

**CAP. 2 – METODO DELLA RIGIDEZZA E STRUTTURE RETICOLARI PIANE****2.1 Introduzione**

Nel primo capitolo abbiamo introdotto il concetto di matrice di rigidezza. Adesso dobbiamo spiegare come assemblare gli elementi per formare una struttura, come considerare le condizioni al contorno e come risolvere le equazioni algebriche del sistema. Per spiegare tutti questi aspetti verrà usata una struttura reticolare piana: si tratta di una struttura molto semplice, ma che ha anche un notevole interesse pratico. I concetti e le procedure che verranno illustrate sono applicabili altrettanto bene anche a strutture di diverso tipo.

Un'asta capace di resistere a carichi di trazione/compressione, una biella, è così semplice che non sarà difficile calcolarne la matrice di rigidezza a partire da semplici considerazioni di carattere fisico. Ciò non è vero per la maggior parte degli elementi, e nell'ottavo capitolo saranno illustrati i metodi generali per la generazione delle loro matrici di rigidezza.

In ciò che segue, ogni elemento sarà considerato uniforme, connesso al resto della struttura attraverso delle cerniere collocate alle sue estremità, linearmente elastico e caricato in direzione del proprio asse. Gli spostamenti che verranno rappresentati negli schizzi illustrativi, sono molto esagerati: nella realtà gli spostamenti devono essere piccoli. Entro i limiti di queste ipotesi, le seguenti analisi sono esatte, non approssimate.

Consideriamo solo il così detto metodo della rigidezza, in base al quale si calcolano i coefficienti di rigidezza e le incognite principali che ci proponiamo di calcolare sono gli spostamenti. La seguente discussione circa la rigidezza di elementi e struttura assomiglia a quella comparsa nell'articolo di Turner, Clough, Martin e Topp del 1956.

**2.2 Equazioni della rigidezza della struttura**

Come esempio utilizzeremo la struttura rappresentata in fig.2.2.1. I nodi e le aste sono stati numerati in modo arbitrario. Indichiamo con i simboli  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  le rigidezze delle singole aste, cioè per ogni elemento  $i$  è valida la seguente equazione:

$$P_i = k_i \cdot d_i = \frac{A_i E_i}{L_i} \cdot d_i \quad [2.2.1]$$

dove:  $P_i$  indica la forza che agisce in direzione assiale sull' $i$ -esimo elemento

$d_i$  indica l'allungamento che subisce l' $i$ -esimo elemento

$A_i$ ,  $E_i$ ,  $L_i$  indicano l'area della sezione trasversale, il modulo elastico del materiale e la lunghezza dell'elemento  $i$ -esimo.

L'eq. [2.2.1] si può ricavare ricordando che:

a) per uno stato di trazione semplice, abbiamo:  $\sigma_i = \frac{P_i}{A_i}$

b) per definizione, la deformazione vale:  $\epsilon_i = \frac{\Delta L_i}{L_i} = \frac{d_i}{L_i}$

c) è valida la Legge di Hooke:  $\sigma_i = E_i \cdot \epsilon_i$

da cui:  $\sigma_i = \frac{P_i}{A_i} = E_i \cdot \epsilon_i = E_i \cdot \frac{\Delta L_i}{L_i} = E_i \cdot \frac{d_i}{L_i}$

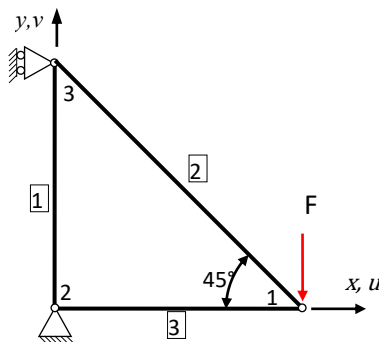


Fig.2.2.1 – Struttura reticolare piana.



Eliminiamo i vincoli a terra e la forza applicata  $F$  ed immaginiamo che ognuno dei tre nodi subisca un piccolo spostamento, prima in direzione orizzontale  $x$ , poi in direzione verticale  $y$ , mentre tutti gli altri nodi restano fermi. In ognuno dei sei casi possibili (due spostamenti per i tre nodi), possiamo calcolare le forze esterne che devono essere applicate alla struttura per garantirne l'equilibrio statico nella configurazione deformata.

Per procedere applichiamo il Principio dei Lavori Virtuali, che in questo caso è molto semplice perché sono assenti le azioni interne di flessione  $M$  e taglio  $T$  e le azioni normali  $N$  che agiscono sulle aste sono costanti.

Per iniziare applichiamo una forza nel nodo n.1 e indichiamo con  $H_1$  e  $V_1$  le sue componenti in direzione orizzontale e verticale; inoltre imponiamo che gli spostamenti degli altri nodi siano nulli. Dalla struttura eliminiamo l'asta verticale n.1 che risulta scarica, in quanto unisce due cerniere a terra e su di essa non agiscono carichi esterni.

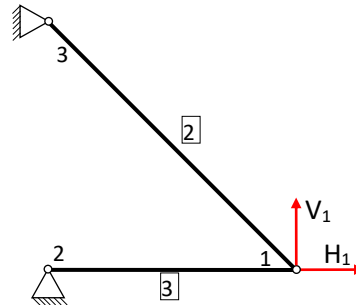
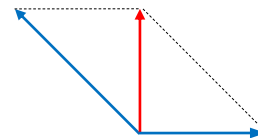


Fig.2.2.2 – Schema necessario per il calcolo degli spostamenti orizzontali e verticali del nodo n.1.

Le azioni interne che agiscono sulle aste valgono:

- 1) asta 2:  $N_2 = -\sqrt{2} \cdot V_1$
- 2) asta 3:  $N_3 = H_1 + V_1$



Per calcolare lo spostamento orizzontale del nodo n.1 dobbiamo applicare, nello stesso nodo di una struttura fittizia, una forza unitaria orizzontale. In questo caso le azioni interne saranno le seguenti:

- 1) asta 2:  $N_2 = 0$
- 2) asta 3:  $N_3 = 1$

L'applicazione del PLV conduce alla seguente equazione:

$$1 \cdot u_1 = \int_{nodo\ 1}^{nodo\ 2} \frac{H_1 \cdot 1}{E_3 \cdot A_3} \cdot dx + \int_{nodo\ 1}^{nodo\ 2} \frac{V_1 \cdot 1}{E_3 \cdot A_3} \cdot dx = \frac{H_1 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3} + \frac{V_1 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$

Per calcolare lo spostamento verticale del nodo n.1 dobbiamo applicare, nello stesso nodo di una struttura fittizia, una forza unitaria verticale. In questo caso le azioni interne saranno le seguenti:

- 1) asta 2:  $N_2 = -\sqrt{2}$
- 2) asta 3:  $N_3 = 1$

In questo caso, l'applicazione del PLV conduce alla seguente equazione:

$$1 \cdot v_1 = \int_{nodo\ 1}^{nodo\ 2} \frac{H_1 \cdot 1}{E_3 \cdot A_3} \cdot dx + \int_{nodo\ 1}^{nodo\ 2} \frac{V_1 \cdot 1}{E_3 \cdot A_3} \cdot dx + \int_{nodo\ 1}^{nodo\ 3} \frac{(-\sqrt{2} \cdot V_1) \cdot (-\sqrt{2})}{E_2 \cdot A_2} = \frac{H_1 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3} + \frac{V_1 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3} + \frac{2 \cdot V_1 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2}$$

Ricordando la definizione (2.2.1) della rigidità, possiamo riscrivere le stesse equazione nel modo seguente:

$$u_1 = \frac{H_1}{k_3} + \frac{V_1}{k_3}$$

$$v_1 = \frac{H_1}{k_3} + \frac{V_1}{k_3} + \frac{2 \cdot V_1}{k_2}$$

Se le forze applicate devono essere tali da provocare solo lo spostamento orizzontale  $u_1$  senza quello verticale, bisogna che tra di esse vi sia un preciso rapporto che si può calcolare imponendo il seguente vincolo:

$$v_1 = 0$$



da cui risulta:

$$v_1 = \frac{H_1}{k_3} + \frac{V_1}{k_3} + \frac{2 \cdot V_1}{k_2} = u_1 + \frac{2 \cdot V_1}{k_2} = 0$$

e quindi:

$$V_1 = -\frac{k_2}{2} \cdot u_1 \quad H_1 = k_3 \cdot u_1 - V_1 = k_3 \cdot u_1 + \frac{k_2}{2} \cdot u_1 = \left(k_3 + \frac{k_2}{2}\right) \cdot u_1$$

Perché la struttura risulti in equilibrio, le reazioni a terra devono valere:

$$\begin{aligned} V_2 &= 0 & H_2 &= -k_3 \cdot u_1 \\ V_3 &= \frac{k_2}{2} \cdot u_1 & H_3 &= -\frac{k_2}{2} \cdot u_1 \end{aligned}$$

In conclusione, perché il nodo n.1 subisca solo uno spostamento orizzontale, è necessario che sulla struttura agiscano le forze indicate nella fig.2.2.3a:

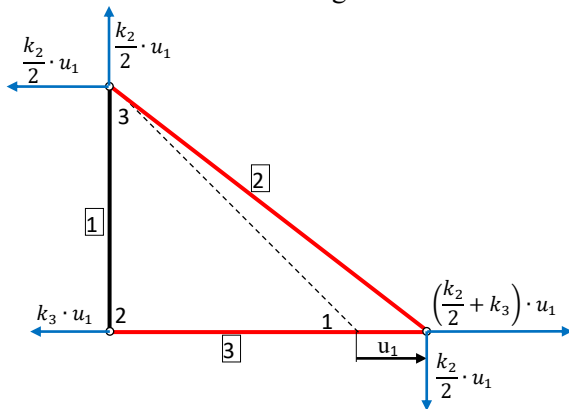


Fig. 2.2.3a

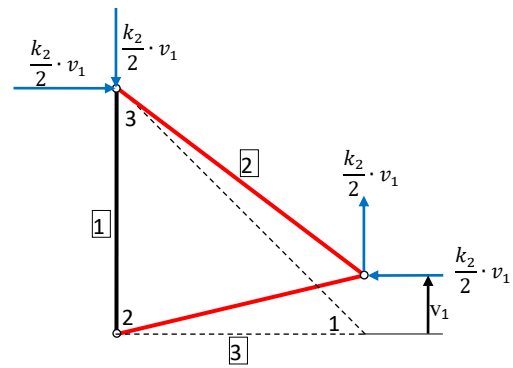


Fig. 2.2.3b

Se le forze applicate devono essere tali da provocare solo lo spostamento verticale  $v_1$ , bisogna imporre il seguente vincolo:

$$u_1 = \frac{H_1}{k_3} + \frac{V_1}{k_3} = 0$$

da cui risulta che le forze devono avere il valore seguente:

$$H_1 = -\frac{k_2}{2} \cdot v_1 \quad V_1 = \frac{k_2}{2} \cdot v_1$$

Perché la struttura risulti in equilibrio, le reazioni a terra devono valere:

$$\begin{aligned} H_2 &= 0 & V_2 &= 0 \\ H_3 &= \frac{k_2}{2} \cdot v_1 & V_3 &= -\frac{k_2}{2} \cdot v_1 \end{aligned}$$

In conclusione, perché il nodo n.1 subisca solo uno spostamento verticale, è necessario che sulla struttura agiscano le forze indicate nella fig.2.2.3b.

Replichiamo lo stesso ragionamento per il nodo n.2. In questo caso dalla struttura eliminiamo l'asta n.2 perché risulta scarica, in quanto unisce due cerniere a terra e su di essa non agiscono carichi esterni.

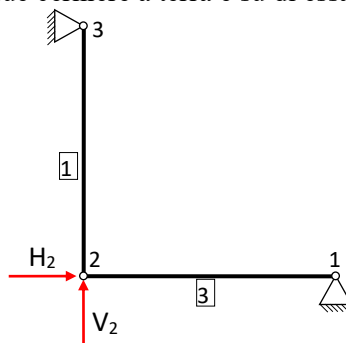


Fig.2.2.4 – Schema necessario per il calcolo degli spostamenti orizzontali e verticali del nodo n.2.



Le azioni interne che agiscono sulle aste valgono:

- 1) asta 2:  $N_1 = -V_2$
- 2) asta 3:  $N_3 = -H_2$

Per calcolare lo spostamento orizzontale del nodo n.2 dobbiamo applicare, nello stesso nodo di una struttura fittizia, una forza unitaria orizzontale. In questo caso le azioni interne saranno le seguenti:

- 1) asta 2:  $N_1 = 0$
- 2) asta 3:  $N_3 = -1$

L'applicazione del PLV conduce alla seguente equazione:

$$1 \cdot u_2 = \int_{nodo\ 1}^{nodo\ 2} \frac{(-H_2) \cdot (-1)}{E_3 \cdot A_3} \cdot dx = \frac{H_2 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$

Per calcolare lo spostamento verticale del nodo n.2 dobbiamo applicare, nello stesso nodo di una struttura fittizia, una forza unitaria verticale. In questo caso le azioni interne saranno le seguenti:

- 1) asta 2:  $N_1 = -1$
- 2) asta 3:  $N_3 = 0$

L'applicazione del PLV conduce alla seguente equazione:

$$1 \cdot v_2 = \int_{nodo\ 2}^{nodo\ 3} \frac{(-V_2) \cdot (-1)}{E_1 \cdot A_1} \cdot dx = \frac{V_2 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1}$$

Ricordando la definizione (2.2.1) della rigidità, possiamo riscrivere le stesse equazione nel modo seguente:

$$u_2 = \frac{H_2 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3} = \frac{H_2}{k_3} \qquad v_2 = \frac{V_2 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{V_2}{k_1}$$

Se le forze applicate devono essere tali da provocare solo lo spostamento orizzontale  $u_2$  senza quello verticale, è necessario che la forza verticale  $V_2$  sia nulla. Abbiamo quindi:

$$H_2 = k_3 \cdot u_2 \qquad \text{e} \qquad V_2 = 0$$

Perché la struttura risulti in equilibrio, le reazioni a terra devono valere:

$$\begin{aligned} H_1 &= -k_3 \cdot u_2 & \text{e} & & V_1 &= 0 \\ H_3 &= 0 & \text{e} & & V_3 &= 0 \end{aligned}$$

In conclusione, perché il nodo n.2 subisca solo uno spostamento orizzontale, è necessario che sulla struttura agiscano le forze indicate nella fig.2.2.5a.

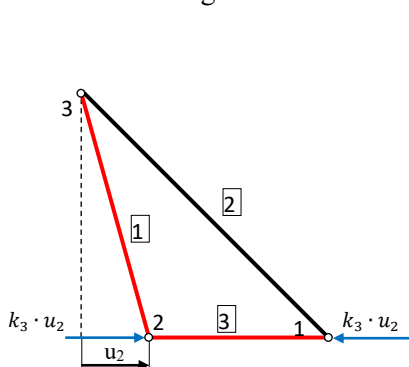


Fig. 2.2.5a

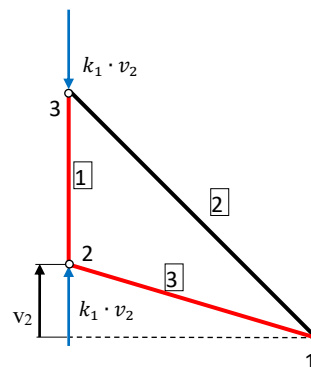


Fig. 2.2.5b

Se le forze applicate devono essere tali da provocare solo lo spostamento verticale  $v_2$  senza quello orizzontale, è necessario che la forza orizzontale  $H_2$  sia nulla. Abbiamo quindi:

$$H_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad V_2 = k_1 \cdot v_2$$

Perché la struttura risulti in equilibrio, le reazioni a terra devono valere:

$$H_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad V_1 = 0$$



$$H_3 = 0 \quad e \quad V_3 = -k_1 \cdot v_2$$

In conclusione, perché il nodo n.2 subisca solo uno spostamento verticale, è necessario che sulla struttura agiscano le forze indicate nella fig.2.2.5b.

Per il terzo nodo, non è necessario replicare i passaggi precedenti, perché per esso valgono gli stessi risultati visti per nodo n.1, purché si scambino le direzioni orizzontali e verticali. Perché il nodo n.3 subisca solo uno spostamento orizzontale e la struttura stia in equilibrio è necessario che su di essa agiscano le seguenti forze, indicate nella Fig.2.2.6a.

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{k_2}{2} \cdot v_3 & ; & & V_1 &= -\frac{k_2}{2} \cdot v_3 \\ H_2 &= 0 & ; & & V_2 &= -k_1 \cdot v_3 \\ H_3 &= -\frac{k_2}{2} \cdot v_3 & ; & & V_3 &= \left(k_1 + \frac{k_2}{2}\right) \cdot v_3 \end{aligned}$$

Perché il nodo n.3 subisca solo uno spostamento verticale e la struttura stia in equilibrio è necessario che su di essa agiscano le seguenti forze, indicate nella Fig.2.2.6b.

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{k_2}{2} \cdot u_3 & ; & & V_1 &= \frac{k_2}{2} \cdot u_3 \\ H_2 &= 0 & ; & & V_2 &= 0 \\ H_3 &= \frac{k_2}{2} \cdot u_3 & ; & & V_3 &= -\frac{k_2}{2} \cdot u_3 \end{aligned}$$

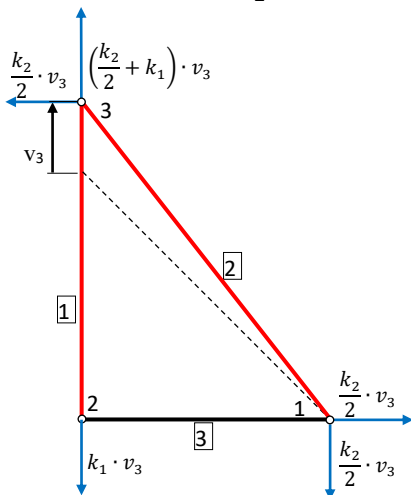


Fig. 2.2.6a

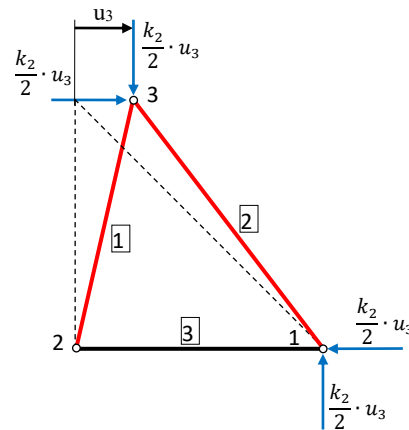


Fig. 2.2.6b

A questo punto siamo in grado di stabilire le forze necessarie in ogni nodo per mantenere in equilibrio la struttura deformata in modo qualsiasi. Sia  $\{D\}^T = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\}$  il vettore degli spostamenti nodali orientati secondo la direzione positiva degli assi coordinati e  $\{F\}^T = \{H_1 \ V_1 \ H_2 \ V_2 \ H_3 \ V_3\}$  il vettore delle corrispondenti forze nodali. Le forze allora si ottengono sommando i valori fin qui calcolati:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left(\frac{k_2}{2} + k_3\right) \cdot u_1 - \frac{k_2}{2} \cdot v_1 - k_3 \cdot u_2 - \frac{k_2}{2} \cdot u_3 + \frac{k_2}{2} \cdot v_3 \\ V_1 &= -\frac{k_2}{2} \cdot u_1 + \frac{k_2}{2} \cdot v_1 + \frac{k_2}{2} \cdot u_3 - \frac{k_2}{2} \cdot v_3 \\ H_2 &= -k_3 \cdot u_1 + k_3 \cdot u_2 \\ V_2 &= k_1 \cdot v_2 - k_1 \cdot v_3 \\ H_3 &= -\frac{k_2}{2} \cdot u_1 + \frac{k_2}{2} \cdot v_1 + \frac{k_2}{2} \cdot u_3 - \frac{k_2}{2} \cdot v_3 \\ V_3 &= \frac{k_2}{2} \cdot u_1 - \frac{k_2}{2} \cdot v_1 - k_1 \cdot v_2 - \frac{k_2}{2} \cdot u_3 + \left(k_1 + \frac{k_2}{2}\right) \cdot v_3 \end{aligned}$$

In forma matriciale possiamo scrivere il sistema delle equazioni di equilibrio:



$$\begin{bmatrix} \frac{k_2}{2} + k_3 & -\frac{k_2}{2} & -k_3 & 0 & -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ -k_3 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} & 0 & -k_1 & -\frac{k_2}{2} & k_1 + \frac{k_2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad [2.2.5]$$

o in forma compatta:

$$[K] \cdot \{D\} = \{F\} \quad [2.2.6]$$

La matrice  $[K]$  si chiama matrice di rigidezza della struttura: si tratta di una matrice simmetrica, come ci saremmo dovuti aspettare in base al Teorema di Maxwell che afferma che il lavoro fatto dal sistema delle forze  $F_1$  per gli spostamenti  $d_2$  provocati dal sistema delle forze  $F_2$  è uguale al lavoro fatto dal sistema delle forze  $F_2$  per gli spostamenti  $d_1$  provocati dal sistema delle forze  $F_1$ :

$$L_{12} = F_1^T d_2 = F_2^T d_1 = L_{21}$$

Poiché:  $F_1 = [K] \cdot d_1$  e  $F_2 = [K] \cdot d_2$  sostituendo abbiamo:

$$F_1^T d_2 = d_1^T [K]^T d_2 = F_2^T d_1 = d_2^T [K]^T d_1$$

Poiché il lavoro è una quantità scalare, possiamo scrivere:

$$L_{12} = d_1^T [K]^T d_2 = L_{12}^T = [d_1^T [K]^T d_2]^T = d_2^T [K] d_1$$

da cui risulta che  $d_2^T [K] d_1 = d_1^T [K]^T d_2$  e quindi la matrice di rigidezza è simmetrica, cioè  $[K] = [K]^T$ .

La procedura appena descritta genera la matrice di rigidezza riga dopo riga, ma potrebbe essere generata anche colonna dopo colonna. Per esempio la prima colonna della matrice  $[K]$  quando è moltiplicata per lo spostamento orizzontale del nodo n.1,  $u_1$ , rappresenta il vettore delle forze nodali  $\{F\}$  mostrato nella Fig. 2.2.3a. Di conseguenza, ogni colonna di  $[K]$  può essere pensata come l'insieme delle forze necessarie per garantire l'equilibrio della struttura che ha subito lo spostamento unitario di un singolo nodo.

L'analisi precedente può essere applicata a una qualsiasi struttura, indipendentemente dal numero di elementi che la compongono e indipendentemente dal numero di iperstatiche presenti: si arriva comunque a scrivere tante equazioni indipendenti quanti sono gli spostamenti nodali indipendenti. Se il solido non è una struttura reticolare, le rigidezze dei singoli elementi devono comunque essere in un qualche modo approssimati, come verrà in seguito spiegato.

La somma degli elementi che compongono ogni colonna della matrice di rigidezza  $[K]$  è nulla, poiché ogni colonna rappresenta l'insieme delle forze nodali equilibrate prodotte da uno spostamento unitario di un grado di libertà nodale. Ogni termine diagonale  $K_{ii}$  della matrice di rigidezza è positivo: se così non fosse, una forza ed il corrispondente spostamento dovrebbero essere diretti in verso opposto, che da un punto di vista fisico, è irragionevole.

La matrice di rigidezza dell'eq.2.2.5 è singolare: il suo ordine è pari 6, ma il suo rango è solo 3. Il motivo è che finora non sono state imposte le condizioni al contorno, e la struttura è libera di subire spostamenti rigidi. Per ogni struttura piana sono possibili tre spostamenti rigidi indipendenti, due traslazioni ed una rotazione. Ognuno di essi è associato ad un vettore delle forze  $\{F\}$  nullo. Per esempio, se nella struttura precedente, imponiamo uno spostamento rigido il prodotto  $[K] \cdot \{D\}$  è nullo.



Spostamento rigido orizzontale:  $\{D\} = \{1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0\}^T$

$$\begin{bmatrix} \frac{k_2}{2} + k_3 & -\frac{k_2}{2} & -k_3 & 0 & -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ -k_3 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} & 0 & -k_1 & -\frac{k_2}{2} & k_1 + \frac{k_2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} + k_{13} + k_{15} \\ k_{21} + k_{23} + k_{25} \\ k_{31} + k_{33} + k_{35} \\ k_{41} + k_{43} + k_{45} \\ k_{51} + k_{53} + k_{55} \\ k_{61} + k_{63} + k_{65} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [2.2.5a]$$

Spostamento rigido verticale:  $\{D\} = \{0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1\}^T$

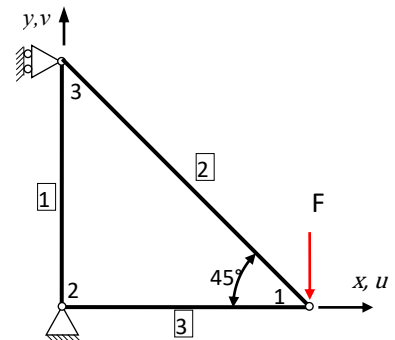
$$\begin{bmatrix} \frac{k_2}{2} + k_3 & -\frac{k_2}{2} & -k_3 & 0 & -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ -k_3 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} & 0 & -k_1 & -\frac{k_2}{2} & k_1 + \frac{k_2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{12} + k_{14} + k_{16} \\ k_{22} + k_{24} + k_{26} \\ k_{32} + k_{34} + k_{36} \\ k_{42} + k_{44} + k_{46} \\ k_{52} + k_{54} + k_{56} \\ k_{62} + k_{64} + k_{66} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [2.2.5b]$$

Rotazione intorno al nodo n.1:  $\{D\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1\}^T$

$$\begin{bmatrix} \frac{k_2}{2} + k_3 & -\frac{k_2}{2} & -k_3 & 0 & -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ -k_3 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} & 0 & -k_1 & -\frac{k_2}{2} & k_1 + \frac{k_2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{14} + k_{15} + k_{16} \\ k_{24} + k_{25} + k_{26} \\ k_{34} + k_{35} + k_{36} \\ k_{44} + k_{45} + k_{46} \\ k_{54} + k_{55} + k_{56} \\ k_{64} + k_{65} + k_{66} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [2.2.5c]$$

Come suggerito da questi esempi, sono possibili una infinità di spostamenti rigidi, ma per una struttura piana solo tre sono indipendenti. Per impedire gli spostamenti rigidi di una struttura piana è necessario imporre almeno tre spostamenti nodali. Nella Fig. 2.2.1 le condizioni imposte alle forze ed agli spostamenti sono i seguenti:

- |   |                 |         |
|---|-----------------|---------|
| a) cerniera a terra nel nodo n.2        | $u_2 = v_2 = 0$ |         |
| b) carrello a terra nel nodo n.3        | $u_3 = 0$       |         |
| c) Forza verticale nel nodo n.1         | $V_1 = -F$      | [2.2.7] |
| d) Forza orizzontale nulla nel nodo n.1 | $H_1 = 0$       |         |
| e) Forza verticale nulla nel nodo n.3   | $V_3 = 0$       |         |



Le restanti tre forze e i restanti tre spostamenti sono ancora incogniti.

Per calcolarli si può procedere nel modo seguente. L'indice  $n$  indicherà le quantità note presenti nell'eq.2.2.7, e l'indice  $i$  indicherà le restanti quantità incognite. L'eq. 2.2.5 può essere modificata nel modo seguente, disponendo in modo adeguato coefficienti ed incognite:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_i \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_n \\ F_i \end{Bmatrix} \quad [2.2.8]$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} [K_{11}^*] \cdot \{D_i\} + [K_{12}^*] \cdot \{D_n\} &= \{F_n\} \\ [K_{21}^*] \cdot \{D_i\} + [K_{22}^*] \cdot \{D_n\} &= \{F_i\} \end{aligned} \quad [2.2.9]$$

La prima delle due equazioni consente di calcolare gli spostamenti incogniti:



$$D_i = [K_{11}^*]^{-1} \cdot (\{F_n\} - [K_{12}^*] \cdot \{D_n\}) \quad [2.2.10]$$

Noti gli spostamenti, con la seconda delle eq.2.2.9 è possibile calcolare le reazioni incognite. Nell'esempio che abbiamo esaminato, gli spostamenti imposti, e quindi noti, sono nulli:

$$\{D_n\} = \{u_2 \quad v_2 \quad u_3\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0\}^T.$$

In generale, non è detto che gli spostamenti imposti siano nulli.

Vediamo come procedere per partizionare il sistema. Iniziamo indicando i vettori delle forze e degli spostamenti, noti ed incogniti.

$$\{F_n\} = \{U_1 \quad V_1 \quad V_3\}^T = \{0 \quad -F \quad 0\}^T$$

$$\{F_i\} = \{U_2 \quad V_2 \quad U_3\}^T$$

$$\{D_i\} = \{u_1 \quad v_1 \quad v_3\}^T$$

Per partizionare la matrice, prima scambiamo l'ordine delle righe, cioè l'ordine delle equazioni, che non comporta la modifica del vettore degli spostamenti, ma quello delle forze.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ V_3 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_n \\ F_i \end{Bmatrix}$$

A questo punto modifichiamo l'ordine delle colonne, che non comporta la modifica del vettore delle forze, ma quello degli spostamenti.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{26} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{61} & K_{62} & K_{66} & K_{63} & K_{64} & K_{65} \\ K_{31} & K_{32} & K_{36} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{46} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{56} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_n \\ F_i \end{Bmatrix}$$

da cui otteniamo la partizione della matrice globale:

$$[K_{11}^*] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{26} \\ K_{61} & K_{62} & K_{66} \end{bmatrix} \quad [K_{12}^*] = \begin{bmatrix} K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{63} & K_{64} & K_{65} \end{bmatrix}$$

$$[K_{21}^*] = \begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{56} \end{bmatrix} \quad [K_{22}^*] = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix}$$

Per eseguire l'eq.(2.2.9), prima calcoliamo il vettore  $\{f\} = \{F_n\} - [K_{12}^*] \cdot \{D_n\}$ , quindi risolviamo il sistema:

$$\{D_i\} = [K_{11}^*] \cdot \{f\}$$

Noti gli spostamenti  $\{D_i\}$ , con la seconda delle eq.2.2.9 è possibile calcolare le reazioni incognite:

$$\{F_i\} = [K_{21}^*] \cdot \{D_i\} + [K_{22}^*] \cdot \{D_n\}$$

### 2.3 Equazioni della rigidità dell'elemento

Nel paragrafo 2.2 la matrice della struttura  $[K]$  è stata calcolata esaminando l'intera struttura. Questa procedura ci aiuta a spiegare la natura di  $[K]$ , ma è troppo complicata nei casi pratici. Se in alternativa iniziamo con un solo elemento di riferimento, siamo condotti ad un metodo sistematico ed automatico per la costruzione di  $[K]$  grazie all'assemblaggio dei singoli elementi. La Fig. 2.3.1 mostra un singolo elemento, disposto arbitrariamente nel piano  $xy$ .





Siano  $A$ ,  $E$  ed  $L$  l'area trasversale costante, il modulo elastico e la lunghezza dell'elemento. Il seno ed il coseno dell'angolo  $\vartheta$  verranno indicati con i simboli  $s$  e  $c$  e possono essere calcolati a partire dalle coordinate nodali:

$$\begin{aligned} s &= \sin(\vartheta) = \frac{y_j - y_i}{L} \\ c &= \cos(\vartheta) = \frac{x_j - x_i}{L} \\ L &= \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \end{aligned} \quad [2.3.1]$$

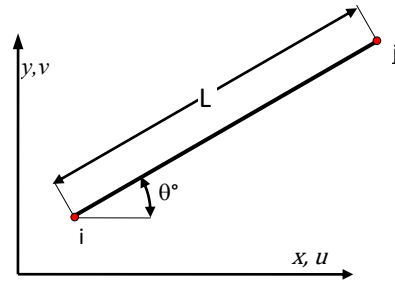


Fig.2.3.1

Ora, come fatto nel paragrafo 2.2, spostiamo ogni nodo di una piccola quantità in ogni direzione, impedendo gli altri spostamenti. Il primo di questi casi è mostrato nella Fig.2.3.2. L'accorciamento  $c \cdot u_i$  produce una forza di compressione assiale pari a  $c \cdot u_i \cdot A \cdot E/L$ . Le componenti orizzontale e verticale di questa forza devono essere equilibrate dalle forze esterne  $U_i, V_i, U_j$  e  $V_j$ . Così ponendo  $k = A \cdot E/L$ , le forze che agiscono sull'asta valgono:

$$k \cdot \begin{Bmatrix} c^2 \\ c \cdot s \\ -c^2 \\ -c \cdot s \end{Bmatrix} \cdot u_i = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad [2.3.2]$$

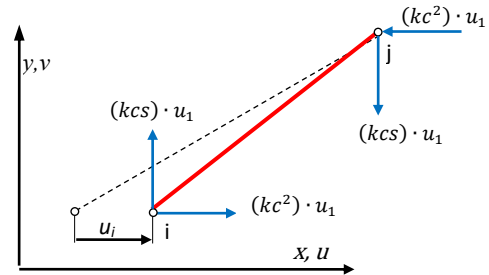


Fig.2.3.2

Dopo un'analisi analoga relativa agli spostamenti  $v_i, u_j$  e  $v_j$  i risultati possono essere raccolti in una matrice:

$$k \cdot \begin{bmatrix} c^2 & c \cdot s & -c^2 & -c \cdot s \\ c \cdot s & s^2 & -c \cdot s & -s^2 \\ -c^2 & -c \cdot s & c^2 & c \cdot s \\ -c \cdot s & -s^2 & c \cdot s & s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad [2.3.3]$$

La matrice quadrata, compreso il coefficiente  $k$ , è la matrice di rigidità dell'elemento: possiamo sintetizzare la precedente equazione nel modo seguente:

$$[K_e] \cdot \{d\} = \{f_e\} \quad [2.3.4]$$

Nel paragrafo 2.5 sarà necessario distinguere tra le forze applicate ai nodi e quelle applicate dai nodi: nell'eq. 2.3.4  $\{f_e\}$  indica le forze applicate dai nodi sull'elemento.

```
function ke = K_Rod2D (E, A, L, c, s)
%K_Rod2D   Calcola la matrice di rigidità elementare 4 x 4
%          di un'asta 2D tipo tirante/puntone
%          E: Modulo di Elasticità
%          A: Sezione trasversale
%          L: Lunghezza
%          c, s: Coseni direttori
K = E*A/L;
c2 = c*c;
cs = c*s;
s2 = s*s;
ke = K*[c2  cs -c2 -cs;
        cs  s2 -cs -s2;
        -c2 -cs c2  cs;
        -cs -s2 cs  s2];
end
```

Fig. 2.3.3 – Codice MATLAB per il calcolo della matrice di rigidità elementare di un elemento tirante/puntone nel piano.