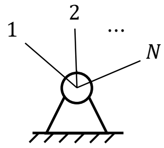
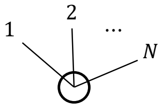
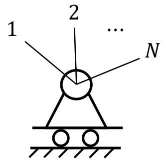
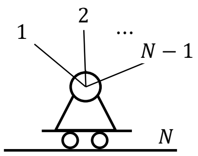
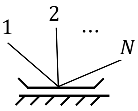
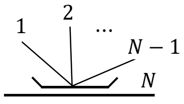
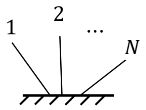
La lezione è stata registrata ed è reperibile all'indirizzo:
https://unica.adobeconnect.com/pnfrur42q9eq

EQUILIBRIO DI UN INSIEME ISOSTATICO DI CORPI RIGIDI

All'inizio di queste diapositive si riassumono gli schemi dei vincoli maggiormente utilizzati negli esercizi che seguiranno.

Vincolo	Schema	GdL	GdL_R	GdV
Cerniera a terra		$3N$	N: rotazioni delle travi	$2N$
Cerniera libera		$3N$	N: rotazioni delle travi 2: spostamenti della cerniera	$2N-2$
Carrello a terra		$3N$	N: rotazioni delle travi; 1: spostamento del carrello in direzione parallela al terreno.	$2N-1$
Carrello su trave libera		$3N$	3: GdL della trave N-esima di appoggio; $N-1$: rotazioni delle $N-1$ travi collegate alla cerniera; 1: spostamento del carrello sulla trave di appoggio.	$2N-3$
Pattino a terra		$3N$	1: spostamento del pattino in direzione parallela al terreno	$3N-1$
Pattino su trave libera		$3N$	3: GdL della trave N-esima di appoggio; 1: spostamento del pattino sulla trave di appoggio.	$3N-4$
Incastro		$3N$	0	$3N$

N: numero di travi che concorrono sul vincolo
GdL : gradi di libertà prima dell'applicazione del vincolo
GdL_R : gradi di libertà residui dopo l'applicazione del vincolo
GdV : gradi di libertà impediti dal vincolo, cioè gradi di vincolo: $GdV = GdL - GdL_R$

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER L'EQUILIBRIO DI UN INSIEME DI CORPI RIGIDI VINCOLATI TRA DI LORO E' CHE OGNI CORPO DELL'INSIEME STIA IN EQUILIBRIO.

ESEMPI

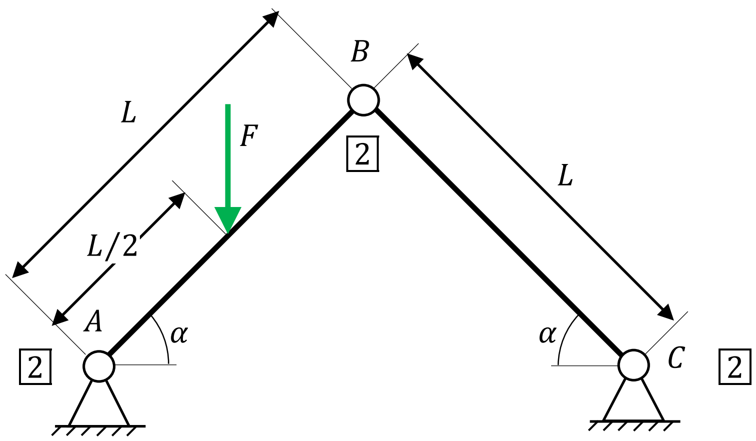
Negli esempi che seguono ho indicato con il colore **rosso** le forze incognite ed in **verde** quelle note.

ARCO A TRE CERNIERE

$Travi: N = 2$

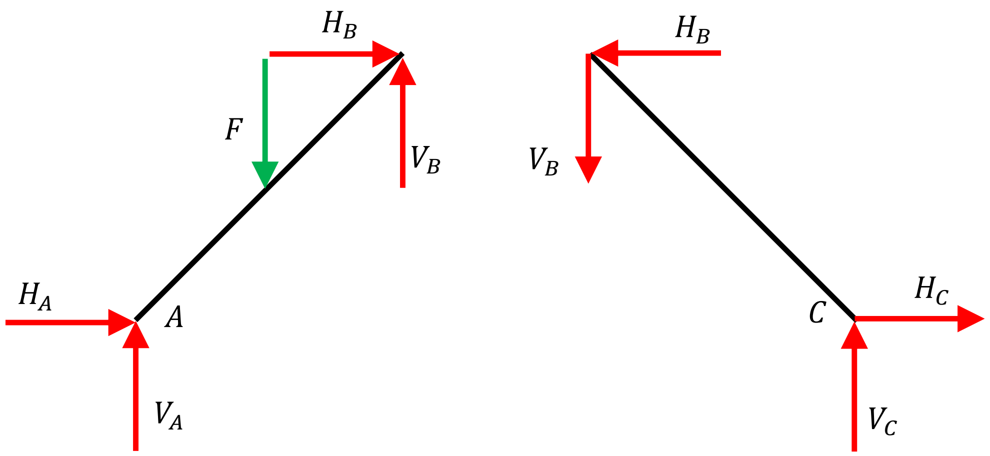
$GdL = 3N = 6$

$GdV = 2 + 2 + 2 = 6$



Struttura isostatica

<u>1° Metodo: cancellazione di tutti i vincoli</u>



Ci sono 6 incognite ($V_A, V_B, V_C, H_A, H_B, H_C$);

si possono scrivere 3 equazioni di equilibrio per ogni trave.

$$
\begin{cases}
Trave\ AB: \begin{cases} \sum F_x = H_A + H_B = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - F = 0 \\ \sum_A M = V_B L \cdot cos(\alpha) - H_B L \cdot sin(\alpha) - F\dfrac{L}{2} \cdot cos(\alpha) = 0 \end{cases} \\
Trave\ BC: \begin{cases} \sum F_x = H_C + H_B = 0 \\ \sum F_y = V_C + V_B = 0 \\ \sum_C M = V_B L \cdot cos(\alpha) + H_B L \cdot sin(\alpha) = 0 \end{cases}
\end{cases}
$$

In generale risolvere questi sistemi richiede molto tempo perché il numero di equazioni (e quindi di incognite) è pari al numero dei gradi di vincolo cioè 3N (strutture isostatiche).

In questo caso, sommando la 3° e la 6° equazione si ricava:

$$2V_B L \cdot cos(\alpha) - F\frac{L}{2} \cdot cos(\alpha) = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad V_B = \frac{F}{4}.$$

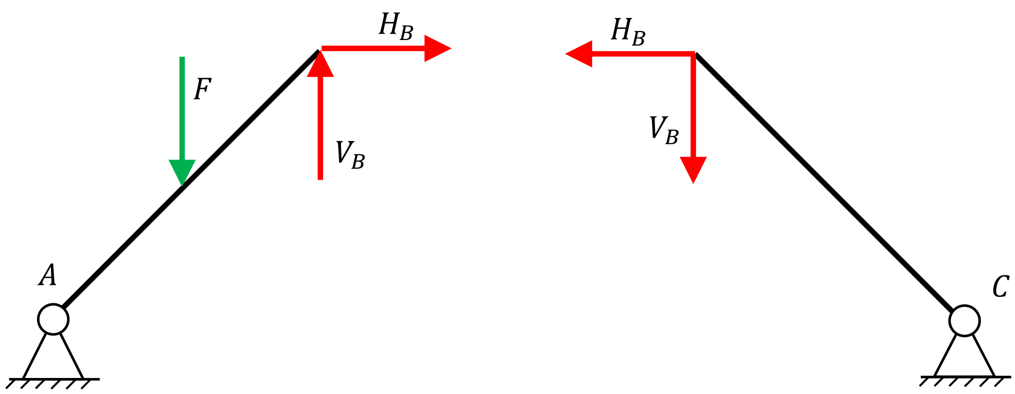
Sostituendo V_B nella 6° equazione di ricava:

$$H_B = -V_B \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} = -\frac{F}{4tang(\alpha)}$$

Poi le altre 4 incognite si calcolano facilmente.

2° Metodo (consigliato): cancellazione parziale dei vincoli

a) **Si elimina solo la cerniera in B**;



1) Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione dell'asta BC intorno al nodo C:

$$\sum_C M = V_B L \cdot cos(\alpha) + H_B L \cdot sin(\alpha) = 0$$

da cui si ricava: $H_B = -V_B \cdot \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$

2) Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione dell'asta AB intorno al nodo A:

$$\sum_A M = V_B L \cdot cos(\alpha) - H_B L \cdot sin(\alpha) - F\frac{L}{2} \cdot cos(\alpha) = 0$$

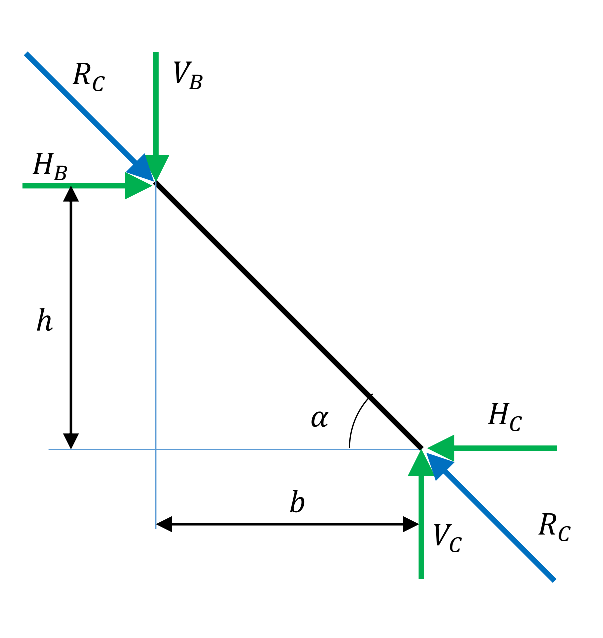
Sostituendo il valore di H_B appena calcolato si ottiene:

$$V_B L \cdot cos(\alpha) + V_B L \cdot sin(\alpha) - F\frac{L}{2} \cdot cos(\alpha) = 0$$

Dividendo tutto per $L \cdot sin(\alpha)$ si ottiene: $V_B = \frac{F}{4}$.

Note le reazioni V_B e H_B, si eliminano dalle travi AB e AC le cerniere a terra e se ne calcolano le reazioni nel modo consueto.

Osserviamo l'asta BC dopo avere eliminato la cerniera a terra e dopo avere cambiato il verso alla forza negativa H_B:



SOMMANDO LE REAZIONI:

$R_C = H_C + V_C$

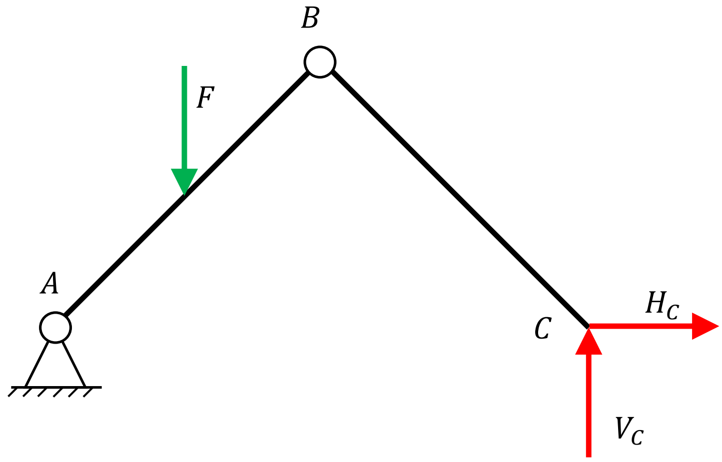
SI OSSERVA CHE LA RISULTANTE E' ALLINEATA CON LA TRAVE BC.

Poiché $H_B = V_B \cdot \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$ si ottiene $\frac{V_C}{H_C} = tang(\alpha) = \frac{h}{b}$

Una trave rettilinea che unisce due cerniere e sulla quale non agisce alcuna forza può sopportare solo forze allineate con il suo asse (di trazione oppure di compressione): le si attribuisce il nome di

BIELLA SCARICA.

b) **<u>Si elimina solo la cerniera a terra in C</u>**;



1) Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione di tutta la struttura intorno al punto A:

$$\sum_A M = V_C 2L \cdot cos(\alpha) - F\frac{L}{2} \cdot cos(\alpha) = 0$$

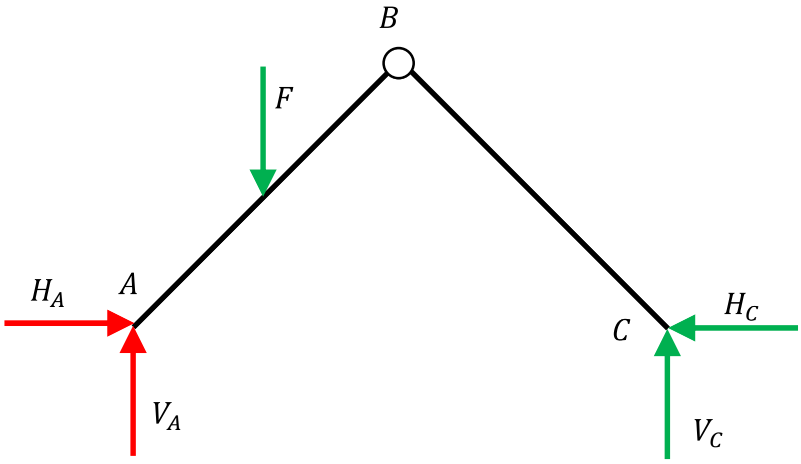
da cui si ricava: $V_C = \frac{F}{4}$

2) Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione della trave BC intorno al punto B:

$$\sum_C M = V_C L \cdot cos(\alpha) + H_C L \cdot sin(\alpha) = 0$$

da cui: $H_C = -V_C \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$

3) Eliminando anche la cerniera a terra in A si ottiene il seguente schema.



Visto che il valore di H_C è negativo, la forza ha verso contrario a quanto previsto: ne cambio il verso e gli assegno il valore positivo.

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - H_C = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_C - F = 0 \\ \sum_A M = V_C \cdot 2L \cdot cos(\alpha) - F\dfrac{L}{2} \cdot cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ricava:

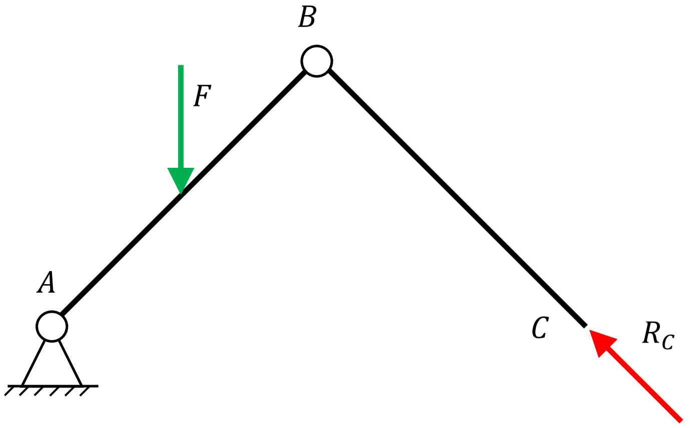
$$V_C = F\frac{L}{4}$$

che sostituita nella: $H_C = -V_C \dfrac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$ consente di calcolare H_C.

Note V_C e H_C le prime due equazioni del sistema consentono di calcolare H_A e V_A.

c) **<u>Si osserva che l'asta BC E' una BIELLA SCARICA</u>**;

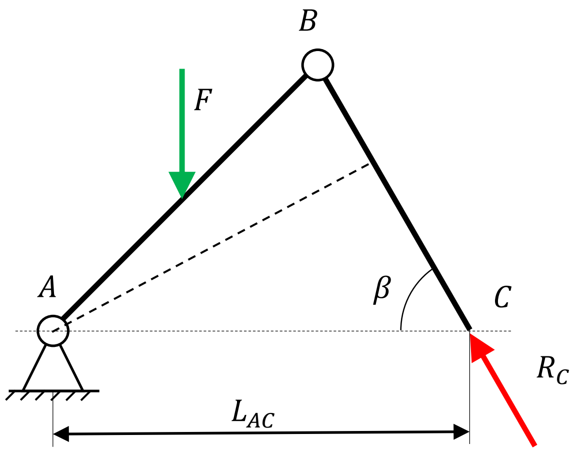
1) Si elimina la cerniera a terra in C e si sostituisce la reazione R_C allineata con la trave BC:



2) Si calcola il valore che deve assumere la reazione R_C per soddisfare l'equilibrio alla rotazione della struttura:

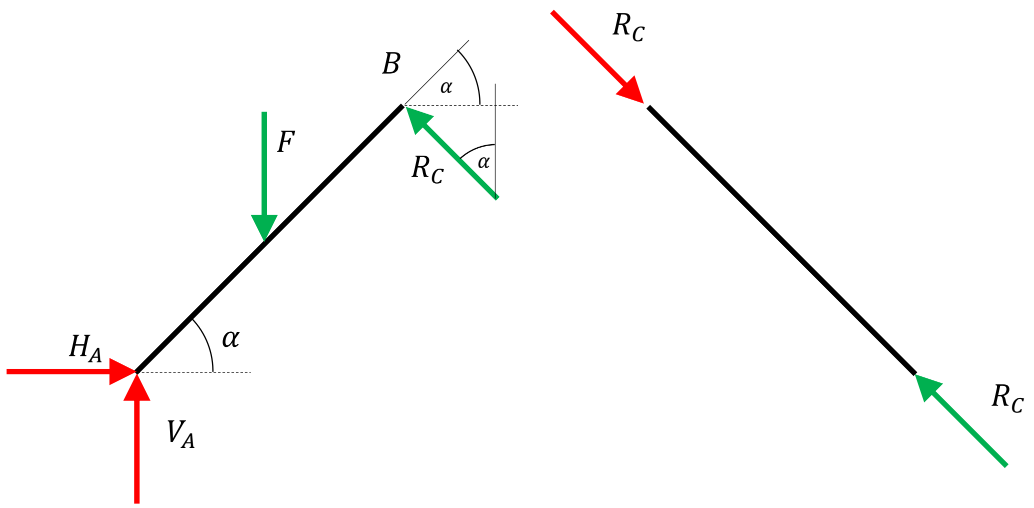
$$\sum_A M = R_C \cdot L_{AC} \cdot sin(\beta) - F\frac{L_{AB}}{2} \cdot cos(\alpha) = 0$$

ATTENZIONE AL CALCOLO DEL BRACCIO DELLA REAZIONE R_C RISPETTO AL PUNTO A.



<u>In generale gli angoli alla base α e β sono diversi</u>

3) Noto R_C il calcolo delle altre reazioni è banale:



Asta AB: $$\begin{cases} \sum F_x = H_A - R_C sin(\alpha) = 0 \\ \sum F_y = V_A - F + R_C cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Tornando al caso in esame con $\beta = \alpha$ e $L_{AC} = 2L \cdot cos(\alpha)$ si ottiene:

$$\sum_A M = R_C \cdot 2L \cdot cos(\alpha) \cdot sin(\alpha) - F\frac{L}{2} \cdot cos(\alpha) = 0$$

da cui: $$R_C = \frac{F}{4 \cdot sin(\alpha)}$$

Quindi:

$$V_C = R_C \cdot sin(\alpha) = \frac{F}{4} \quad ; \quad H_C = R_C \cdot cos(\alpha) = \frac{F}{4} \cdot \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

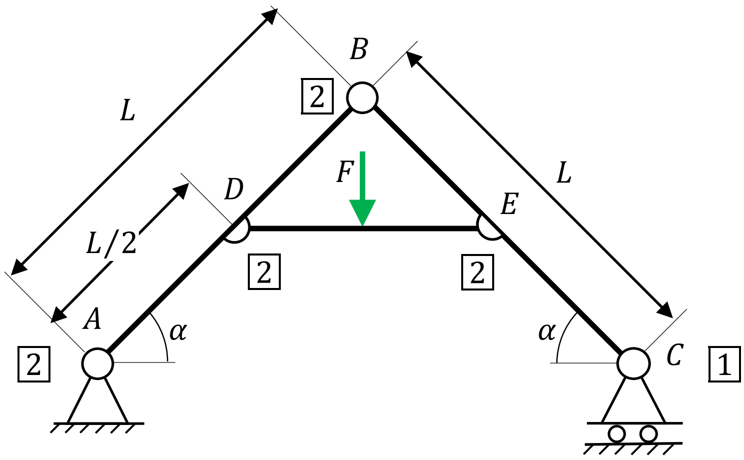
$$H_A = R_C sin(\alpha) = \frac{F}{4} \quad ; \quad V_A = F - R_C cos(\alpha) = F - \frac{F}{4} \cdot \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

SISTEMA ISOSTATICO DI TRE ASTE RIGIDE

$Travi: N = 3$

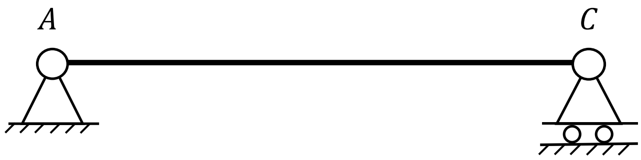
$GdL = 3N = 9$

$GdV = 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9$



ANALISI CINEMATICA

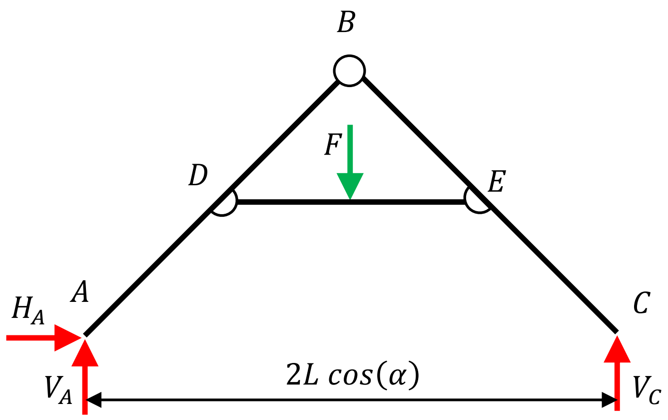
L’intera struttura può essere sostituita da un unico corpo rigido perché è formata da tre aste collegate con tre cerniere (in D, B, E):



Il metodo della “**cancellazione completa dei vincoli**” conduce ad un sistema di 9 equazioni in 9 incognite la cui soluzione richiede molto tempo.

In questo caso si consiglia una **sequenza di cancellazioni parziali**.

1) Si elimina la cerniera a terra nel nodo A ed il carrello nel nodo C.



e si scrivono le 3 equazioni cardinali della statica (3 incognite):

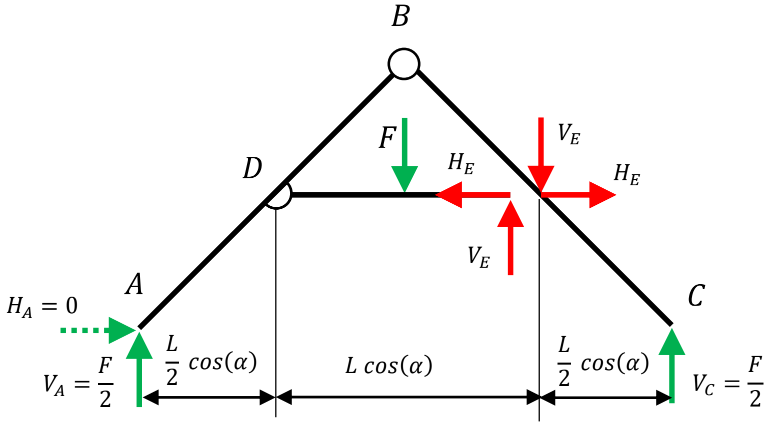
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_C - F = 0 \\ \sum_A M = V_C \cdot 2L \cdot cos(\alpha) - FL \cdot cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Dalla 1° equazione si ricava: $H_A = 0$

dalla 3°: $V_C = \frac{F}{2}$;

dalla 2°: $V_A = F - V_C = \frac{F}{2}$

2) Si elimina la cerniera nel nodo E e si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione dell'asta DE intorno al nodo D:



Ho indicato con il colore verde le forze note al momento del calcolo; in rosso quelle ancora incognite.

$$\sum_D M = V_E \cdot L \cdot cos(\alpha) - F\frac{L}{2} \cdot cos(\alpha) = 0$$

da cui: $$V_E = \frac{F}{2}$$

3) Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione dell'asta BE intorno al nodo B:

$$\sum_B M = V_C \cdot L \cdot cos(\alpha) - V_E \cdot \frac{L}{2} \cdot cos(\alpha) + H_E\frac{L}{2} \cdot sin(\alpha) = 0$$

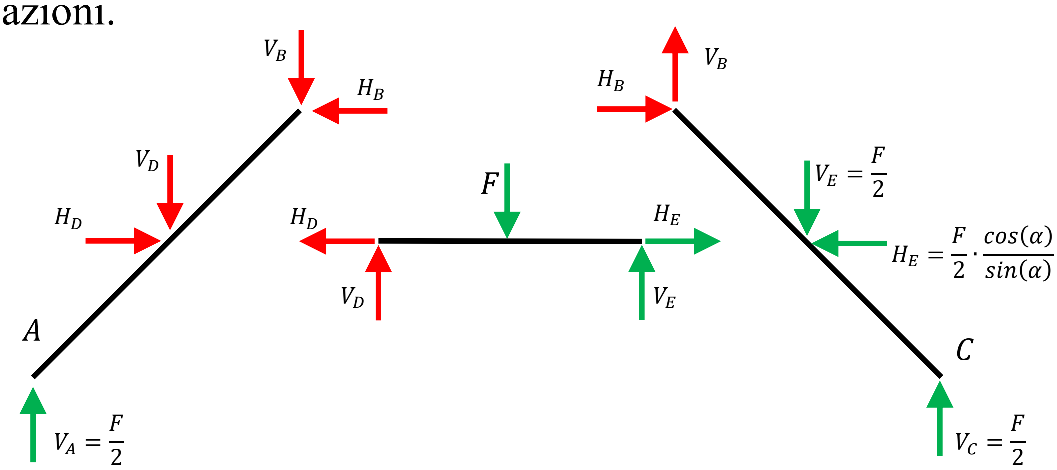
da cui: $H_E\frac{L}{2} \cdot sin(\alpha) = V_E \cdot \frac{L}{2} \cdot cos(\alpha) - V_C \cdot L \cdot cos(\alpha)$

Semplificando e sostituendo i valori noti di V_E e V_C:

$$H_E = -\frac{F}{2} \cdot \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

Si cambia segno e verso della forza H_E

4) Si elimina la cerniera nel nodo D e nel nodo B se ne calcolano le reazioni.



Nelle travi BC e DE ci sono solo 2 incognite che possono essere facilmente calcolate:

Trave BC: $\begin{cases} \sum F_x = H_B - H_E = 0 \\ \sum F_y = V_B - V_E + V_C = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} H_B = \frac{F}{2} \cdot \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} \\ V_B = 0 \end{cases}$

Trave DE: $\begin{cases} \sum F_x = H_E - H_D = 0 \\ \sum F_y = V_D + V_E - F = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} H_D = \frac{F}{2} \cdot \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} \\ V_D = \frac{F}{2} \end{cases}$

Arrivati a questo punto, si può usare la trave AB per verificare la correttezza dei risultati:

Trave DE:

$$\begin{cases} \sum F_x = H_D - H_B = 0 & \textbf{OK} \\ \sum F_y = V_A - V_D - V_B = 0 & \textbf{OK} \\ \sum_A M = H_B \cdot L \cdot sin(\alpha) - V_D \cdot \frac{L}{2} \cdot cos(\alpha) - H_D \frac{L}{2} \cdot sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo i valori delle reazioni nella 3° equazione si ottiene:

$$\frac{F}{2} \cdot \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} \cdot L \cdot sin(\alpha) - \frac{F}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot cos(\alpha) - \frac{F}{2} \cdot \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} \frac{L}{2} \cdot sin(\alpha) = 0$$

ovvero:

$$\frac{F}{2} \cdot cos(\alpha) - \frac{F}{4} \cdot cos(\alpha) - \frac{F}{4} \cdot cos(\alpha) = 0 \qquad \textbf{OK}$$