



CAP. 17 – INSTABILITA'

17.1 Introduzione

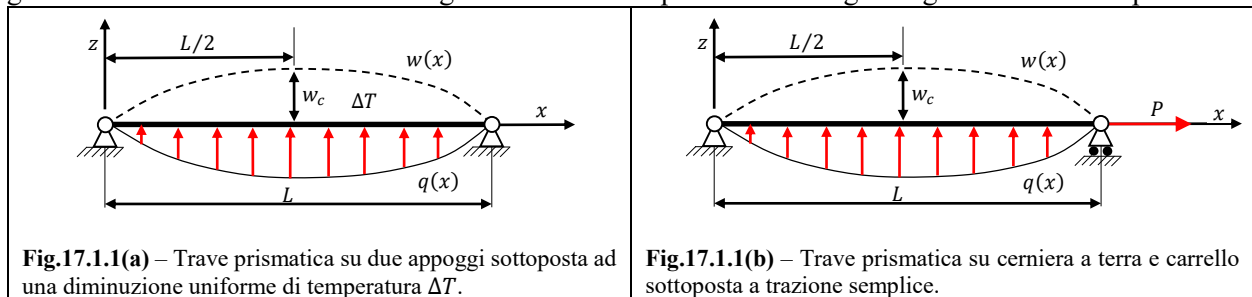
Alcune strutture (travi, telai, piastre, gusci) quando sono sottoposte a forze membranali di compressione possono diventare instabili e subire grandi spostamenti laterali. Le forze membranali agiscono lungo l'asse delle travi e tangenti al piano medio delle piastre e dei gusci. L'instabilità si manifesta quando una struttura converte l'energia di deformazione membranale in energia di deformazione flessionale senza che i carichi applicati subiscano variazioni. Si raggiunge la situazione critica quando una piccola variazione dello stato di deformazione può trasformare la perdita di energia elastica membranale in aumento di energia elastica flessionale. In una trave snella di lunghezza L , la rigidezza assiale EA/L è molto più grande della rigidezza flessionale EI/L^3 . Analogamente, nelle strutture a guscio di piccolo spessore, la rigidezza membranale è normalmente di alcuni ordini di grandezza maggiore della rigidezza flessionale. Di conseguenza, piccole deformazioni membranali possono far accumulare all'interno della struttura una grande quantità di energia elastica che, per essere convertita in energia flessionale, richiede, comparativamente, grandi spostamenti laterali e grandi rotazioni.

Si può inoltre osservare che le forze membranali alterano la rigidezza flessionale delle strutture. Quindi l'instabilità si manifesta quando, per un modo di deformazione ammissibile, le forze di compressione membranali sono sufficientemente grandi da annullare la rigidezza flessionale. Se le forze membranali cambiassero di segno diventando di trazione, la rigidezza flessionale aumenterebbe: questo effetto prende il nome di "irrigidimento da sforzo".

Gli effetti delle forze membranali sono presi in considerazione dalla matrice $[k_\sigma]$ che si aggiunge alla solita matrice di rigidezza $[k]$. In letteratura la matrice $[k_\sigma]$ è stata indicata con diversi nomi quali "*matrice di rigidezza dello sforzo iniziale*", "*matrice di rigidezza differenziale*", "*matrice di rigidezza geometrica*" o ancora "*matrice di stabilità*". Essa è funzione della geometria dell'elemento, del campo di spostamento e dello stato di sforzo ed è indipendente dalle proprietà elastiche del materiale, anche se, definendo le relazioni sforzi/deformazioni, potrebbe essere formulata in funzione delle proprietà elastiche del materiale e delle deformazioni. Le matrici $[k_\sigma]$ degli elementi vanno assemblate a formare la matrice $[K_\sigma]$ della struttura con una procedura identica a quella utilizzata con la matrice di rigidezza $[K]$.

Analisi di una trave sottoposta a compressione

Si consideri la trave semplicemente appoggiata ai suoi estremi, mostrata nella Fig.17.1.1. Si ipotizzi che agisca una forza esterna P , positiva se di trazione, per esempio causata da un abbassamento della temperatura quando gli estremi della trave sono vincolati a non spostarsi. Per illustrare l'irrigidimento causato dalla forza P e per calcolare il carico $P_{cr} = -\pi^2 \frac{EI}{L^2}$ che porta la trave all'instabilità si userà un solo grado di libertà ed il concetto di energia. Nella formula precedente il segno negativo indica compressione.



Si ipotizzi che la trave subisca un piccolo spostamento laterale $w = w(x)$ indipendente dal carico P . Di conseguenza ogni suo tratto lungo dx assumerà la lunghezza ds .



Dalla Fig.17.1.2 si ottiene:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}$$

Lo sviluppo in serie di questa equazione fornisce:

$$ds = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dw}{dx}\right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{dw}{dx}\right)^6 + \dots \right]$$

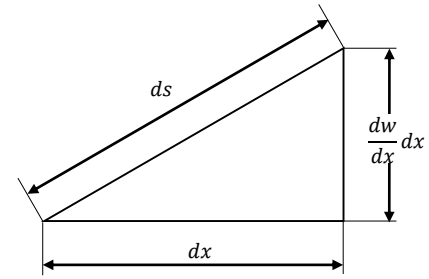


Fig.17.1.2 – Relazioni geometriche relative ad un elemento infinitesimo di lunghezza dx .

Se si ipotizza che la trave subisca piccole rotazioni, cioè se $\frac{dw}{dx} \ll 1$, allora è consentito limitare lo sviluppo in serie al primo termine:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \cong dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right] \quad (17.1.1)$$

Di conseguenza le deformazioni membranali nella trave valgono:

$$\varepsilon_m = \frac{ds - dx}{dx} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \quad (17.1.2)$$

Nella teoria lineare dell'elasticità si trascurano i termini di ordine superiore o uguale a primo, quindi si ammette che la deformazione membranale sia nulla: $\varepsilon_m = 0$. Qui di seguito si cercherà di capire cosa capita quando si conserva almeno il primo termine.

In seguito ad un piccolo spostamento laterale $w = w(x)$, la forza assiale P che agisce sulla trave rimane praticamente costante. Poiché ogni elemento di lunghezza dx subisce un piccolo allungamento $\varepsilon_m dx$ (e quindi accumula energia elastica membranale), la forza P esegue il lavoro $P \varepsilon_m dx$. Se invece di avere una forza distribuita, sulla trave agisse una forza concentrata, applicata per esempio su un carrello posto sull'estremità della trave (Fig.17.1.1b), il lavoro eseguito da P si potrebbe calcolare moltiplicando la forza per lo spostamento $u(L)$ del carrello, pari a $\int_0^L \varepsilon_m dx$. In ogni caso, la variazione di energia membranale vale:

$$U_m = P \int_0^L \varepsilon_m dx = \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx \quad (17.1.3)$$

mentre l'energia elastica flessionale vale:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx \quad (17.1.4)$$

Si ipotizzi che la freccia w assuma la seguente forma sinusoidale:

$$w(x) = w_c \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

che risulta la forma esatta dell'instabilità secondo la teoria di Eulero. Osservando che:

$$\frac{dw}{dx} = w_c \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{e} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = -w_c \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

e che

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] = \frac{L}{2} \quad \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] = \frac{L}{2}$$

si ottiene:



$$\left\{ \begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} w_c^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \int_0^L \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} w_c^2 \end{aligned} \right. \quad (17.1.5a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{P}{2} w_c^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx = \frac{\pi^2 P}{4L} w_c^2 \end{aligned} \right. \quad (17.1.5b)$$

dove w_c indica la freccia nella mezzeria della trave dove $x = \frac{L}{2}$.

Per eseguire l'analisi dell'instabilità si è ipotizzato che il carico laterale q fosse assente. Quindi, durante l'instabilità, l'energia membranale si trasforma in energia flessionale senza l'introduzione di lavoro esterno. Perciò:

$$U_f + U_m = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} w_c^2 + \frac{\pi^2 P}{4L} w_c^2 = 0 \quad \text{da cui:} \quad P = -\frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (17.1.6)$$

che coincide con il classico carico critico di Eulero, indipendente da w_c , purché quest'ultimo sia piccolo.

Si consideri adesso un problema flessionale. Si ipotizzi di applicare in direzione trasversale all'asse della trave, nella direzione delle z positive, un carico distribuito q di forma sinusoidale ed ampiezza massima q_c :

$$q(x) = q_c \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right)$$

Dato lo spostamento: $w(x) = w_c \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right)$

il potenziale del carico vale: $\Omega = -\int_0^L q \cdot w \cdot dx = -\frac{q_c L}{2} w_c$ (17.1.7)

Il potenziale totale vale: $\Pi_{pt} = U_f + U_m + \Omega$ ed il valore che w_c assume all'equilibrio si ottiene dall'equazione $\partial \Pi_{pt} / \partial w_c = 0$. Di conseguenza.

$$\begin{aligned} \Pi_{pt} &= U_f + U_m + \Omega = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} w_c^2 + \frac{\pi^2 P}{4L} w_c^2 - \frac{q_c L}{2} w_c \\ \frac{\partial \Pi_{pt}}{\partial w_c} &= \frac{\pi^4 EI}{2L^3} w_c + \frac{\pi^2 P}{2L} w_c - \frac{q_c L}{2} = \left(\frac{\pi^4 EI}{2L^3} + \frac{\pi^2 P}{2L} \right) w_c - \frac{q_c L}{2} = 0 \end{aligned}$$

da cui: $\left(\frac{\pi^4 EI}{2L^3} + \frac{\pi^2 P}{2L} \right) w_c = (k + k_\sigma) w_c = \frac{q_c L}{2}$ (17.1.8)

La rigidezza $(k + k_\sigma)$ è la somma della rigidezza convenzionale k e della rigidezza causata dallo sforzo k_σ . Se il carico P fosse assente, si avrebbe $w_c = \frac{q_c L^4}{\pi^4 EI}$.

Un carico di trazione ($P > 0$) diminuisce la flessione laterale w_c prodotta dal carico laterale q ; in altri termini, se di trazione, P aumenta la rigidezza della trave e si parla di "rigidezza da sforzo" o "sforzo irrigidente" ("stress stiffening effect").

Se P è di compressione ($P < 0$), allora w_c aumenta e diventa infinito quando $P = -\frac{\pi^2 EI}{L^2}$, cioè quando raggiunge il valore del carico d'instabilità o carico critico $P = P_{cr}$. Quando $P = P_{cr}$ la rigidezza complessiva $(k + k_\sigma)$ è nulla.

La rigidezza k_σ si può esprimere in funzione dello spostamento invece che in funzione della forza. Si ipotizzi che nel punto terminale $x = L$ la trave sia appoggiata su un carrello che subisce lo spostamento u_L . Esprimendo il carico P in funzione dello spostamento u_L si ottiene:

$$P = \frac{EA}{L} u_L \quad \text{e} \quad k_\sigma = \frac{\pi^2 P}{2L} = \frac{\pi^2 EA}{2L^2} u_L \quad (17.1.9)$$

L'eq.(17.1.9) suggerisce che è possibile la seguente analisi composta da due passi.



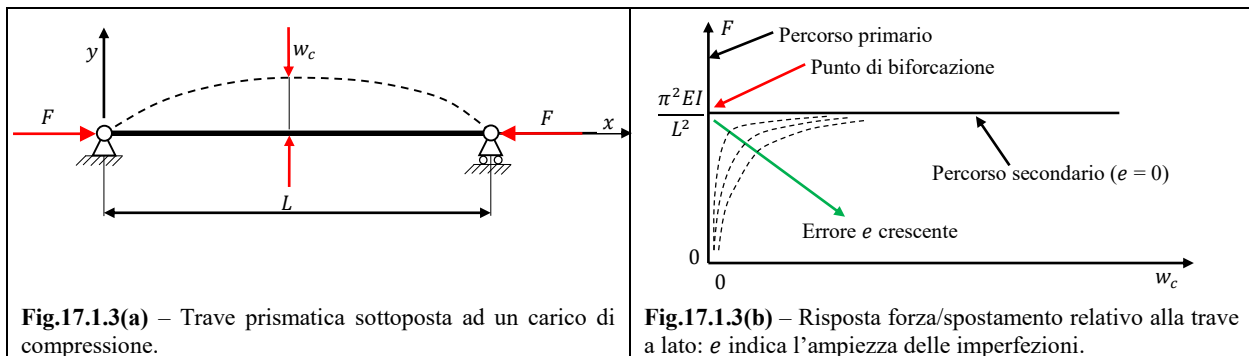
Nel **primo passo** si esegue l'analisi statica convenzionale (senza il calcolo di k_σ) e si calcola lo spostamento u_L causato dalla forza P .

Nel **secondo passo**, utilizzando l'eq.(17.1.9) è possibile calcolare la rigidezza k_σ . A questo punto è possibile calcolare la rigidezza complessiva ($k + k_\sigma$) e determinare lo spostamento laterale w_c prodotto dal carico laterale q . In particolare, in questo esempio otteniamo $u_L = PL/EA$ e $k_\sigma = \frac{\pi^2 P}{2L}$, esattamente come nell'eq.(17.1.8).

L'analisi in due passi è precisa se gli spostamenti associati al primo passo non sono accoppiati agli spostamenti associati al secondo passo (vedi il paragrafo 17.5).

L'analisi in due passi è necessaria perché nella maggior parte delle strutture la distribuzione degli sforzi membranali non è nota a priori e deve essere determinata con un calcolo preliminare (il primo passo); dopo di che è possibile esaminare l'effetto di un carico addizionale oppure è possibile l'analisi dell'instabilità.

ATTENZIONE. La teoria dell'instabilità presuppone l'esistenza di un "punto di biforcazione". Si consideri per esempio la Fig.17.1.3. Quando il carico raggiunge il punto di biforcazione (l'instabilità), sono possibili due configurazioni equilibrate: la colonna potrebbe rimanere rettilinea (percorso primario) oppure potrebbe sbandare (percorso secondario). Il punto di biforcazione esiste se la colonna è perfettamente rettilinea, perfettamente uniforme, perfettamente vincolata e priva di carichi laterali e se le forze F sono perfettamente centrate e parallele all'asse.



Nella realtà ci sono sempre delle imperfezioni, la cui ampiezza può essere indicata con e . Se $e \neq 0$, nel diagramma forze/spostamento laterale il punto di biforcazione non compare e le strutture in generale mostrano dei "punti limite". Quindi il carico d'instabilità è solo un'approssimazione del carico limite che una struttura può sostenere. L'approssimazione può essere molto grossolana a svantaggio della sicurezza. La maggior parte dei problemi d'instabilità dovrebbe essere affrontata con un'analisi non lineare in cui si considerino le deformazioni precedenti all'insorgere dell'instabilità. Questi concetti verranno esposti in seguito.

17.2 Matrici di rigidezza geometrica per le travi e i tiranti/puntoni

TRAVI NEL PIANO

La trave mostrata nella Fig.17.2.1 può subire spostamenti assiali $u = u(x)$ e laterali $w = w(x)$. La deformazione membranale vale $\epsilon_m = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$, dove l'ultimo termine è stato ricavato utilizzando l'eq.17.1.2. A distanza z dall'asse baricentrico, la flessione provoca la deformazione assiale $\epsilon_m = -z \frac{d^2w}{dx^2}$. Di conseguenza la deformazione assiale totale subita da una fibra disposta a distanza z dall'asse neutro vale:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (17.2.1)$$

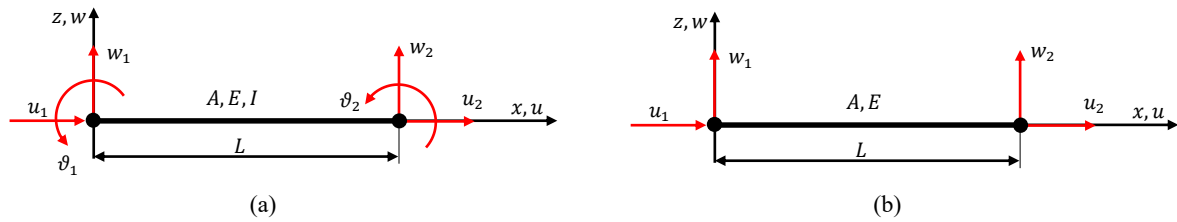


Fig.17.2.1 - Elementi piani e loro gradi di libertà; a) Trave capace di sopportare la flessione; b) biella scarica (tirante/puntone).
 A: Area della sezione trasversale; E: modulo di elasticità; I: momento d'inerzia.

Ogni fibra è sottoposta a sforzi monoassiali. L'energia elastica accumulata nell'elemento vale:

$$U = \int_{Vol} \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 \cdot dVol = \int_0^L \int_A \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 \cdot dA \cdot dx \quad (17.2.2)$$

Il quadrato della deformazione assiale vale:

$$\varepsilon_x^2 = \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - z \frac{d^2w}{dx^2} \right]^2 = \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dw}{dx} \right)^4 + z^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + \frac{du}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - 2z \frac{du}{dx} \frac{d^2w}{dx^2} - z \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \frac{d^2w}{dx^2}$$

Se si trascura il termine $\left(\frac{dw}{dx} \right)^4$ molto piccolo rispetto agli altri, si ottiene:

$$\varepsilon_x^2 = \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + z^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + \frac{du}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - 2z \frac{du}{dx} \frac{d^2w}{dx^2} - z \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \frac{d^2w}{dx^2}$$

Osservando che:

$$\int_A dA = A \quad ; \quad \int_A z dA = 0 \quad ; \quad \int_A z^2 dA = I \quad ; \quad \int_A E \frac{du}{dx} dA = P$$

dove P è la forza assiale (positiva se di trazione), i diversi contributi all'energia elastica risultano:

$$U_1 = \int_0^L \frac{1}{2} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \int_A dA \cdot dx = \int_0^L \frac{EA}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (17.2.3a)$$

$$U_2 = \int_0^L \frac{1}{2} E \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \int_A z^2 \cdot dA \cdot dx = \int_0^L \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (17.2.3b)$$

$$U_3 = \int_0^L \frac{1}{2} \left[\int_A E \frac{du}{dx} dA \right] \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \cdot dx = \int_0^L \frac{P}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (17.2.3c)$$

$$U_4 = \int_0^L \frac{1}{2} E \frac{du}{dx} \frac{d^2w}{dx^2} \left[\int_A (-2z) \cdot dA \right] \cdot dx = 0 \quad (17.2.3d)$$

$$U_5 = \int_0^L \frac{1}{2} E \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \frac{d^2w}{dx^2} \left[\int_A (-z) \cdot dA \right] \cdot dx = 0 \quad (17.2.3e)$$

Di conseguenza l'energia elastica vale:

$$U = \int_0^L \frac{EA}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^L \frac{P}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (17.2.4)$$

Il primo integrale fornisce la matrice di rigidezza $[\mathbf{k}]$ dell'elemento tirante/puntone: contiene i coefficienti $\frac{EA}{L}$ ed è associata ai gradi di libertà u_1 e u_2 .

Il secondo integrale fornisce la matrice di rigidezza flessionale $[\mathbf{k}]$ della trave: contiene coefficienti del tipo $12EI/L^3$ ed è associata ai gradi di libertà $w_1, \vartheta_1, w_2, \vartheta_2$.



Il terzo integrale dà origine alla matrice $[k_\sigma]$ ed è già stato esaminato nell'eq.(17.1.3): esso descrive l'energia elastica accumulata quando gli spostamenti laterali w deformano gli elementi infinitesimi della trave della quantità $\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$ in presenza di una forza assiale costante P .

Dati i gradi di libertà nodali $\{\mathbf{d}\} = \{w_1 \ \vartheta_1 \ w_2 \ \vartheta_2\}^T$ e le funzioni di forma $[N]$, lo spostamento laterale w e la sua derivata prima $\frac{dw}{dx}$ valgono:

$$w = [N]\{\mathbf{d}\} \quad \text{dove} \quad [N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (17.2.5)$$

$$\frac{dw}{dx} = [G]\{\mathbf{d}\} \quad \text{dove} \quad [G] = \left[\frac{dN_1}{dx} \ \frac{dN_2}{dx} \ \frac{dN_3}{dx} \ \frac{dN_4}{dx} \right] \quad (17.2.6)$$

Il terzo integrale nell'eq.(17.2.4) conduce alla seguente espressione:

$$\int_0^L \frac{P}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx}\right)^T P \frac{dw}{dx} dx = \frac{1}{2} \{\mathbf{d}\}^T [k_\sigma] \{\mathbf{d}\} \quad (17.2.7)$$

dove:

$$[k_\sigma] = \int_0^L [G]^T P [G] dx \quad (17.2.8)$$

La forza P è costante e può essere portata fuori dall'integrale. Usando i polinomi di Hermite per esprimere le funzioni di forma, la matrice risulta:

$$[k_\sigma] = \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (17.2.9)$$

dove P è positiva se di trazione. Inserendo delle righe e delle colonne di zeri, la matrice $[k_\sigma]$ può diventare di dimensione 6×6 e operare sui gradi di libertà $\{u_1 \ w_1 \ \vartheta_1 \ u_2 \ w_2 \ \vartheta_2\}^T$.

Successivamente è necessario applicare la trasformazione delle coordinate per passare al sistema di riferimento globale, in modo che la matrice $[k_\sigma]$ possa essere utilizzata per una trave orientata nel piano in modo arbitrario.

TRAVI TIRANTE/PUNTONE NEL PIANO

Gli argomenti precedenti possono essere ripetuti, ma omettendo dall'eq.(17.2.4) la curvatura $\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)$ e i gradi di libertà di rotazione ϑ_1 e ϑ_2 . I coefficienti diversi da zero della matrice $[k_\sigma]$ sono associati ai gradi di libertà w_1 e w_2 e la matrice $[G]$ descrive una rotazione della trave indipendente da x :

$$\frac{dw}{dx} = [G] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad \text{dove} \quad [G] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (17.2.10)$$

Quindi l'eq. (17.2.8) dà luogo alla seguente matrice:

$$[k_\sigma] = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{per} \quad \{\mathbf{d}\} = \{w_1 \ w_2\}^T \quad (17.2.11a)$$

o

$$[k_\sigma] = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{per} \quad \{\mathbf{d}\} = \{u_1 \ w_1 \ u_2 \ w_2\}^T \quad (17.2.11b)$$

OSSERVAZIONI. Le eq.(17.2.11) sono esatte per piccoli spostamenti trasversali della trave che può ruotare rigidamente ma non inflettersi. L'eq.(17.2.9) che consente la presenza di momenti flettenti, è approssimata poiché un campo di spostamenti laterali di tipo cubico non è esatto quando una trave sopporta sia carichi



assiali che trasversali distribuiti. Per esempio, la linea elastica di una mensola caricata da una forza distribuita costante q trasversale all'asse della trave è:

$$w(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$$

Come sempre, la precisione aumenta dividendo la trave in due o più elementi. Un singolo elemento trave può essere esatto se la formulazione dell'elemento si basa sul campo di spostamento esatto. La formulazione di un tale elemento dà luogo alla matrice combinata $(\mathbf{k} + \mathbf{k}_\sigma)$ che rimane di dimensioni 4×4 , ma contiene coefficienti più complicati di quelli presenti nell'eq.(17.2.9).

17.3 Matrici di rigidità geometrica per le piastre

Analogamente a quanto fatto per le travi e le bielle scariche, anche per le piastre piane la matrice di rigidità geometrica $[\mathbf{k}_\sigma]$ si può ottenere esaminando il lavoro fatto dalle forze membranali quando la struttura subisce un piccolo spostamento laterale. Le forze membranali che agiscono su una piastra piana sono le seguenti:

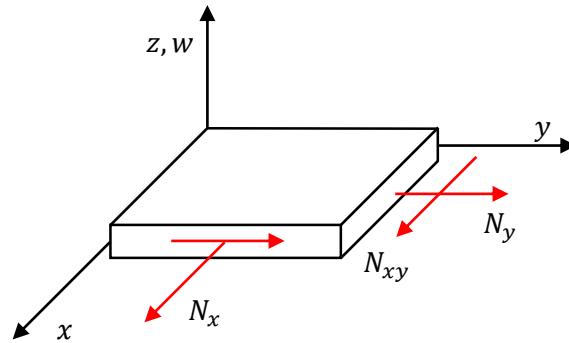


Fig.17.3.1 – Elemento infinitesimo di una piastra piana sul quale agiscono le forze membranali N_x , N_y e N_{xy} .

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot dz \quad ; \quad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot dz \quad ; \quad N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot dz \quad (17.3.1)$$

dove gli sforzi membranali σ_x , σ_y e τ_{xy} sono noti a priori oppure sono calcolati con un'analisi statica tradizionale usando, per esempio, elementi isoparametrici bilineari.

Le deformazioni membranali legate alle piccole rotazioni $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ della superficie media della piastra valgono:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (17.3.2)$$

Se si ipotizza che le forze membranali N_x , N_y e N_{xy} non dipendano dai piccoli spostamenti trasversali $w = w(x, y)$, allora il lavoro fatto dalle forze membranali per le deformazioni dell'eq.(17.3.2) vale:

$$U_\sigma = \int_A \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 N_x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 N_y + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} N_{xy} \right) dA \quad (17.3.3a)$$

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \iint \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} dx \cdot dy = \frac{1}{2} \{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{k}_\sigma] \{\mathbf{d}\} \quad (17.3.3b)$$

E' necessario scegliere un campo di spostamenti $w = w(x, y)$ la cui forma sia adeguata alla forma dell'elemento ed ai suoi gradi di libertà, per esempio l'equazione:

$$w = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3\} \{\mathbf{a}\}$$



A partire dal campo di spostamento, è possibile calcolare le rotazioni, cioè:

$$w = [N]\{d\} \quad \text{conduce a} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \underbrace{[G]}_{2 \times n} \underbrace{\{d\}}_{n \times 1} \quad (17.3.4)$$

dove n è il numero di gradi di libertà per elemento. In generale la matrice $[G]$ è funzione di x e di y . Le eq.(14.3.3b) e (14.3.4) conducono alla seguente equazione:

$$[k_\sigma] = \iint [G]^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [G] \cdot dx dy \quad (17.3.5)$$

dove l'integrazione si estende all'area dell'elemento. Se l'elemento è isoparametrico, le funzioni di forma $[N]$ sono espresse nelle coordinate naturali ξ ed η ed è quindi necessario il calcolo dello jacobiano $[J]$.

Quindi posto:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{[G_I]}_{2 \times n} \{d\} \quad \text{e} \quad [J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

dove $[G_I]$ contiene le derivate delle funzioni di forma rispetto alle coordinate ξ ed η , si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} [G_I] \{d\} = [G] \{d\} \quad (17.3.6)$$

Le eq. (17.3.5) e (17.3.6) conducono alla seguente espressione:

$$[k_\sigma] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_I]^T [J]^{-T} \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [J]^{-1} [G_I] \cdot \|J\| \cdot d\xi d\eta \quad (17.3.7)$$

dove $\|J\|$ indica il determinante dello jacobiano.

All'interno di un elemento le forze membranali N_x, N_y e N_{xy} possono variare. Quindi, nell'integrazione numerica necessaria per il calcolo della matrice $[k_\sigma]$, le forze membranali N_x, N_y e N_{xy} devono essere valutate nei punti d'integrazione.

17.4 Formulazione generale per la matrici di rigidità geometrica

DEFORMAZIONI DI GREEN-LAGRANGE. Le seguenti equazioni rappresentano una misura delle deformazioni comunemente note come deformazioni di Green-Lagrange:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (17.4.1a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (17.4.1b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (17.4.1c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (17.4.1d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (17.4.1e)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \left[\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (17.4.1f)$$

I primi termini nelle eq.(17.4.1) sono le abituali definizioni ingegneristiche delle deformazioni normali e di scorrimento. I termini aggiunti diventano significativi se i gradienti degli spostamenti non sono piccoli.



Quando il corpo subisce solo spostamenti o rotazioni rigide, le deformazioni di Green-Lagrange sono nulle. Nelle eq.(17.4.1) tutte le derivate degli spostamenti sono calcolate nel sistema di riferimento originale: si tratta del metodo noto come “*Lagrangiano totale*” secondo il quale tutti gli spostamenti sono misurati rispetto ad un sistema di riferimento stazionario piuttosto che legato alla struttura che sta subendo la deformazione. Le coordinate stazionarie possono anche chiamarsi “*coordinate materiali*” e possono essere indicate con le lettere maiuscole X, Y e Z.

Le deformazioni normali di Green-Lagrange corrispondono alla definizione di deformazione di un segmento di linea secondo l’equazione:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 - 1 \right] \quad (17.4.2)$$

dove ds e ds^* sono rispettivamente la lunghezza iniziale e finale di un segmento. Se $ds \cong ds^*$ allora l’eq.(17.4.2) si riduce all’usuale approssimazione valida per piccole deformazioni, $\varepsilon = \frac{ds^* - ds}{ds}$.

FORMULE PER IL CALCOLO DI $[k_\sigma]$. Si ipotizzi che lo sforzo iniziale $\{\sigma_0\}$ rimanga costante mentre crescono le deformazioni $\{\varepsilon\}$; in questo caso il lavoro associato vale:

$$\int_{Vol} \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} \cdot dvol \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x & \varepsilon_y & \dots & \gamma_{zx}\} \\ \{\sigma_0\} = \{\sigma_{x0} & \sigma_{y0} & \dots & \tau_{zx0}\}^T \end{cases} \quad (17.4.3a)$$

$$(17.4.3b)$$

Inserendo le espressioni (17.4.1) all’interno del vettore delle deformazioni $\{\varepsilon\}$, il prodotto $\{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\}$ contiene i termini $\frac{\partial u}{\partial x} \sigma_{x0} + \frac{\partial v}{\partial y} \sigma_{y0} + \dots$ che conducono alle forze nodali prodotte da $\{\sigma_0\}$. In definitiva si ottiene:

$$U_{cr} = \int_{vol} \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \sigma_{x0} + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tau_{zx0} \right] \cdot dVol \quad (17.4.4)$$

Se si definisce il vettore:

$$\{\delta\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \right\}^T \quad (17.4.5)$$

allora l’eq.(17.4.4) si può esprimere nel modo seguente:

$$U_{cr} = \frac{1}{2} \int_{vol} \{\delta\}^T \begin{bmatrix} s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & s \end{bmatrix} \{\delta\} \cdot dVol \quad \text{dove} \quad [s] = \begin{bmatrix} \sigma_{x0} & \tau_{xy0} & \tau_{zx0} \\ \tau_{xy0} & \sigma_{y0} & \tau_{zx0} \\ \tau_{zx0} & \tau_{zx0} & \sigma_{z0} \end{bmatrix} \quad (17.4.6)$$

Questa espressione è analoga alle eq.(17.2.7) e (17.3.3b), e consente, seguendo una procedura analoga, di calcolare la matrice $[k_\sigma]$. Si indichi con $\{\mathbf{u}\} = [N]\{\mathbf{d}\}$ il campo di spostamento elementare, dove $\{\mathbf{u}\} = \{u \quad v \quad w\}^T$ e $\{\mathbf{d}\}$ contiene i gradi di libertà nodali. Sia inoltre $\{\delta\} = [G]\{\mathbf{d}\}$ dove $[G]$ si ottiene dalle funzioni di forma $[N]$ eseguendo le derivate necessarie e ordinandole adeguatamente. L’eq.(17.4.6) diventa:

$$U_{cr} = \frac{1}{2} \{\mathbf{d}\}^T [k_\sigma] \{\mathbf{d}\} \quad \text{dove} \quad [k_\sigma] = \int_{vol} [G]^T \begin{bmatrix} s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & s \end{bmatrix} [G] \cdot dVol \quad (17.4.7)$$

Come esempio si consideri il tirante/puntone della Fig.17.2.1b, con il campo di moto limitato al piano xz . In questo caso tutti gli sforzi iniziali sono nulli tranne lo sforzo assiale σ_{x0} . Si ipotizza che gli spostamenti u e w siano funzioni lineari di x e si impone nullo lo spostamento v fuori dal piano. Poiché le funzioni di forma sono:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad ; \quad N_2 = \frac{x}{L}$$

si può scrivere:

$$\begin{cases} u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \\ w = N_1 w_1 + N_2 w_2 \end{cases} \quad ; \quad [G] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17.4.8)$$



I gradi di libertà diversi da zero sono $\{\mathbf{d}\} = \{u_1 \ w_1 \ u_2 \ w_2\}^T$. Inoltre $\{\boldsymbol{\delta}\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T$. Allora l'eq.(17.4.7) si riduce alla seguente espressione:

$$[\mathbf{k}_\sigma] = \int_0^L [\mathbf{G}]^T \begin{bmatrix} \sigma_{x0} & 0 \\ 0 & \sigma_{x0} \end{bmatrix} [\mathbf{G}] \cdot A \cdot dx = \frac{A}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x0} & 0 \\ 0 & \sigma_{x0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} dx$$

Calcolando l'integrale si ottiene:

$$[\mathbf{k}_\sigma] = \frac{\sigma_{x0}A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17.4.9)$$

dove $P = \sigma_{x0}A$. Questa matrice è quasi identica a quella dell'eq.(17.2.11), ma contiene quattro ulteriori coefficienti non nulli. Comunque si può notare che questi coefficienti occupano le stesse posizioni occupate dai termini diversi da zero nella matrice di rigidità convenzionale. Così nella matrice di rigidità complessiva $[\mathbf{k}] + [\mathbf{k}_\sigma]$ saranno presenti dei coefficienti del tipo $\pm \frac{EA+P}{L}$ (corrispondenti ai gradi di libertà u_1 e u_2) e $\pm \frac{P}{L}$ (corrispondenti ai gradi di libertà w_1 e w_2). Poiché in qualsiasi problema reale EA è molto più grande di P , nella matrice $[\mathbf{k}_\sigma]$ è possibile scartare il termine $\frac{P}{L}$. In questo modo l'eq.(17.4.9) diventa identica all'eq.(14.2.11).

NONLINEARITÀ COMPLETA: UN ESEMPIO.

Negli sviluppi precedenti non è evidente quali siano state le approssimazioni contenute nella matrice $[\mathbf{k}_\sigma]$. In quanto segue consentiremo le grandi rotazioni e mostreremo, con un esempio, che l'uso di $[\mathbf{k}_\sigma]$ implica una completa linearizzazione del problema e la limitazione delle rotazioni prima dell'instabilità.

Si consideri un tirante/puntone elastico modellato con un solo elemento (Fig.17.4.1). Se le forze sono applicate solo agli estremi, gli spostamenti variano linearmente:

$$u(x) = \frac{x}{L} u_2 \quad \text{e} \quad w(x) = \frac{x}{L} w_2 \quad (17.4.10)$$

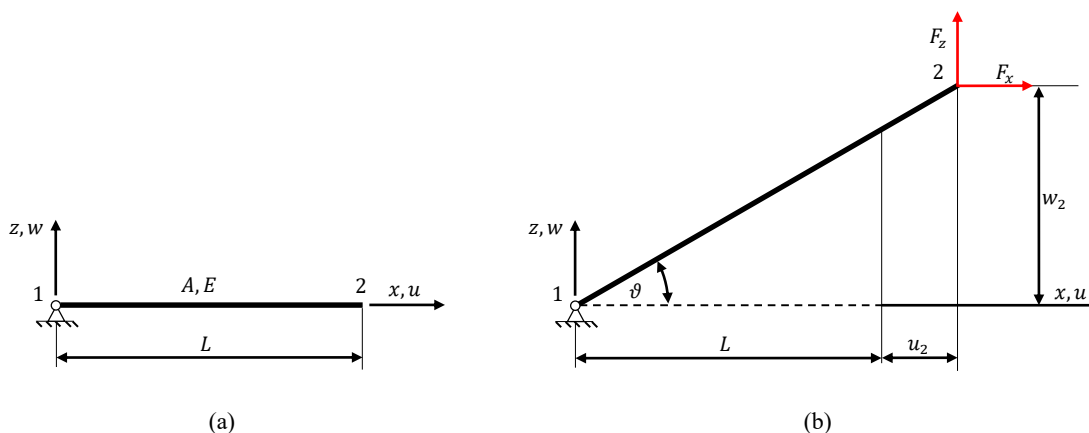


Fig. 17.4.1. (a) Elemento tirante/puntone incernierato nel nodo 1, prima dell'applicazione del carico. (b) Trave ruotata e deformata dopo avere applicato nel nodo 2 i carichi F_x e F_y .

La biella si sposta nel piano xz ed è sottoposta ad uno stato di sforzo monoassiale. Se le deformazioni sono piccole, l'energia potenziale totale della biella vale:



$$\Pi_{pt} = \frac{1}{2} \int_0^L AE \varepsilon_x^2 dx - F_x u_2 - F_z w_2 \quad (17.4.11)$$

dove ε_x è la deformazione assiale, come se la biella occupasse la sua inclinazione originale, parallela all'asse x . Dalle eq.(17.4.1a) e (14.4.10):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{u_2}{L} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_2}{L} \right)^2 + \left(\frac{w_2}{L} \right)^2 \right] \quad (17.4.12)$$

L'espressione finale di Π_{pt} consente ancora grandi rotazioni. Quando:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_{pt}}{\partial u_2} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{pt}}{\partial w_2} = 0 \end{cases}$$

prevale l'equilibrio statico. I risultati di questi calcoli possono essere scritti nella forma seguente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^2 &= \left(\frac{u_2^2}{L^2} + \frac{u_2^3}{2L^3} + \frac{u_2 w_2^2}{2L^3} \right) + \left(\frac{u_2^3}{2L^3} + \frac{u_2^4}{4L^4} + \frac{u_2^2 w_2^2}{4L^4} \right) + \left(\frac{u_2 w_2^2}{2L^3} + \frac{u_2^2 w_2^2}{4L^4} + \frac{w_2^4}{4L^4} \right) \\ \varepsilon_x^2 &= \left(\frac{u_2^2}{L^2} \right) + \left(\frac{u_2^3}{L^3} + \frac{u_2 w_2^2}{L^3} + \frac{u_2^4}{4L^4} + \frac{u_2^2 w_2^2}{2L^4} + \frac{w_2^4}{4L^4} \right) \\ \frac{AE}{2} \int_0^L \varepsilon_x^2 dx &= \frac{AE}{2} \left[\left(\frac{u_2^2}{L} \right) + \left(\frac{u_2^3}{L^2} + \frac{u_2 w_2^2}{L^2} + \frac{u_2^4}{4L^3} + \frac{u_2^2 w_2^2}{2L^3} + \frac{w_2^4}{4L^3} \right) \right] \\ \begin{cases} \frac{\partial \Pi_{pt}}{\partial u_2} = \frac{AE}{L} \left[u_2 + \frac{1}{2L} (3u_2^2 + w_2^2) + \frac{1}{2L^2} (u_2^3 + u_2 w_2^2) \right] - F_x = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{pt}}{\partial w_2} = \frac{AE}{L} \left[\frac{1}{2L} (2u_2 w_2) + \frac{1}{2L^2} (u_2^2 w_2 + w_2^3) \right] - F_z = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (17.4.13a)$$

che si può scrivere nel modo seguente:

$$\frac{AE}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2L} \begin{pmatrix} 3u_2 & w_2 \\ w_2 & u_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2L^2} \begin{pmatrix} u_2^2 & u_2 w_2 \\ u_2 w_2 & w_2^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (17.4.13b)$$

Se u_2 e w_2 rappresentassero una rotazione rigida intorno al nodo 1, cioè se:

$$\begin{cases} u_2 = -L \cdot [1 - \cos(\vartheta)] \\ w_2 = L \cdot \sin(\vartheta) \end{cases}$$

allora F_x e F_z sarebbero nulli per qualsiasi rotazione ϑ , indipendentemente dal suo valore.

Nell'eq.(17.4.13b) u_2 e w_2 sono spostamenti totali. Ma usando l'eq.(17.4.13b) si può ottenere anche un'analogia forma *incrementale*, scrivendo $F_x = F_x(u_2, w_2)$ e $F_z = F_z(u_2, w_2)$ in modo esplicito e calcolando il differenziale totale:

$$\begin{cases} dF_x = \frac{dF_x}{du_2} du_2 + \frac{dF_x}{dw_2} dw_2 \\ dF_z = \frac{dF_z}{du_2} du_2 + \frac{dF_z}{dw_2} dw_2 \end{cases}$$

Quindi date le espressioni di F_x e F_z trovate nell'eq. (17.4.13a)



$$\begin{cases} F_x = \frac{AE}{L} \left[u_2 + \frac{1}{2L} (3u_2^2 + w_2^2) + \frac{1}{2L^2} (u_2^3 + u_2 w_2^2) \right] \\ F_z = \frac{AE}{L} \left[\frac{1}{2L} (2u_2 w_2) + \frac{1}{2L^2} (u_2^2 w_2 + w_2^3) \right] \end{cases}$$

derivando si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{dF_x}{du_2} = \frac{AE}{L} \left[1 + \frac{3}{L} u_2 + \frac{1}{2L^2} (3u_2^2 + w_2^2) \right] \\ \frac{dF_x}{dw_2} = \frac{AE}{L} \left[\frac{1}{L} (w_2) + \frac{1}{L^2} (u_2 w_2) \right] \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{dF_z}{du_2} = \frac{AE}{L} \left[\frac{1}{L} (w_2) + \frac{1}{L^2} (u_2 w_2) \right] \\ \frac{dF_z}{dw_2} = \frac{AE}{L} \left[\frac{1}{L} (u_2) + \frac{1}{2L^2} (u_2^2 + 3w_2^2) \right] \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} dF_x = \frac{AE}{L} \left[1 + \frac{3}{L} u_2 + \frac{1}{2L^2} (3u_2^2 + w_2^2) \right] du_2 + \frac{AE}{L} \left[\frac{1}{L} (w_2) + \frac{1}{L^2} (u_2 w_2) \right] dw_2 \\ dF_z = \frac{AE}{L} \left[\frac{1}{L} (w_2) + \frac{1}{L^2} (u_2 w_2) \right] du_2 + \frac{AE}{L} \left[\frac{1}{L} (u_2) + \frac{1}{2L^2} (u_2^2 + 3w_2^2) \right] dw_2 \end{cases}$$

che in forma matriciale assume la forma seguente:

$$\left(\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{AE}{L^2} \begin{bmatrix} 3u_2 & w_2 \\ w_2 & u_2 \end{bmatrix} + \frac{AE}{2L^3} \begin{bmatrix} 3u_2^2 + w_2^2 & 2u_2 w_2 \\ 2u_2 w_2 & u_2^2 + 3w_2^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} du_2 \\ dw_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dF_x \\ dF_z \end{Bmatrix} \quad (17.4.14a)$$

o, in altri termini:

$$([\mathbf{K}] + [\mathbf{N}_1] + [\mathbf{N}_2]) \begin{Bmatrix} du_2 \\ dw_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dF_x \\ dF_z \end{Bmatrix} \quad (17.4.14b)$$

dove:

$$[\mathbf{K}] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [\mathbf{N}_1] = \frac{AE}{L^2} \begin{bmatrix} 3u_2 & w_2 \\ w_2 & u_2 \end{bmatrix} ; \quad [\mathbf{N}_2] = \frac{AE}{2L^3} \begin{bmatrix} 3u_2^2 + w_2^2 & 2u_2 w_2 \\ 2u_2 w_2 & u_2^2 + 3w_2^2 \end{bmatrix}$$

Questa equazione descrive gli incrementi delle forze nodali dF_x e dF_z associati ai piccoli spostamenti nodali du_2 , dw_2 misurati rispetto alla configurazione di riferimento attuale u_2 , w_2 . Quindi la configurazione di riferimento può essere ruotata di un angolo ϑ molto diversa da quella iniziale pari a $\vartheta = 0$.

E' possibile stabilire una corrispondenza con le equazioni precedenti. Se gli spostamenti u_2 , w_2 sono sufficientemente piccoli, la terza matrice dell'eq.(17.4.1b), che dipende dal quadrato degli spostamenti, può essere trascurata rispetto alle altre due matrici. Inoltre, se al posto del primo termine si scrive $\frac{AE}{L} u_2 = P$, se si pone $w_2 = 0$ e se si ipotizza che $u_2 \ll L$, allora è possibile un'ulteriore semplificazione:

$$\left(\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} du_2 \\ dw_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dF_x \\ dF_z \end{Bmatrix} \quad (17.4.15)$$

La seconda matrice che compare nell'eq.(17.4.15) è analoga alla sottomatrice destra 2×2 dell'eq.(17.4.9), tranne per la presenza del coefficiente 3 invece del coefficiente unitario. L'eq.(17.4.15) può accordarsi all'eq.(17.4.11) grazie agli stessi argomenti utilizzati per giustificare l'eq.(17.4.9), ovvero notando che in pratica $AE \gg P$. Quindi è lecito scartare il coefficiente 3 e la seconda matrice dell'eq.(17.4.15) diventa la $[\mathbf{K}_\sigma]$.

Per concludere, scartando i coefficienti quadratici della rigidità presenti nell'eq.(17.4.14), si ottengono due forme di equazioni incrementali:

$$([\mathbf{K}] + [\mathbf{N}_1])\{d\mathbf{D}\} = \{d\mathbf{F}\} \quad \text{e} \quad ([\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_\sigma])\{d\mathbf{D}\} = \{d\mathbf{F}\} \quad (17.4.16)$$

Le eq.(17.4.16) sono espressioni simboliche delle approssimazioni che, in generale, è possibile applicare alle strutture lineari elastiche, non solo alle travi. Entrambe le equazioni sono state linearizzate scartando i



termini quadratici, e quindi sono funzioni della sola potenza prima degli spostamenti. Entrambe le equazioni possono essere usate per calcolare il carico critico che porta all'instabilità. Raggiunta l'instabilità, si producono gli incrementi infinitesimi di spostamento $\{d\mathbf{D}\}$, misurati rispetto alla configurazione $\{\mathbf{D}\}$ raggiunta prima dell'instabilità. Se nel calcolo del carico critico si utilizza la matrice $[\mathbf{K}_\sigma]$, significa che le rotazioni precedenti all'instabilità presenti nel vettore $\{\mathbf{D}\}$ sono state considerate nulle, mentre l'uso di $[\mathbf{N}_1]$ significa che le rotazioni precedenti sono piccole. Per le piastre inizialmente piane e per le colonne inizialmente rettilinee, le due formulazioni conducono alla stessa stima del carico critico. Nei problemi pratici nei quali le rotazioni precedenti all'instabilità non sono trascurabili, l'uso di $[\mathbf{N}_1]$ conduce sempre ad una stima del carico critico più bassa di quella che si ottiene usando la matrice $[\mathbf{K}_\sigma]$, ma non c'è la garanzia che entrambe i metodi sovrastimino o sottostimino il valore esatto.

17.5 Instabilità per biforcazione

Il carico critico al limite dell'instabile è il carico in corrispondenza del quale sono possibili due configurazioni di equilibrio, la configurazione di riferimento della struttura e una infinitesimamente vicina. Nel momento in cui, a partire da una configurazione di riferimento $\{\mathbf{D}\}$, si produce uno spostamento instabile $\{d\mathbf{D}\}$, il carico non cambia. Di conseguenza, dalle eq.(17.4.16) si ottiene:

$$([\mathbf{K}] + [\mathbf{N}_1])\{d\mathbf{D}\} = \{\mathbf{0}\} \quad \text{oppure} \quad ([\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_\sigma])\{d\mathbf{D}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (17.5.1)$$

E' necessario trovare il livello di deformazione (simbolizzato da $[\mathbf{N}_1]$) o il livello di sforzo (simbolizzato da $[\mathbf{K}_\sigma]$) tale che sia possibile una soluzione $\{d\mathbf{D}\}$ diversa da quella banale $\{d\mathbf{D}\} = \{\mathbf{0}\}$. L'uso di $[\mathbf{N}_1]$ implica che non vengano ignorate le piccole rotazioni precedenti all'instabilità; l'uso di $[\mathbf{K}_\sigma]$ implica che le rotazioni precedenti all'instabilità siano nulle oppure vengano trascurate. Quest'ultimo metodo corrisponde all'analisi classica dell'instabilità, usata spesso nell'analisi delle colonne rettilinee e delle piastre piane.

In quanto segue si metterà in evidenza l'analisi classica che utilizza la matrice $[\mathbf{K}_\sigma]$. Si inizia applicando alla struttura un livello di carico di riferimento $\{\mathbf{F}\}_{rif}$ ed eseguendo una classica analisi statica lineare per ottenere gli sforzi membranali che agiscono sugli elementi della struttura (per esempio per determinare gli sforzi membranali che agiscono su una piastra piana sottoposta ad un aumento di temperatura). In seguito si calcola la matrice $[\mathbf{K}_\sigma]_{rif}$ funzione di $\{\mathbf{F}\}_{rif}$. Quando il carico viene scalato moltiplicandolo per la quantità scalare λ :

$$\{\mathbf{F}\} = \lambda\{\mathbf{F}\}_{rif} \quad \text{si può scrivere:} \quad [\mathbf{K}_\sigma] = \lambda[\mathbf{K}_\sigma]_{rif} \quad (17.5.2)$$

L'eq.(17.5.2) implica che moltiplicando per λ i coefficienti F_i appartenenti al vettore $\{\mathbf{F}\}_{rif}$ venga scalato per λ anche il campo degli sforzi senza però cambiarne la distribuzione. Quindi, poiché durante un infinitesimo spostamento instabile $\{d\mathbf{D}\}$ i carichi esterni non cambiano, possiamo scrivere:

$$([\mathbf{K}] + \lambda_{cr}[\mathbf{K}_\sigma]_{rif})\{\mathbf{D}\} = ([\mathbf{K}] + \lambda_{cr}[\mathbf{K}_\sigma]_{rif})\{\mathbf{D} + d\mathbf{D}\} = \lambda_{cr}\{\mathbf{F}\}_{rif} \quad (17.5.3)$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene:

$$([\mathbf{K}] + \lambda_{cr}[\mathbf{K}_\sigma]_{rif})\{d\mathbf{D}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (17.5.4)$$

L'eq.(17.5.4) rappresenta un problema agli autovalori il cui autovalore più basso λ_{cr} è associato all'instabilità. Dall'eq.(17.5.2) si ricava che il carico critico vale:

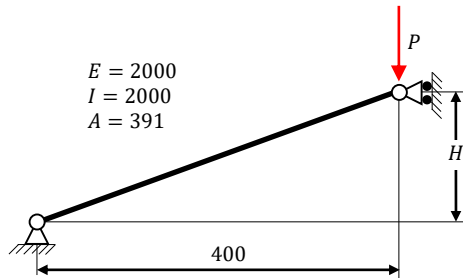
$$\{\mathbf{F}\}_{cr} = \lambda_{cr}\{\mathbf{F}\}_{rif} \quad (17.5.5)$$

L'autovettore $\{d\mathbf{D}\}$ associato all'autovalore λ_{cr} definisce il modo (o la forma) dell'instabilità. L'ampiezza di $\{d\mathbf{D}\}$ non è nota e quindi $\{d\mathbf{D}\}$ identifica una forma ma non la sua ampiezza.



Un'interpretazione fisica dell'eq.(17.5.4), i cui termini tra parentesi formano la matrice di rigidità complessiva $[K_{tot}]$, è la seguente. Poiché le forze $[K_{tot}]\{dD\}$ sono nulle, si può dire che le forze membranali d'intensità critica annullano la rigidità della struttura rispetto al modo instabile $\{dD\}$.

Se nell'analisi precedente si fosse utilizzata la matrice $[N_1]$ invece della $[K_\sigma]$, gli spostamenti necessari per costruire $[N_1]$ sarebbero stati quelli ottenuti da un'analisi statica sotto il carico $\{F\}_{rif}$. La Fig. (17.5.1) fornisce un esempio di quanto bene questi due metodi approssimino il vero carico critico.



Metodo	$H = 35.0$	$H = 3.49$
Uso di $[K_\sigma]$	21.35	0.520
Uso di $[N_1]$	20.58	0.173
Non -lineare	20.47	0.100

Fig. 17.5.1 – Biella scarica ed elastica. Il carico critico linearizzato P_{cr} è confrontato con il risultato ottenuto con un'analisi non-lineare più precisa.

I metodi di calcolo per determinare λ_{cr} sono numerosi, per esempio è possibile usare gli stessi metodi usati per calcolare le frequenze naturali ed i modi di vibrare nei problemi dinamici. Non è però possibile utilizzare algoritmi che richiedano l'inversione della matrice $[K_\sigma]$ che potrebbe non essere definita positiva. Se fosse richiesto solo il calcolo del carico critico più basso, sarebbe inutile l'uso di metodi che estraggono automaticamente numerosi autovalori. Comunque per vincolare adeguatamente la struttura contro l'instabilità può essere utile conoscere alcuni tra gli autovalori più bassi ed i relativi modi instabili.

Quando le matrici $[K]$ e $[K_\sigma]$ sono calcolate facendo riferimento alla geometria originale non deformata, l'eq.(17.5.4) trascura le eventuali non linearità precedenti all'instabilità; cioè si trascura il fatto che il valore corretto di $[K]$ e $[K_\sigma]_{rif}$ potrebbe dipendere dalla deformazione. Un modo per prendere in considerazione tali non linearità consiste nel far dipendere $[K]$ e $[K_\sigma]_{rif}$ dalla configurazione deformata poco prima dell'instabilità. In modo più preciso, è possibile applicare un livello di carico di prova $\{F\}_{base}$ ed eseguire un'analisi statica non lineare. Un risultato di quest'analisi è $[K_t]$, la matrice della rigidità "tangente" della struttura, nella sua configurazione deformata. Rispetto alla matrice di rigidità $[K]$ calcolata prima dell'applicazione dei carichi, $[K_t]$ ha perso una parte della rigidità a causa degli sforzi membranali prodotti da $\{F\}_{base}$. È possibile applicare un piccolo incremento del carico di prova $\{\Delta F\}$ ed utilizzare gli spostamenti prodotti da $[K_t]$ e $\{\Delta F\}$ per stimare gli sforzi membranali. In questo modo è possibile calcolare la matrice $[K_\sigma]_{rif}$ relativa alla configurazione corrente e non a quella originale non deformata. Si risolve quindi il problema agli autovalori:

$$([K_t] + \Delta\lambda_{cr}[K_\sigma]_{rif})\{dD\} = \{0\} \quad (17.5.6)$$

e si calcola $\Delta\lambda_{cr}$ che annulla la rigidità totale (il coefficiente che nell'eq.(17.5.6) moltiplica $\{dD\}$) rispetto al modo instabile. La stima del carico critico risulta:

$$\{F\}_{cr} = \{F\}_{base} + \Delta\lambda_{cr}\{\Delta F\} \quad (17.5.7)$$

L'eq.(17.5.6) ipotizza che quando il carico aumenta di $\Delta\lambda_{cr}\{\Delta F\}$ gli sforzi cambino d'intensità ma che non cambi la loro distribuzione. Questa ipotesi diventa sempre più ragionevole come $\{F\}_{base}$ si avvicina a $\{F\}_{cr}$. Usando una successione di carichi crescenti $\{F\}_{base}$, è possibile avvicinarsi sempre di più al carico critico corretto. Quando si raggiunge la convergenza, $\Delta\lambda_{cr} = 0$ e $\{F\}_{cr} = \{F\}_{base}$.



17.6 Note sulla matrice $[k_\sigma]$ ed il suo uso

Campo su cui si basa $[k_\sigma]$. La matrice geometrica è detta “*consistente*” se la si ottiene utilizzando le stesse funzioni di forma usate per il calcolo della matrice di rigidezza convenzionale. Se il modello agli elementi finiti rispecchia adeguatamente la geometria della struttura, se gli elementi sono compatibili e non sono resi troppo deformabili da un’eventuale sotto-integrazione, allora tale formulazione conduce ad una sovrastima del carico critico corretto. Per “*carico critico corretto*” si intende il carico alla biforcazione, calcolato in modo lineare, rispetto alla configurazione indeformata della struttura, che non sempre coincide con il carico che porta al collasso la struttura reale. L’analisi agli elementi finiti fornisce il carico critico corretto se $[k]$ e $[k_\sigma]$ si basano su un campo che include la forma instabile tra i possibili modi di spostamento. Nel caso dell’instabilità di una colonna vincolata con due cerniere terminali, questo modo è sinusoidale e non cubico ed il carico critico esatto vale $\pi^2 EI/L^2$.

E’ possibile calcolare le matrici $[k]$ e $[k_\sigma]$ utilizzando diversi campi di spostamento. Ricordiamo quanto detto circa i criteri che devono essere rispettati per garantire la convergenza delle soluzioni verso quella corretta: se l’espressione dell’energia elastica contiene le derivate degli spostamenti fino all’ordine m , allora quando s’infittisce la mesh è necessario che tra gli elementi sia garantita la continuità delle derivate degli spostamenti fino all’ordine $m - 1$. Gli integrali necessari al calcolo di $[k_\sigma]$ contengono le derivate prime dello spostamento, quindi è necessario garantire solo la continuità degli spostamenti. Quindi, per esempio, possiamo determinare il carico critico P_{cr} relativo ad una colonna incernierata usando la matrice di rigidezza convenzionale $[k]$, ma la matrice $[k_\sigma]$ calcolata nell’espressione (17.2.11). Tutto ciò è corretto, ma per ottenere una data precisione, è necessario dividere la colonna in un numero maggiore di elementi rispetto a quello necessario nel caso in cui si usasse la matrice $[k_\sigma]$ consistente (17.2.9).

Per aumentare l’efficienza computazionale (a fronte di un piccolo peggioramento della precisione) degli elementi di tipo complesso, talvolta si consiglia di basare il calcolo di $[k_\sigma]$ su un campo di spostamento più semplice rispetto a quello usato per il calcolo della matrice di rigidezza $[k]$. Probabilmente la migliore matrice $[k_\sigma]$ è compresa tra quella consistente e la più semplice possibile. I risultati numerici suggeriscono che i carichi critici aumentano quando si utilizzano espressioni semplificate di $[k_\sigma]$. Se la matrice $[k_\sigma]$ è calcolata usando l’integrazione numerica, l’uso della sotto-integrazione corrisponde all’adozione di un campo di spostamento semplificato.

Durante le traslazioni rigide, una valida matrice $[k_\sigma]$ non deve generare forze nodali. Quando un elemento ruota appaiono delle forze nodali. In effetti, dall’eq.(17.5.1) è possibile interpretare l’instabilità come un campo di spostamento $\{dD\}$ in cui le pseudo forze $[K_\sigma]\{dD\}$ hanno un’ampiezza identica alla corrispondente resistenza $[K]\{dD\}$.

**APPENDICE**

Il teorema binomiale (o anche formula di Newton, binomio di Newton e sviluppo binomiale) esprime lo sviluppo della potenza n -esima di un binomio qualsiasi con la formula seguente:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

in cui il fattore $\binom{n}{k}$ rappresenta il coefficiente binomiale ed è sostituibile con $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Tali coefficienti sono gli stessi che si trovano nel noto triangolo di Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Lo sviluppo vale per ogni coppia di numeri reali o complessi.

La definizione fornita del binomio di Newton è valida solo per n numero naturale. È tuttavia possibile fornire una generalizzazione valida per $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, nonché approssimarla in un intorno destro dello zero con una serie di Taylor.

Nella pratica si usano spesso solo i primi due termini della serie, ossia $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, dove il resto $o(x)$ indica un infinitesimo di ordine superiore al primo.

Lo sviluppo completo è:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n),$$

dove $\binom{\alpha}{n}$ è il coefficiente binomiale generalizzato, dato da:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Quindi, posto:

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x = \left(\frac{dw}{dx}\right)^2$$

lo sviluppo della funzione $\sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}$ è la seguente:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dw}{dx}\right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{dw}{dx}\right)^6 + \dots$$