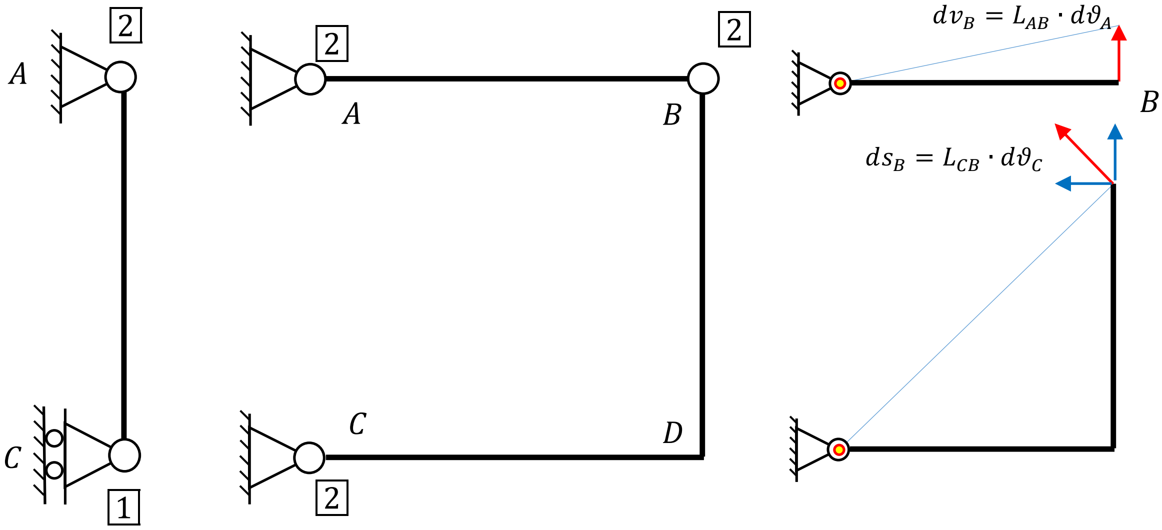
$GdL = 3N = 9$

$GdV = 4 + 2 + 3 = 9$

$ISOSTATICA$

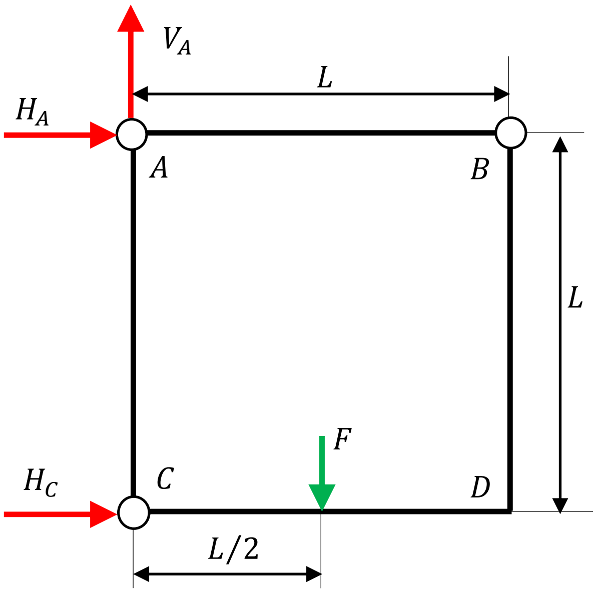


ANALISI CINEMATICA



Struttura isostatica non labile

Eliminiamo la cerniera nel nodo A, il carrello nel nodo C e calcoliamo le reazioni a terra.



Equazioni cardinali della statica su tutta la struttura

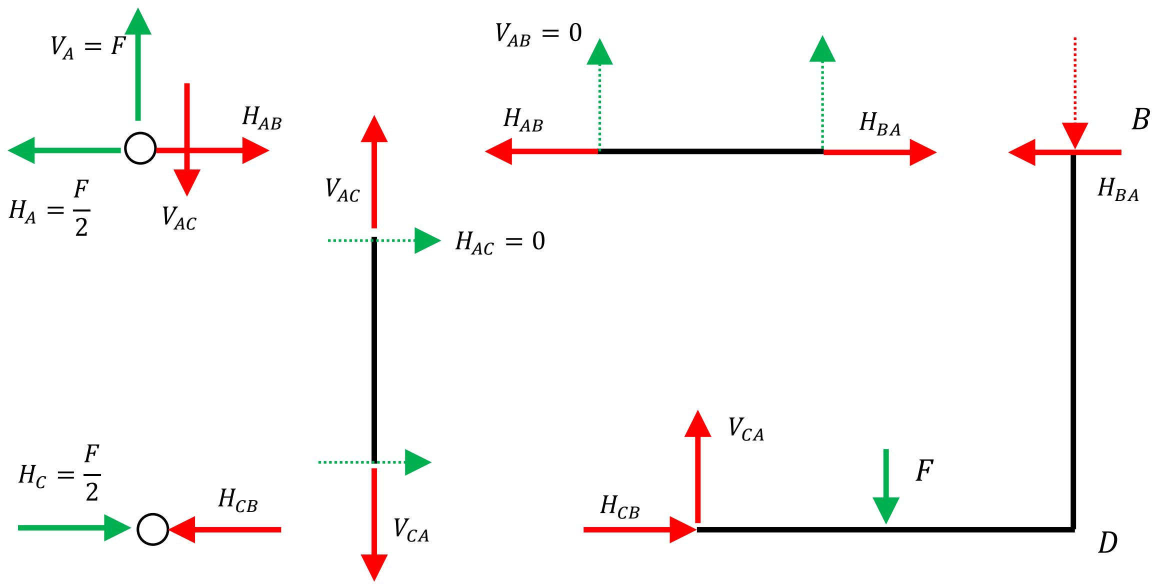
Tutta la struttura:
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A + H_C = 0 \\ \sum F_y = V_A - F = 0 \\ \sum_A M_z = H_C L - F\frac{L}{2} = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} H_A = -H_C \\ V_A = F \\ H_C = \dfrac{F}{2} \end{cases}$$

Si cambia verso e segno alla reazione H_A.

Si eliminano tutti i vincoli e si sostituiscono le reazioni incognite.



Osserviamo che le aste AC e AB sono rettilinee, uniscono 2 cerniere e non sono caricate: di conseguenza si tratta di bielle scariche che possono sopportare solo forze di trazione o di compressione.

Ho indicato con le frecce verdi tratteggiate le reazioni nulle

Ogni parte della struttura deve risultare in equilibrio.

1) Nodo A: $\begin{cases} \sum F_x = H_{AB} - H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A - V_{AC} = 0 \end{cases}$ **da cui** $\begin{cases} H_{AB} = H_A = \frac{F}{2} \\ V_{AC} = V_A = F \end{cases}$

2) Nodo C: $\sum F_x = H_C - H_{CB} = 0$ **da cui** $H_{CB} = H_C = \frac{F}{2}$

3) Asta AC: $\sum F_y = V_{AC} - V_{CA} = 0$ **da cui** $V_{CA} = V_{AC} = F$

4) Asta AB: $\sum F_x = H_{BA} - H_{AB} = 0$ **da cui** $H_{BA} = H_{AB} = \frac{F}{2}$

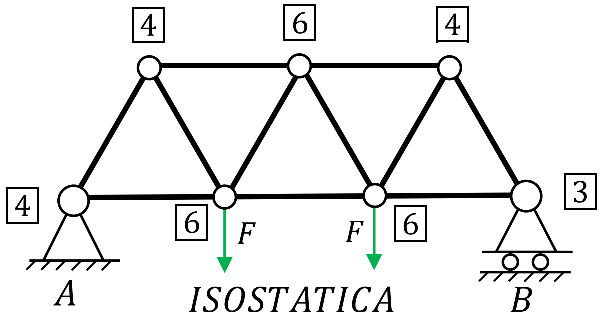
5) Asta CDB: $\begin{cases} \sum F_x = H_{CB} - H_{BA} = 0 \\ \sum F_y = V_{CA} - F = 0 \\ \sum_C M_z = H_{BA} L - F \frac{L}{2} = 0 \end{cases}$ **VERIFICA OK**

7) Struttura reticolare

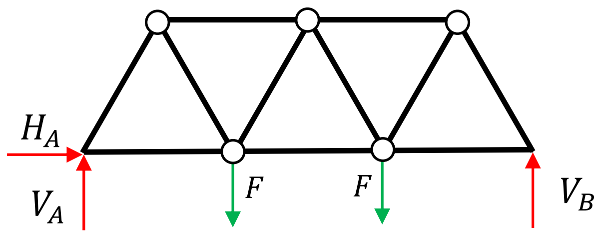
$Travi: N = 11$

$GdL = 3N = 33$

$GdV = 4 + 3 \times 6 + 2 \times 4 + 3 = 33$



Si ipotizza che tutte le aste siano lunghe L.
Si eliminano i vincoli a terra e si calcolano le rispettive reazioni:



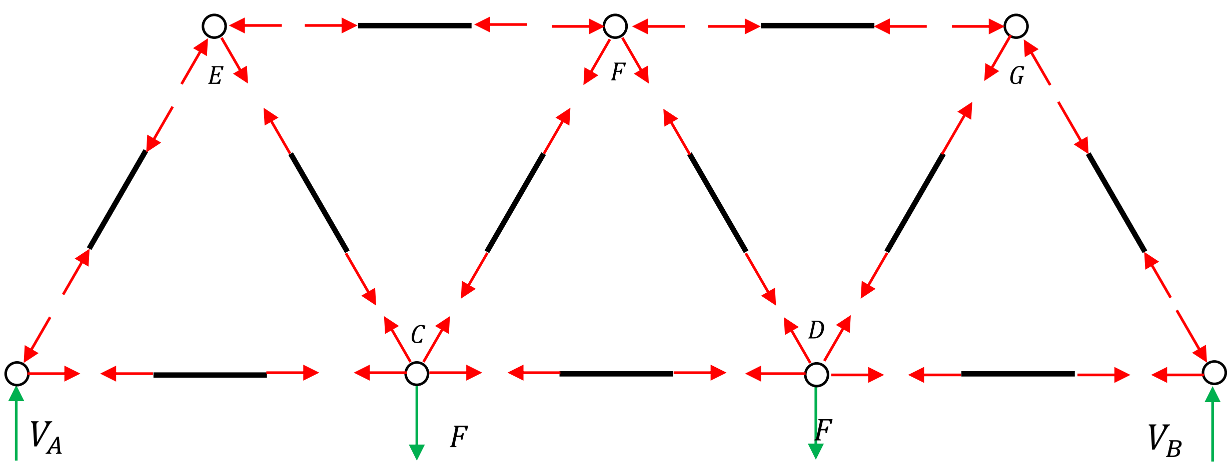
Intera struttura:

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_Y = V_A + V_B - 2F = 0 \\ \sum_A M_z = V_B 3L - F2L - FL = 0 \end{cases}$$

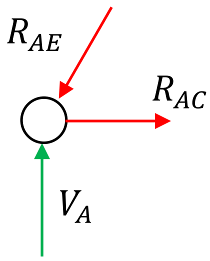
da cui:

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = F \\ V_B = F \end{cases}$$

Osserviamo che la struttura è formata solo da bielle scariche.
Liberiamo tutte le aste ed inseriamo le reazioni vincolari.



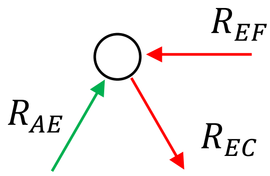
Nodo A:
$$\begin{cases} \sum F_x = R_{AC} - R_{AE}cos(60°) = 0 \\ \sum F_y = V_A - R_{AE}sin(60°) = 0 \end{cases}$$



da cui
$$\begin{cases} R_{AC} = R_{AE}cos(60°) = \frac{F}{\sqrt{3}} \\ R_{AE} = \frac{V_A}{sin(60°)} = \frac{2F}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Asta AE: Compressa
Asta AC: Tesa

Nodo E:
$$\begin{cases} \sum F_x = R_{AE}cos(60°) + R_{EC}cos(60°) - R_{EF} = 0 \\ \sum F_y = R_{AE}sin(60°) - R_{EC}sin(60°) = 0 \end{cases}$$

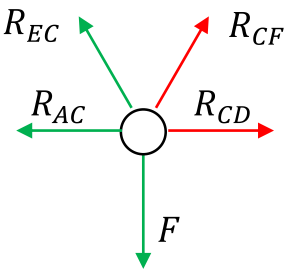


da cui:
$$\begin{cases} R_{EF} = R_{AE}cos(60°) + R_{EC}cos(60°) = \frac{2F}{\sqrt{3}} \\ R_{EC} = R_{AE} = \frac{2F}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Asta EF: Compressa
Asta EC: Tesa

Nodo C:
$$\begin{cases} \sum F_x = R_{CD} - R_{AC} + R_{CF}cos(60°) - R_{EC}cos(60°) = 0 \\ \sum F_y = R_{EC}sin(60°) + R_{CF}sin(60°) - F = 0 \end{cases}$$

da cui:
$$\begin{cases} R_{CD} = R_{AC} + R_{EC}cos(60°) = \frac{2F}{\sqrt{3}} \\ R_{CF} = \frac{F}{sin(60°)} - R_{EC} = \frac{2F}{\sqrt{3}} - \frac{2F}{\sqrt{3}} = 0 \end{cases}$$



Asta CF: Scarica
Asta CD: Tesa

Notiamo che la struttura, i carichi ed i vincoli sono simmetrici rispetto al piano verticale passante per il nodo F. Di conseguenza le travi a destra del piano di simmetria subiscono le stesse forze delle corrispondenti travi a sinistra dello stesso piano.

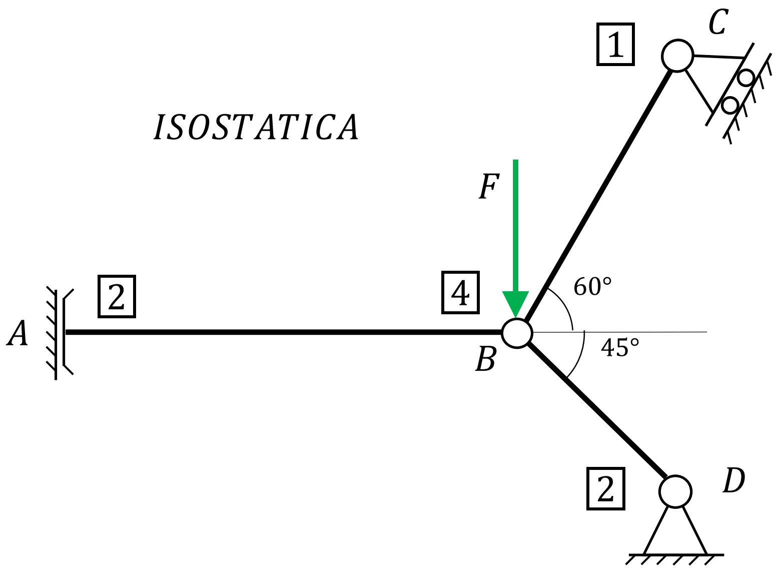
Sistema isostatico di tre aste rigide

$Travi: N = 3$

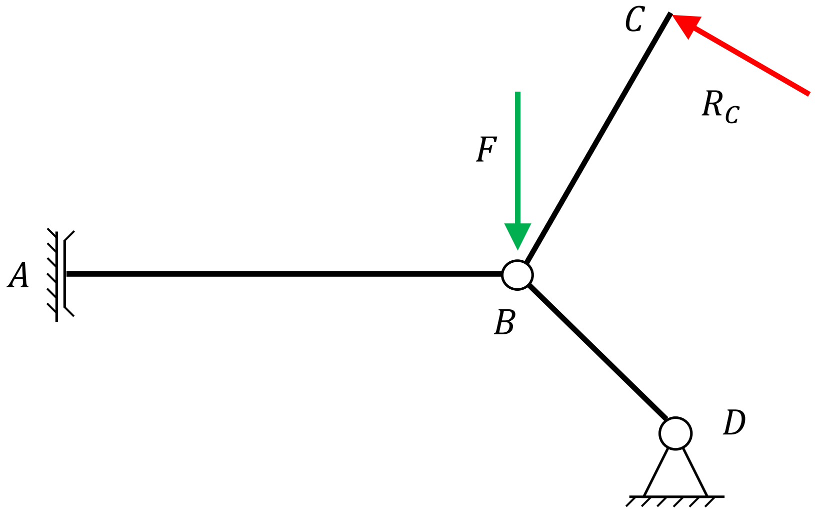
$GdL: 3N = 9$

$ISOSTATICA$

$GdV: 2 + 4 + 1 + 2 = 9$



Si elimina il carrello nel nodo C e si sostituiscono le reazioni incognite

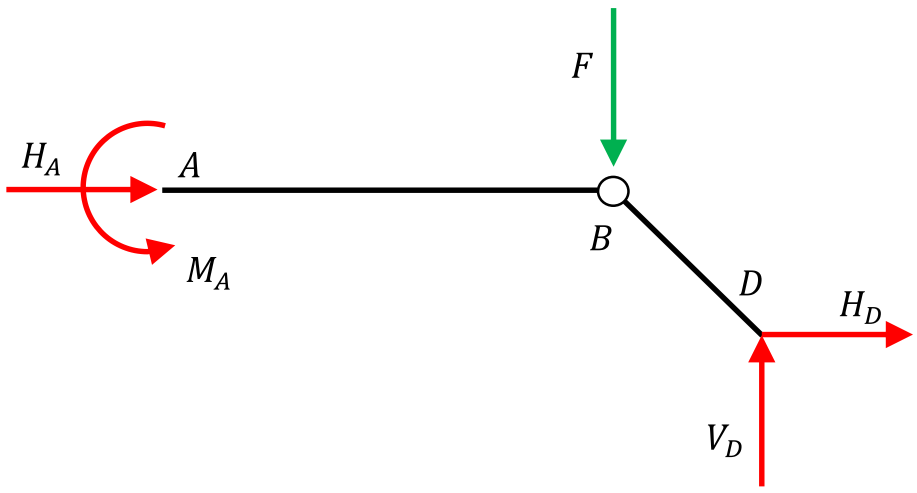


Si scrive l'equazione dell'equilibrio alla rotazione dell'asta BC intorno al nodo B:

$$\sum_B M_Z = R_C L_{BC} = 0$$

da cui risulta: $R_C = 0$. L'asta AC è scarica.

La struttura si riduce ad un arco a tre cerniere.
Si eliminano i vincoli a terra.



1) Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione della trave AB (intorno al nodo B)

$$\sum_B M_z = M_A = 0$$

2) Si scrive l'equazione di equilibrio di tutta la struttura alle forze verticali:

$$\sum F_y = V_D - F = 0$$

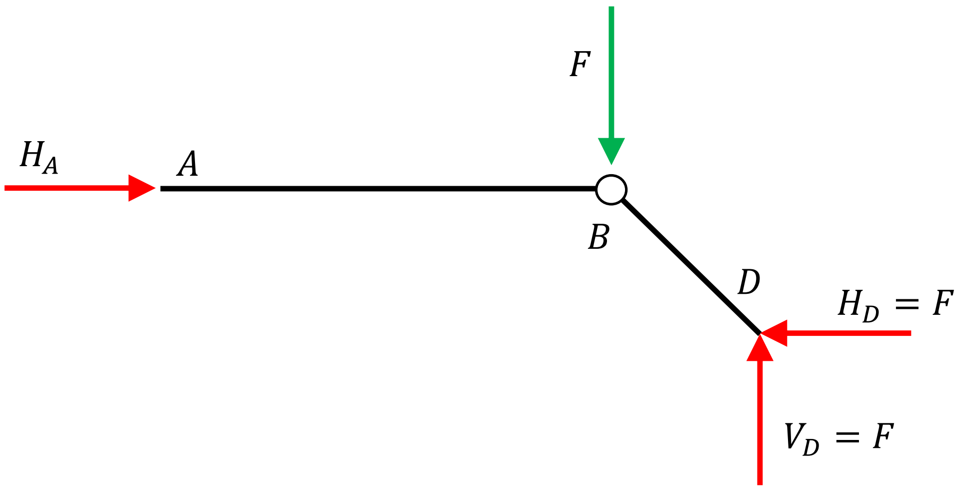
da cui: $V_D = F$

3) Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione della trave BD (intorno al nodo B)

$$\sum_B M_z = V_D L_{BD} cos(45°) + H_D L_{BD} sin(45°) = 0$$

da cui: $H_D = -V_D = -F$

Si cambia verso e segno alla reazione H_D.



4) Si scrive l'equazione di equilibrio di tutta la struttura alle forze orizzontali:

$$\sum F_x = H_A - H_D = 0$$

da cui:

$$H_A = F$$