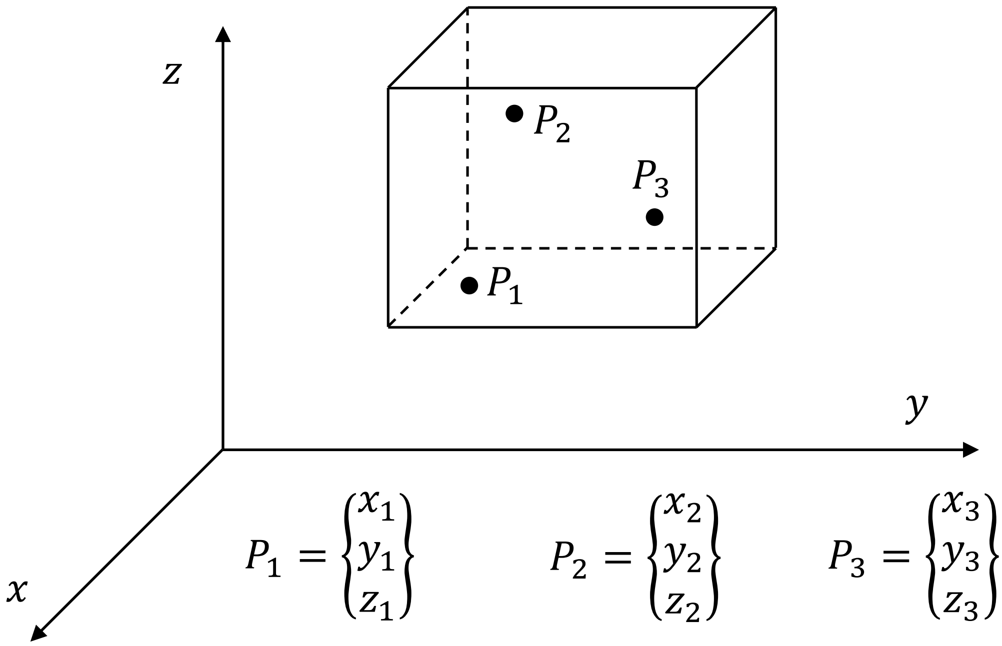
La lezione è stata registrata ed è reperibile all'indirizzo:
https://unica.adobeconnect.com/pq4kxlw020x7/

GRADI DI LIBERTÀ, DI VINCOLO E INTRODUZIONE ALL'ANALISI CINEMATICA

PER LOCALIZZARE IN MODO UNIVOCO UN CORPO RIGIDO NELLO SPAZIO OCCORRE CONOSCERE LA POSIZIONE DI TRE SUOI PUNTI NON ALLINEATI



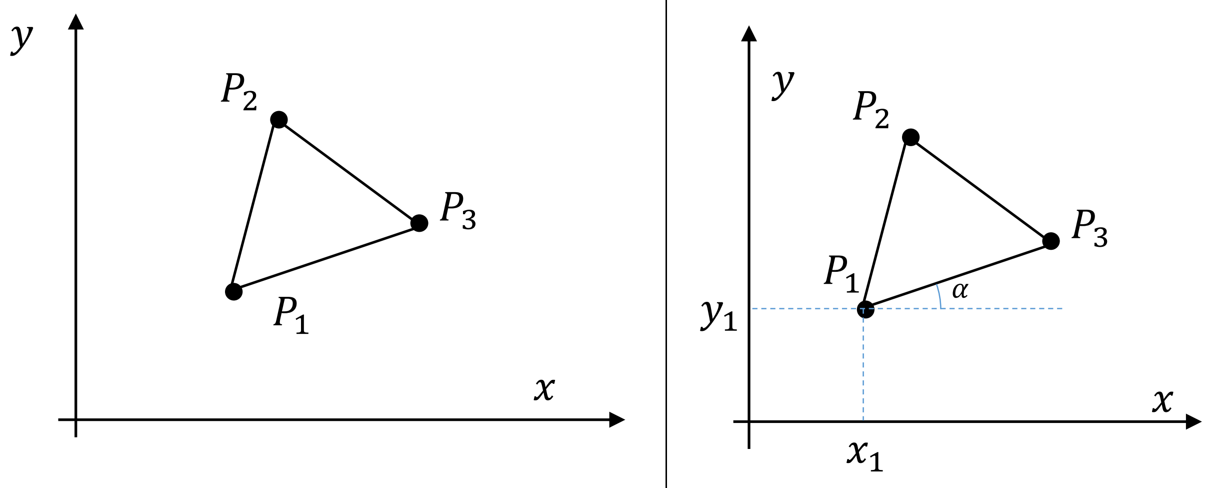
$$P_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \qquad P_2 = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \qquad P_3 = \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix}$$

Complessivamente i dati sono 9 (3 coordinate per 3 punti), ma poiché il corpo è rigido, le distanze tra i punti sono costanti quindi le 9 coordinate non sono indipendenti: si possono quindi scrivere tre equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} L_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = cost \\ L_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2} = cost \\ L_{13} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} = cost \end{cases}$$

UN CORPO RIGIDO NON VINCOLATO POSSIEDE <u>6 GRADI DI LIBERTÀ</u> (GdL)

PER LOCALIZZARE IN MODO UNIVOCO UN CORPO RIGIDO NEL PIANO OCCORRONO TRE INFORMAZIONI



$P_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} \quad P_2 = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad P_3 = \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix}$

3 GdL: (x_1, y_1, α)

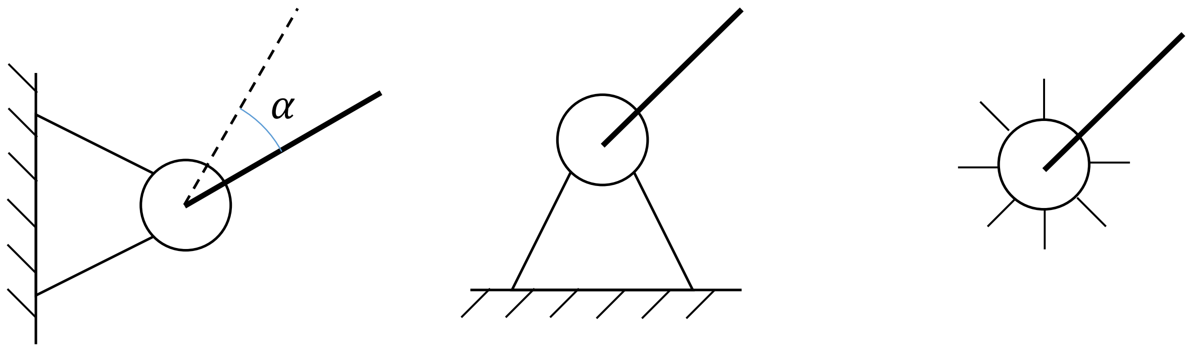
Complessivamente i dati sono 6 (2 coordinate per 3 punti), ma poiché il corpo è rigido, le distanze tra i punti sono costanti quindi le 6 coordinate non sono indipendenti: si possono quindi scrivere tre equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} L_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = cost \\ L_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = cost \\ L_{13} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = cost \end{cases}$$

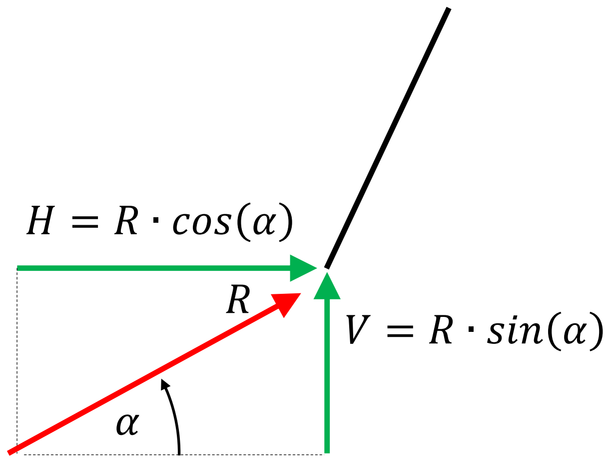
UN CORPO RIGIDO LIBERO DI MUOVERSI SU UN PIANO POSSIEDE 3 GRADI DI LIBERTÀ (GdL)

SCHEMI DI VINCOLO

Per impedire il movimento del corpo rigido nel piano, è necessario vincolare 3 GdL. Gli schemi di vincolo sono i seguenti:

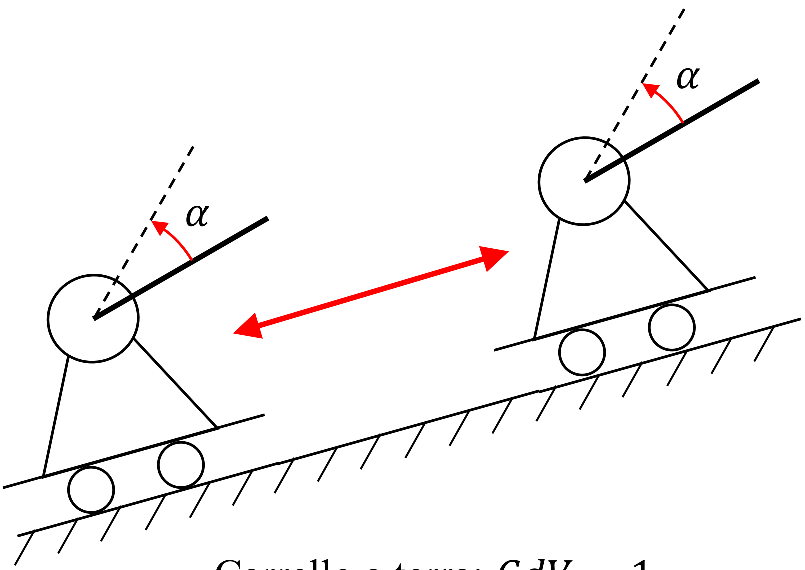


Cerniera a terra: $GdV = 2$

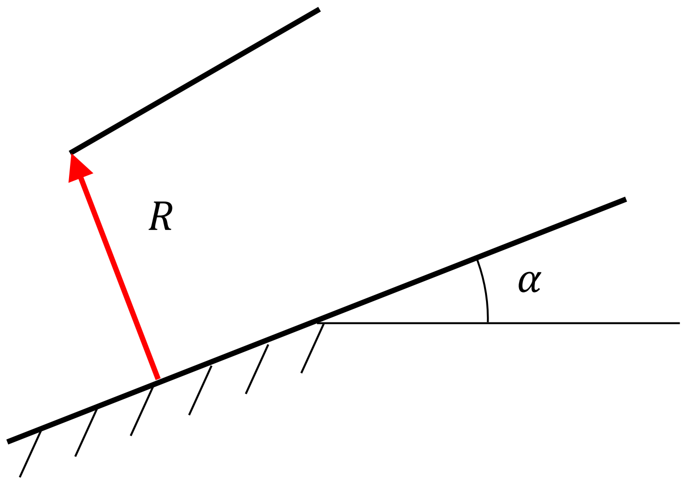


Le incognite sono due (come i GdV):
il modulo della reazione R e la sua direzione α oppure V ed H.

IL CARRELLO A TERRA IMPEDISCE LO SPOSTAMENTO DEL VERTICE DELLA TRAVE IN DIREZIONE PERPENDICOLARE AL TERRENO.

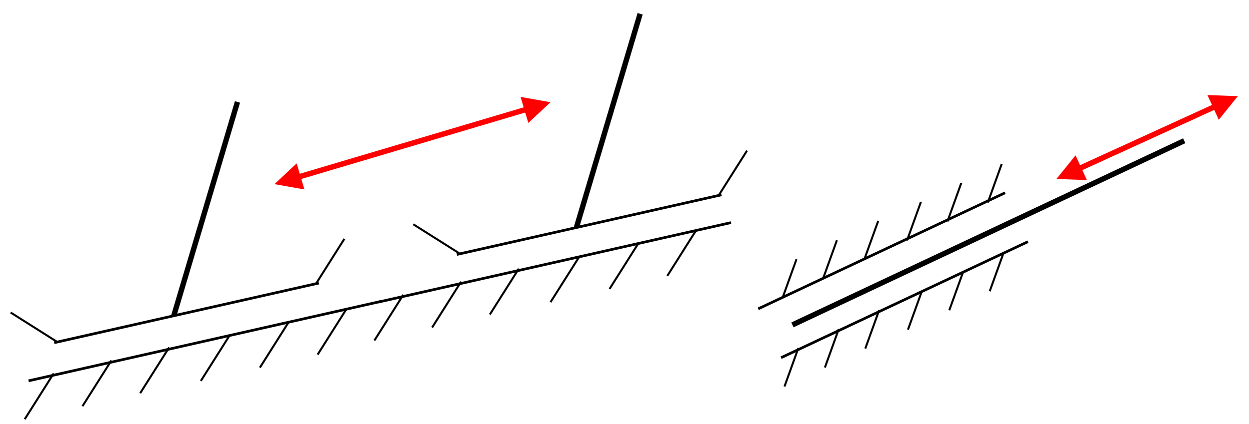


Carrello a terra: $GdV = 1$

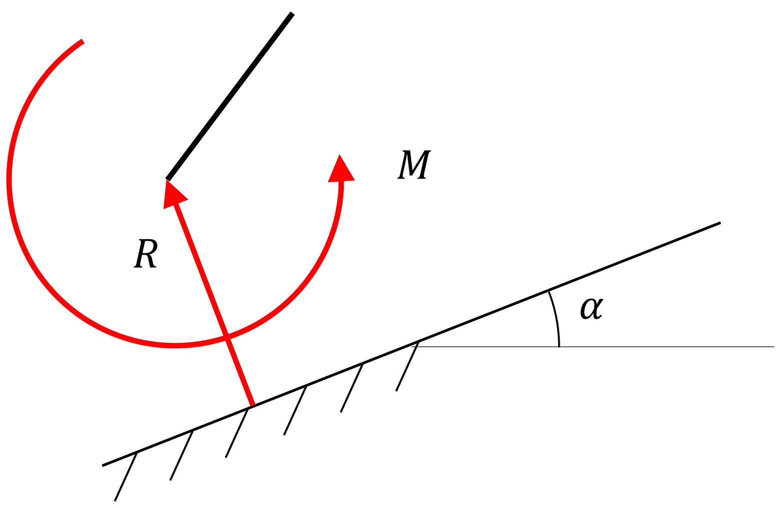


L'incognita è solo una: il modulo della reazione R. La sua direzione è nota.

IL PATTINO A TERRA IMPEDISCE LA ROTAZIONE DELLA TRAVE E LO SPOSTAMENTO DEL SUO VERTICE IN DIREZIONE PERPENDICOLARI AL TERRENO.



Pattino a terra: $GdV = 2$

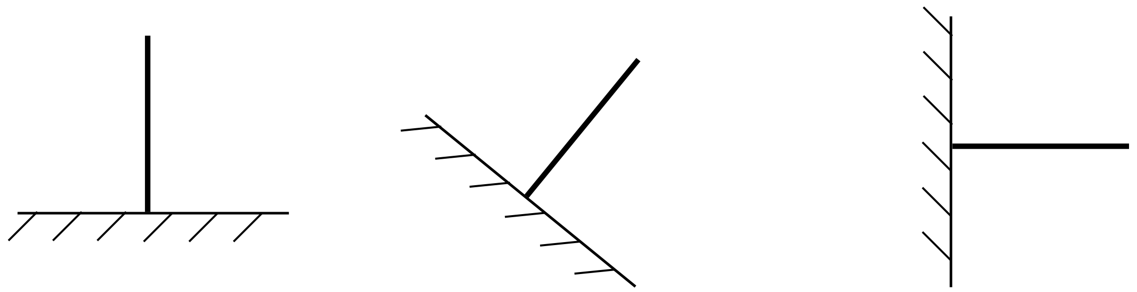


Le incognite sono due (come i GdV):

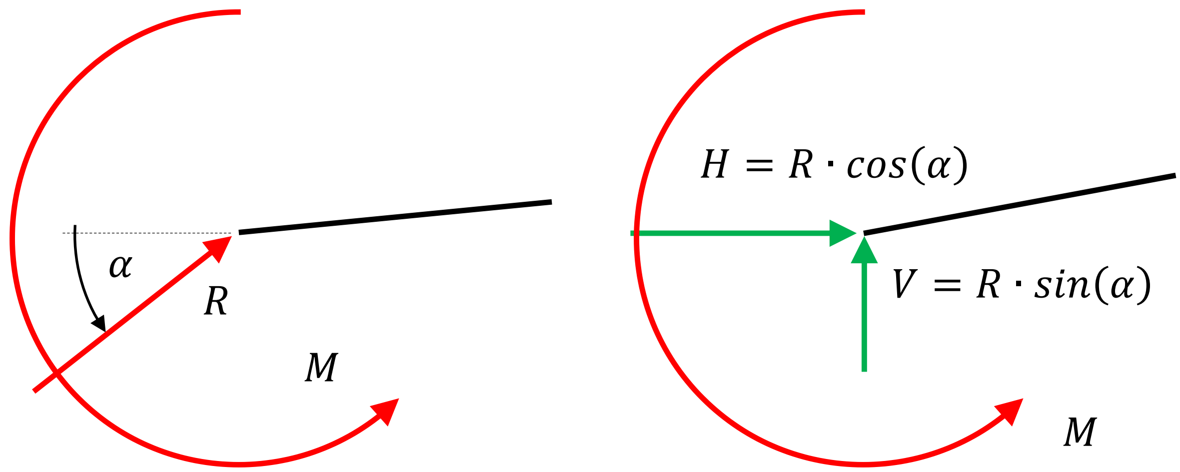
il modulo della reazione R (la cui direzione è nota) e

il modulo della coppia M.

L'INCASTRO IMPEDISCE LA ROTAZIONE E GLI SPOSTAMENTI DELLA TRAVE.



Incastro: $GdV = 3$



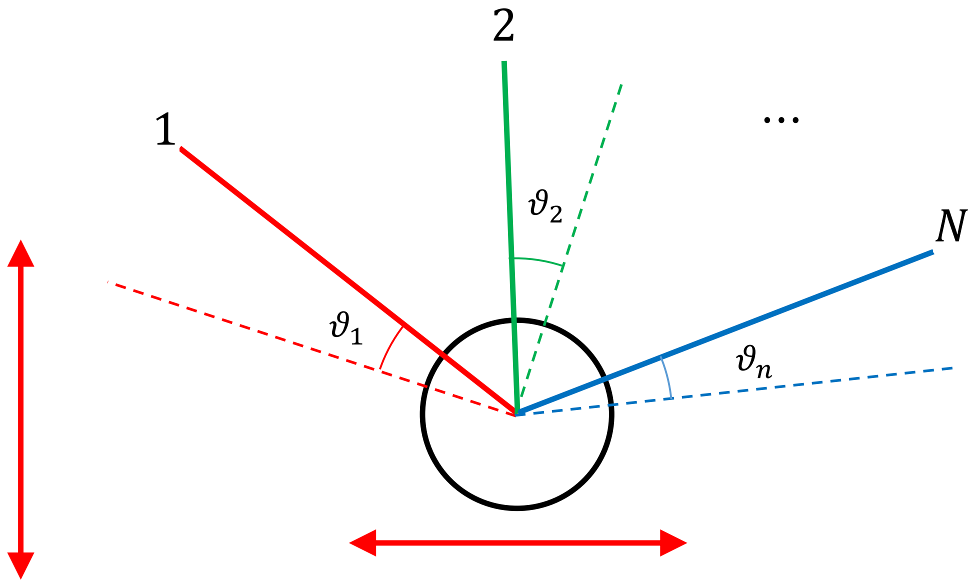
Le incognite sono tre (come i GdV):

il modulo della coppia M

il modulo della reazione R e la sua direzione α

oppure le due componenti H e V della reazione.

LA CERNIERA LIBERA VINCOLA IL VERTICE DELLE TRAVI CHE VI CONFLUISCONO A MUOVERSI INSIEME



Cerniera libera su cui convergo N travi

Prima dell'applicazione del vincolo: 3N GdL

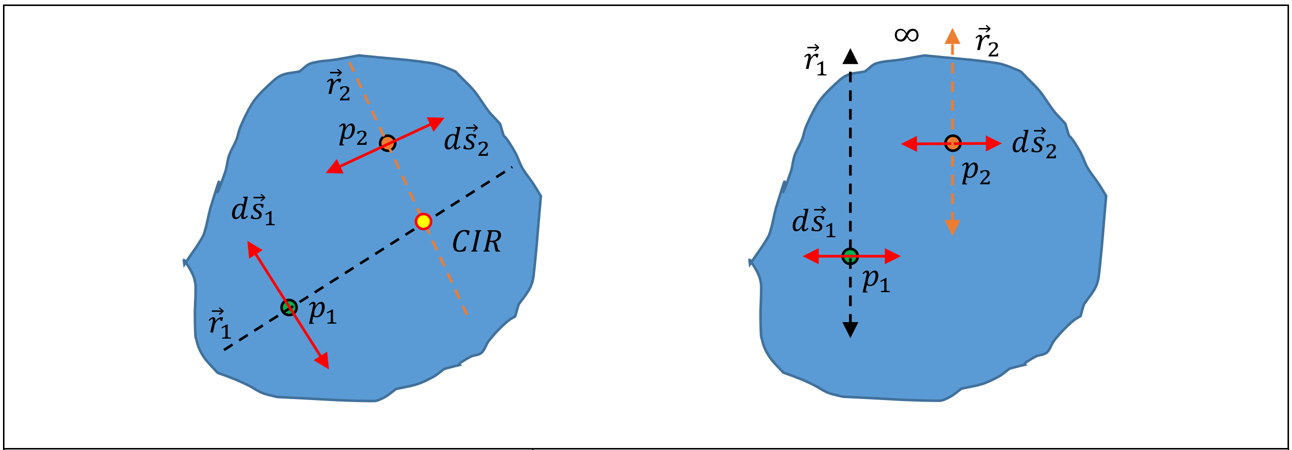
Gradi di libertà residui dopo l'applicazione del vincolo: $GdL_R = 2 + N$

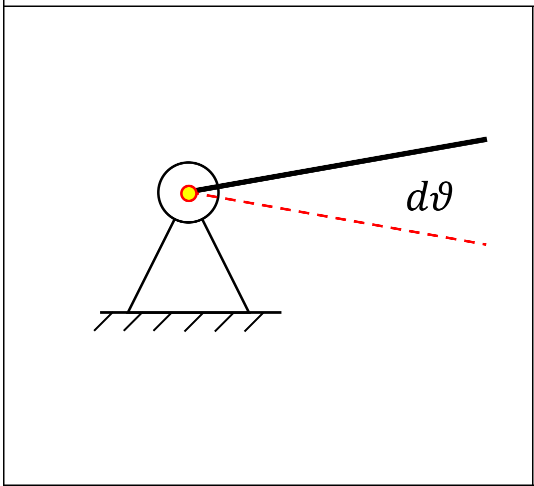
Gradi di vincolo: $GdV = GdL - GdL_R = 2N - 2$

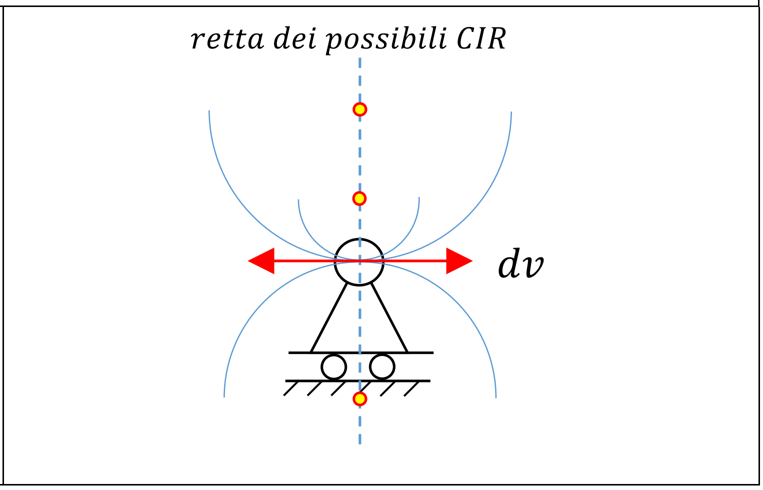
ANALISI CINEMATICA

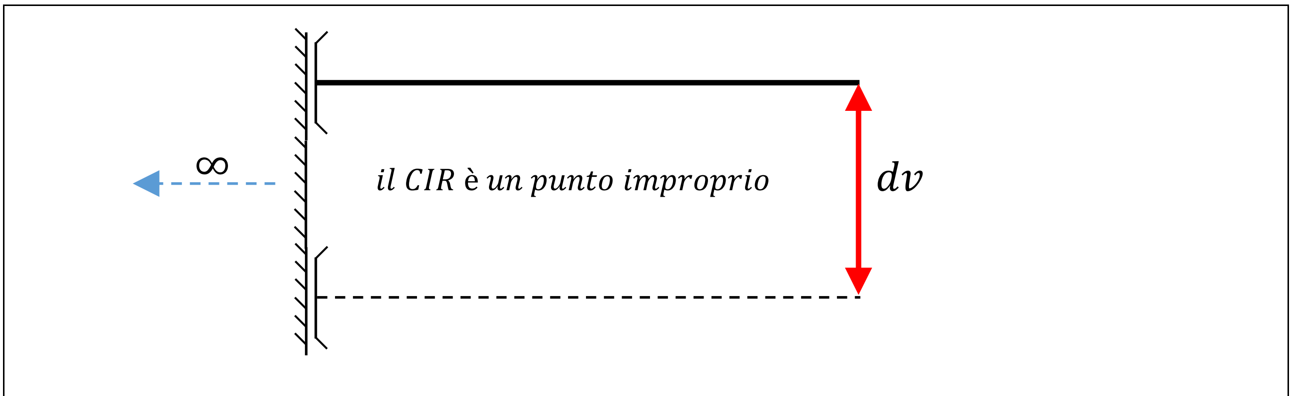
HA L'OBIETIVO DI CONTROLLARE CHE LA STRUTTURA SIA SUFFICIENTEMENTE VINCOLATA CIOE' CHE I VINCOLI SIANO IN NUMERO SUFFICIENTE E CHE SIANO DISPOSTI CORRETAMENTE IN MODO DA ANNULARE TUTTI I GRADI DI LIBERTA'.

IL CENTRO D'ISTANTANEA ROTAZIONE (CIR) INDICA IL PUNTO INTORNO AL QUALE, IN UN DETERMINATO ISTANTE, IL CORPO PUO' SUBIRE UNA ROTAZIONE INFINITESIMA.



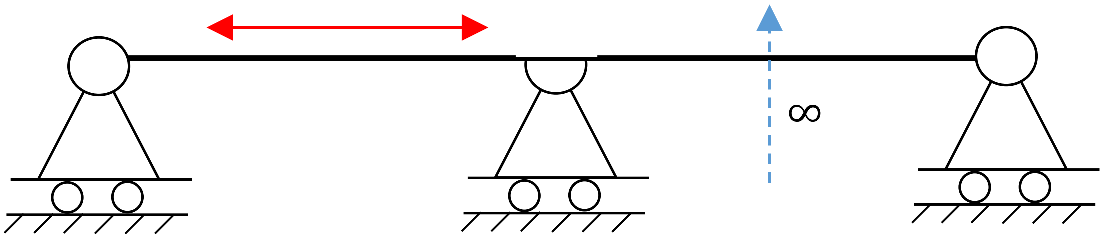






Se IL CIR e' un punto improprio, il corpo subisce una traslazione.

ANALISI CINEMATICA

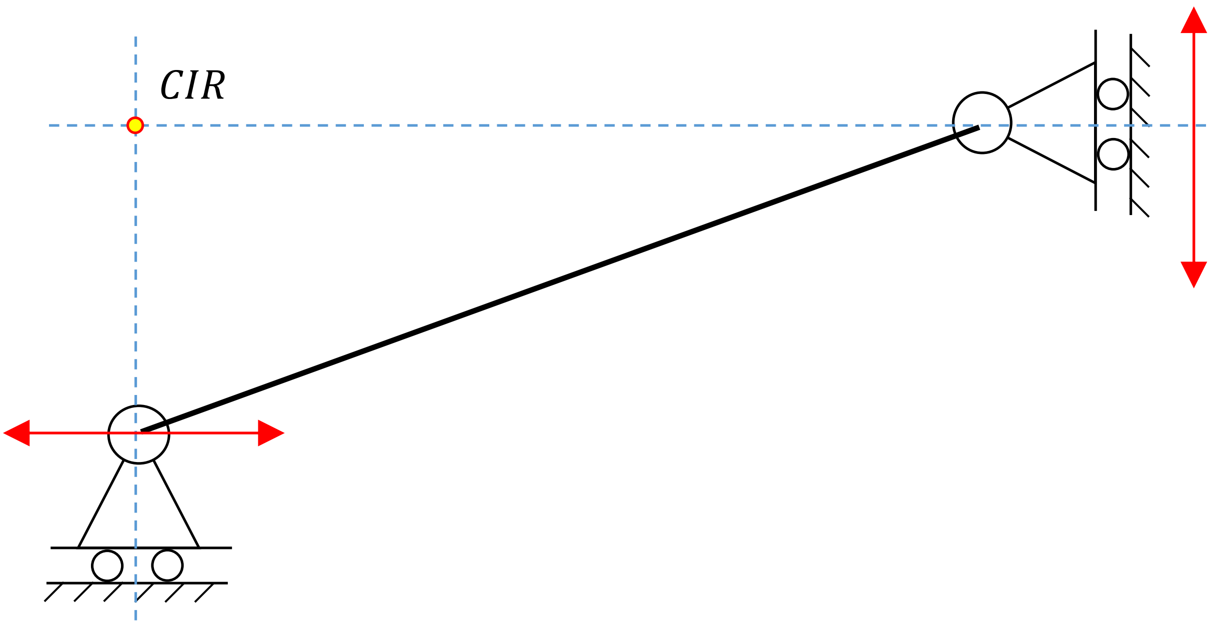


$Numero\ aste: N = 1 \qquad GdL = 3N = 3$

$GdV = 1 + 1 + 1 = 3$ Struttura isostatica

Il CIR di ogni carrello si trova su un punto appartenente alla normale al terreno. Le tre rette verticali si incontrano all'infinito.

LA STRUTTURA E' LABILE.

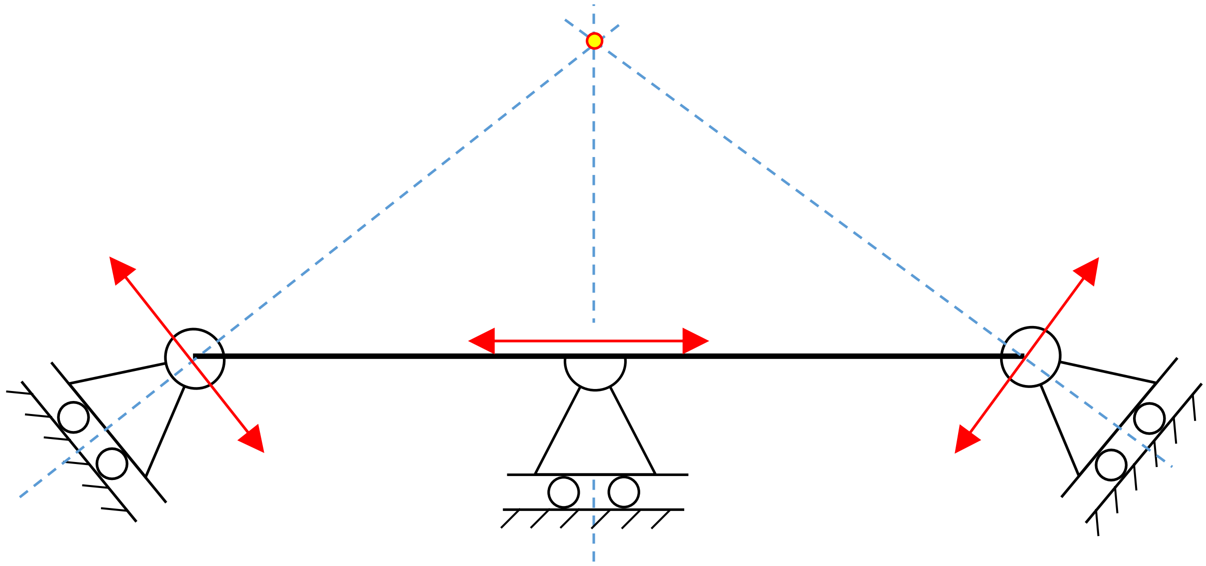


$Numero\ aste: N = 1 \qquad GdL = 3N = 3$

$GdV = 1 + 1 = 2$ Struttura LABILE

Il CIR di ogni carrello si trova su un punto appartenente alla normale al terreno. Le due rette si incontrano in un punto proprio.

ANALISI CINEMATICA



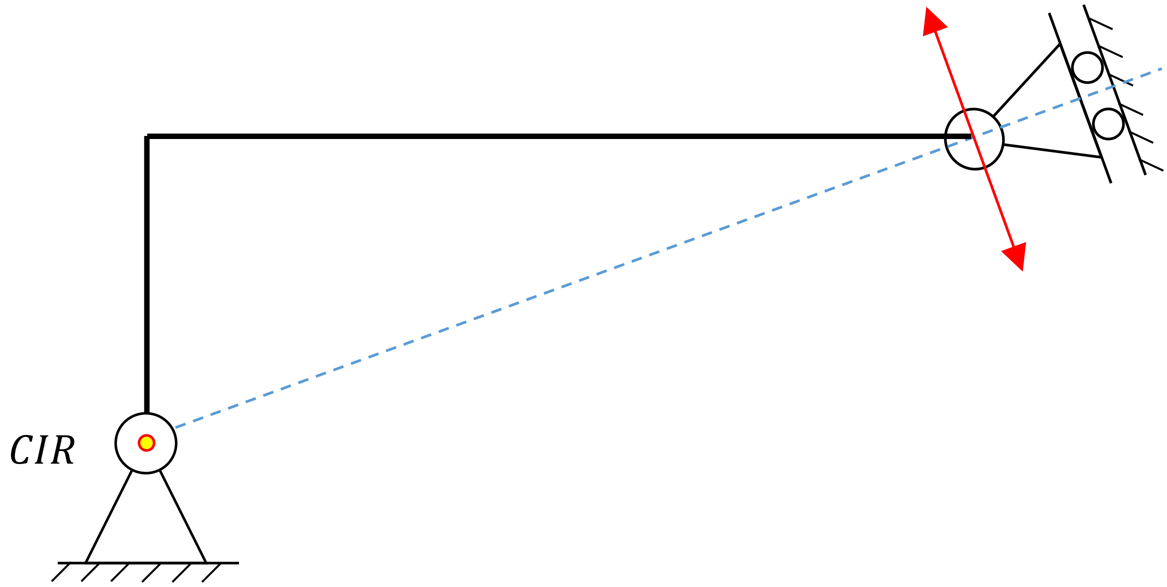
$Numero\ aste: N\ =\ 1 \qquad GdL\ = 3N = 3$

$GdV\ =\ 1 + 1 + 1 = 3$ Struttura isostatica

Il CIR di ogni carrello si trova su un punto appartenente alla normale al terreno. Le tre rette verticali si incontrano in un punto.

LA STRUTTURA E' LABILE.

ANALISI CINEMATICA



$Numero\ aste: N\ =\ 1 \qquad GdL\ = 3N = 3$

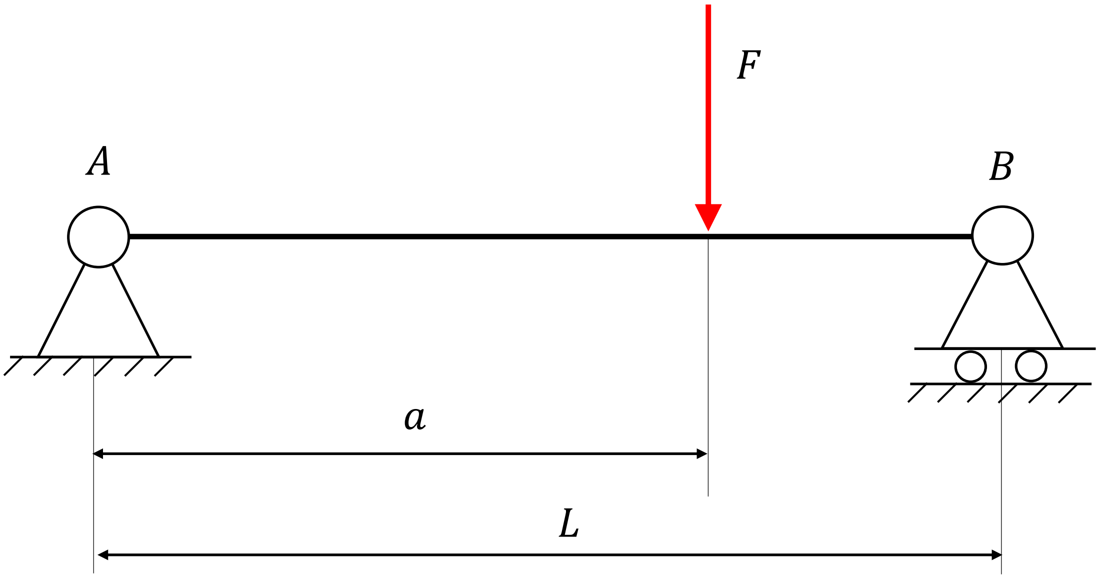
$GdV\ =\ 2 + 1 = 3$ <u>Struttura isostatica</u>

Il CIR del carrello si trova sulla retta normale al terreno che passa sul CIR della cerniera a terra. Struttura LABILE

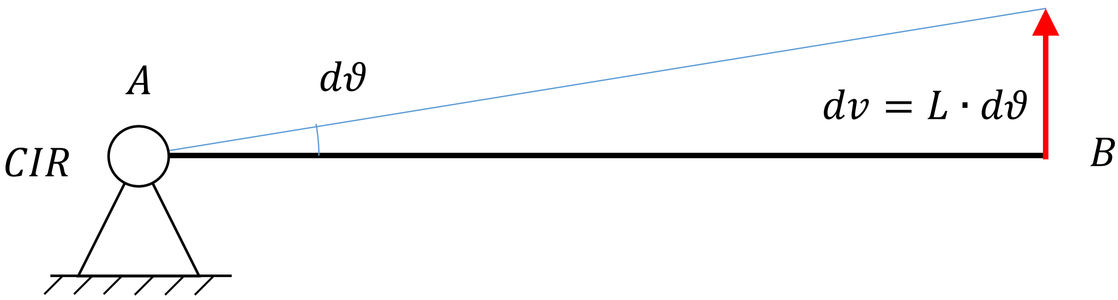
ESERCIZI di STATICA:

CALCOLO DELLE REAZIONI A TERRA

ESERCIZIO N.1

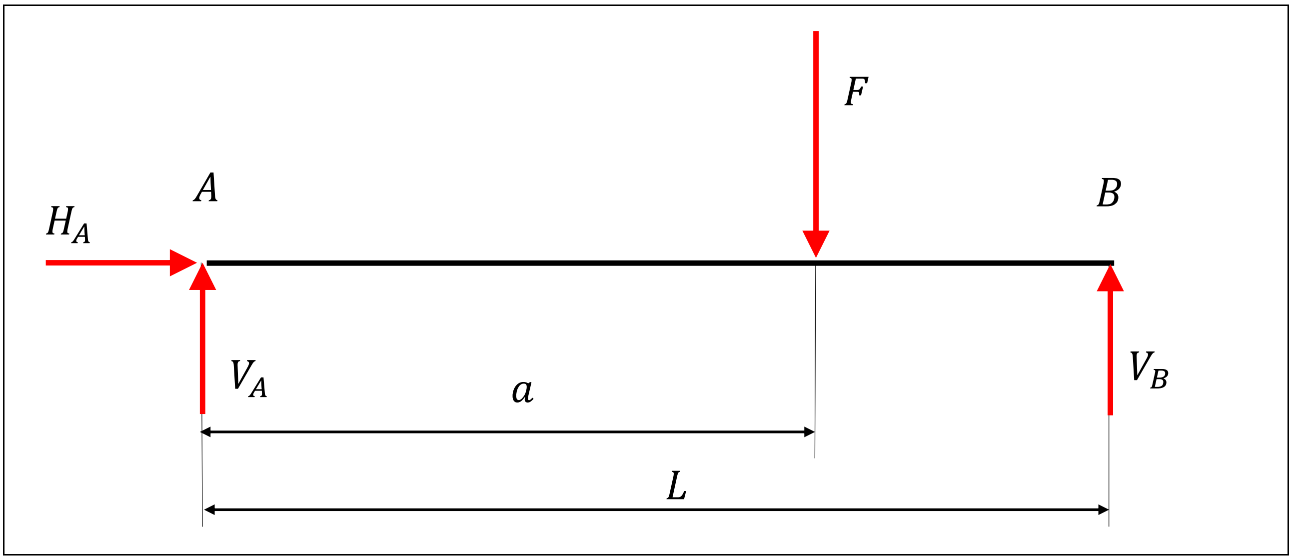


SOLUZIONE



Analisi cinematica:

struttura stabile perché il carrello in B impedisce lo spostamento.



EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - F = 0 \\ \sum M_z = V_B L - Fa = 0 \end{cases}$$

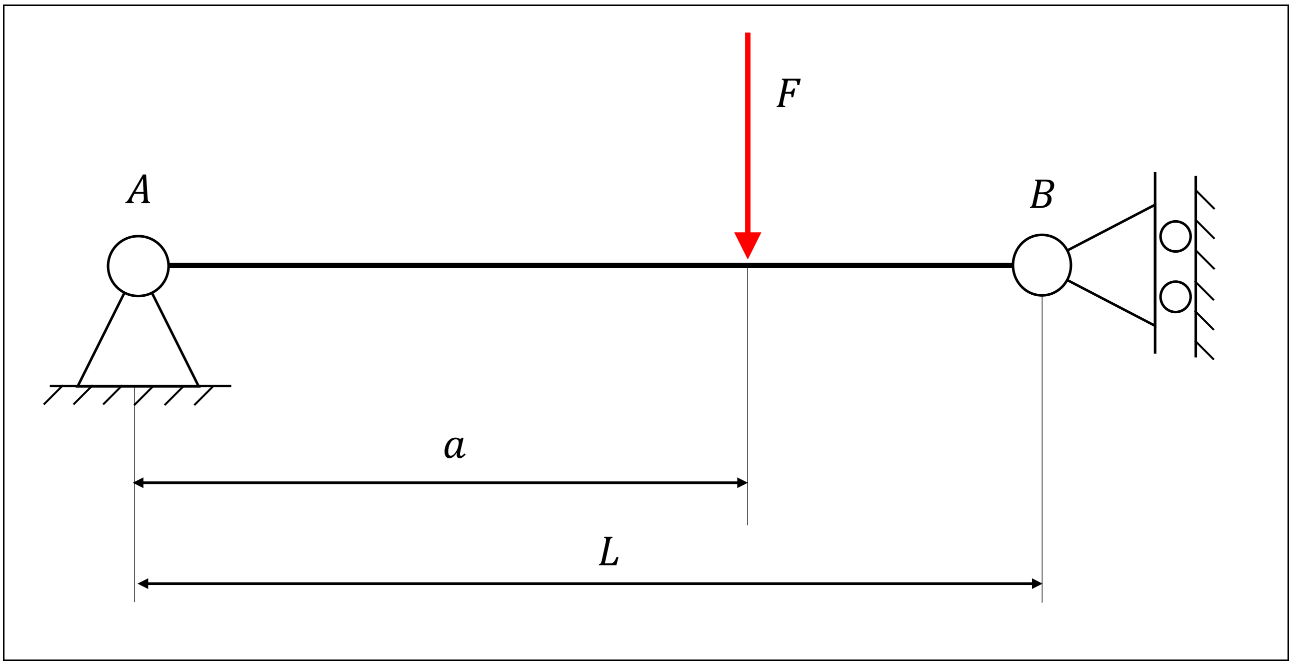
La terza equazioni indica la sommatoria dei momenti rispetto al polo A.

Dalla terza equazione si ricava: $V_B = F\frac{a}{L}$

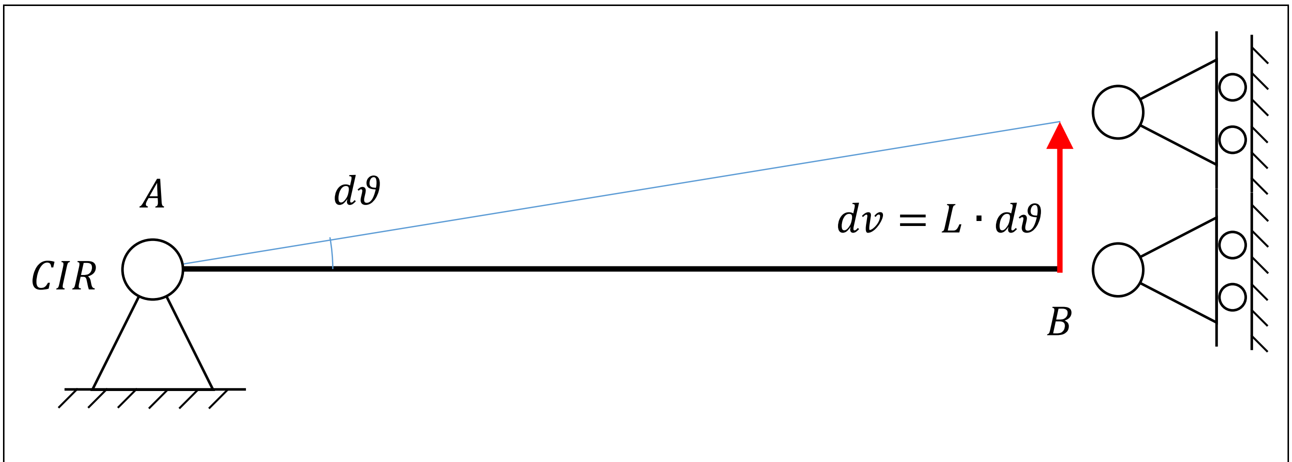
Sostituendo il valore di V_B nella seconda equazione si ottiene:

$$V_A = F - V_B = F - F\frac{a}{L} = \frac{L-a}{L}F$$

ESERCIZIO N.2

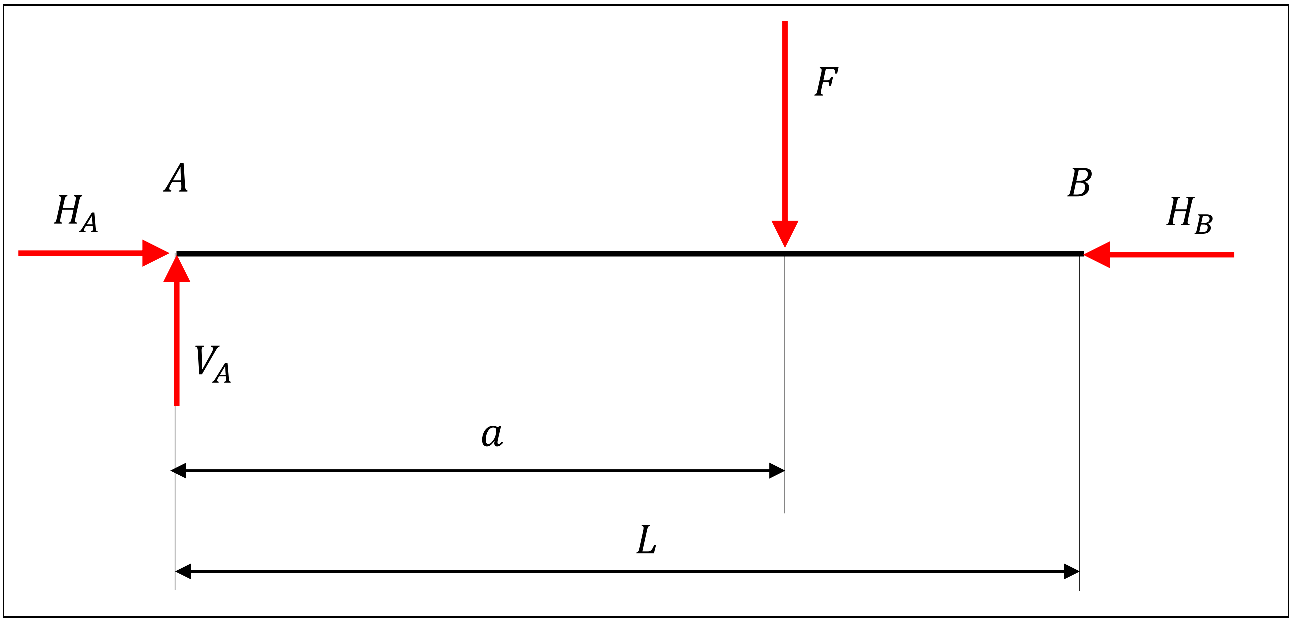


SOLUZIONE



LA STRUTTURA NON È CORRETTAMENTE VINCOLATA MA RISULTA LABILE.

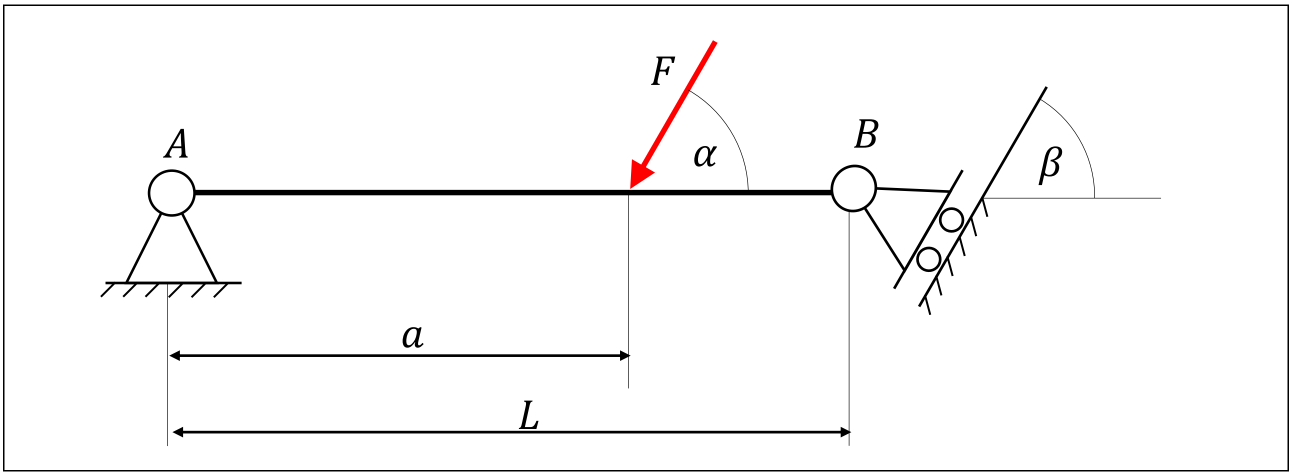
Applichiamo comunque le **equazioni cardinali della statica**



EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

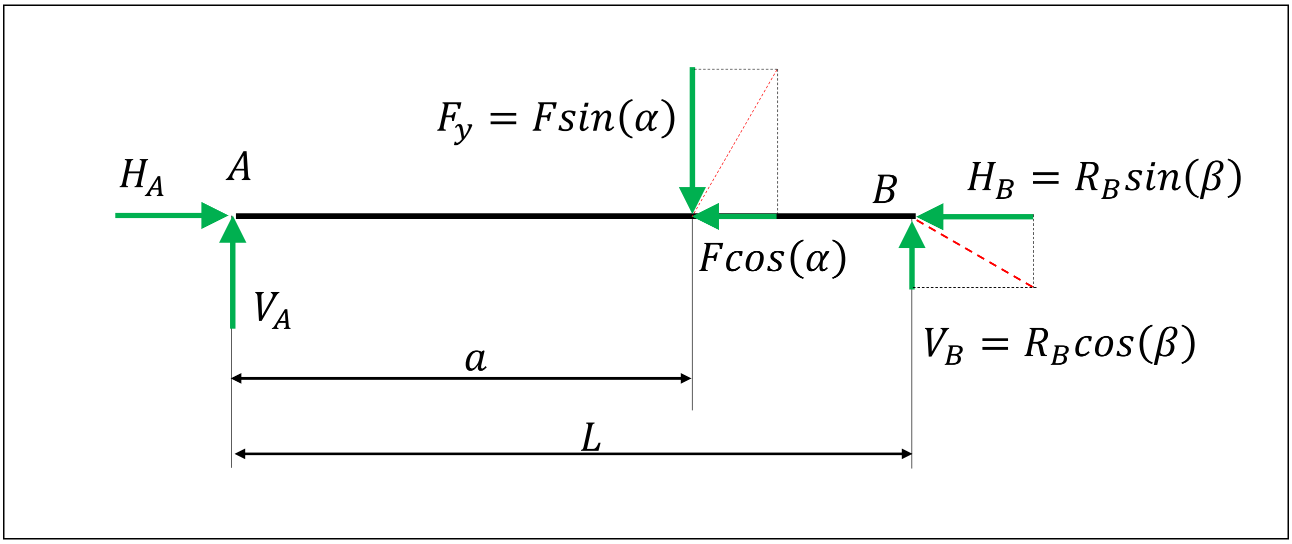
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - H_B = 0 \quad \textit{iperstatica} \\ \sum F_y = V_A - F = 0 \\ \sum M_z = Fa \neq 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO N.3



SOLUZIONE

1° metodo

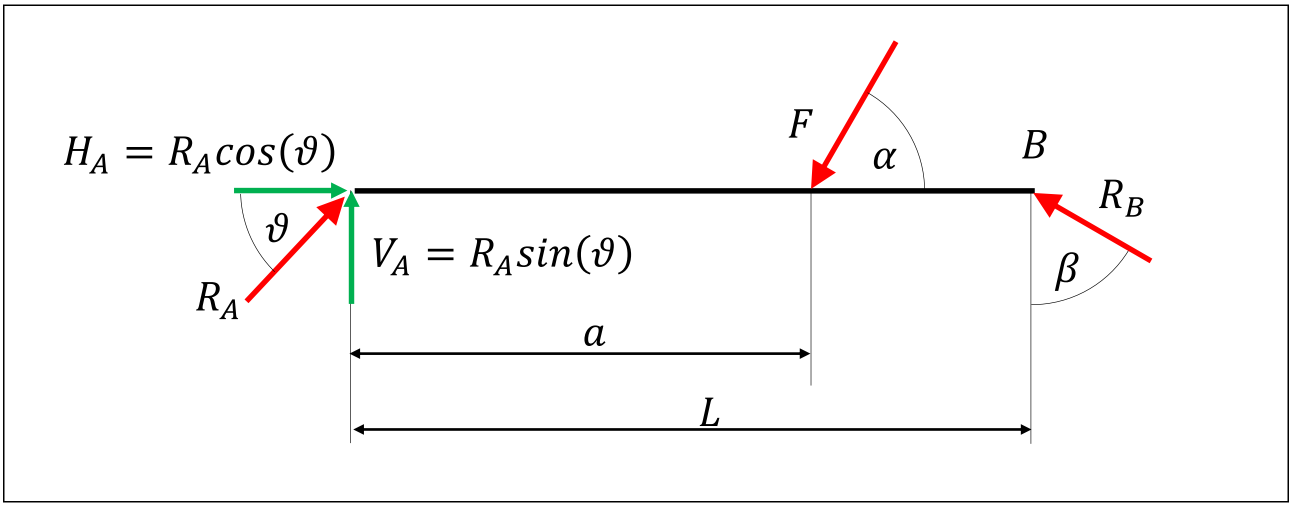


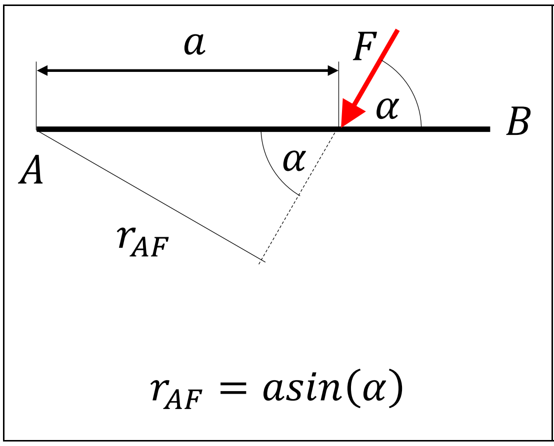
$$\sum_A M_z = V_B L - F_y a = R_B cos(\beta) L - F sin(\alpha) a = 0$$

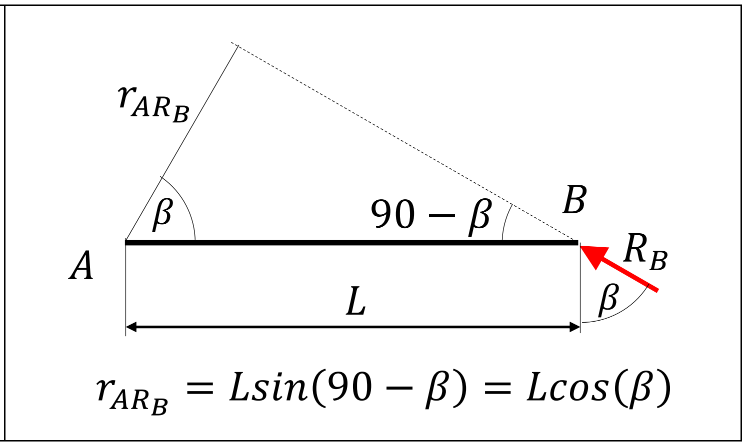
da cui

$$R_B = F \frac{a \cdot sin(\alpha)}{L \cdot cos(\beta)}$$

2° metodo







$$\sum_A M_z = R_B r_{AR_B} - F r_{AF} = R_B L cos(\beta) - F a sin(\alpha) = 0$$

da cui

$$R_B = F \frac{a \cdot sin(\alpha)}{L \cdot cos(\beta)}.$$

Il risultato è identico a quello ottenuto precedentemente.

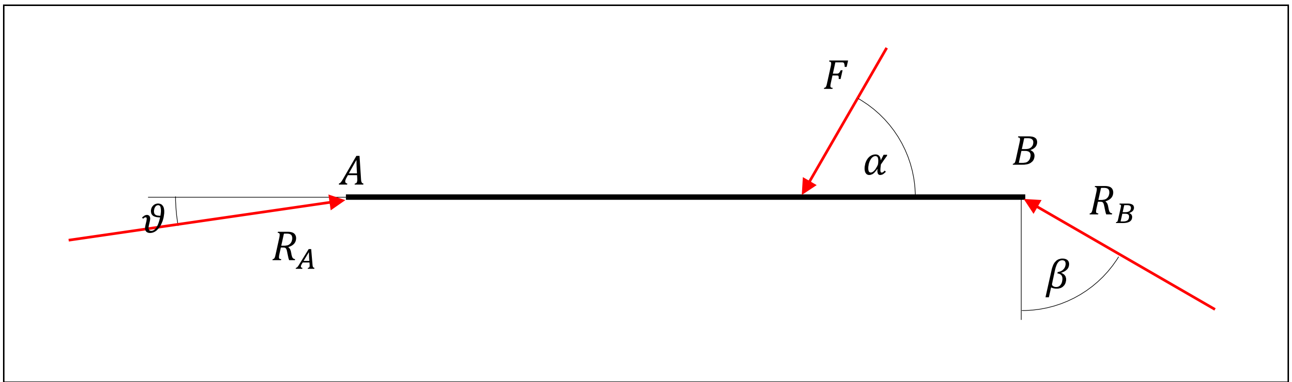
Per l'equilibrio delle forze orizzontali e verticali è necessario verificare che siano valide le seguenti equazioni:

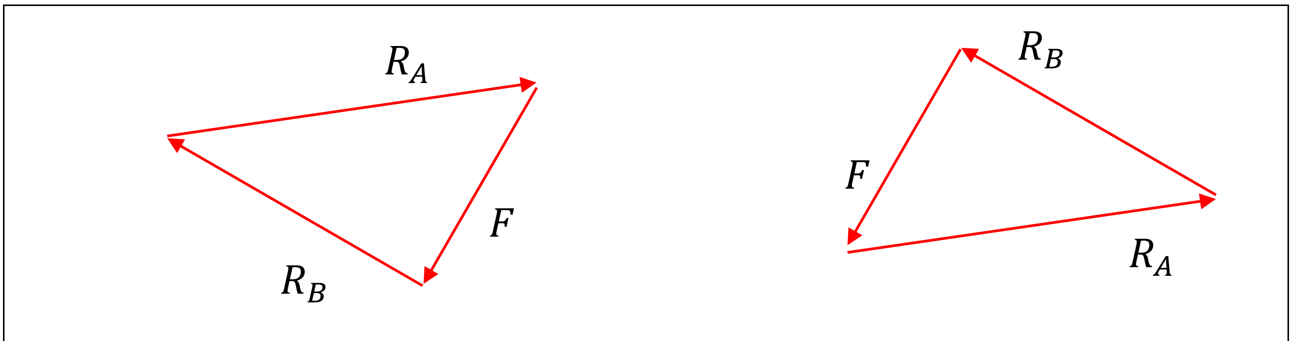
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - H_B = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - F_y = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} H_A = H_B = R_B sin(\beta) = F\frac{a \cdot sin(\alpha)}{L \cdot cos(\beta)} sin(\beta) = F\frac{a}{L} sin(\alpha) tang(\beta) \\ V_A = F_y - V_B = Fsin(\alpha) - R_B cos(\beta) = Fsin(\alpha) - F\frac{a \cdot sin(\alpha)}{L \cdot cos(\beta)} cos(\beta) = Fsin(\alpha)\left(1 - \frac{a}{L}\right) \end{cases}$$

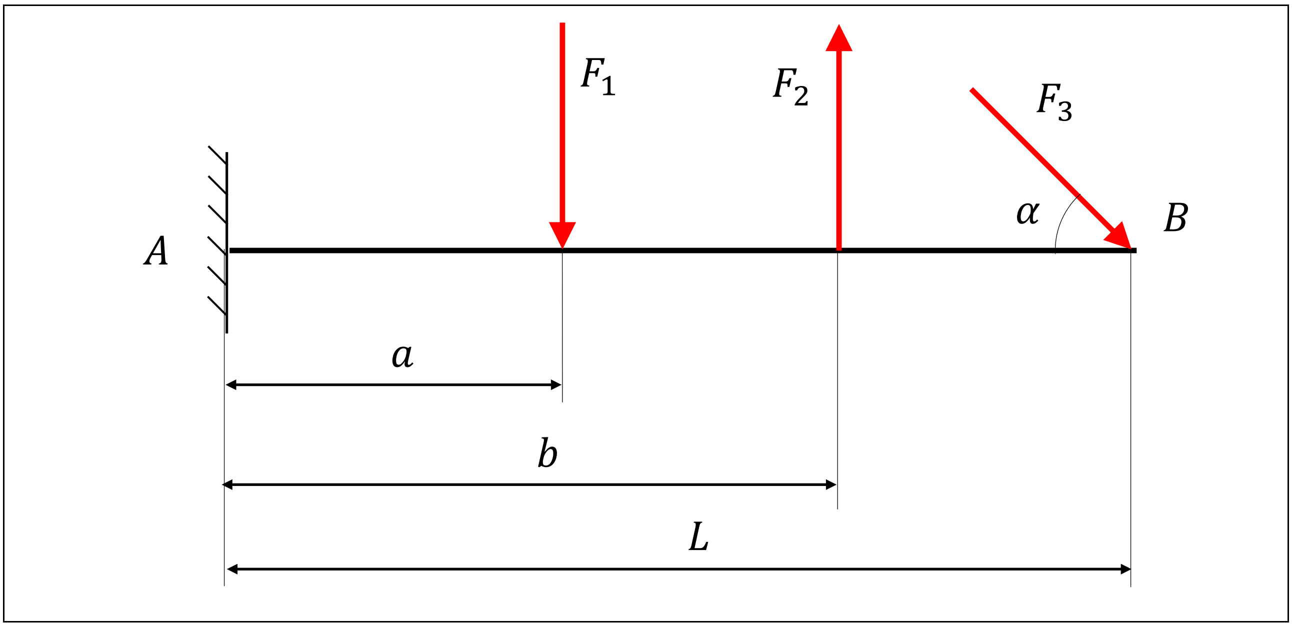
E' evidente che quando $\beta \rightarrow 90°$ allora $H_A \rightarrow \infty$ e la struttura diventa labile.



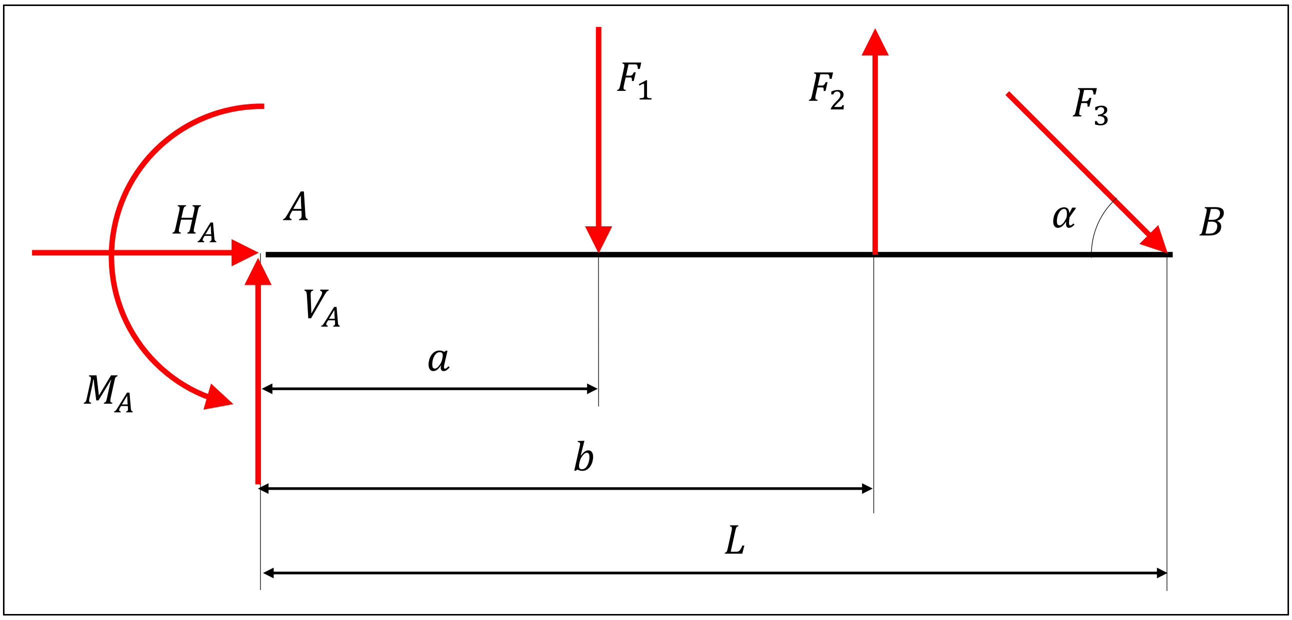


I due poligoni delle forze sono equivalenti: uno è percorso in senso orario, l'altro in senso antiorario, ma entrambe sono chiusi.

ESERCIZIO N.4



SOLUZIONE

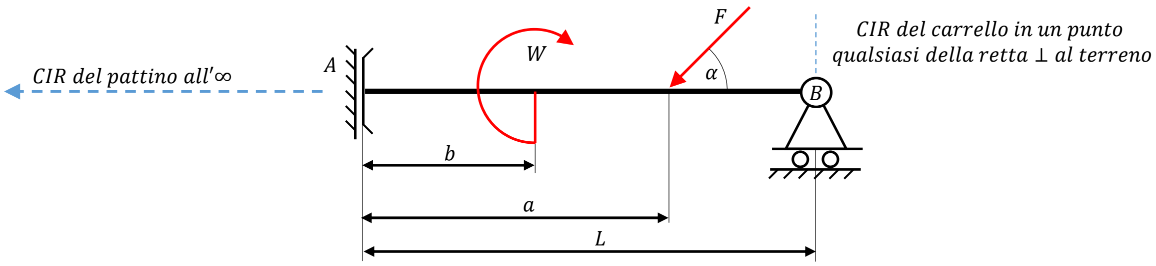


EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A + F_3 cos(\alpha) = 0 \\ \sum F_y = V_A - F_1 + F_2 - F_3 sin(\alpha) = 0 \\ \sum M_z = M_A - F_1 a + F_2 b - F_3 sin(\alpha) L = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_A = -F_3 cos(\alpha) \\ V_A = F_1 - F_2 + F_3 sin(\alpha) \\ M_A = F_1 a - F_2 b + F_3 sin(\alpha) L \end{cases}$$

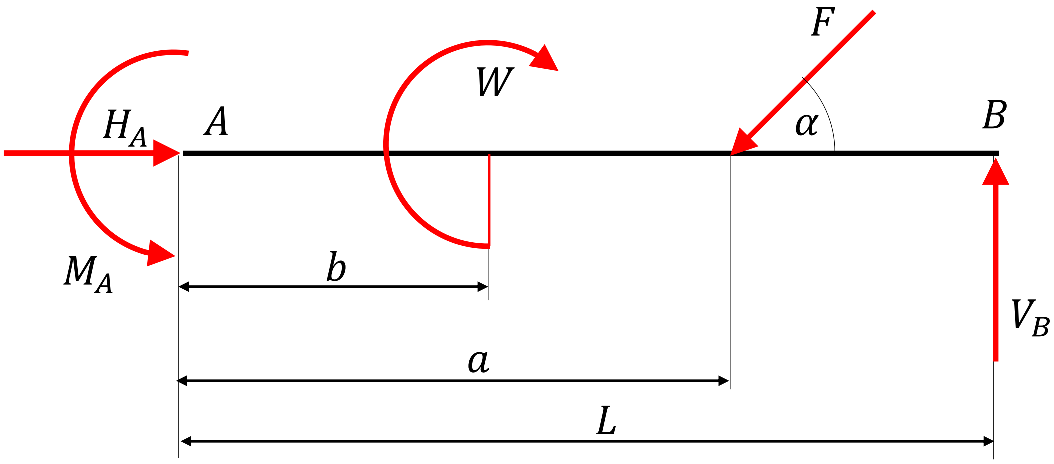
La terza equazioni indica la sommatoria dei momenti rispetto al polo A.

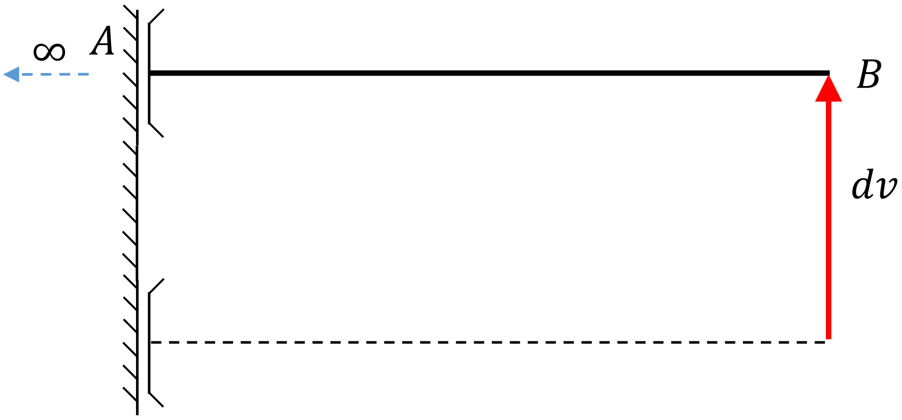
ESERCIZIO N.5



SOLUZIONE

Si eliminano gli schemi dei vincoli che vengono sostituiti dalle reazioni del terreno:





Analisi cinematica: struttura stabile.
il carrello in B impedisce lo spostamento

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - Fcos(\alpha) = 0 \\ \sum F_y = V_B - Fsin(\alpha) = 0 \\ \sum M_z = M_A - W - Fsin(\alpha)a + V_B L = 0 \end{cases}$$

La terza equazioni indica la sommatoria dei momenti rispetto al polo A.

E’ evidente che le equazioni non dipendono dal punto di applicazione della coppia, cioè non dipendono dal valore della quota b.

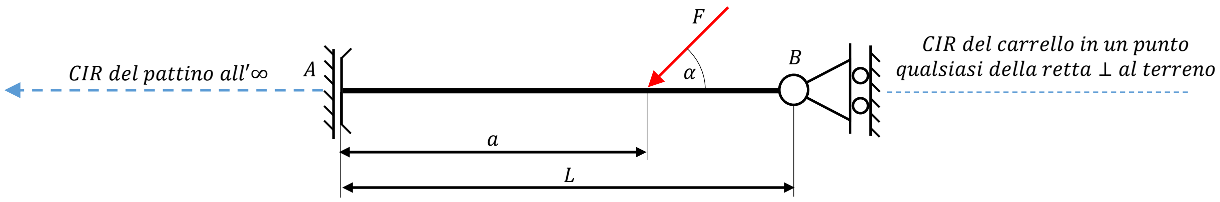
Risolvendo si ottiene:

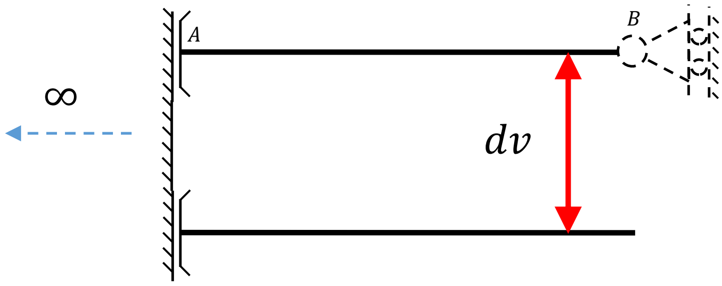
$$\begin{cases} H_A = Fcos(\alpha) \\ V_B = Fsin(\alpha) \\ M_A = W + Fsin(\alpha)a - V_B L \end{cases}$$

Sviluppando:

$$M_A = W + Fsin(\alpha)a - Fsin(\alpha)L = W - Fsin(\alpha)(L - a)$$

ESERCIZIO N.6

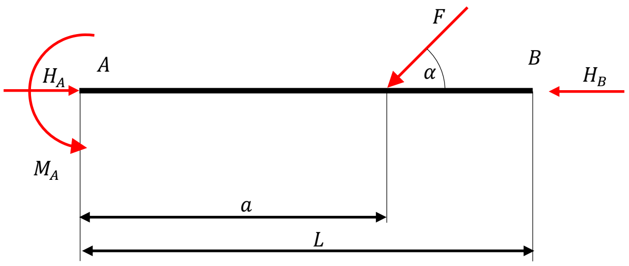




Il ripristino del carrello non impedisce lo spostamento della trave.

i due CIR coincidono: *la struttura* E' LABILE:
nessun vincolo impedisce gli spostamenti verticali.

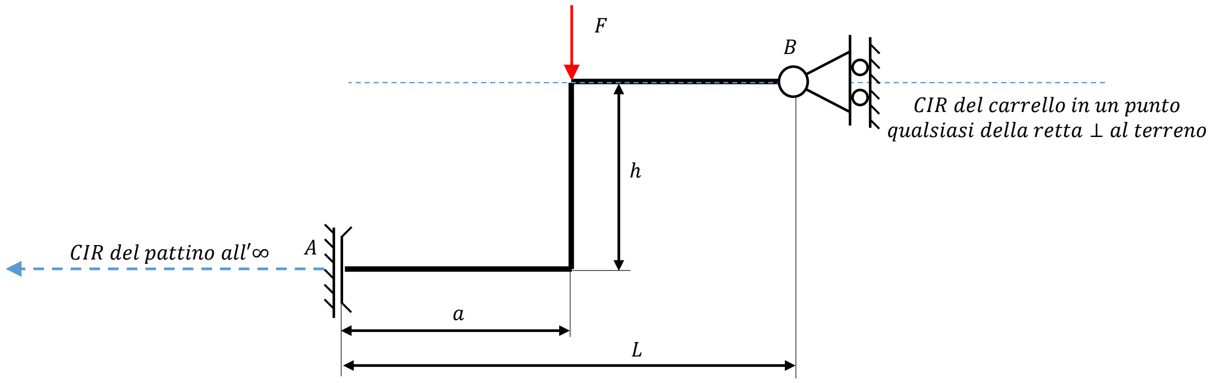
Applichiamo comunque le equazioni cardinali della statica.



$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - F\cos(\alpha) - H_B = 0 \quad \textit{iperstatica} \\ \sum F_y = -F\sin(\alpha) \neq 0 \\ \sum M_z = M_a - F\sin(\alpha)a = 0 \end{cases}$$

Se l'angolo α fosse nullo la struttura risulterebbe in equilibrio.

ESERCIZIO N.7

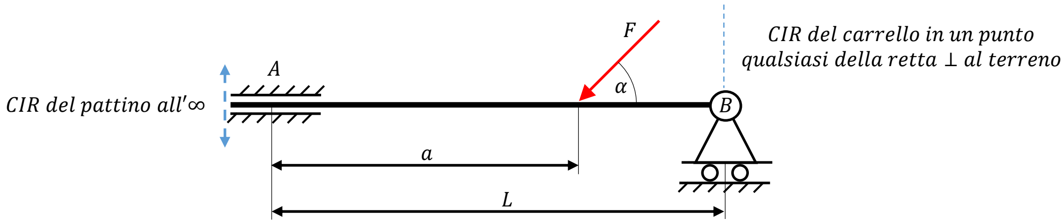


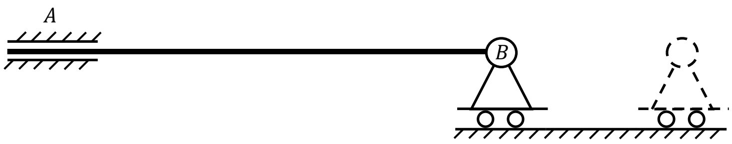
La retta dei CIR del carrello incontra all'infinito il CIR del pattino.

i due CIR coincidono: *la struttura* E' LABILE:

nessun vincolo impedisce gli spostamenti verticali.

ESERCIZIO N.8

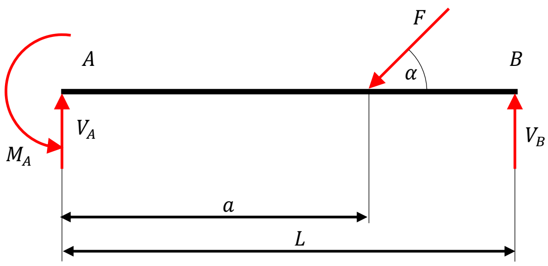




Il ripristino del carrello non impedisce lo spostamento della trave.

i due CIR coincidono: *la struttura* E' LABILE:
nessun vincolo impedisce gli spostamenti orizzontali.

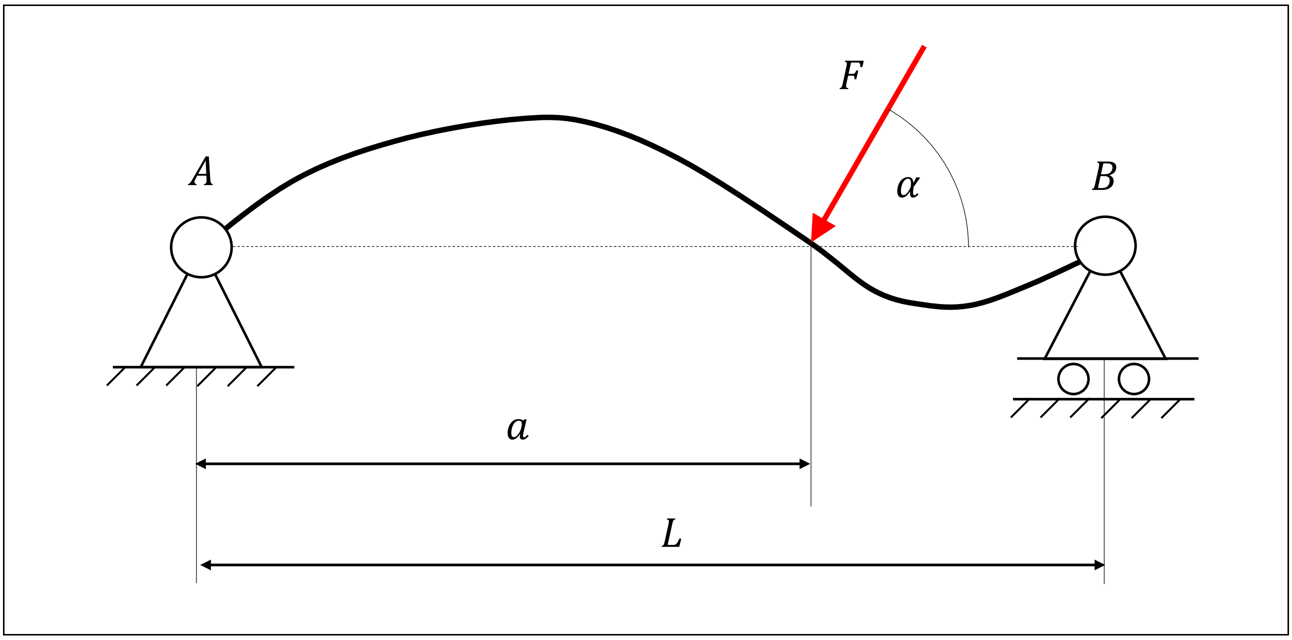
Applichiamo comunque le equazioni cardinali della statica.



$$\begin{cases} \sum F_x = -F\cos(\alpha) \neq 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - F\sin(\alpha) = 0 \\ \sum M_z = M_a + V_B L - F\sin(\alpha) a = 0 \end{cases}$$

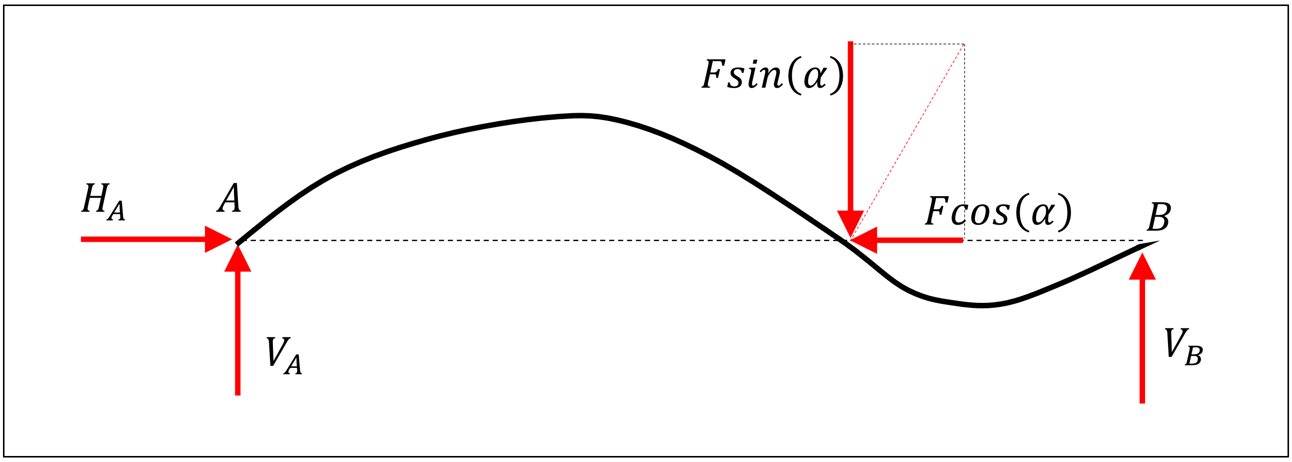
Se la forza F fosse verticale la struttura risulterebbe in equilibrio.

ESERCIZIO N.9



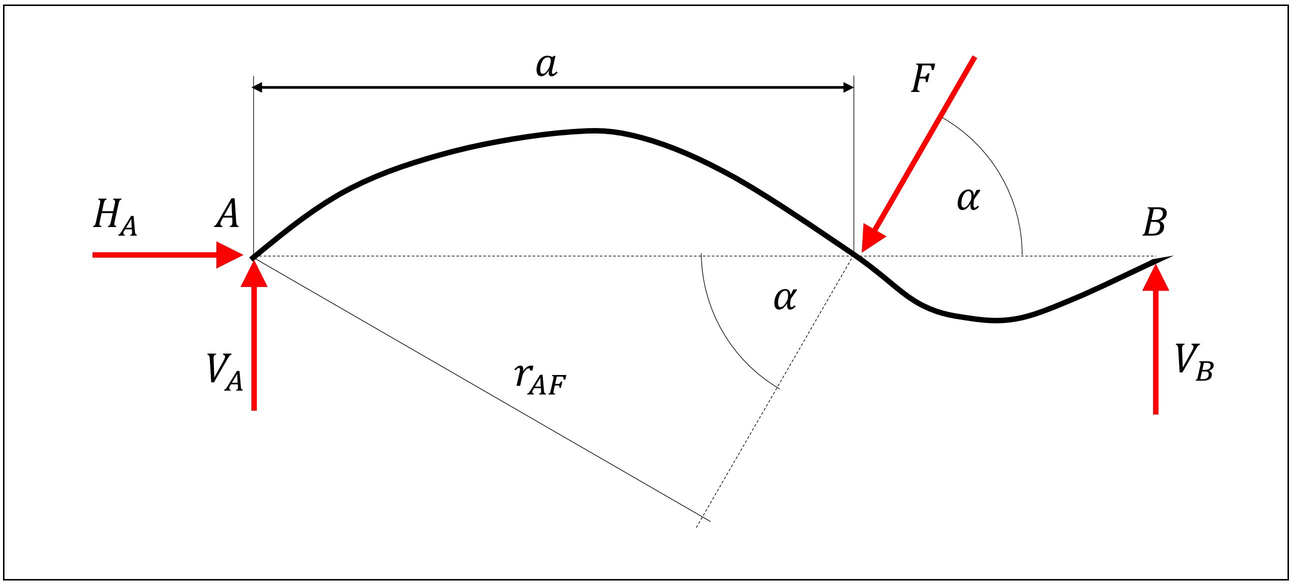
SOLUZIONE

1° metodo



$$
\begin{cases}
\sum F_x = H_A - F\cos(\alpha) = 0 \\
\sum F_y = V_A + V_B - F\sin(\alpha) = 0 \\
\sum M_z = V_B L - aF\sin(\alpha) = 0
\end{cases}
$$

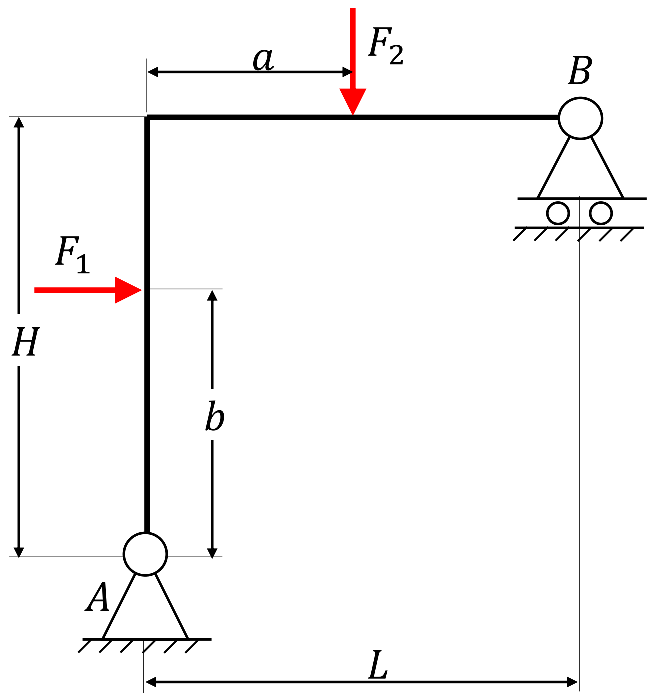
2° metodo



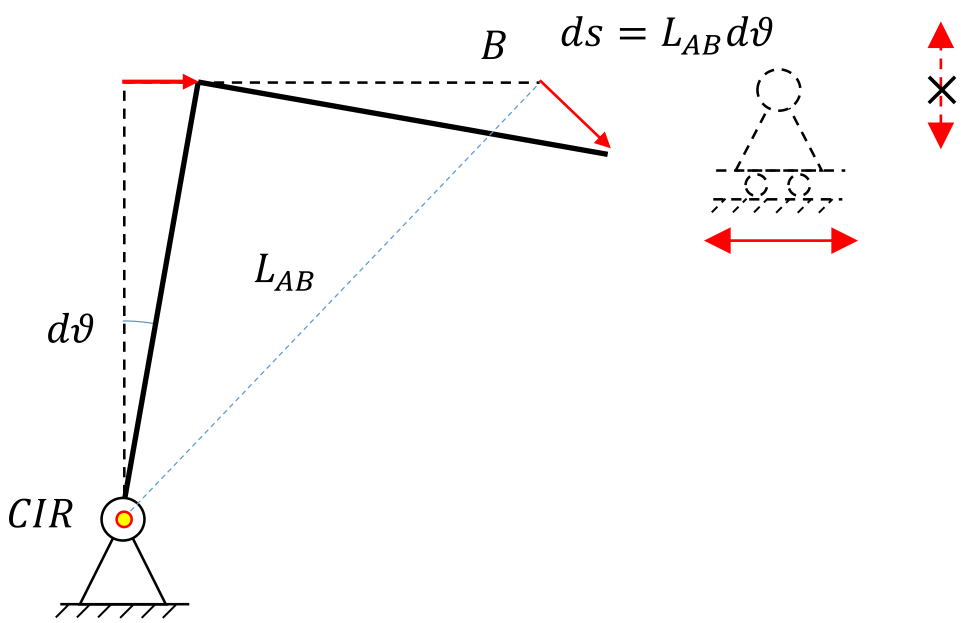
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A - F\cos(\alpha) = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - F\sin(\alpha) = 0 \\ \sum M_z = V_B L - r_{AF} F = V_B L - a\sin(\alpha) F = 0 \end{cases}$$

I risultati non dipendono dalla forma della trave, ma dal valore delle forze e dalla loro disposizione (direzione e retta d'azione).

ESERCIZIO N.10

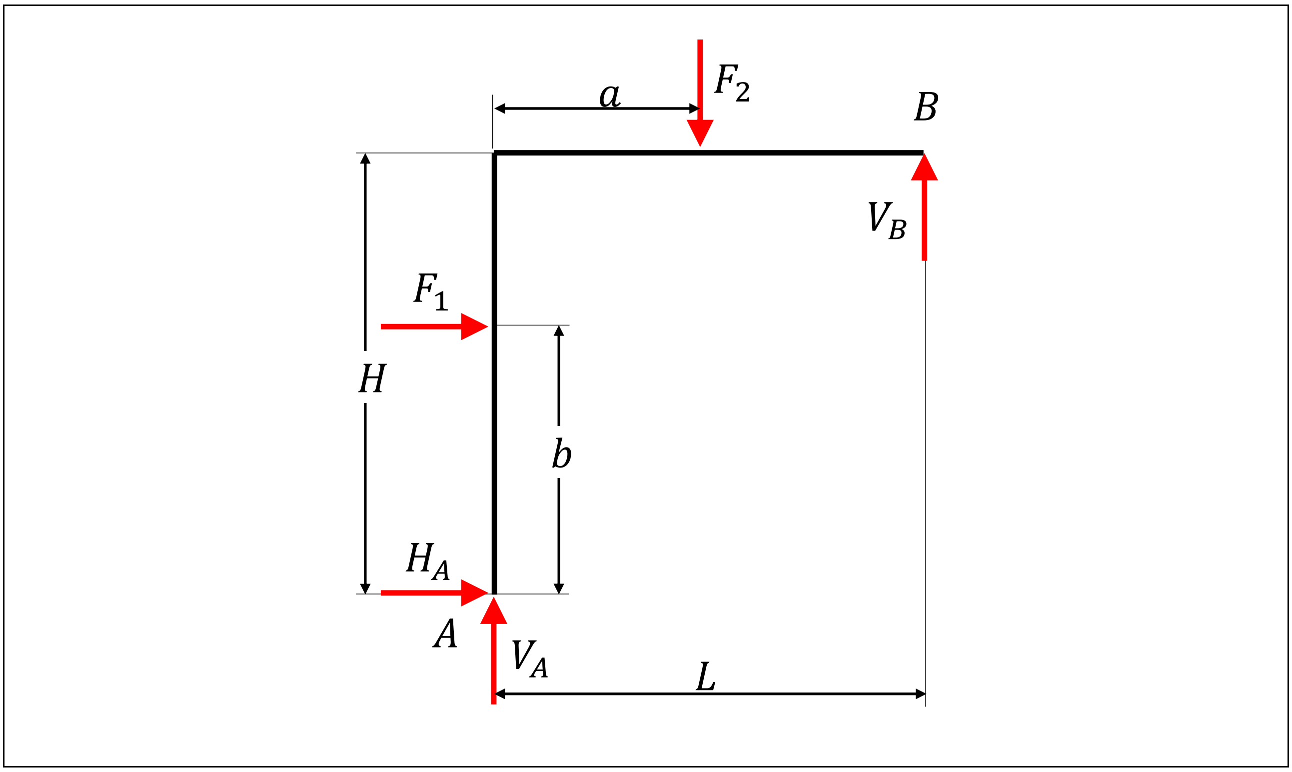


ANALISI CINEMATICA



Struttura isostatica non labile

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA



$$\begin{cases} \sum F_x = H_A + F_1 = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - F_2 = 0 \\ \sum M_z = V_B L - F_2 a - F_1 b = 0 \end{cases}$$

da cui risulta:

$$H_A = -F_1$$

$$V_B = \frac{F_2 a + F_1 b}{L}$$

$$V_A = F_2 - V_B = F_2 - \frac{F_2 a + F_1 b}{L} = \frac{F_2 (L - a) - F_1 b}{L}$$