https://unica.adobeconnect.com/p9btciskgdqh/

INTRODUZIONE AI PROBLEMI DELL'INSTABILITA'

In una prova di trazione standard, il provino viene sottoposto ad un'azione normale N perfettamente centrata sul baricentro della sezione trasversale. Ogni punto del materiale sarà sottoposto allo sforzo di trazione:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

dove A indica l'area della sezione trasversale della trave. Se il carico non è eccessivo ed il materiale risponde alla Legge di Hooke, la deformazione assiale vale:

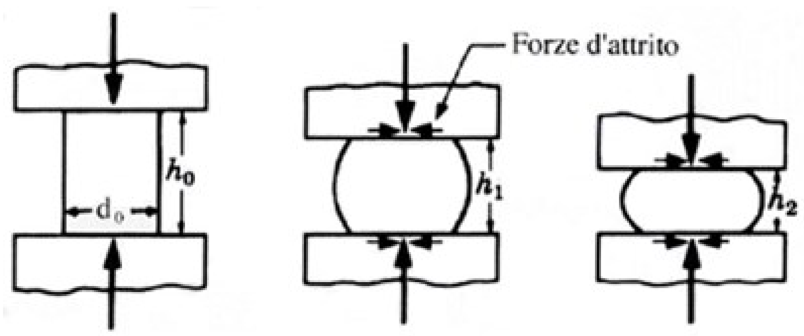
$$\varepsilon = \frac{N}{EA}$$

dove E indica il modulo di Young del materiale. Man mano che il carico cresce, la risposta del materiale si allontana dalla linearità: raggiunto lo sforzo di *snervamento*, il materiale si plasticizza e subisce deformazioni permanenti: ciò significa, che una volta eliminato il carico, il provino rimane deformato permanentemente rispetto alla sua configurazione originale.

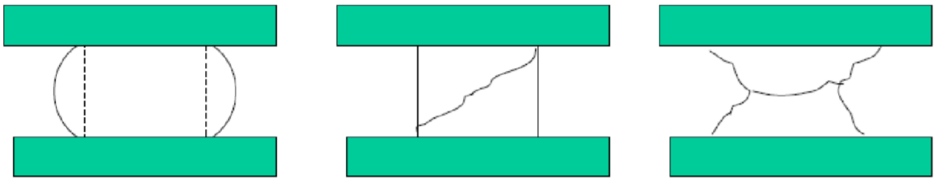
Molti materiali metallici (come l'acciaio e le leghe di alluminio) hanno un comportamento pressoché identico sia trazione che a compressione: quando si comprime un provino di acciaio questo si accorcia e si dilata trasversalmente per effetto Poisson:

$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA} \qquad ; \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

In genere le prove di compressione sono complicate dal fatto che tra il provino e i piatti della macchina di prova, l'attrito crea tensioni tangenziali che introducono uno stato di tensione tridimensionale, creando il fenomeno di *barelling*.



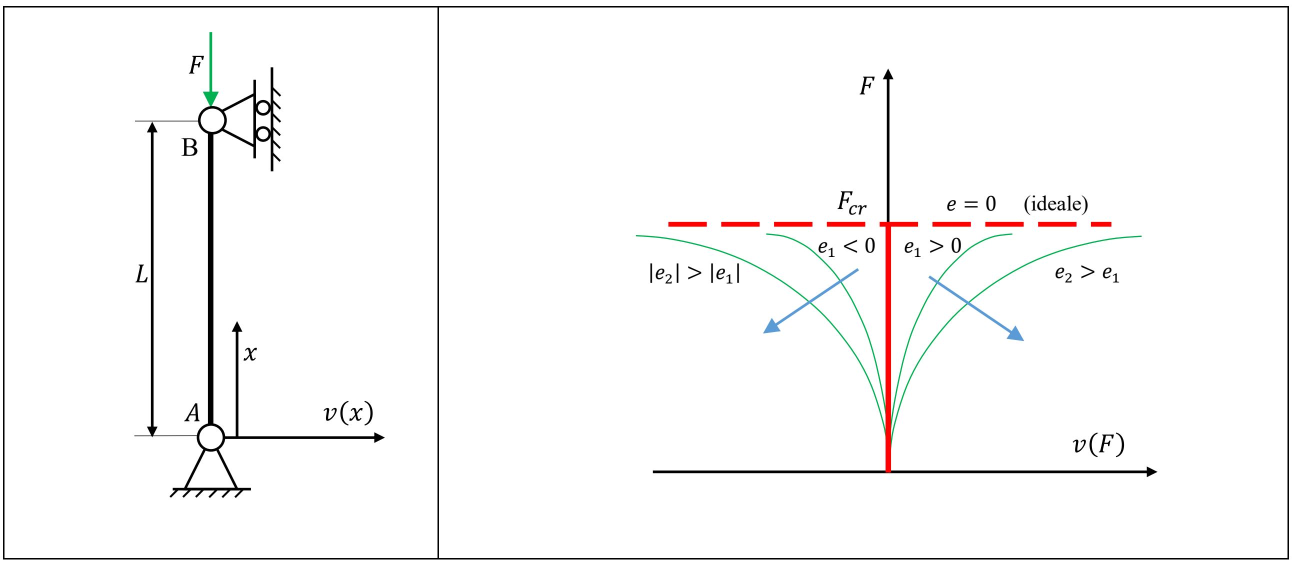
Se si supera lo sforzo di snervamento a compressione, il materiale si plasticizza; quindi, facendo crescere ulteriormente il carico, il provino cede. Il tipo di cedimento cambia da materiale a materiale: se il materiale è fragile o poco duttile, la superficie di rottura è inclinata di circa 45° rispetto all'asse della trave, il che indica che il provino ha ceduto a causa di un eccesso delle forze di taglio. I materiali duttili si deformano vistosamente ma non si rompono.



Materiale duttile — Materiale a frattura fragile (ghisa) — Materiale a frattura fragile (calcestruzzo)

Quando la trave è snella, cioè quando la sua lunghezza è grande rispetto alle dimensioni trasversali, se il carico supera una certa soglia si manifesta il fenomeno dell'instabilità laterale, fenomeno dinamico molto rapido che normalmente conduce a rottura l'intera struttura.

Se in un diagramma si riportano gli spostamenti trasversali massimi v dell'asse della trave in funzione del valore del carico F di compressione, si ottiene il seguente risultato:



La curva rossa indica il comportamento teorico che si avrebbe se il materiale fosse perfettamente omogeneo, i vincoli ideali e privi di attrito, la trave perfettamente rettilinea, la sua sezione trasversale perfettamente costante su tutta la lunghezza L ed il carico perfettamente centrato. In tale situazione, lo spostamento trasversale v dell'asse della trave sarebbe nullo, fino al raggiungimento del cosi detto ***carico critico*** o ***carico di Eulero*** che ci proponiamo di calcolare.

Nella realtà, la curva $v - F$ è una delle curve colorate di verde; indicando con e un indice che rappresenta complessivamente quanto la trave reale di differenzia rispetto a quella ideale, vediamo che man mano che e aumenta in valore assoluto, la curva $v - F$ si allontana dalla soluzione ideale: a seconda del segno, la trave può sbandare a destra o a sinistra.

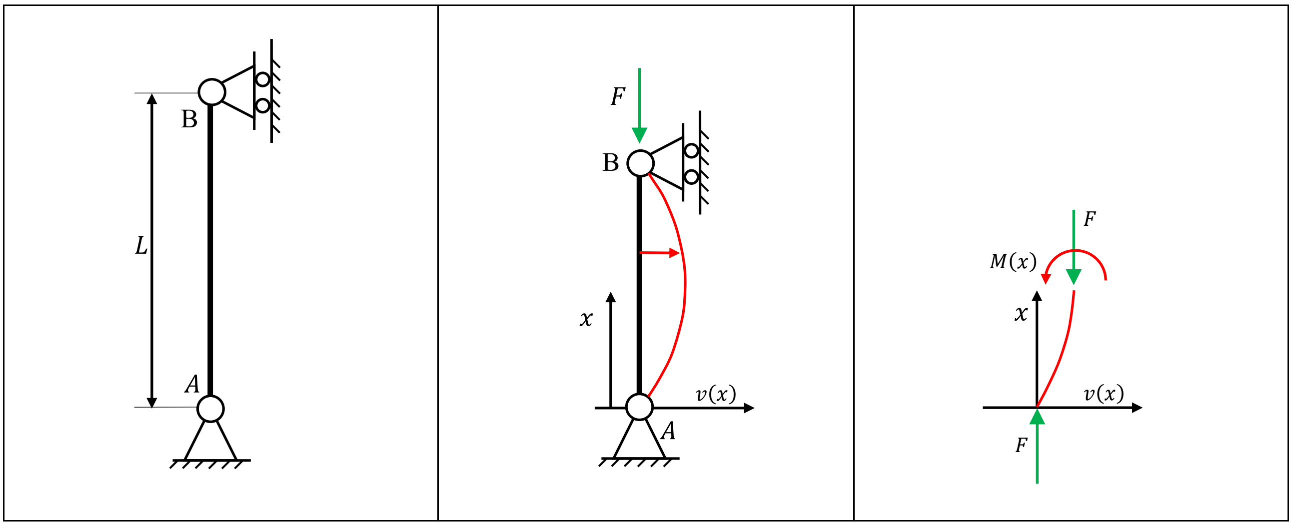
Nella realtà quindi non esiste un carico critico: il carico euleriano è una stima ottimistica del carico che porta la struttura a subire grandi spostamenti trasversali.

In fase di progettazione è importante evitare di sottoporre le colonne compresse a forze prossime al carico critico di Eulero.

L'instabilità si manifesta solo a compressione e non a trazione; però è bene ricordare che una trave inflessa sopporta da una parte del proprio asse neutro sforzi di un segno e dall'altra parte sforzi di segno contrario; quindi anche le travi inflesse possono subire fenomeni d'instabilità.

CALCOLO DELLO SFORZO CRITICO DI EULERO.

Ipotizziamo che la colonna sottoposta ad un puro carico di compressione abbia subito uno spostamento trasversale $v(x)$ e sia quindi inflessa.



Eliminiamo la cerniera a terra nel nodo A e vi sostituiamo la reazione verticale pari a F; ipotizziamo di eseguire un taglio alla coordinata x dove agiscono le azioni interne $N = -F$ di compressione e il momento flettente $M(x)$ il cui valore dipende dalla freccia $v(x)$ subita dal punto:

$$M(x) = F\, v(x)$$

Possiamo scrivere l'equazione della linea elastica:

$$EI_{min} \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -M(x) = -F\, v(x)$$

L'equazione può essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \frac{F}{EI_{min}}\, v(x) = 0$$

La soluzione di questa equazione differenziale è la seguente:

$$v(x) = A\, sin(kx) + B\, cos(kx)$$

Infatti se si deriva due volte la funzione spostamento si ottiene:

$$\frac{dv(x)}{dx} = Ak\, cos(kx) - Bk\, sin(kx)$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -Ak^2\, sin(kx) - Bk^2\, cos(kx) = -k^2[A\, sin(kx) + B\, cos(kx)] = -k^2v(x)$$

Sostituendo quest'ultima equazione in quella della linea elastica si ottiene:

$$-k^2 v(x) + \frac{F}{EI_{min}} v(x) = 0$$

da cui si deduce che:

$$k^2 = \frac{F}{EI_{min}}$$

Per determinare i coefficienti A e B bisogna imporre le condizioni al contorno.

1) In $x = 0$ c'è una cerniera che impedisce lo spostamento trasversale dell'asta:

$$v(x = 0) = B = 0$$

2) In $x = L$ c'è un carrello che impedisce lo spostamento trasversale dell'asta:

$$v(x = L) = A\, sin(kL) = 0$$

Questa equazione ha diverse soluzioni:

a) $A = 0$ è la soluzione banale: significa che la colonna non si inflette ed il suo spostamento trasversale è ovunque nullo;

b) $kL = n\pi$

ovvero $$k = \frac{n\pi}{L} = \sqrt{\frac{F}{EI_{min}}}$$

da cui è possibile calcolare il carico critico euleriano:

$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI_{min}$$

Come si può osservare, il carico critico è funzione di n, ma il valore che ha interesse pratico è quello più piccolo superato il quale la trave subisce l'instabilità.

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L^2}$$

Lo sforzo critico si ottiene dividendo la forza critica per l'area su cui agisce:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E \frac{I_{min}}{A}}{L^2} = \frac{\pi^2 E \rho_{min}^2}{L^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{max}^2}$$

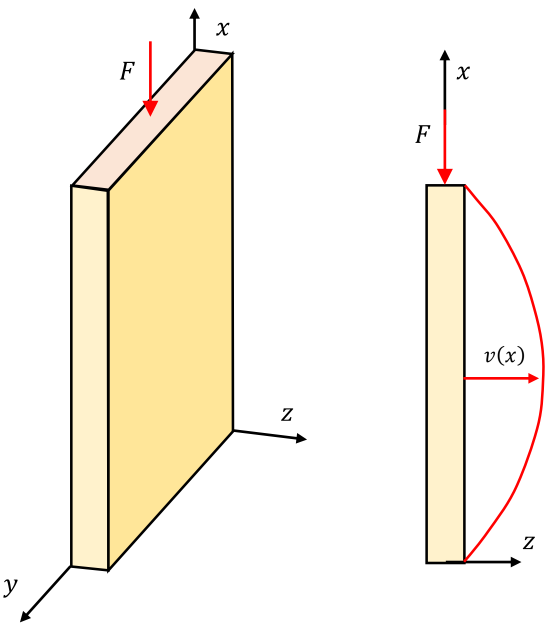
Ricordo infatti che per definizione il raggio d'inerzia ρ_{min} della sezione trasversale calcolato rispetto all'asse z-z vale:

$$\rho_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$

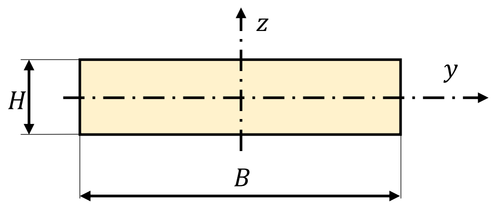
e che per definizione, la snellezza della trave calcolata rispetto all'asse z-z vale:

$$\lambda_{max} = \frac{L}{\rho_{min}}$$

Se la trave è libera di inflettersi rispetto ad un piano qualunque è necessario calcolare la snellezza massima, quella cioè che conduce alla forza critica minima. Per questo motivo è necessario calcolare il momento d'inerzia minimo della sezione trasversale.



Se per esempio la sezione della trave è rettangolare di base B ed altezza H,

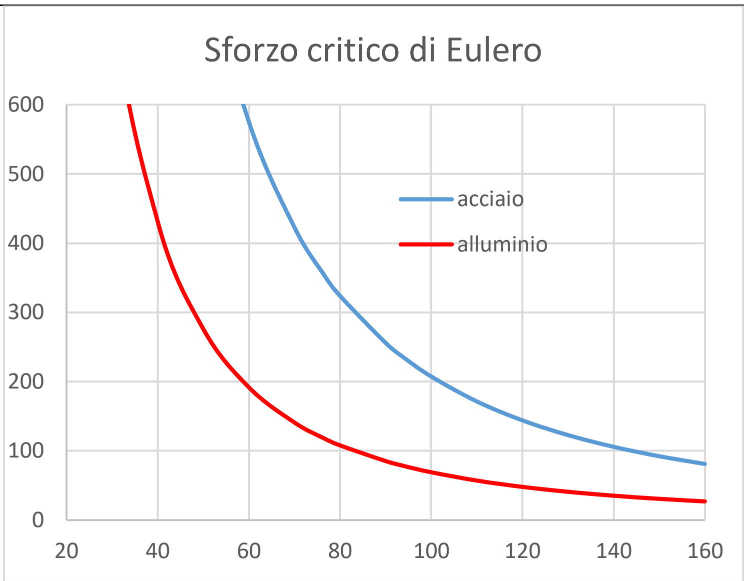


i momenti principali d'inerzia valgono:

$$I_{yy} = \frac{BH^3}{12} \qquad \text{e} \qquad I_{zz} = \frac{HB^3}{12}$$

Poiché $B > H$ allora il momento d'inerzia minimo è I_{yy} e la flessione sarà diretta in direzione z.

Lo sforzo critico si può diagrammare in funzione della snellezza.

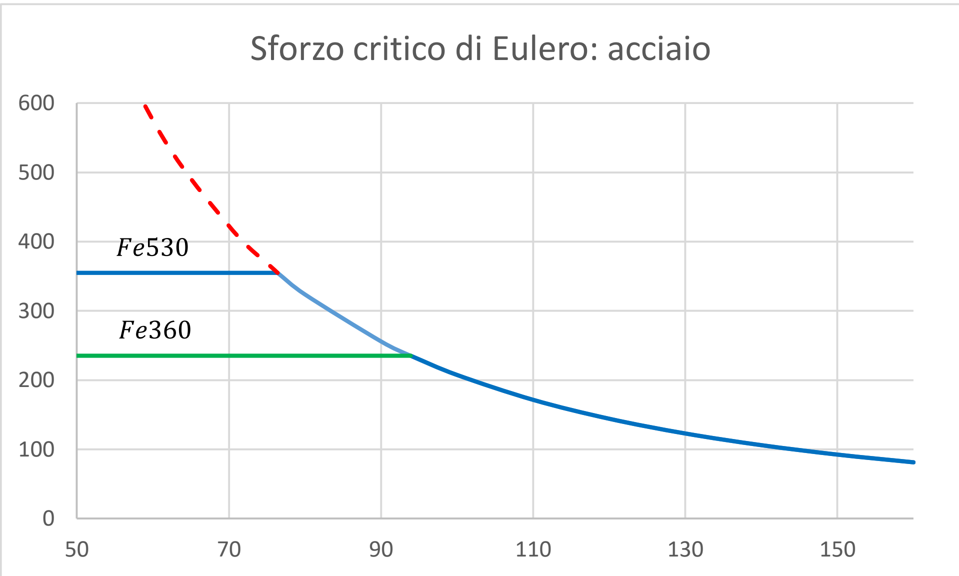


λ	σ_{cr} $E = 210000\ [MPa]$
20	5181
40	1295
60	576
80	324
100	207
120	144

Come si può osservare, il carico critico dell'acciaio è 3 volte superiore a quello dell'alluminio, in quanto il modulo di Young dell'alluminio è circa un terzo di quello dell'acciaio.

Quando la snellezza è piccola, la curva non è più utile perché il materiale si snerva.

Nel caso degli acciai per profilati Fe360 ed Fe530 i diagrammi sono i seguenti:



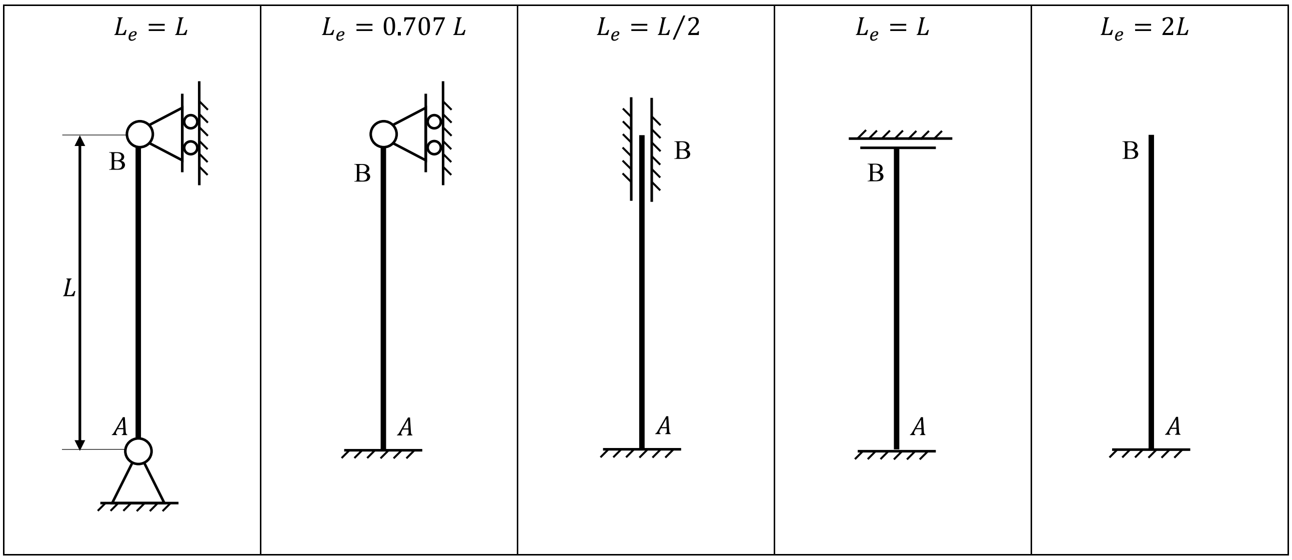
L'ultimo diagramma mette in evidenza che se la trave è molto snella ($\lambda_{max} > 90$) è indifferente utilizzare l'acciaio Fe360 o l'Fe530: in ogni caso lo sforzo massimo di progetto non sarà legato allo sforzo di snervamento ma a quello critico di Eulero. Quindi da un punto di vista economico, sarà conveniente utilizzare l'Fe360, meno costoso del secondo acciaio.

L'equazione precedente è valida purché la trave sia vincolata da una cerniera a terra e da un carrello. Se i vincoli sono diversi, cambiano le condizioni al contorno e i coefficienti A e B della soluzione devono essere ricalcolati.

E' però possibile continuare ad utilizzare le formule viste precedentemente:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2} \qquad \text{e} \qquad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{max}^2}$$

purché al posto della lunghezza reale L della colonna si utilizzi una lunghezza equivalente L_e il cui valore dipende dal tipo di vincoli.



Come si può vedere, a parità di tutte le altre condizioni, il carico critico relativo alla mensola incastrata alla base e libera nell'altro vertice è 4 volte inferiore al carico critico sopportabile dalla colonna incernierata alla base e vincolata con un carrello all'altro estremo.