La lezione è stata registrata ed è reperibile all'indirizzo:
https://unica.adobeconnect.com/pxty248wzjaj/

CARICI DISTRIBUITI

La forza $\vec{R}$ e la coppia $\vec{M}$ sono **staticamente equivalenti** ad un dato sistema di forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ quando valgono le relazioni:

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \\ \vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{d}_i \wedge \vec{F}_i \end{cases}$$

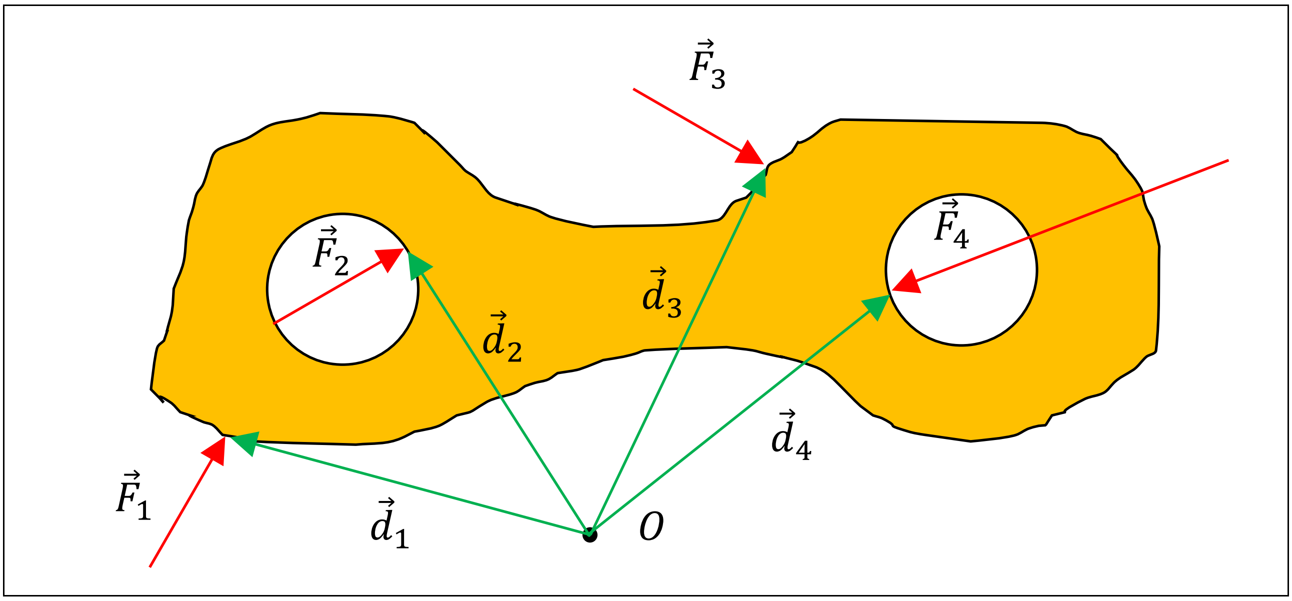
dove i vettori $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n$ indicano la posizione di ogni forza rispetto ad un punto O qualsiasi.

Quando $\vec{R} \neq \{0\}$ allora:

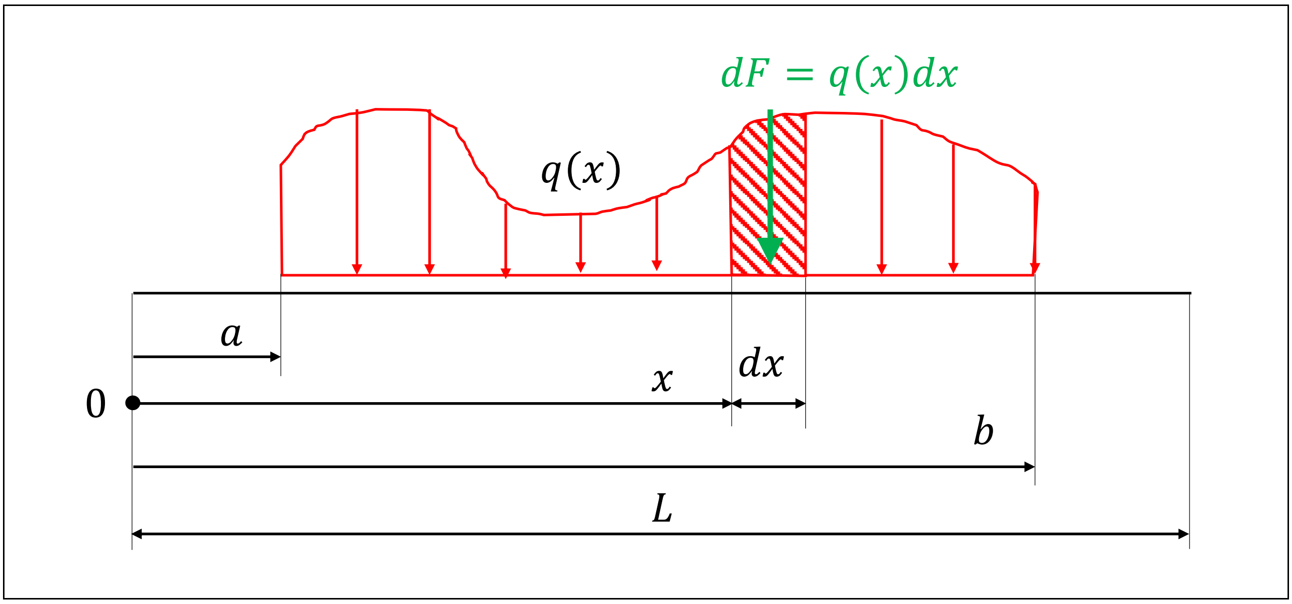
$$\vec{M} = \vec{d} \wedge \vec{R}$$

La forza $\vec{R}$ si chiama **risultante** del sistema di forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$.

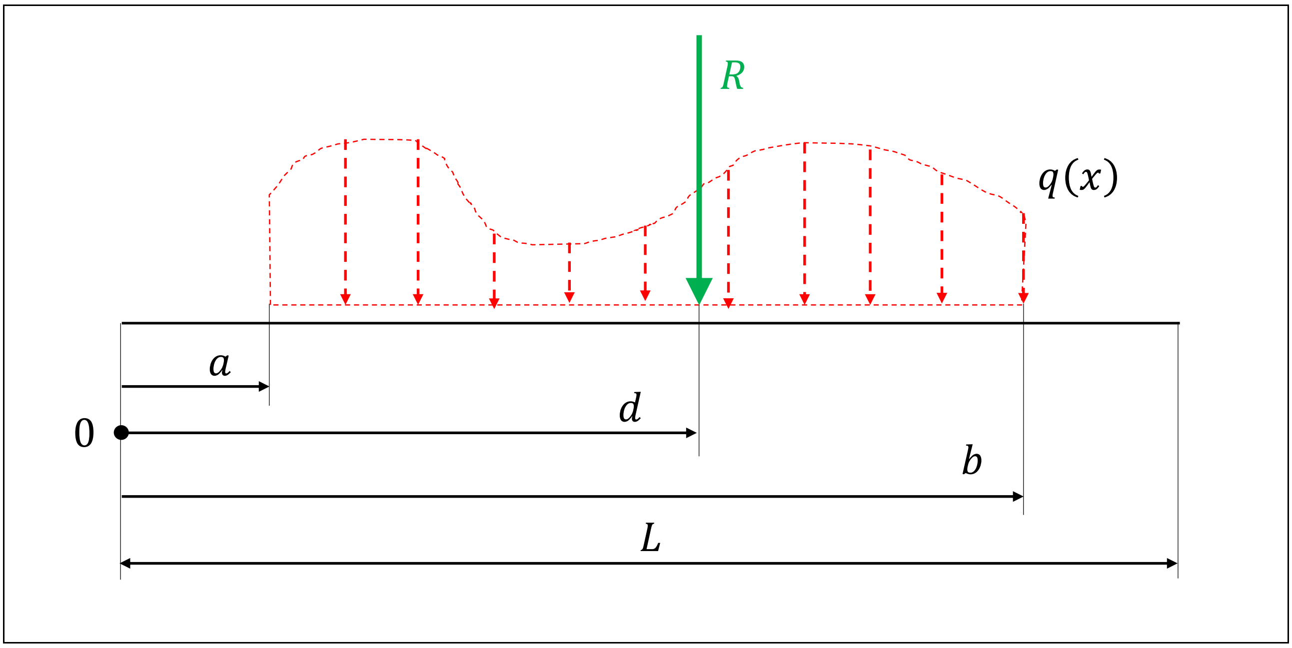
$\vec{d}$ indica la posizione della risultante rispetto al punto O.



CARICI DISTRIBUITI



$$R = \int_a^b dF = \int_a^b q(x)dx$$

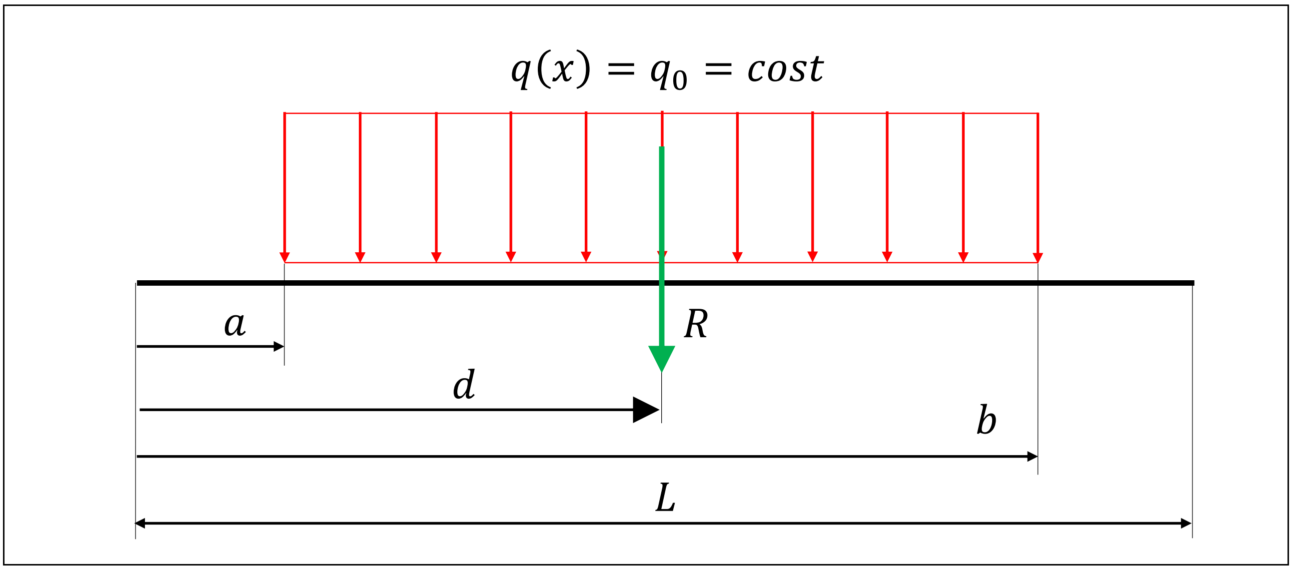


$$d = \frac{\int dM}{R} = \frac{\int_a^b q(x) \cdot x \cdot dx}{R}$$

Naturalmente per l'applicazione delle formule precedenti, l'equazione $q = q(x)$ deve essere nota.

ESEMPI

Carico distribuito costante.



La risultante del carico distribuito vale:

$$R = \int_a^b dF = \int_a^b q(x)dx = q_0 x|_a^b = q_0(b-a)$$

La sua distanza dall'origine dell'asse x vale:

$$d = \frac{\int_a^b q(x)\cdot x\cdot dx}{R} = \frac{q_0\int_a^b x\cdot dx}{q_0(b-a)} = \frac{x^2|_a^b}{2(b-a)}$$

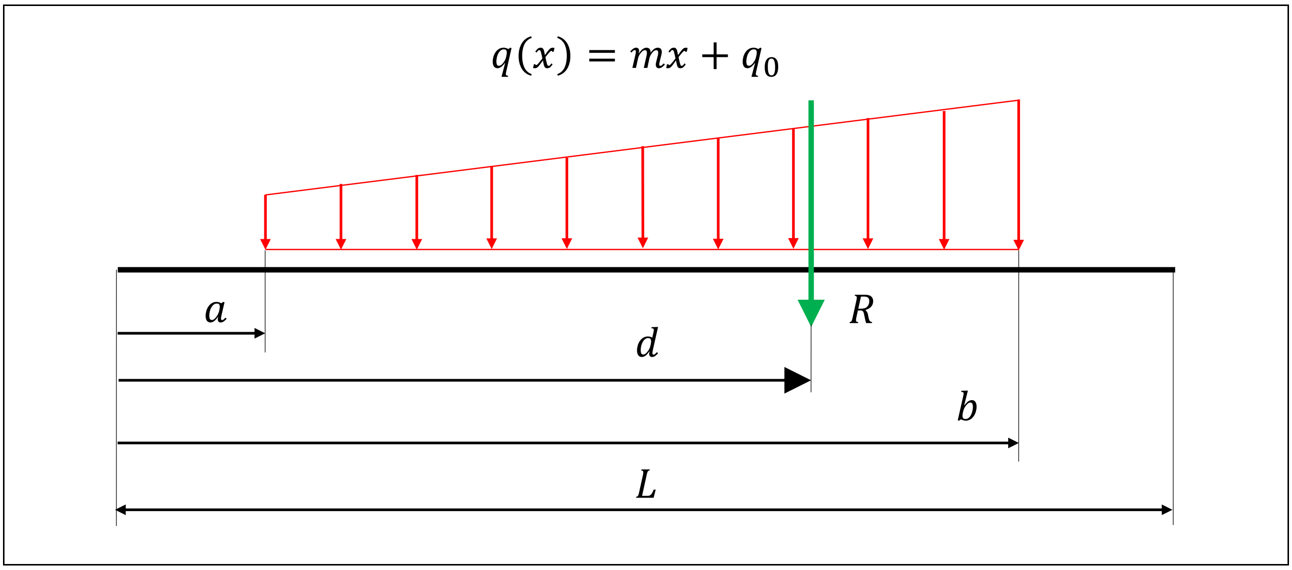
$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Se $a = 0$ e $b = L$

allora

$$R = q_0 L \quad \text{e} \quad d = \frac{L}{2}$$

Carico distribuito lineare.



$$R = \int_a^b dF = \int_a^b q(x)dx = \int_a^b [mx + q_0]dx$$

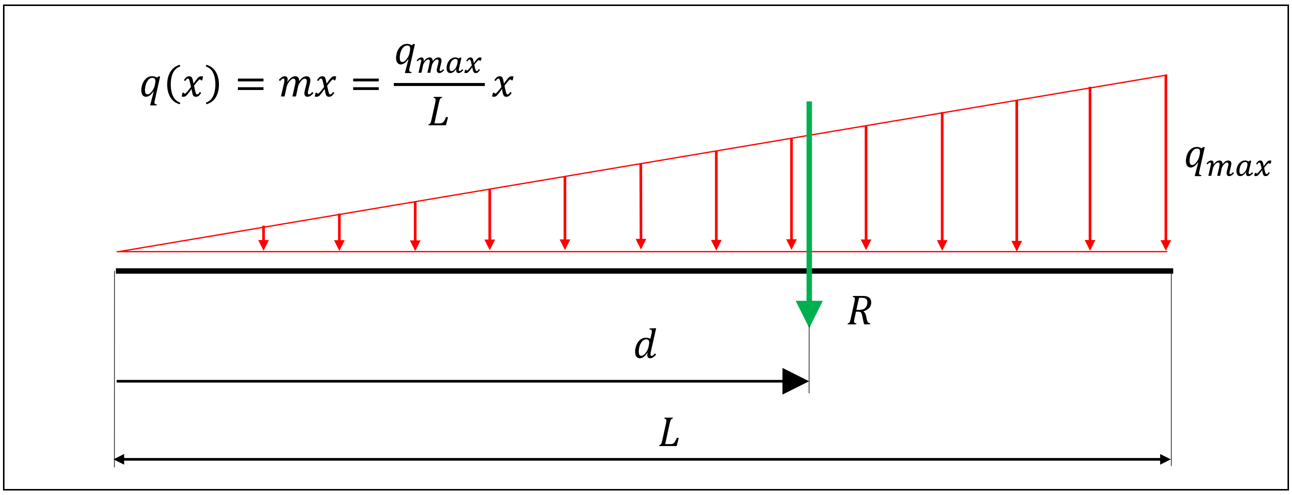
$$R = \left[m\frac{x^2}{2} + q_0 x\right]_a^b = \left(m\frac{b^2}{2} + q_0 b\right) - \left(m\frac{a^2}{2} + q_0 a\right)$$

$$R = \frac{m}{2}(b^2 - a^2) + q_0(b - a)$$

$$d = \frac{\int_a^b q(x)\cdot x \cdot dx}{R} = \frac{\int_a^b [mx + q_0]x \cdot dx}{R} = \frac{\left[m\frac{x^3}{3} + q_0\frac{x^2}{2}\right]_a^b}{R}$$

$$= \frac{\frac{m}{3}(b^3 - a^3) + \frac{q_0}{2}(b^2 - a^2)}{\frac{m}{2}(b^2 - a^2) + q_0(b - a)}$$

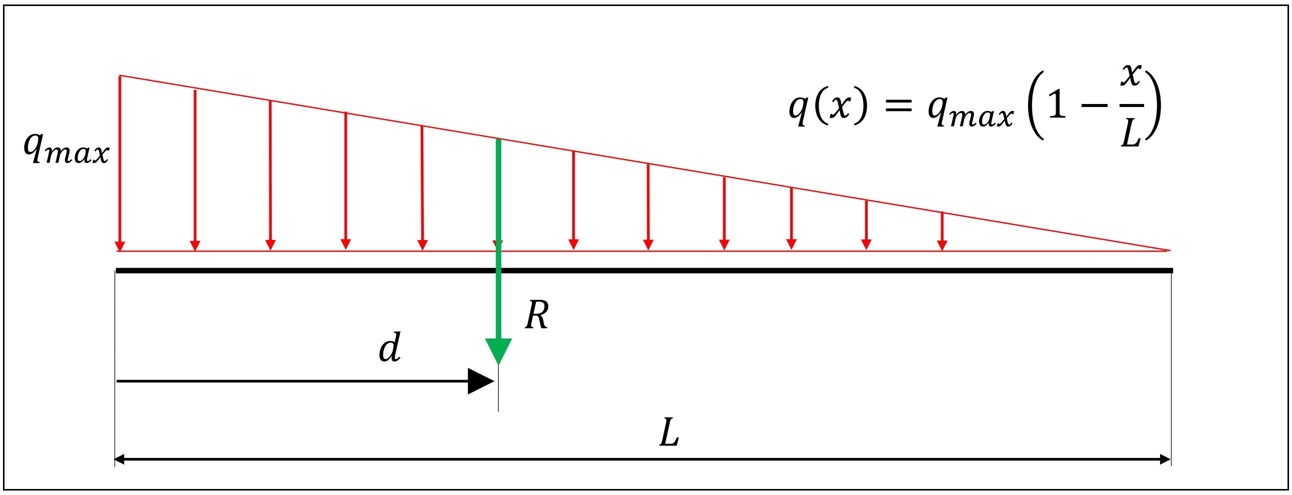
Carico distribuito lineare: crescente



$$a = 0 \quad , \quad b = L \quad , \quad q_0 = 0 \quad , \quad q(x) = \frac{q_{max}}{L} x$$

Allora: $R = \frac{L \cdot q_{max}}{2}$ $\quad d = \frac{2}{3} L$

Carico distribuito lineare: decrescente



$$a = 0 \quad , \quad b = L \quad , \quad q_0 = q_{max} \quad , \quad m = -\frac{q_{max}}{L}$$

$$q(x) = q_{max} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Allora: $R = \frac{L \cdot q_{max}}{2}$ $\quad d = \frac{1}{3} L$

Carico distribuito variabile come una funzione polinomiale di ordine n

$$q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

la risultante del carico distribuito risulta:

$$R = \int_a^b dF = \int_a^b q(x)dx$$

$$= \int_a^b [a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n]dx$$

$$= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$$

Il momento vale :

$$M = \int_a^b q(x) \cdot x \cdot dx = \int_a^b [a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}] \cdot dx$$

$$= \left[a_0 \frac{x^2}{2} + a_1 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_a^b$$

Se la risultante è diversa da zero, la sua distanza dall'origine vale:

$$d = \frac{M}{R}$$

Carico distribuito sinusoidale

$$q(x) = q_0 \cdot sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

la risultante del carico distribuito risulta:

$$R = \int_a^b dF = \int_a^b q_0 \cdot sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = -q_0\frac{L}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big|_a^b$$

Perché la risultante sia **staticamente equivalente** è necessario che:

$$M = Rd = \int_a^b q(x)\cdot x \cdot dx = \int_a^b q_0 \cdot x \cdot sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$= q_0\left[sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - \frac{L}{n\pi}x\cdot cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_a^b$$

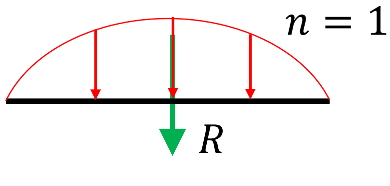
Se: $a = 0 \quad , \quad b = L$

Allora:

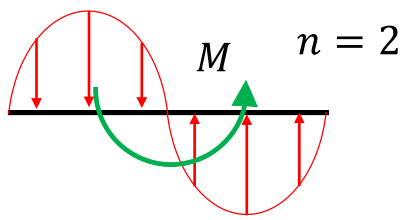
$$R = -q_0\frac{L}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big|_0^L = -q_0\frac{L}{n\pi}[cos(n\pi) - 1]$$

$$M = q_0\left[sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - \frac{L}{n\pi}x\cdot cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^L = -q_0\frac{L^2}{n\pi}\cdot cos(n\pi)$$

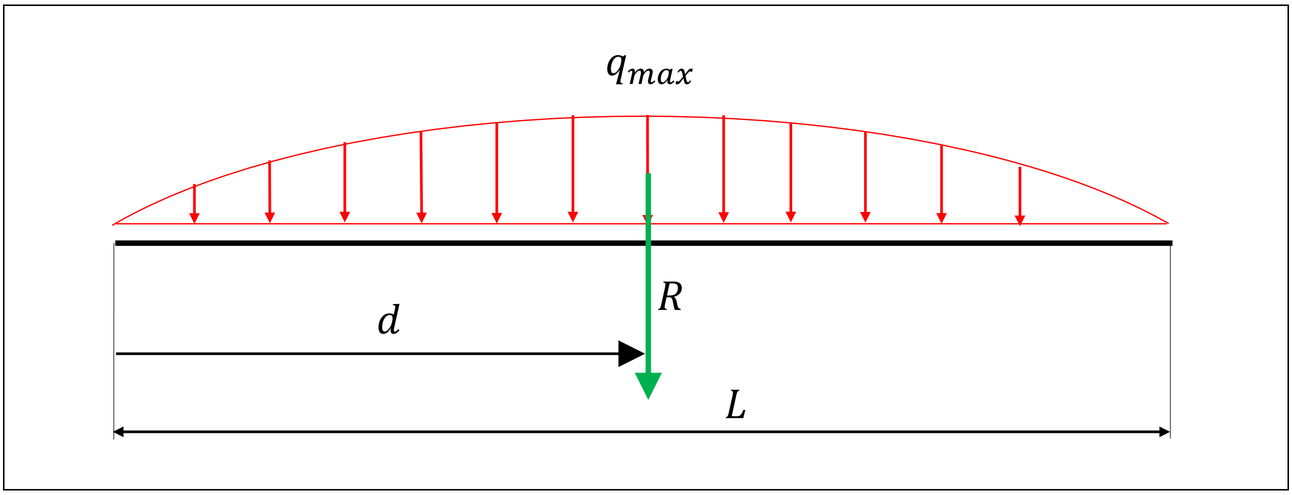
Se n è dispari: $\begin{cases} R = \frac{2L}{n\pi}q_0 \\ M = q_0\frac{L^2}{n\pi} \end{cases} \quad da\ cui \quad d = \frac{L}{2}$



Se n è pari: $\begin{cases} R = 0 \\ M = -q_0\frac{L^2}{n\pi} \end{cases}$



Carico distribuito variabile in modo parabolico



$$q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Per determinare il valore dei coefficienti della parabola è necessario conoscerne il valore in tre punti ed impostare un sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} q(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\ q(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \\ q(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q(x_1) \\ q(x_2) \\ q(x_3) \end{Bmatrix}$$

Risolto il sistema si ottengono i coefficienti a_0, a_1, a_2 che consentono di calcolare R e d.

Ponendo per esempio: $\begin{cases} q(x) = 0 & in\ x = 0 \\ q(x) = 0 & in\ x = L \\ q(x) = q_{max} & in\ x = \frac{L}{2} \end{cases}$ si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{max} \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$a_0 = \frac{det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & L^2 \\ q_{max} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix}} = 0$$

$$a_1 = \frac{det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & L^2 \\ 1 & q_{max} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix}} = -\frac{q_{max}L^2}{\frac{L^3}{4} - \frac{L^3}{2}} = 4\frac{q_{max}}{L}$$

$$a_2 = \frac{det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & q_{max} \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix}} = \frac{q_{max}L}{\frac{L^3}{4} - \frac{L^3}{2}} = -4\frac{q_{max}}{L^2}$$

da cui:

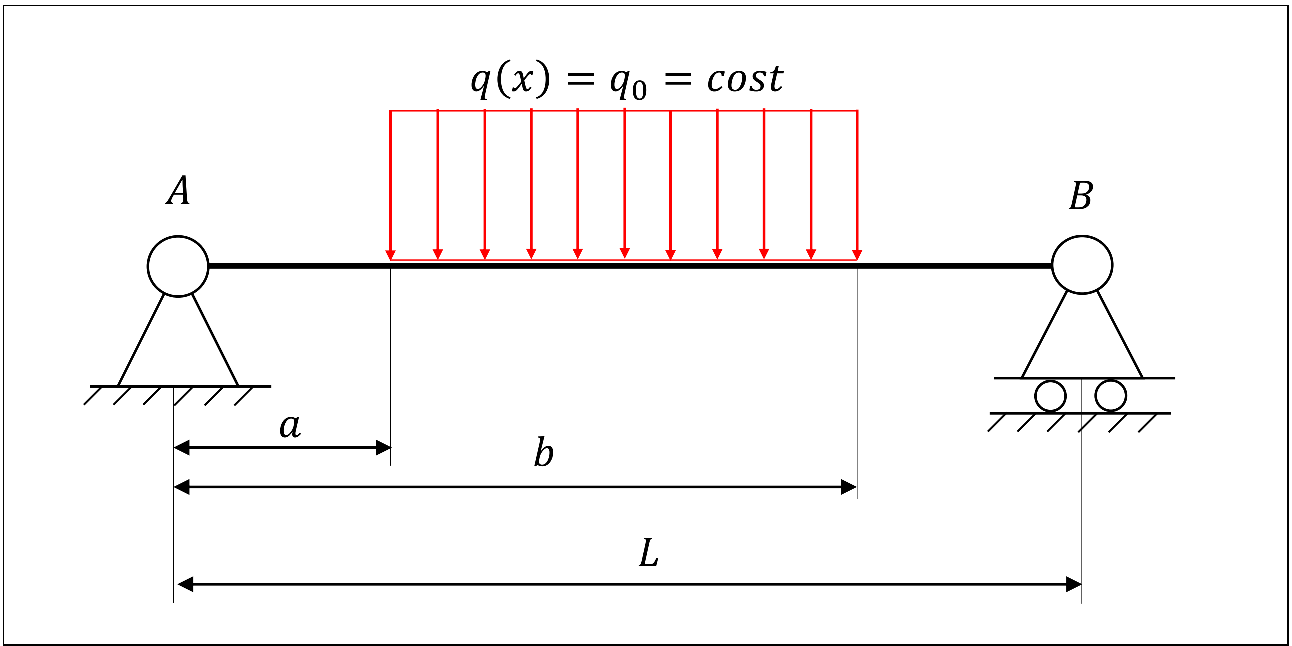
$$q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = -4\frac{q_{max}}{L^2}x^2 + 4\frac{q_{max}}{L}x = 4\frac{q_{max}}{L}x\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$R = \left[a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3}\right]_0^L = a_1\frac{L^2}{2} + a_2\frac{L^3}{3} = 4\frac{q_{max}}{L}\frac{L^2}{2} - 4\frac{q_{max}}{L^2}\frac{L^3}{3} = \frac{2}{3}Lq_{max}$$

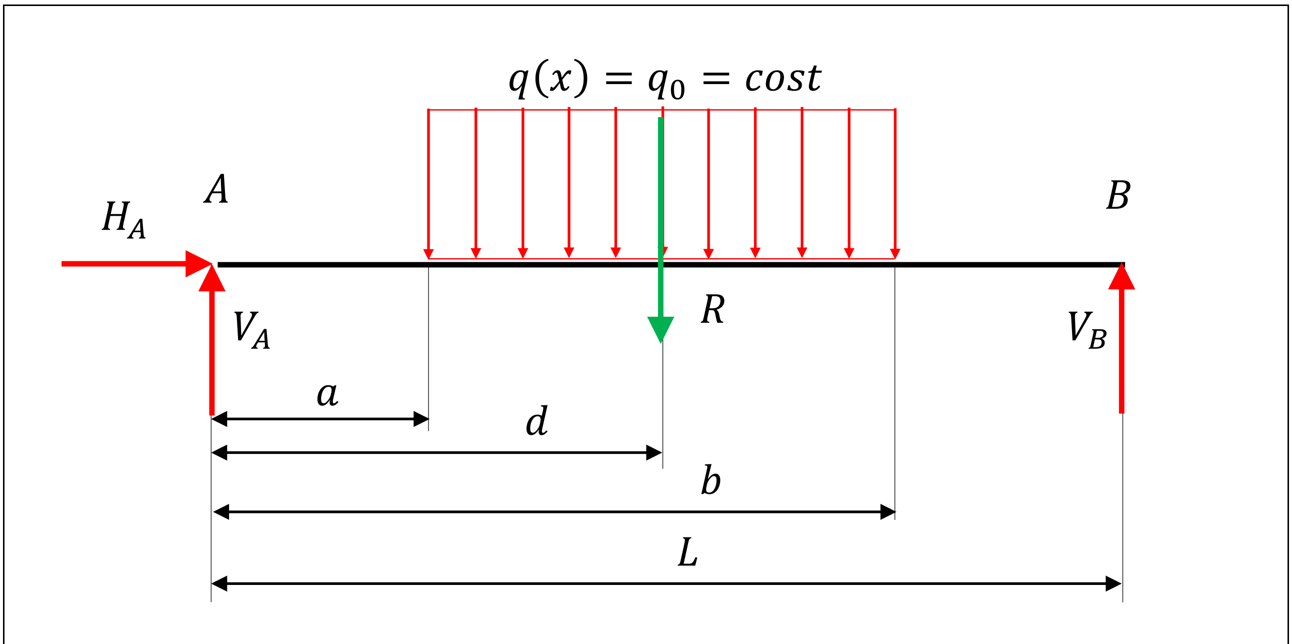
$$d = \frac{\left[a_1\frac{x^3}{3}+a_2\frac{x^4}{4}\right]_0^L}{R} = \frac{a_1\frac{L^3}{3}+a_2\frac{L^4}{4}}{R} = \frac{4\frac{q_{max}}{L}\frac{L^3}{3}-4\frac{q_{max}}{L^2}\frac{L^4}{4}}{R} = \frac{\frac{4}{3}L^2q_{max}-L^2q_{max}}{\frac{2}{3}Lq_{max}} = \frac{L}{2}$$

ESERCIZI di STATICA:
CALCOLO DELLE REAZIONI A TERRA

ESERCIZIO N.1



SOLUZIONE



EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - R = 0 \\ \sum_A M_z = V_B L - Rd = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ricava: $V_B = R\frac{d}{L}$

Sostituendo il valore di V_B nella seconda equazione si ottiene:

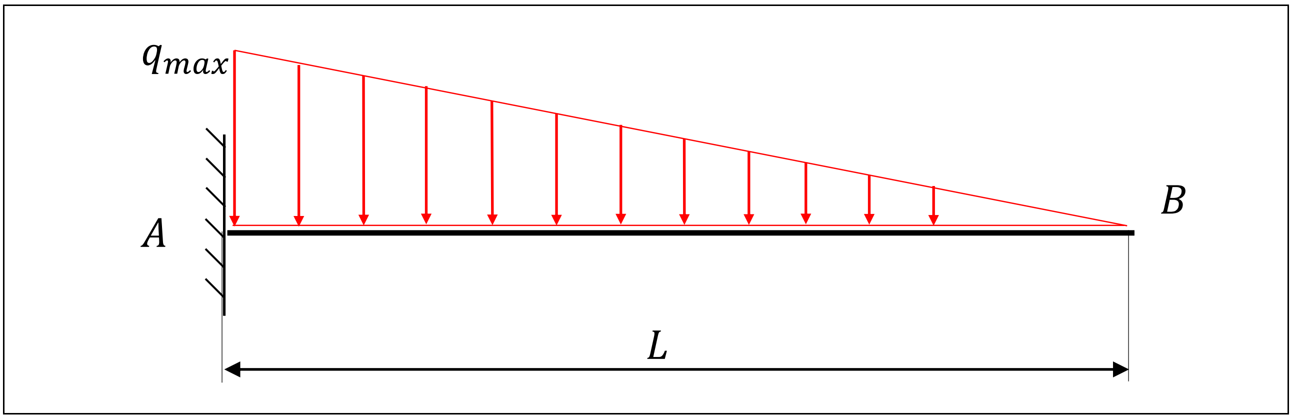
$$V_A = F - V_B = R - R\frac{d}{L} = \frac{L-d}{L}R$$

dove

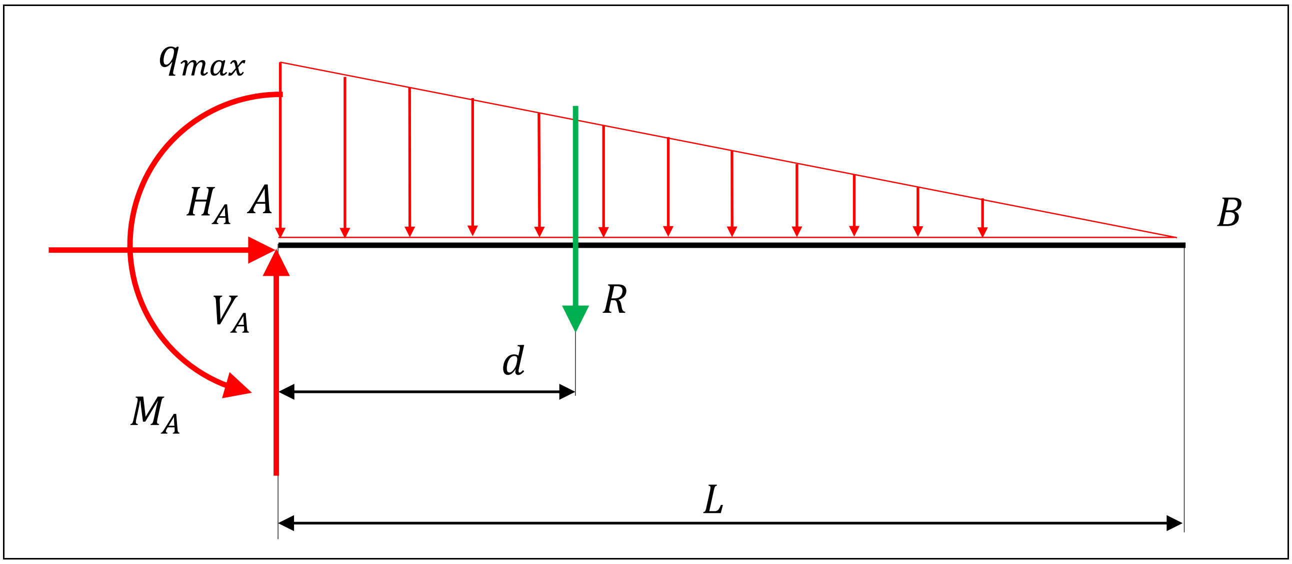
$$R = \int_a^b q(x)dx = q_0 x|_a^b = q_0(b-a)$$

$$d = \frac{\int_a^b q(x) \cdot x \cdot dx}{R} = \frac{q_0 \int_a^b x \cdot dx}{q_0(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

ESERCIZIO N.2



SOLUZIONE



Calcolo dei coefficienti della funzione: $q(x) = c_1 x + c_0$

Quando $x = 0 \;\rightarrow\; q(x) = q_{max} \;\rightarrow\; c_0 = q_{max}$
Quando $x = L \;\rightarrow\; q(x) = 0 \;\rightarrow\; c_1 L + c_0 = 0$

$$q(x) = c_1 x + c_0 = -\frac{q_{max}}{L}x + q_{max} = q_{max}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

La risultante ed il suo punto di applicazione valgono:

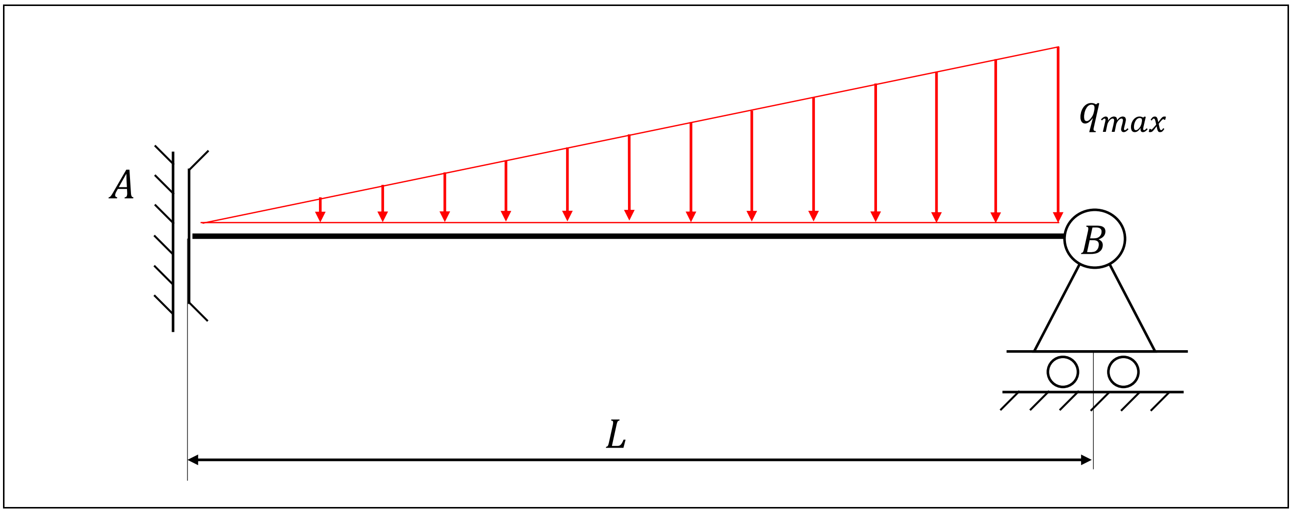
$$R = \frac{m}{2}L^2 + q_{max}L = -\frac{q_{max}}{2L}L^2 + q_{max}L = \frac{q_{max}L}{2}$$

$$d = \frac{\frac{m}{3}L^3 + \frac{q_{max}}{2}L^2}{R} = \frac{-\frac{q_{max}}{3}L^2 + \frac{q_{max}}{2}L^2}{R} = \frac{L}{3}$$

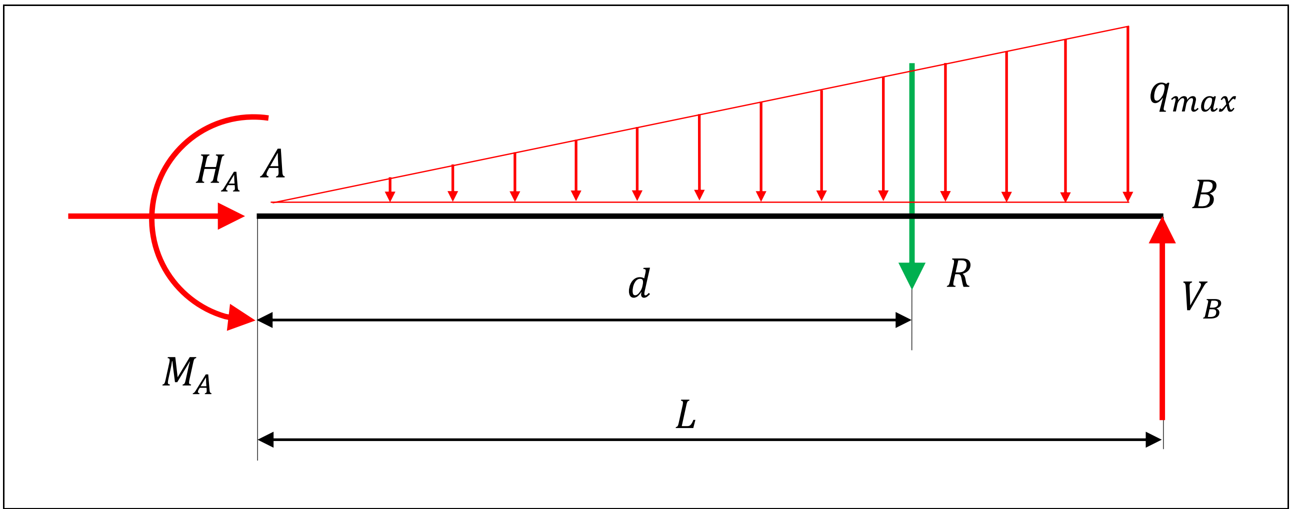
EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A - R = 0 \\ \sum M_z = M_A - Rd = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \dfrac{q_{max}L}{2} \\ M_A = Rd = \dfrac{q_{max}L}{2}\dfrac{L}{3} = \dfrac{q_{max}L^2}{6} \end{cases}$$

ESERCIZIO N.4



SOLUZIONE



La funzione del carico distribuito è la seguente: $q(x) = \frac{q_{max}}{L} x$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - 0 = 0 \\ \sum F_y = V_B - R = 0 \\ \sum M_z = M_A - Rd + V_B L = 0 \end{cases}$$

La terza equazioni indica la sommatoria dei momenti rispetto al polo A.

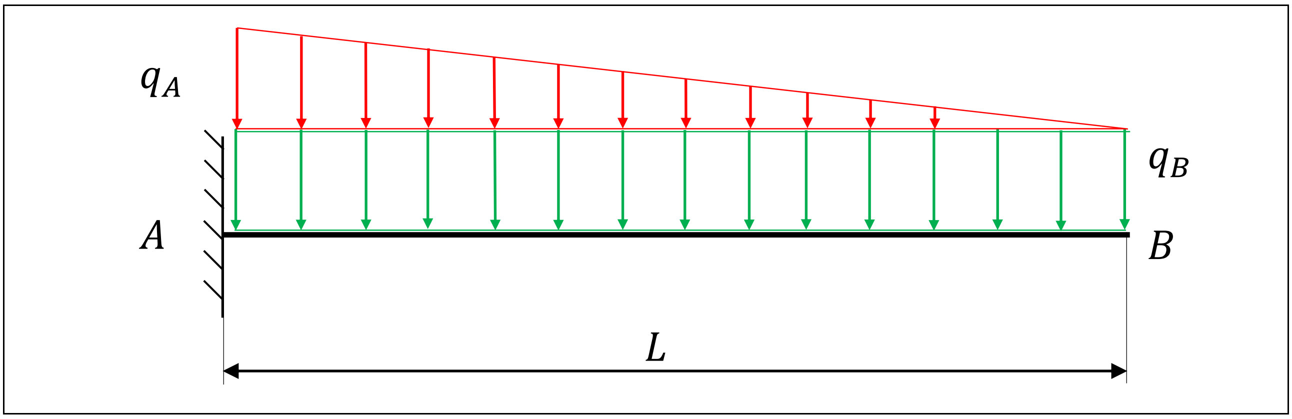
Risolvendo si ottiene:

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_B = R = \dfrac{q_{max} L}{2} \\ M_A = Rd - V_B L = \dfrac{q_{max} L}{2} \dfrac{2}{3} L - \dfrac{q_{max} L}{2} L \end{cases}$$

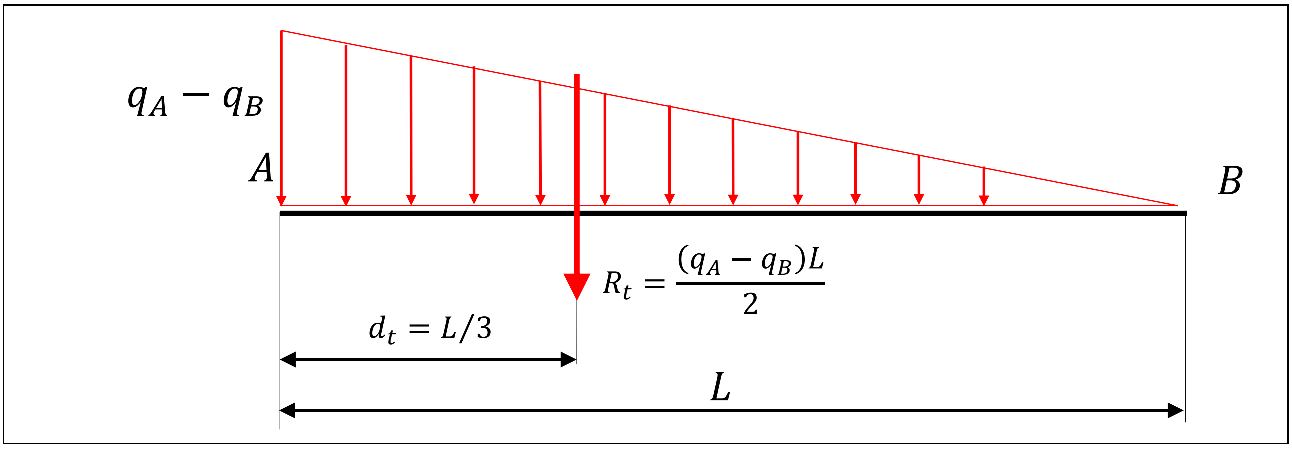
Sviluppando:

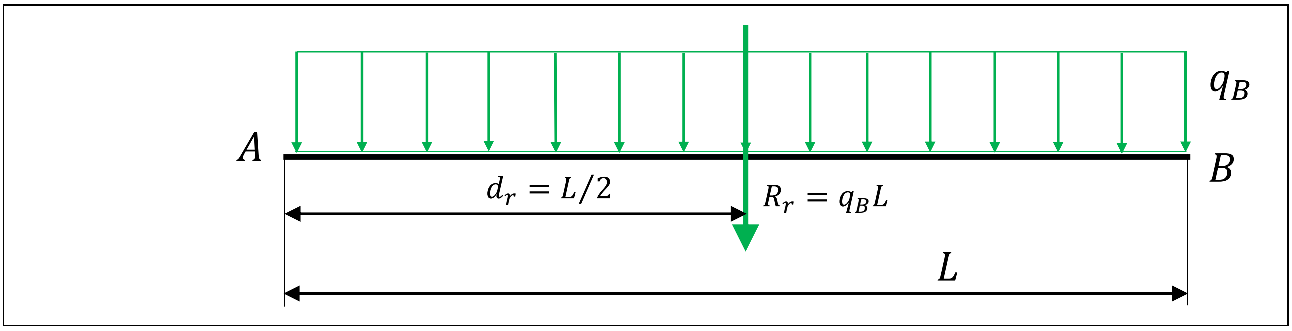
$$M_A = \frac{q_{max} L^2}{3} - \frac{q_{max} L^2}{2} = -\frac{q_{max} L^2}{6}$$

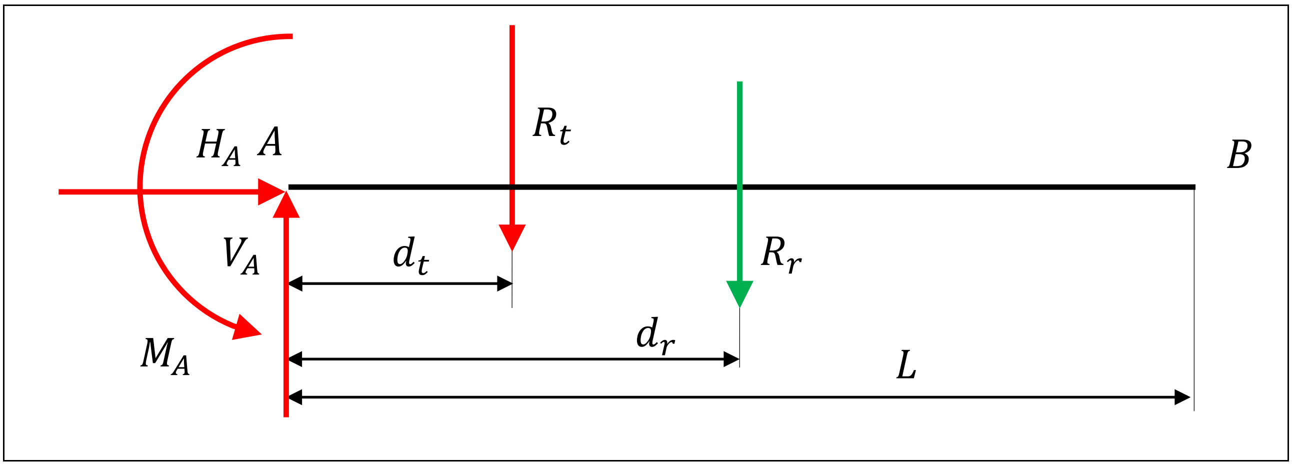
ESERCIZIO N.5



SOLUZIONE





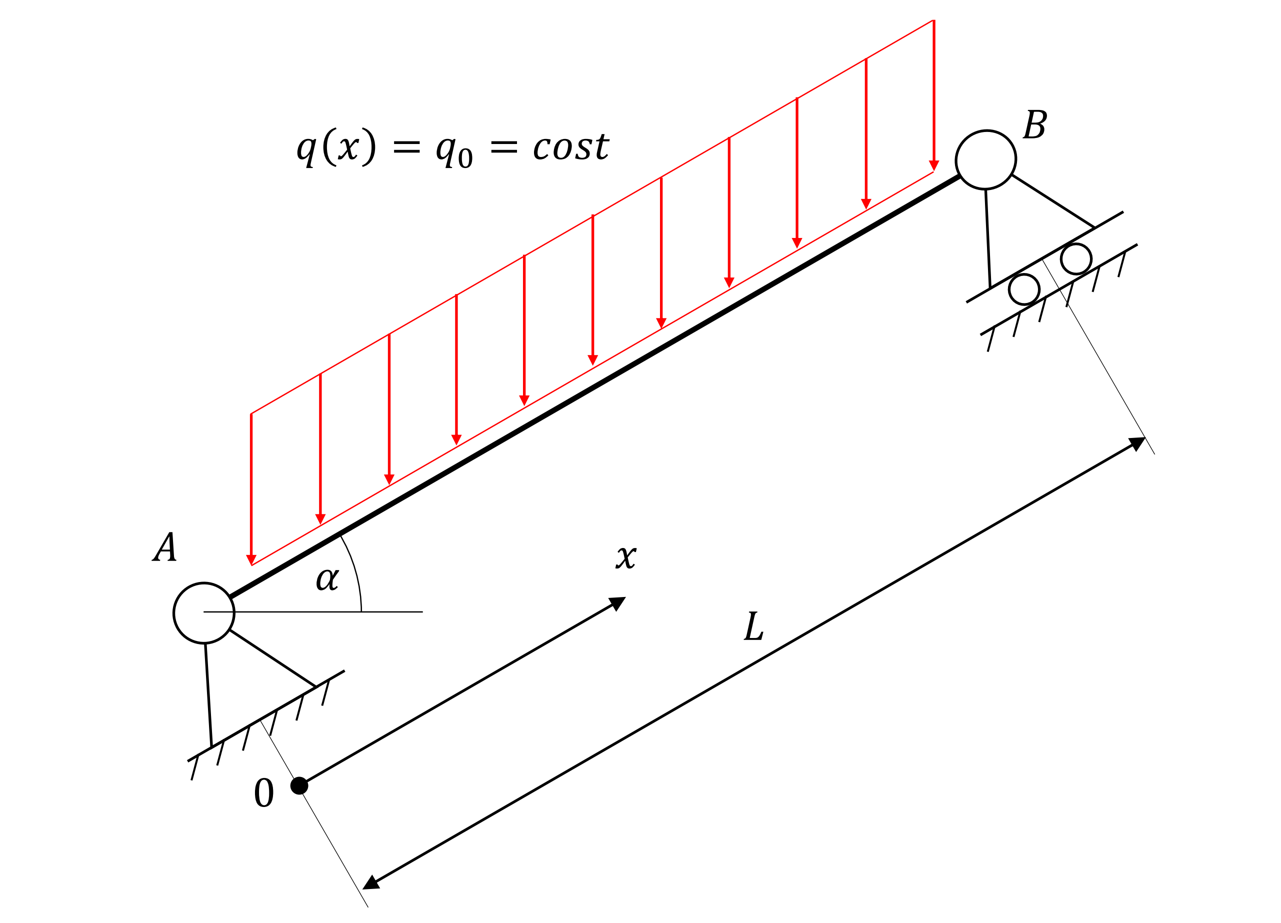


EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

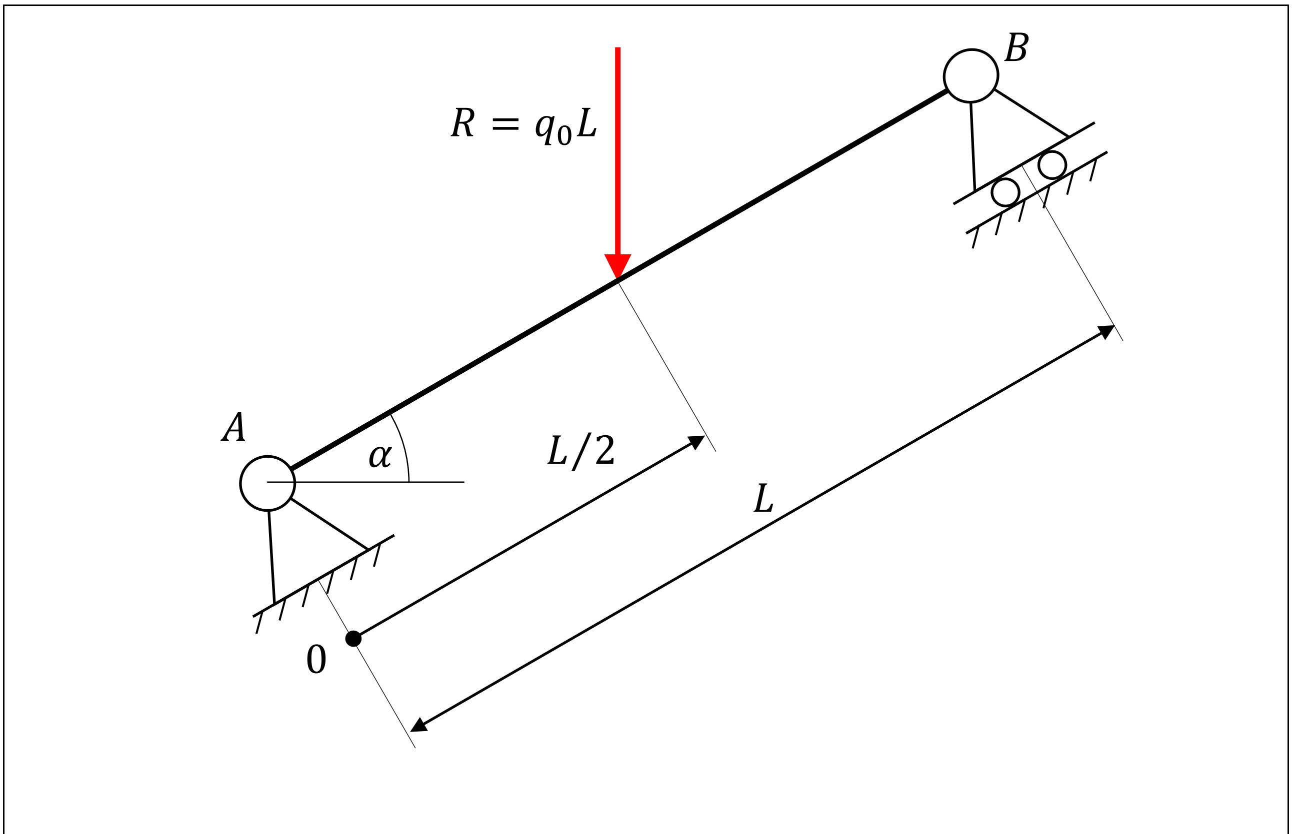
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A - R_t - R_r = 0 \\ \sum M_z = M_A - R_t d_t - R_r d_r = 0 \end{cases}$$

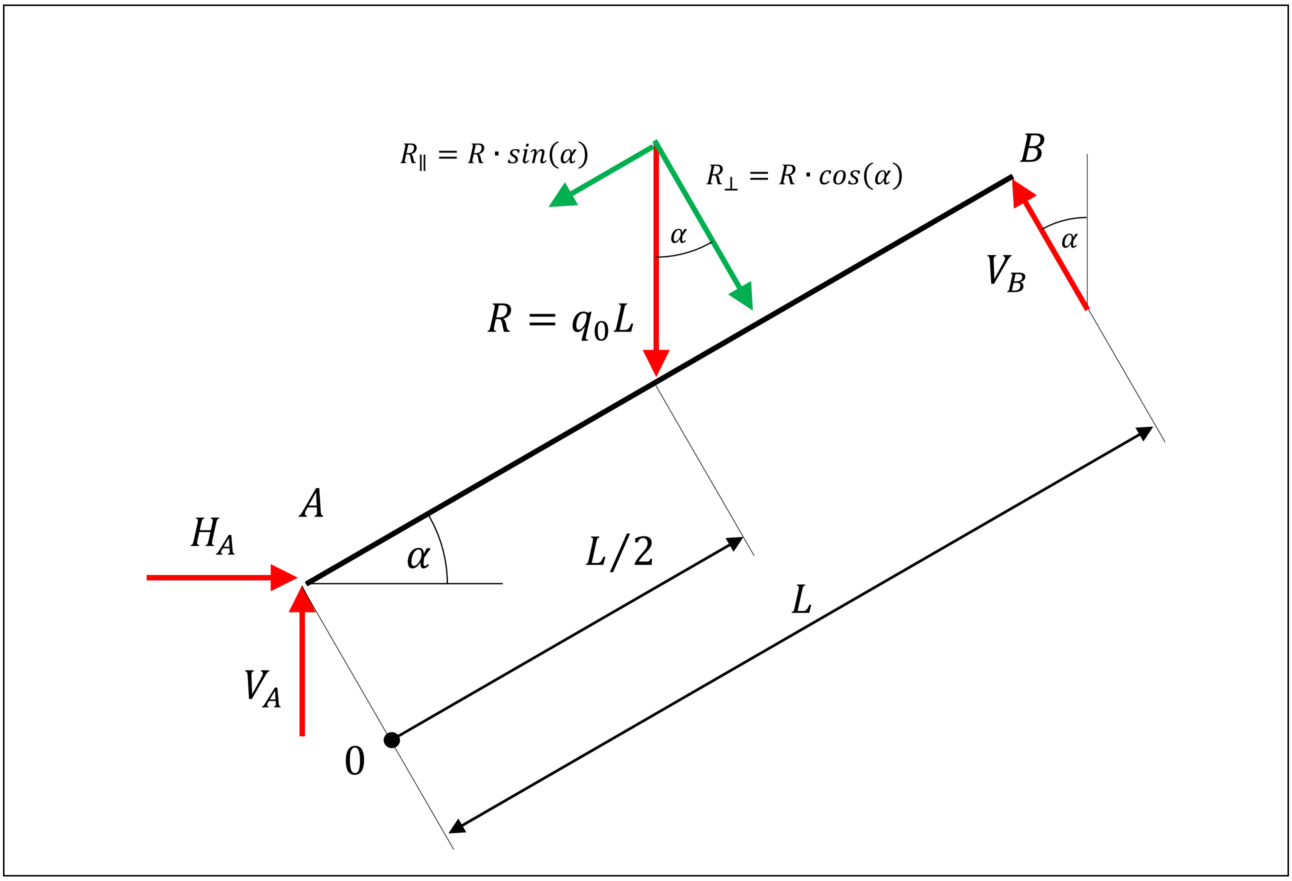
$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \dfrac{(q_A - q_B)L}{2} + q_B L \\ M_A = R_t d_t + R_r d_r = \dfrac{(q_A - q_B)L}{2}\dfrac{L}{3} + q_B L \dfrac{L}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO N.6



SOLUZIONE





EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - V_B sin(\alpha) = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B cos(\alpha) - R = 0 \\ \sum_A M_z = V_B L - R_{\perp}\frac{L}{2} = V_B L - R cos(\alpha)\frac{L}{2} = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ricava: $V_B = \frac{R}{2} cos(\alpha)$

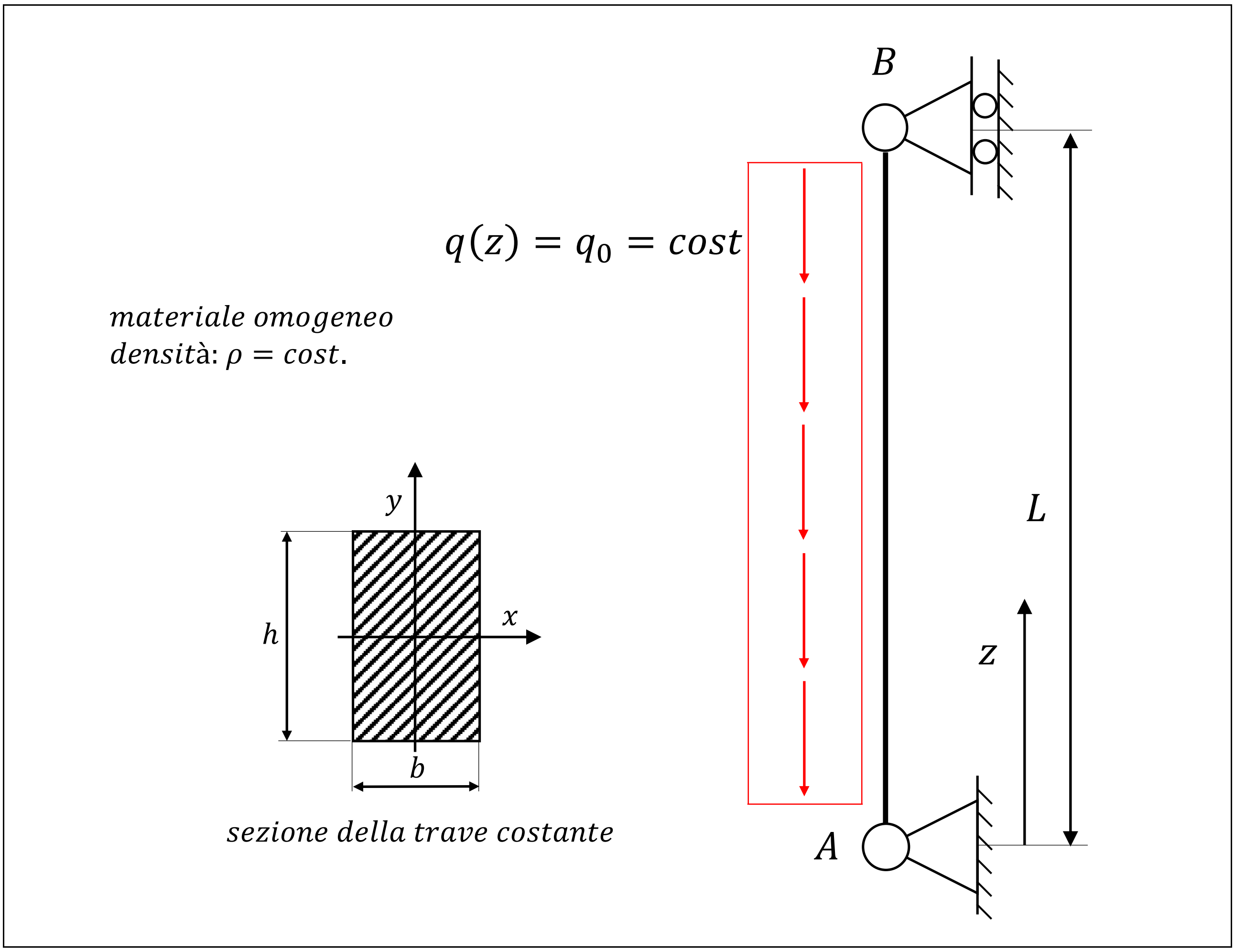
Sostituendone il valore nella seconda equazione si ottiene:

$$V_A = R - V_B cos(\alpha) = R - \frac{R}{2} cos^2(\alpha) = R\left(1 - \frac{cos^2(\alpha)}{2}\right)$$

E dalla prima: $H_A = V_B sin(\alpha) = \frac{R}{2} cos(\alpha) sin(\alpha)$

ESERCIZIO N.7

Carico dovuto al peso proprio



SOLUZIONE

Il carico distribuito vale:

$$q_0 = g\rho A = \gamma A \quad \left[\frac{N}{m}\right]$$

dove $g = 9.81 \cong 10 \left[\frac{m}{s^2}\right]$ è l'accelerazione di gravità,

$\rho \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$ è la densità del materiale,

$\gamma \left[\frac{N}{m^3}\right]$ è il peso specifico del materiale,

$A\ [m^2]$ è l'area della sezione trasversale della trave,

$q_0 \left[\frac{N}{m}\right]$ è il valore del carico distribuito.

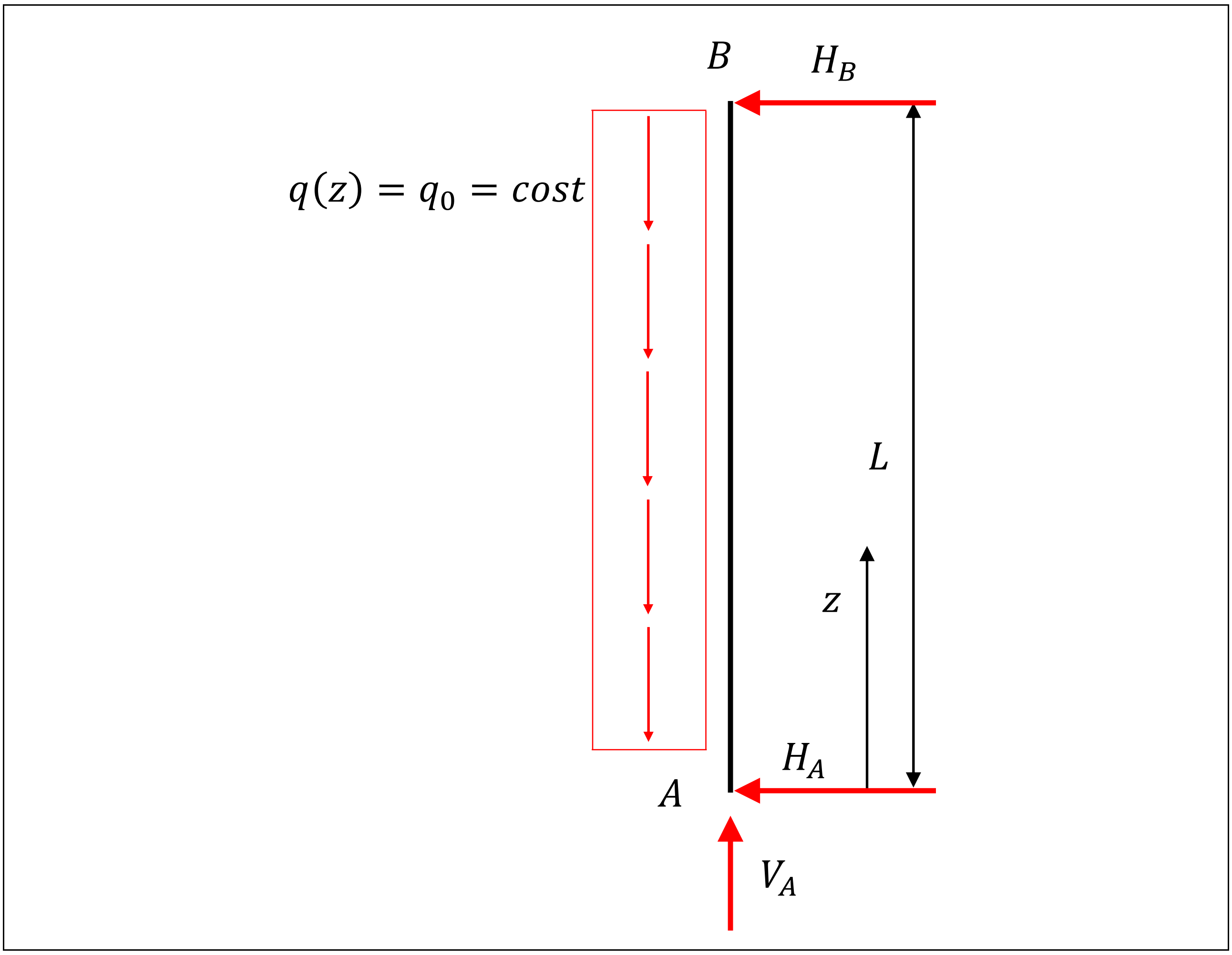
Valori indicativi

Materiale: acciaio: $\rho = 8000 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$

Lega di alluminio: $\rho = 2700 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$;

Calcestruzzo: $\rho = 2400 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$;

Legno: $\rho = 310 \div 980 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$



EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A + H_B = 0 \\ \sum F_y = V_A - q_0 L = 0 \\ \sum_A M_z = H_B L = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ricava: $H_B = 0;$

Dalla prima equazione: $H_A = -H_B = 0$

Dalla seconda equazione si ottiene: $V_A = q_0 L.$