CAP.1 - INTRODUZIONE

1.1 Il Metodo degli Elementi Finiti

Supponiamo di dover analizzare la struttura di fig.1.1.a per trovare gli sforzi a cui è sottoposta e per determinare la sua configurazione deformata. Sebbene si tratti di una semplice mensola a sezione trasversale rettangolare costante, per studiarla non è possibile utilizzare la teoria delle travi perché la trave è troppo corta. In questo caso è necessario ricorrere ai metodi della Teoria dell'Elasticità che conducono a formulare il problema in termini di equazioni alle derivate parziali: la loro soluzione consente di risolvere il problema in modo esatto. Il fatto è che le condizioni al contorno, in termini di forze e vincoli, sono tali che la soluzione è molto difficile. In questo caso dovremo accontentarci di una soluzione approssimata ottenuta sostituendo il continuo con una struttura più semplice: il problema si riduce da un numero infinito di gradi di libertà ad uno più semplice da risolvere. E' per esempio possibile sostituire la struttura continua con una costituita da un reticolo di travi elastiche (vedi fig.1.1.1b): se siamo in grado di stimare le proprietà elastiche delle singole travi, è possibile calcolarne gli spostamenti riconducibili a quelli della struttura originale. Una volta noti gli spostamenti, è possibile calcolare le deformazioni e gli sforzi che agiscono sulla mensola. I gradi di libertà (GdL) coinvolti nel calcolo sono gli spostamenti dei nodi che legano le travi della struttura reticolare. Questo modello cerca di sfruttare i metodi utilizzati dalla teoria delle travi.

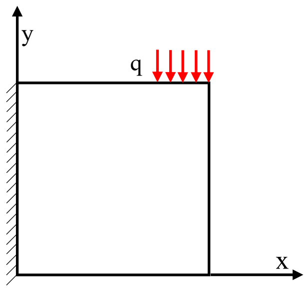

Fig.1.1.1a – Piastra sottoposta ad un carico nel proprio piano.

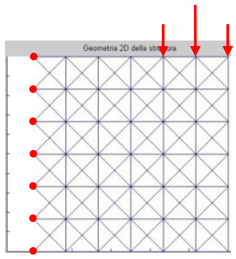

Fig.1.1.1b – Modello in forma di struttura reticolare.

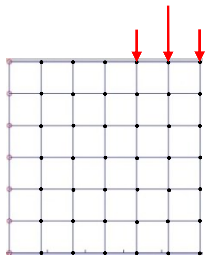

Fig.1.1.1c – Modello agli elementi finiti.

Il Metodo degli Elementi Finiti (FEM) usa un modello le cui parti sono pezzi della struttura reale. Così nella fig.1.1.1c ogni area rettangolare è una lastra di materiale. Le linee della griglia servono solo per distinguere le diverse aree e non rappresentano un reticolo di travi. Intuitivamente possiamo attenderci che, come la suddivisione diventa sempre più fina, il modello sostituisca sempre meglio la struttura originale: se si seguono le regole che verranno esposte nel seguito di queste lezioni ciò corrisponde al vero. Il modello che abbiamo così brevemente descritto è una struttura agli elementi finiti ed ogni sua parte è un elemento finito. I punti in cui le aree sono collegate si chiamano nodi e nella Fig.1.1.1c sono indicate con dei puntini neri, mentre con dei puntini rossi sono stati indicati i nodi vincolati.

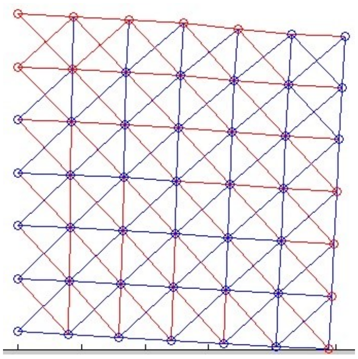

Fig.1.1.1d – Deformata della struttura reticolare. Le aste colorate di rosso sono tese, quelle blu sono compresse.

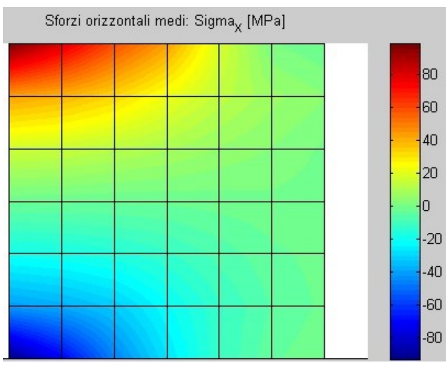

Fig.1.1.1e – Campo degli sforzi orizzontali del modello FEM.

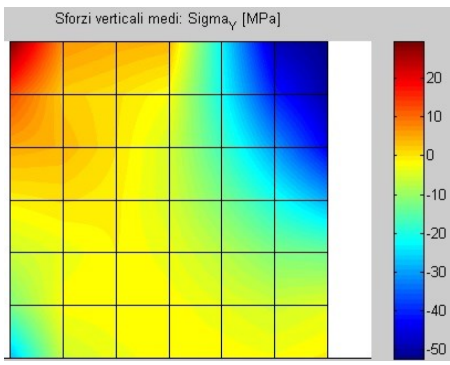

Fig.1.1.1f – Campo degli sforzi verticali del modello FEM.

Un elemento finito non è semplicemente un pezzo della struttura reale. Supponiamo di unire tra di loro, in corrispondenza dei nodi, numerose piastre rettangolari di piccole dimensioni. Come si applica il carico, si produrranno delle distorsioni (più grandi vicino agli angoli, più piccole altrove), con i lati degli elementi che diventano curvi e tra un elemento e quelli continui si formeranno dei vuoti (e delle compenetrazioni !!).

Chiaramente un tale comportamento non corrisponde a quello della struttura originale. Di conseguenza, se vogliamo che il modello descriva correttamente la struttura reale è necessario che gli elementi finiti possano subire certe deformazioni e non altre. Queste considerazioni ci obbligano ad adottare alcune misure di carattere teorico.

Per ogni elemento è possibile scrivere un sistema di equazioni del seguente tipo:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \qquad [1.1.1]$$

in cui n indica il numero di GdL per elemento, d_i rappresenta l'i-esimo spostamento nodale ed f_i è una forza nodale corrispondente allo spostamento d_i. I coefficienti k_{ij} si chiamano *coefficienti di rigidezza*. Una molla lineare rappresenta un elemento con un solo grado di libertà, per la quale è necessaria una forza $f = k \cdot d$ per allungarla della quantità d. L'eq.1.1.1 può essere espressa in forma compatta nel modo seguente:

$$[k] \cdot \{d\} = \{f\} \qquad [1.1.2]$$

in cui $[k]$ si chiama *matrice di rigidezza dell'elemento*, $\{d\}$ è il vettore degli spostamenti nodali dell'elemento ed $\{f\}$ è il vettore delle forze nodali dell'elemento.

Un esempio può aiutare a spiegare il significato di $[k]$. Consideriamo una trave (Fig.1.1.2a): ad ogni estremo c'è un nodo e i gdl della trave sono due spostamenti e due rotazioni. L'eq. [1.1.2] diventa:

$$[k]_{4x4} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \{f\} \qquad [1.1.3]$$

Per la configurazione deformata illustrata nella Fig.1.1.2b, abbiamo:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

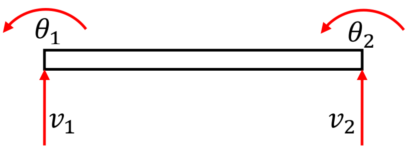

Fig.1.1.2a – Elemento trave

Sostituendo il vettore spostamento $\{d\}$ nell'eq.(1.1.3) abbiamo:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

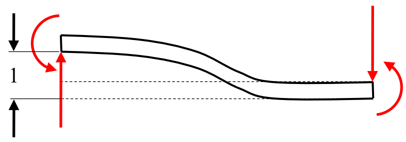

Fig.1.1.2b – Forze necessarie per imporre uno spostamento: $\{d\}^T = \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$.

così che $\{f\}$ è uguale alla prima colonna della matrice elementare $[k]$. Così, in generale, l'i-esima colonna di $[k]$ rappresenta le forze equilibrate che è necessario applicare all'elemento perché subisca uno spostamento $d_i = 1$ e tutti gli altri nulli. Questa descrizione non ci spiega però come procedere per il calcolo dei coefficienti della matrice $[k]$.

Una struttura agli elementi finiti, come quella mostrata nella Fig.1.1.1c, è costruita assemblando diversi elementi. Anche in questo caso è possibile scrivere un sistema di equazioni del tipo:

$$[K] \cdot \{D\} = \{F\} \qquad [1.1.4]$$

in cui $[K]$, $\{D\}$ e $\{F\}$ hanno lo stesso nome dei corrispondenti elementi dell'eq. (1.1.2), tranne che è necessario sostituire la parola "*elemento*" con la parola "*struttura*". Il significato della matrice globale $[K]$ è analogo a quello della matrice elementare $[k]$, prima descritto.

Una volta scritte le equazioni (1.1.4), sono note tutte le quantità in gioco, tranne gli spostamenti $\{D\}$ che possono essere calcolati utilizzando una qualsiasi delle tecniche usate per la soluzione dei sistemi di equazioni lineari. Noto $\{D\}$, allora gli spostamenti sono noti in tutti i punti del modello agli elementi finiti, perché ogni spostamento elementare $\{d\}$ è contenuto nello spostamento della struttura $\{D\}$ e perché le proprietà elementari sono formulate usando dei semplici schemi di interpolazione polinomiale che forniscono gli spostamenti in un qualsiasi punto interno all'elemento in funzione dei suoi spostamenti nodali.

Questo metodo di formulazione degli elementi è noto come "metodo degli spostamenti". Ci sono altri metodi per formulare gli elementi, ma fino ad oggi il metodo degli spostamenti è quello più utilizzato e che ha avuto maggiore successo.

Il Metodo degli elementi finiti è molto usato per l'analisi degli sforzi e delle deformazioni di solidi sottoposti a carichi statici, ma è possibile risolvere anche problemi d'instabilità (*buckling*), vibrazioni e comportamento dinamico e sono stati sviluppati dei metodi per estendere l'analisi nel campo non lineare delle grandi deformazioni, della plasticità e del creep.

Due ulteriori problemi di analisi degli sforzi possono aiutare ad illustrare la potenza del metodo. La Fig. 1.1.3a mostra il problema dell'ugello di un razzo. L'ugello è assial-simmetrico e la figura mostra metà di una sezione trasversale passante per l'asse di simmetria. L'ugello è composto da diversi materiali ed è caricato da una combinazione di gradienti termici e pressione interna. La Fig.1.1.3b mostra la divisione in elementi finiti. Ogni elemento è un anello toroidale di sezione trasversale triangolare. La Fig.1.1.4 mostra la mesh agli Elementi Finiti usata per modellare un quarto d'intersezione di due cilindri. E' interessante notare come la mesh sia più fitta vicino alla giunzione dove gli sforzi sono più grandi e variano rapidamente a breve distanza. Gli elementi sono triangoli piani e sono formulati in modo da modellare il comportamento di gusci sottili.

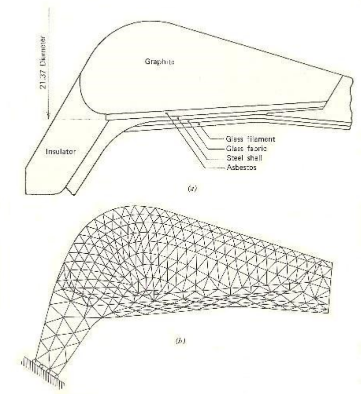

Fig. 1.1.3 – (a) Ugello assialsimetrico di un razzo e (b) relativa mesh FEM

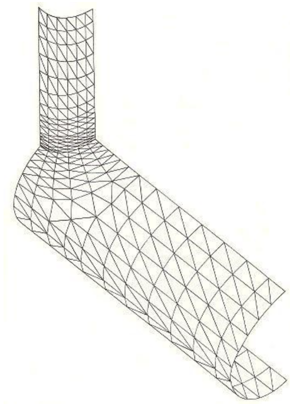

Fig.1.1.4 – Mesh FEM dell'intersezione di due cilindri

Gli esempi illustrati suggeriscono alcuni vantaggi del metodo degli elementi finiti.

- La sua capacità di usare elementi di diverso tipo, dimensione e forma e di modellare strutture di forma arbitraria;
- La sua capacità di considerare condizioni al contorno arbitrarie e qualsiasi tipo di carichi, inclusi quelli termici;
- La sua capacità di modellare strutture costituite da differenti componenti strutturali, come una nervatura su un guscio e la combinazione di piastre, travi, solidi, etc.
- Il modello agli elementi finiti assomiglia molto da vicino alla struttura reale, piuttosto che rappresentare un modello astratto difficile da visualizzare.

Altri metodi di approssimazione, per esempio il metodo delle differenze finite, non godono di tutti questi vantaggi. Naturalmente ci sono anche alcuni svantaggi. Tra questi:

- Per un problema specifico si ottiene un risultato numerico corrispondente. In altre parole, non è possibile una soluzione generale in forma chiusa, che consentirebbe di esaminare la risposta del sistema al variare di qualche parametro.
- Per costruire un buon modello agli elementi finiti è necessaria un po' di esperienza e capacità critiche.

- Sono essenziali un calcolatore abbastanza potente ed un programma affidabile;
- La preparazione dei dati di input e l'analisi dei dati di output può essere lunga e laboriosa.

Questi aspetti negativi non sono tipici del metodo degli elementi finiti, ma riguardano molte tecniche numeriche.