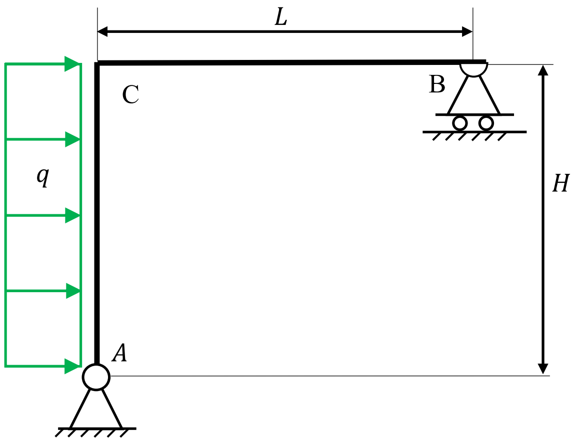
https://unica.adobeconnect.com/ptbq07sx4oh0/

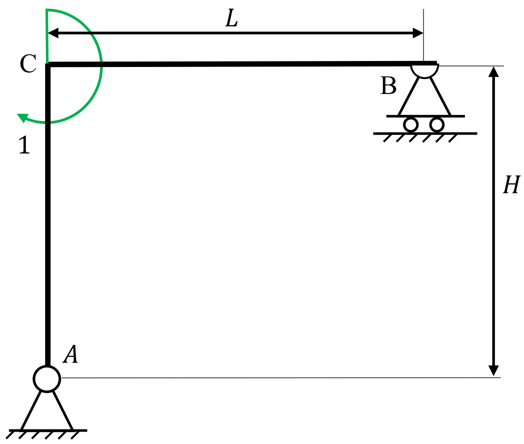
APPLICAZIONE DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Esercizio n.1: calcolo di una rotazione

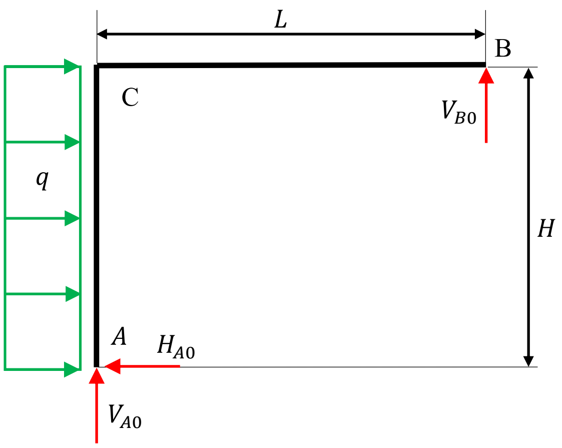
Calcolare la rotazione del punto C della seguente struttura isostatica.

In questo caso la struttura fittizia è quella indicata a lato, caricata nel punto C da una coppia unitaria oraria.





Calcoliamo le reazioni vincolari e le azioni interne nella struttura reale.



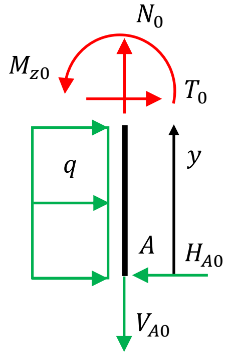
$$\begin{cases} \sum F_x = qH - H_{A0} = 0 \\ \sum M_A = V_{B0}L - \dfrac{qH^2}{2} = 0 \\ \sum F_y = V_{A0} + V_{B0} = 0 \end{cases}$$

Struttura degli spostamenti

$$\begin{cases} H_{A0} = qH \\ V_{B0} = \dfrac{qH^2}{2L} \\ V_{A0} = -\dfrac{qH^2}{2L} \end{cases}$$

Si cambia verso e segno a V_{A0}.

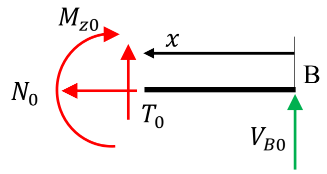
Calcolo delle azioni interne.



$$\begin{cases} \sum F_{\parallel} = N_0(y) - V_{A0} = 0 \\ \sum F_{\perp} = T_0(y) + qy - H_{A0} = 0 \\ \sum M = M_{z0}(y) + \dfrac{qy^2}{2} - H_{A0}y = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} N_0(y) = V_{A0} = \dfrac{qH^2}{2L} \\ T_0(y) = q(H-y) \\ M_{z0}(y) = qHy - \dfrac{qy^2}{2} \end{cases}$$

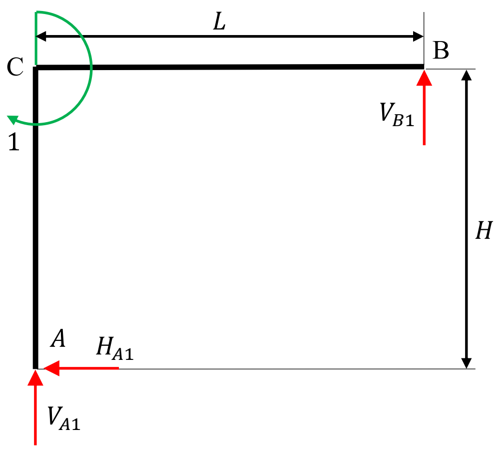


$$\begin{cases} \sum F_{\parallel} = N_0(x) = 0 \\ \sum F_{\perp} = T_0(x) + V_{B0} = 0 \\ \sum M = M_{z0}(x) - V_{B0}x = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} N_0(x) = 0 \\ T_0(x) = -\dfrac{qH^2}{2L} \\ M_{z0}(x) = \dfrac{qH^2}{2L}x \end{cases}$$

Calcoliamo le reazioni vincolari e le azioni interne nella struttura fittizia delle forze.



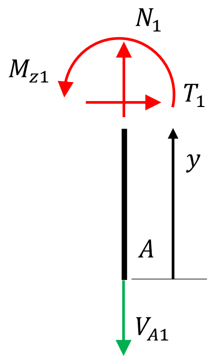
Struttura delle forze

$$\begin{cases} \sum F_x = H_{A1} = 0 \\ \sum M_A = V_{B1}L - 1 = 0 \\ \sum F_y = V_{A1} + V_{B1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{A1} = 0 \\ V_{B1} = \dfrac{1}{L} \\ V_{A1} = -V_{B1} = -\dfrac{1}{L} \end{cases}$$

Si cambia verso e segno a V_{A1}.

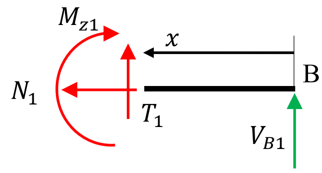
Calcolo delle azioni interne.



$$\begin{cases} \sum F_{\parallel} = N_1(y) - V_{A1} = 0 \\ \sum F_{\perp} = T_1(y) = 0 \\ \sum M = M_{z1}(y) = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} N_1(y) = V_{A1} = \dfrac{1}{L} \\ T_1(y) = 0 \\ M_{z1}(y) = 0 \end{cases}$$



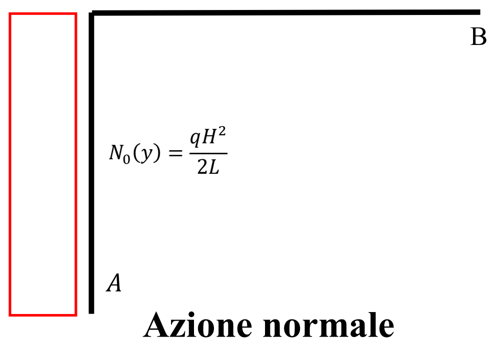
$$\begin{cases} \sum F_{\parallel} = N_1(x) = 0 \\ \sum F_{\perp} = T_1(x) + V_{B1} = 0 \\ \sum M = M_{z1}(x) - V_{B1}x = 0 \end{cases}$$

da cui:

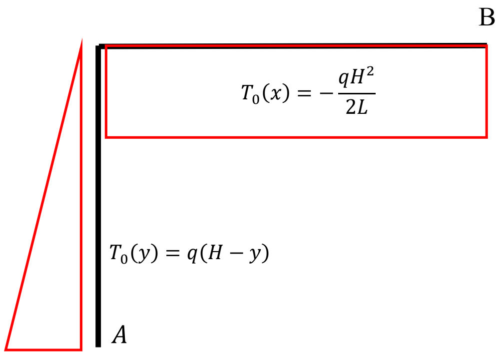
$$\begin{cases} N_1(x) = 0 \\ T_1(x) = -\dfrac{1}{L} \\ M_{z1}(x) = \dfrac{1}{L}x \end{cases}$$

I diagrammi delle azioni interne sono le seguenti:

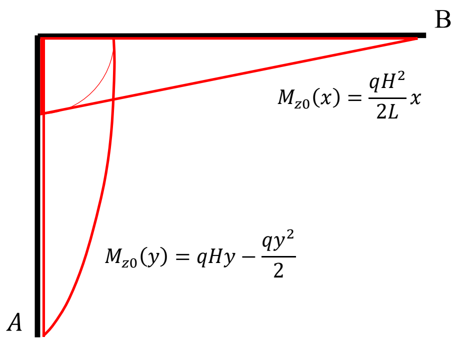
Struttura degli spostamenti



Azione normale

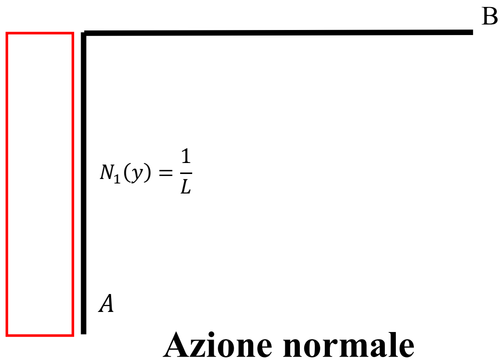


Azione di taglio

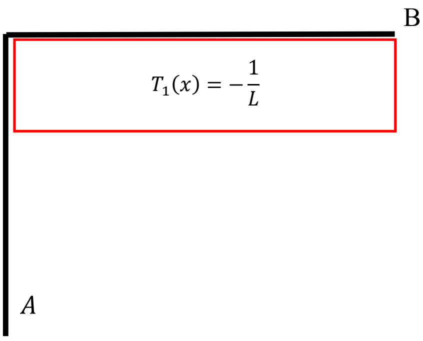


Azione del momento flettente

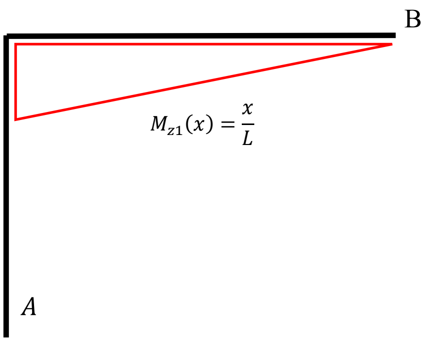
Struttura delle forze



Azione normale



Azione di taglio



Azione del momento flettente

Il modulo della rotazione del punto C si ottiene uguagliando il lavoro delle forze esterne a quello delle forze interne:

$$\mathcal{L}_{est} = 1\vartheta_c = \mathcal{L}_{int} = \int \frac{N_1\, N_0}{EA} dx + \int \frac{M_{z1}\, M_{z0}}{EI_{zz}} dx + \int \frac{\chi\, T_{y1}\, T_{y0}}{GA} dx$$

i cui integrali si estendono a tutta la struttura. Sostituendo le equazioni delle azioni interne si ottiene:

$$\vartheta_c = \int_0^H \frac{\left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{qH^2}{2L}\right)}{EA_{AC}} dy + \int_0^L \frac{\left(\frac{x}{L}\right)\left(\frac{qH^2}{2L}x\right)}{EI_{zz}} dx + \int_0^L \frac{\chi\left(-\frac{1}{L}\right)\left(-\frac{qH^2}{2L}\right)}{GA_{BC}} dx$$

Ipotizzando il materiale omogeneo e le sezioni trasversali costanti lungo le travi, lo sviluppo degli integrali conduce al seguente risultato:

$$\vartheta_c = \frac{qH^3}{2L^2EA_{AC}} + \frac{qH^2L}{6EI_{zz}} + \frac{\chi qH^2}{2LGA_{BC}} \quad [radianti]$$

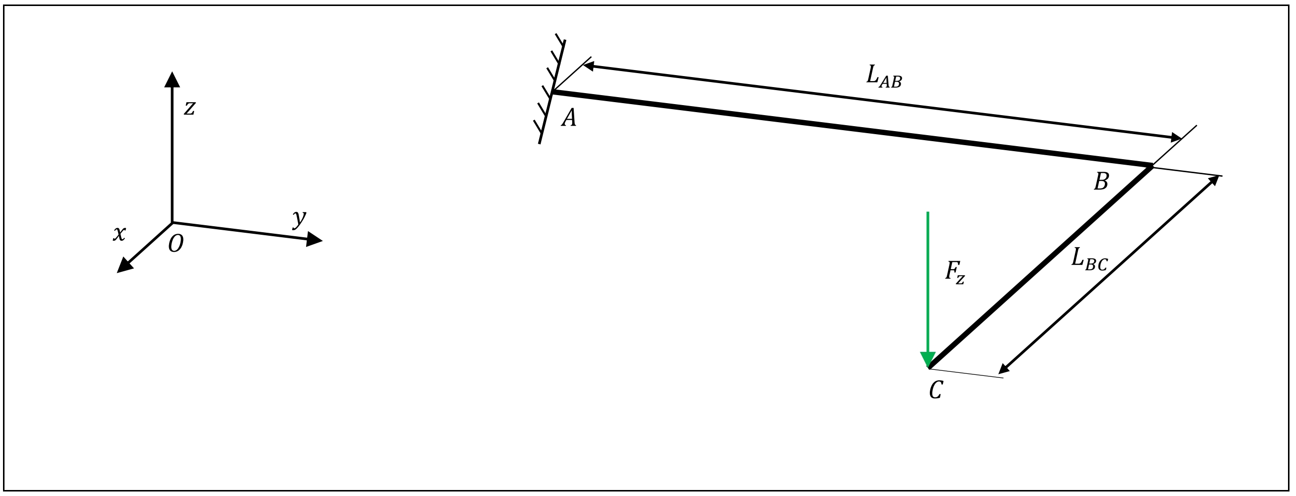
Il valore è positivo: ciò significa che la rotazione avrà segno uguale a quello ipotizzato all'inizio dell'esercizio: la rotazione sarà quindi oraria.

Il contributo dell'azione normale alla rotazione complessiva del nodo C rispetto al contributo del taglio dipende dal rapporto H/L e dal rapporto A_{BC}/A_{AC}; posto $\chi = 1.2$ e $\nu = 0.3$ si ottiene:

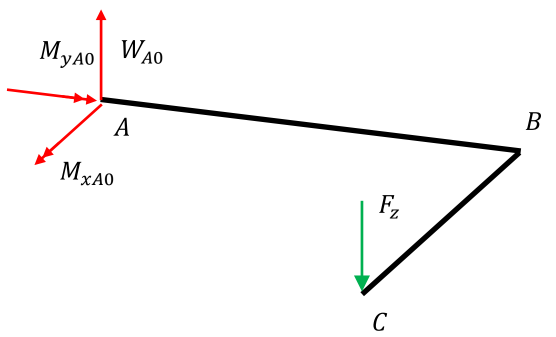
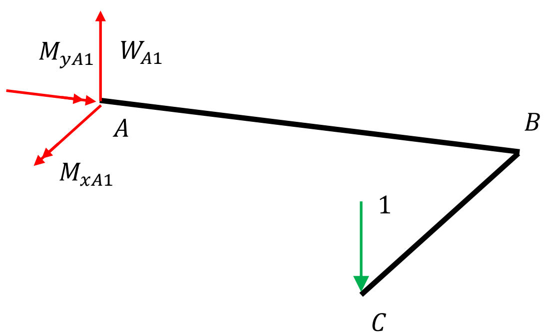
$$r = \frac{\frac{qH^3}{2L^2EA_{AC}}}{\frac{\chi qH^2}{2LGA_{BC}}} = \frac{H}{L}\frac{A_{BC}}{A_{AC}}\frac{G}{\chi E} \cong 0.32\frac{H}{L}\frac{A_{BC}}{A_{AC}}$$

Esercizio n.2: calcolo di uno spostamento in presenza della torsione.

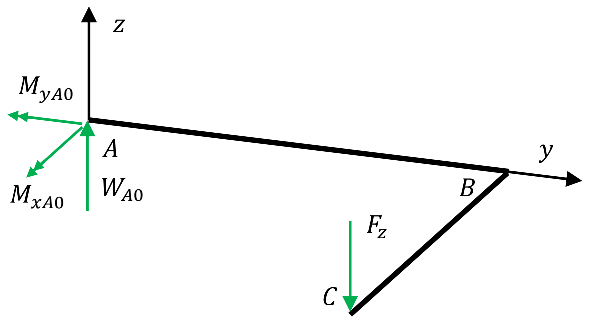
Calcolare l'abbassamento del punto C appartenente alla seguente struttura.



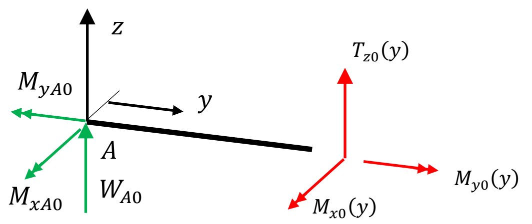
La sezione trasversale della trave è circolare di raggio R costante. Inoltre il materiale è omogeneo ed isotropo.

Struttura degli spostamenti	Struttura delle forze
	
Le reazioni vincolari valgono: $\begin{cases} W_{A0} = F_z \\ M_{xA0} = F_z L_{AB} \\ M_{yA0} = -F_z L_{BC} \end{cases}$	Le reazioni vincolari valgono: $\begin{cases} W_{A1} = 1 \\ M_{xA1} = L_{AB} \\ M_{yA1} = -L_{BC} \end{cases}$
Cambio verso e segno alla reazione M_{yA0}.	Cambio verso e segno alla reazione M_{yA1}.

Procediamo con il calcolo delle azioni interne nella struttura degli spostamenti.



Si taglia l'asta in un punto qualsiasi tra A e B alla coordinata y:



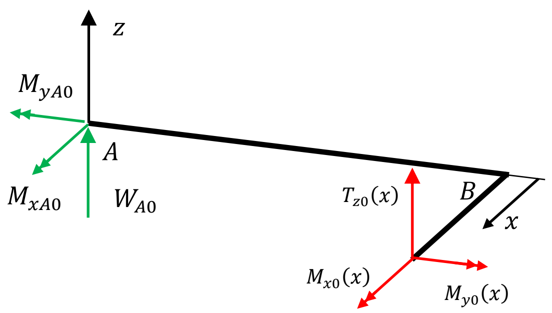
Si scrivono le equazioni cardinali della statica per il pezzetto di trave:

$$\begin{cases} \sum F_z = T_{z0}(y) + W_{A0} = 0 \\ \sum M_x = M_{x0}(y) + M_{xA0} - W_{A0}y = 0 \\ \sum M_y = M_{y0}(y) - M_{yA0} = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} T_{z0}(y) = -W_{A0} = -F_z \\ M_{x0}(y) = W_{A0}y - M_{xA0} = F_z(y - L_{AB}) \\ M_{y0}(y) = M_{yA0} = F_z L_{BC} \end{cases}$$

Si taglia l'asta in un punto qualsiasi tra B e C alla coordinata x:



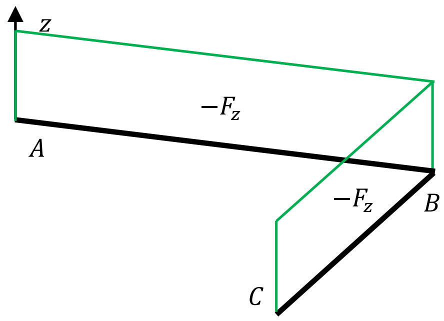
Equazioni cardinali della statica:

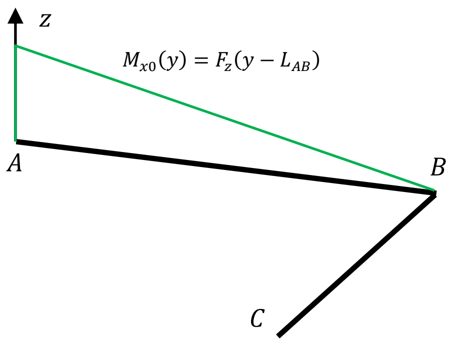
$$\begin{cases} \sum F_z = T_{z0}(x) + W_{A0} = 0 \\ \sum M_x = M_{x0}(x) + M_{xA0} - W_{A0}L_{AB} = 0 \\ \sum M_y = M_{y0}(x) - M_{yA0} + W_{A0}x = 0 \end{cases}$$

da cui:

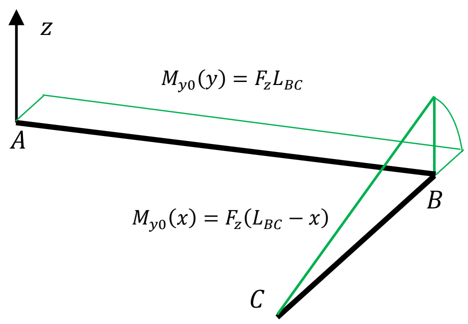
$$\begin{cases} T_{z0}(x) = -W_{A0} = -F_z \\ M_{x0}(x) = -M_{xA0} + W_{A0}L_{AB} = 0 \\ M_{y0}(x) = M_{yA0} - W_{A0}x = F_z(L_{BC} - x) \end{cases}$$

Si procede al disegno delle azioni interne della struttura degli spostamenti

<table>
<tr>
<td>


Azione di taglio T_{z0}
</td>
<td>
Tratto AB: $T_{z0}(y) = -F_z$
Tratto BC: $T_{z0}(x) = -F_z$
</td>
</tr>
<tr>
<td>


Momento flettente M_{x0}
</td>
<td>
Tratto AB: $M_{x0}(y) = F_z(y - L_{AB})$
Tratto BC: $M_{x0}(x) = 0$

Nel punto A: $M_x(y = 0) = -F_z L_{AB}$
Nel punto B: $M_x(y = L_{AB}) = 0$
Nel punto C: $M_x(x = L_{BC}) = 0$
</td>
</tr>
<tr>
<td>


Momento flettente M_{y0}
</td>
<td>
Tratto AB: $M_{y0}(y) = F_z L_{BC}$
Tratto BC: $M_{y0}(x) = F_z(L_{BC} - x)$

Nel punto A: $M_{y0}(y = 0) = F_z L_{BC}$
Nel punto B: $M_{y0}(y = L_{AB}) = F_z L_{BC}$
Nel punto C: $M_{y0}(x = L_{BC}) = 0$
</td>
</tr>
</table>

Le azioni interne della struttura delle forze si ottengono dalle azioni interne della struttura degli spostamenti dividendole per il carico applicato F_z^C.

Le azioni normali sono dovunque nulle N, per cui il modulo dell'abbassamento del punto C vale:

$$w_c = \int_0^{L_{AB}} \frac{M_{x1}\, M_{x0}}{EI_{xx}} dy + \int_0^{L_{AB}} \frac{M_{y1}\, M_{y0}}{GI_p} dy + \int_0^{L_{AB}} \frac{\chi\, T_{z1}\, T_{z0}}{GA} dy + \int_0^{L_{BC}} \frac{M_{y1}\, M_{y0}}{EI_{yy}} dx + \int_0^{L_{BC}} \frac{\chi\, T_{z1}\, T_{z0}}{GA} dx$$

Calcoliamo i singoli contributi:

$$\int_0^{L_{AB}} \frac{M_{x1}\, M_{x0}}{EI_{xx}} dy = \int_0^{L_{AB}} \frac{F_z(y - L_{AB})^2}{EI_{xx}} dy = \frac{F_z L_{AB}^3}{3EI_{xx}}$$

$$\int_0^{L_{AB}} \frac{M_{y1}\, M_{y0}}{GI_p} dy = \int_0^{L_{AB}} \frac{F_z L_{BC}^2}{GI_p} dy = \frac{F_z L_{BC}^2}{GI_p} L_{AB}$$

$$\int_0^{L_{AB}} \frac{\chi\, T_{z1}\, T_{z0}}{GA} dy = \int_0^{L_{AB}} \frac{\chi\,(-1)\,(-F_z)}{GA} dy = \frac{\chi F_z}{GA} L_{AB}$$

$$\int_0^{L_{BC}} \frac{M_{y1}\, M_{y0}}{EI_{yy}} dx = \int_0^{L_{BC}} \frac{F_z(L_{BC} - x)^2}{EI_{yy}} dx = \frac{F_z L_{BC}^3}{3EI_{yy}}$$

$$\int_0^{L_{BC}} \frac{\chi\, T_{z1}\, T_{z0}}{GA} dx = \int_0^{L_{BC}} \frac{\chi\,(-1)\,(-F_z)}{GA} dx = \frac{\chi F_z}{GA} L_{BC}$$

da cui:

$$w_c = \left(\frac{L_{AB}^3}{3EI_{xx}} + \frac{L_{AB} L_{BC}^2}{GI_p} + \frac{L_{BC}^3}{3EI_{yy}} + \frac{\chi}{GA} L_{AB} + \frac{\chi}{GA} L_{BC} \right) F_z$$

Poiché si è ipotizzata una sezione circolare di raggio R, si ottiene:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{I_P}{2}$$

Trascurando l'azione del taglio e ricordando che $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ si ottiene:

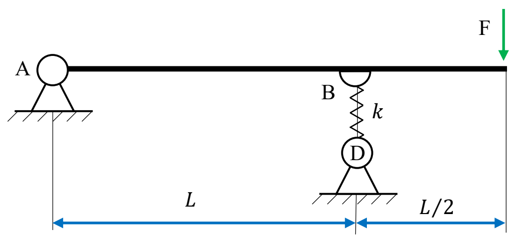
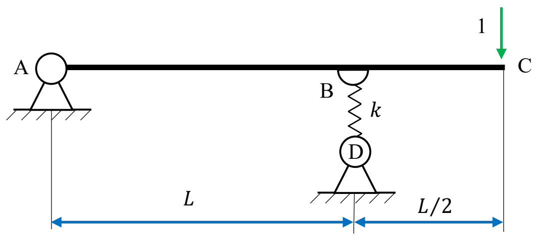
$$w_c = (L_{AB}^3 + L_{AB} L_{BC}^2 (1 + \nu) + L_{BC}^3) \frac{F_z}{3EI_{xx}}$$

Il contributo del momento torcente è quindi rilevante e dipende dalla lunghezza delle travi. Se $L_{AB} = L_{CB}$, posto $\nu = 0.3$ si ottiene:

$$w_c = (3 + \nu) \frac{F_z L_{AB}^3}{3EI_{xx}} \cong 1.1 \frac{F_z L_{AB}^3}{EI_{xx}}$$

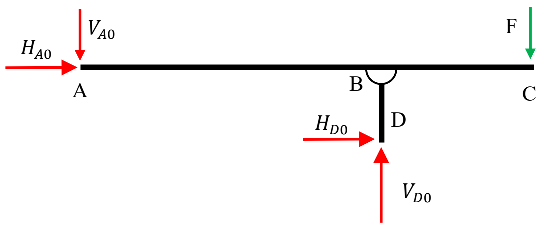
Esercizio N.3

Calcolare lo spostamento verticale del punto C appartenente alla struttura isostatica rappresentata in figura appoggiata nel punto B su una molla di caratteristica k.

Sistema degli spostamenti	Sistema delle forze
	

Poiché si chiede l'abbassamento del punto C dove è applicata la forza verticale F che agisce sulla strutture reale, la struttura delle forze è identica a quella degli spostamenti: le reazioni vincolari e le azioni interne saranno identiche, a parte il valore della forza applicata che dovrà essere unitaria.

Reazioni vincolari.



Per l'equilibrio alla rotazione dell'asta BD intorno al nodo B: $H_{D0} = 0.$

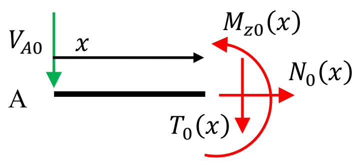
Di conseguenza: $H_{A0} = 0.$

$$\sum M = F\frac{3}{2}L - V_{D0}L = 0$$

$$\sum F_y = V_{A0} - V_{D0} + F = 0$$

da cui: $V_{D0} = \frac{3}{2}F$; $V_{A0} = \frac{F}{2}$

Azioni interne

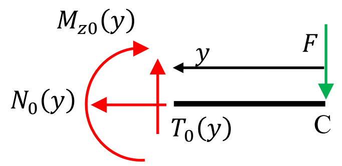


Quando $0 \leq x \leq L$

$$N_0(x) = 0$$

$$T_{y0}(x) = -\frac{F}{2}$$

$$M_{z0}(x) = -\frac{F}{2}x$$

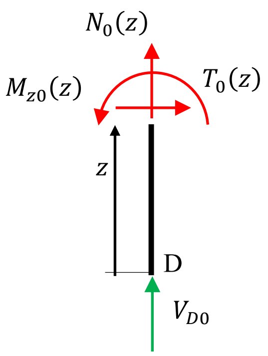


Quando $0 \leq y \leq L/2$

$$N_0(y) = 0$$

$$T_{y0}(y) = F$$

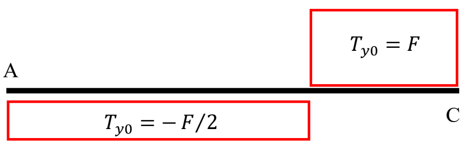
$$M_{z0}(y) = -Fy$$

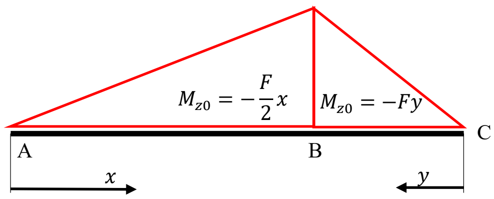


Lungo la molla DB l'unica azione interna è di compressione:

$$N_0(z) = -\frac{3}{2}F$$

Riassumendo le azioni interne valgono:





Quando $0 \leq x \leq L$ $\quad T_{y0}(x) = -\frac{F}{2}$; $\quad M_{z0}(x) = -\frac{F}{2}x$

Quando $0 \leq y \leq L/2$ $\quad T_{y0}(xy) = F$; $\quad M_{z0}(y) = -Fy$

Lungo la molla: $\quad N_0(z) = -\frac{3}{2}F$

Applicando il Principio dei Lavori Virtuali si ottiene:

$$v_c = \int \frac{N_0 N_1}{EA} dx + \int \frac{\chi T_{y0} T_{y1}}{GA} dx + \int \frac{M_{z0} M_{z1}}{EI_{zz}} dx$$

dove gli integrali si estendono a tutta la struttura.

La rigidezza di una trave alle azioni normali vale:

$$k_N = \frac{EA}{L}$$

In questo caso è nota la caratteristica della molla k:

$$ku = F$$

Se la molla fosse sostituita da una trave di rigidezza assiale k_N il lavoro delle azioni interne varrebbe:

$$\mathcal{L}_{int}(DB) = \int \frac{N_0(z)N_1(z)}{EA}dz = \int_D^B \frac{\left(-\frac{3}{2}F\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{EA}dz = \frac{9}{4}\frac{L_{DB}}{EA}F$$

Ma la caratteristica della molla vale esattamente:

$$k = \frac{EA}{L_{DB}}$$

Di conseguenza l'energia elastica accumulata nella molla vale:

$$\mathcal{L}_{int}(DB) = \frac{9}{4}\frac{F}{k}$$

In conclusione:

$$v_c = \frac{9}{4}\frac{F}{k} + \int_0^L \frac{\left(-\frac{F}{2}x\right)\left(-\frac{1}{2}x\right)}{EI_{zz}}dx + \int_0^L \frac{\chi\left(-\frac{F}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{GA}dx + \int_0^{L/2} \frac{(-Fx)(-x)}{EI_{zz}}dx + \int_0^{L/2} \frac{\chi(-F)(-1)}{GA}dx$$

Sviluppando gli integrali:

$$v_c = \frac{9}{4}\frac{F}{k} + \frac{F}{4EI_{zz}}\int_0^L x^2dx + \frac{\chi F}{4GA}\int_0^L dx + \frac{F}{EI_{zz}}\int_0^{L/2} x^2dx + \frac{\chi F}{GA}\int_0^{L/2} dx$$

$$v_c = \frac{9}{4}\frac{F}{k} + \frac{FL^3}{12EI_{zz}} + \frac{\chi FL}{4GA} + \frac{FL^3}{24EI_{zz}} + \frac{\chi FL}{2GA}$$

$$v_c = \frac{9}{4}\frac{F}{k} + \frac{FL^3}{8EI_{zz}} + \frac{3\chi FL}{4GA}$$

Se in B ci fosse un appoggio fisso invece della molla, la rigidezza k sarebbe infinita e quindi l'equazione si ridurrebbe alla seguente espressione:

$$v_c = \frac{FL^3}{8EI_{zz}} + \frac{3\chi FL}{4GA}$$