



<https://unica.adobeconnect.com/pm7fbi2mkiry/>
IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Il Principio dei Lavori Virtuali afferma quanto segue:

“Condizione necessaria e sufficiente perché una struttura permanga nel suo stato di equilibrio è che per ogni spostamento virtuale compatibile con i vincoli, il lavoro delle forze esterne sia uguale a quello delle forze interne”.

Esaminiamo nel dettaglio quanto affermato:

- 1) ... perché una struttura permanga nel suo stato di equilibrio ...: significa che si parte dall'ipotesi che la struttura sia sottoposta ad un sistema di forze equilibrate: la successiva perturbazione infinitesima si aggiunge ad un sistema equilibrato;
- 2) ... *per ogni spostamento* ... : ciò significa che lo spostamento non è provocato dalle forze applicate sulla struttura, ma si tratta di uno spostamento qualsiasi;
- 3) “... *che per ogni spostamento virtuale* ...”: ciò significa che lo spostamento deve essere molto piccolo, a rigore infinitesimo;
- 4) “... *che per ogni spostamento virtuale compatibile con i vincoli* ...”: quindi lo spostamento virtuale non può essere qualsiasi, ma deve essere permesso dai vincoli, sia esterni (incastri, cerniere, pattini, carrelli) che interni: in altri termini, la deformata virtuale deve essere una funzione continua;
- 5) Il Principio afferma che se sono rispettate queste condizioni, il lavoro delle forze interne deve essere uguale al lavoro delle forze esterne: si tratta di una condizione necessaria e sufficiente.

Indichiamo con \mathcal{L}_{int} il lavoro delle forze interne:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_{vol} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dvol$$

E' stata richiamata più volte l'espressione della **densità dell'energia elastica**:

$$\Psi = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\}$$



nella quale $\{\varepsilon\}$ rappresenta il vettore delle deformazioni provocate dal vettore degli sforzi $\{\sigma\}$. Applicando lentamente il carico, $\{\sigma\}$ ed $\{\varepsilon\}$ crescono insieme, da zero al valore finale: per questo motivo nell'espressione della **densità dell'energia elastica** compare il coefficiente 0.5.

Ma quando si applica il Principio dei lavori virtuali, la deformazione virtuale $\{\varepsilon\}$ è indipendente dagli sforzi $\{\sigma\}$: l'unica necessità è che sia infinitesima e compatibile con i vincoli.

Integrando la **densità dell'energia elastica** su tutta la struttura otteniamo l'energia elastica accumulata nel volume pari al lavoro delle forze interne:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_{vol} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dvol$$

Indichiamo con \mathcal{L}_{ext} il lavoro delle forze esterne:

$$\mathcal{L}_{ext} = \int_{sup} \{\Phi\}^T \{s\} dS + \int_{vol} \{F_v\}^T \{s\} dvol + \sum_{i=1}^n F(i)s(i)$$

Il primo integrale è il lavoro fatto dalle **forze superficiali** $\{\Phi\}$ grazie allo **spostamento virtuale** $\{s\}$ compatibile con i vincoli. dS indica la superficie infinitesima su cui agisce $\{\Phi\}$: il prodotto $\{\Phi\}^T dS$ è il vettore delle forze: il suo prodotto per lo spostamento $\{s\}$ fornisce il lavoro virtuale, da integrare su tutte le superfici su cui sono applicate le forze superficiali.

Il secondo integrale è il lavoro fatto dalle **forze di volume** $\{F_v\}$ grazie allo spostamento virtuale $\{s\}$ compatibile con i vincoli. $dvol$ indica il volume infinitesimo su cui agisce $\{F_v\}$: il prodotto $\{F_v\}^T dvol$ non è altro che il vettore delle forze: il suo prodotto per lo spostamento $\{s\}$ fornisce il lavoro virtuale, da integrare su tutto il volume dove sono applicate le forze di volume.

Il terzo termine, **la sommatoria**, si riferisce alle forze generalizzate (forze e coppie) concentrate, che producono lavoro grazie agli spostamenti generalizzati (spostamenti e rotazioni) dei loro punti di applicazione.

In tutti i casi non compare mai il coefficiente 0.5 perché si tratta di **lavori indiretti**: **forze e spostamenti sono indipendenti**.



“Condizione necessaria e sufficiente perché una struttura permanga nel suo stato di equilibrio è che per ogni spostamento virtuale compatibile con i vincoli, il lavoro delle forze esterne sia uguale a quello delle forze interne”.

$$\mathcal{L}_{ext} = \mathcal{L}_{int}$$

APPLICAZIONE DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Calcolo dello spostamento di un punto appartenente ad una struttura isostatica.

Partiamo dall'espressione della **densità dell'energia elastica**:

$$\Psi = \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}$$

Limitaremo l'analisi al caso in cui siano presenti solo gli sforzi σ_x e τ_{xy} e le corrispondenti deformazioni virtuali ε_x e γ_{xy} :

$$\Psi = \sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

Se dovesse agire anche la **torsione**, bisognerà considerare anche τ_{xt} e γ_{xt} , sforzi e deformazioni che agiscono su una superficie la cui normale è parallela all'asse x della trave ed orientati in direzione t giacente sul piano della sezione trasversale.

Poiché sforzi e deformazioni virtuali sono indipendenti, per la soluzione del problema si utilizzano due strutture:

- 1) quella **reale** sarà caricata dalle forze realmente applicate. La sua analisi statica condurrà al calcolo delle azioni interne N_0 , M_{z0} , T_{y0} e M_{x0} a partire dalle quali sarà possibile determinare le deformazioni virtuali $\{\varepsilon\}$;
- 2) quella **fittizia** sarà caricata da una forza unitaria applicata nel punto di cui si desidera misurare lo spostamento; tale forza deve essere parallela alla componente dello spostamento che si intende misurare. Se l'obiettivo è la misura della rotazione subita dal punto, su di esso bisognerà applicare una coppia. L'analisi della struttura fittizia condurrà al calcolo delle azioni interne N_1 , M_{z1} , T_{y1} e M_{x1} a partire dalle quali sarà possibile determinare gli sforzi $\{\sigma\}$.



Il **lavoro delle forze esterne** sarà pari all'unica forza generalizzata applicata sulla struttura fittizia per lo spostamento generalizzato del suo punto di applicazione preso dalla struttura reale:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{est} &= 1 \cdot s && \text{se la struttura fittizia è caricata da una forza} \\ \mathcal{L}_{est} &= 1 \cdot \vartheta && \text{se la struttura fittizia è caricata da una coppia}\end{aligned}$$

Per il calcolo del **lavoro delle forze interne** è necessaria la somma dei quattro contributi delle azioni interne.

L'**azione normale** $N_1(x)$ che agisce sul sistema delle forze dà luogo agli sforzi:

$$\sigma_{x1}(x) = \frac{N_1(x)}{A(x)}$$

L'azione normale $N_0(x)$ che agisce sulla struttura reale dà luogo alle deformazioni:

$$\varepsilon_{x0}(x) = \frac{N_0(x)}{E(x) A(x)}$$

La densità di energia elastica vale:

$$\Psi_N(x) = \sigma_{x1}(x) \varepsilon_{x0}(x) = \frac{N_1(x) N_0(x)}{E(x) A^2(x)}$$

L'energia elastica accumulata in una trave lunga L vale:

$$\mathcal{L}_N = \int_{vol} \Psi_N(x) dvol = \int_L \Psi_N(x) A(x) dx = \int_L \frac{N_1(x) N_0(x)}{E(x) A(x)} dx$$

Il **momento flettente** $M_{z1}(x)$ che agisce sul sistema delle forze dà luogo agli sforzi:

$$\sigma_{x1}(x, y) = \frac{M_{z1}(x) y}{I_{zz}(x)}$$

Il momento flettente $M_{z0}(x)$ che agisce sulla struttura reale dà luogo alle deformazioni:

$$\varepsilon_{x0}(x, y) = \frac{M_{z0}(x) y}{E(x) I_{zz}(x)}$$

La densità di energia interna vale:



$$\Psi_M(x, y) = \sigma_{x1}(x, y) \varepsilon_{x0}(x, y) = \frac{M_{z1} M_{z0}(x) y^2}{E(x) I_{zz}^2(x)}$$

L'energia elastica accumulata in una trave lunga L vale:

$$\mathcal{L}_M = \int_{vol} \Psi_M(x, y) dvol = \int_{vol} \Psi_M(x, y) dA dx = \int_L \frac{M_{z1} M_{z0}(x)}{E(x) I_{zz}^2(x)} dx$$

L'azione di taglio $T_{y1}(x)$ che agisce sul sistema delle forze dà luogo agli sforzi:

$$\tau_{xy1}(x) = \frac{T_{y1}(x)}{A(x)}$$

L'azione di taglio $T_{y0}(x)$ che agisce sulla struttura reale dà luogo agli scorrimenti:

$$\gamma_{xy0}(x) = \frac{\chi T_{y0}(x)}{G(x) A(x)}$$

La densità di energia interna vale:

$$\Psi_T(x) = \tau_{xy1}(x) \gamma_{xy0}(x) = \frac{\chi T_{y1}(x) T_{y0}(x)}{G(x) A^2(x)}$$

L'energia elastica accumulata in una trave lunga L vale:

$$\mathcal{L}_T = \int_{vol} \Psi_T(x) dvol = \int_L \Psi_T(x) A(x) dx = \int_L \frac{\chi T_{y1}(x) T_{y0}(x)}{G(x) A(x)} dx$$

L'azione torcente $M_{x1}(x)$ che agisce sul sistema delle forze dà luogo agli sforzi:

$$\tau_{xt1}(x, r) = \frac{M_{x1}(x)r}{I_p(x)}$$

L'azione torcente $M_{x0}(x)$ che agisce sulla struttura reale dà luogo agli scorrimenti:

$$\gamma_{xt0}(x, r) = \frac{M_{x0}(x) r}{G(x) I_p(x)}$$

La densità di energia interna vale:

$$\Psi_{M_x}(x, r) = \tau_{xt1}(x, r) \gamma_{xt0}(x, r) = \frac{M_{x1}(x) M_{x0}(x) r^2}{G(x) I_p^2(x)}$$



L'energia elastica accumulata in una trave lunga L vale:

$$\mathcal{L}_{M_x} = \int_{vol} \Psi_{M_x}(x, r) dvol = \int_{vol} \Psi_{M_x}(x, r) dA dx = \int_L \frac{M_{x1}(x) M_{x0}(x)}{G(x) I_p(x)} dx$$

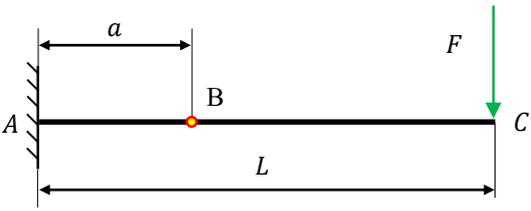
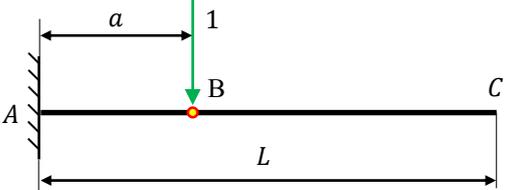
Riassumendo, il lavoro delle forze interne vale:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_L \frac{N_1 N_0}{E A} dx + \int_L \frac{M_{z1} M_{z0}}{E I_{zz}} dx + \int_L \frac{\chi T_{y1} T_{y0}}{G A} dx + \int_L \frac{M_{x1} M_{x0}}{G I_p} dx$$

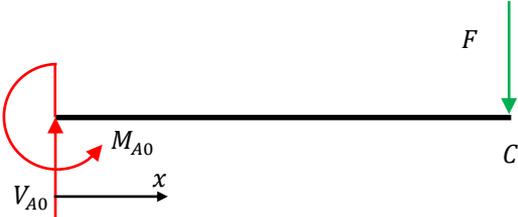
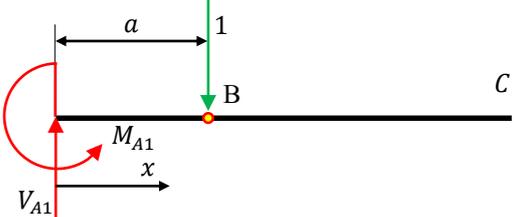
Per brevità, in questa formula non compare tra parentesi la coordinata x che indica la posizione lungo l'asse della trave.



ESEMPIO N.1

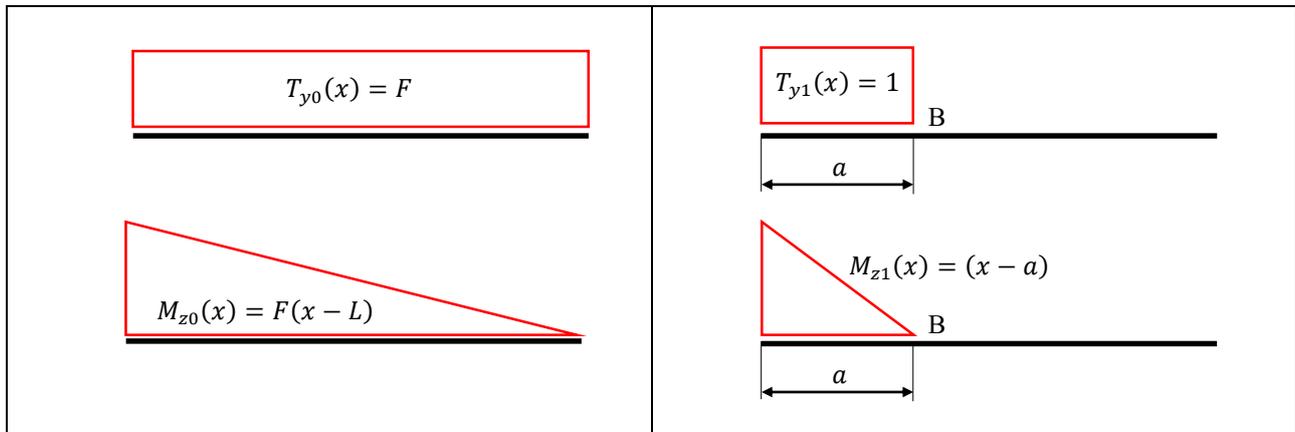
	<p>Calcolare l'abbassamento del punto B posto a distanza a dall'incastro utilizzando il Principio dei lavori Virtuali.</p>
<p>In questo caso la struttura fittizia è quella indicata qui a lato, caricata nel punto B da una forza unitaria diretta verso il basso.</p>	

Disponiamo l'origine del sistema di riferimento nel punto A con l'asse x diretto verso destra e calcoliamo le azioni interne nelle due strutture.

Sistema degli spostamenti	Sistema delle forze
	
<p>Le reazioni vincolari valgono:</p>	<p>Le reazioni vincolari valgono:</p>
$V_{A0} = F \quad ; \quad M_{A0} = FL$	$V_{A1} = 1 \quad ; \quad M_{A1} = a$
<p>L'azione di taglio vale:</p>	<p>L'azione di taglio vale:</p>
$T_{y0}(x) = V_{A0} = F$	<p>1) per $0 \leq x \leq a$</p>
<p>Il momento flettente vale:</p>	$T_{y1}(x) = V_{A1} = 1$
$M_{z0}(x) = V_{A0}x - M_{A0} = F(x - L)$	<p>2) per $a \leq x \leq L$</p>
	$T_{y1}(x) = 0$
	<p>Il momento flettente vale:</p>
	<p>1) per $0 \leq x \leq a$</p>
	$M_{z1}(x) = V_{A1}x - M_{A1} = (x - a)$
	<p>2) per $a \leq x \leq L$</p>
	$M_{z1}(x) = 0$



I diagrammi del taglio e del momento flettente sono i seguenti:



Il lavoro delle forze esterne vale:

$$\mathcal{L}_{est} = 1 \cdot v_B$$

dove l'1 è la forza applicata nel punto B del sistema delle forze e v_B è lo spostamento del punto B appartenente alla struttura reale.

Il lavoro delle forze interne vale:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_L \frac{M_{z1}(x) M_{z0}(x)}{E I_{zz}} dx + \int_L \frac{\chi T_{y1}(x) T_{y0}(x)}{G A} dx$$

Ipotizzando che i termini E , G , I_{zz} e A non dipendano dalla coordinata x , si può scrivere:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{E I_{zz}} \int_0^a F(x - a)(x - L) dx + \frac{\chi}{G A} \int_0^a F dx$$

Per il Principio dei Lavori Virtuali perché la struttura permanga nel suo stato di equilibrio è necessario che:

$$\mathcal{L}_{est} = 1 \cdot v_B = \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{E I_{zz}} \int_0^a F(x - a)(x - L) dx + \frac{\chi}{G A} \int_0^a F dx$$

Sviluppando i due integrali si ottiene:

$$v_B(x = a) = \frac{F a^2}{6 E I_{zz}} (3L - a) + \frac{\chi F a}{G A}$$

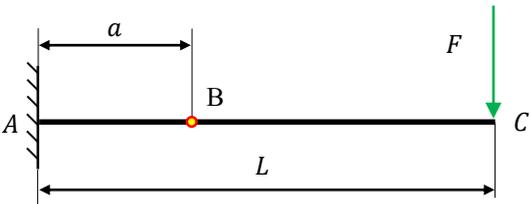
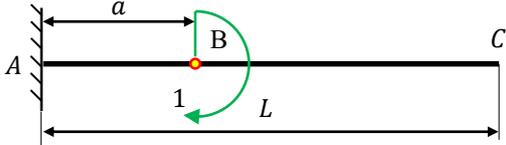


Quando $a = L$, ovvero quando si chiede l'abbassamento del punto C nell'estremità destra della trave dove è applicata la forza F , si ottiene:

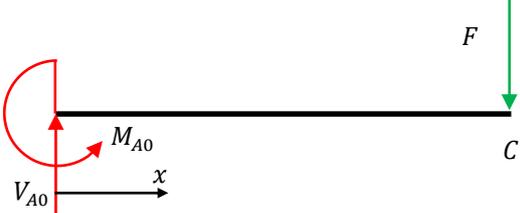
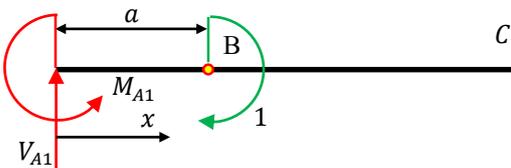
$$v_B(x = L) = \frac{FL^3}{3E I_{zz}} + \frac{\chi FL}{G A}$$



ESEMPIO N.2

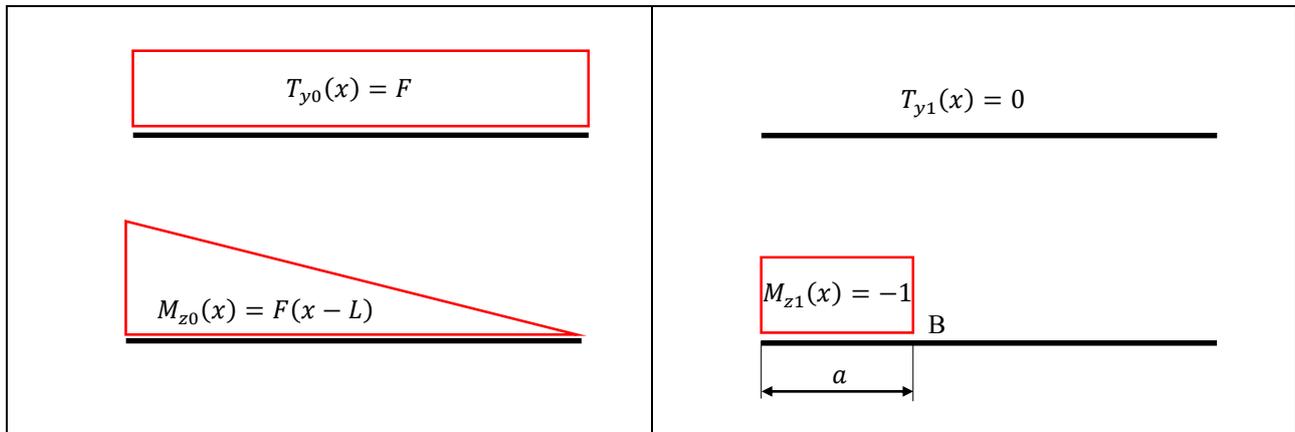
	<p>Calcolare la rotazione del punto B posto a distanza a dall'incastro utilizzando il Principio dei lavori Virtuali.</p>
<p>In questo caso la struttura fittizia è quella indicata qui a lato, caricata nel punto B da una coppia unitaria oraria.</p>	

Disponiamo l'origine del sistema di riferimento nel punto A con l'asse x diretto verso destra e calcoliamo le azioni interne nelle due strutture.

Sistema degli spostamenti	Sistema delle forze
	
<p>Le reazioni vincolari valgono:</p>	<p>Le reazioni vincolari valgono:</p>
$V_{A0} = F \quad ; \quad M_{A0} = FL$	$V_{A1} = 0 \quad ; \quad M_{A1} = 1$
<p>L'<u>azione di taglio</u> vale:</p>	<p>L'<u>azione di taglio</u> vale:</p>
$T_{y0}(x) = V_{A0} = F$	$T_{y1}(x) = 0$
<p>Il <u>momento flettente</u> vale:</p>	<p>Il <u>momento flettente</u> vale:</p>
$M_{z0}(x) = V_{A0}x - M_{A0} = F(x - L)$	<p>1) per $0 \leq x \leq a$</p> $M_{z1}(x) = -1$
	<p>2) per $a \leq x \leq L$</p> $M_{z1}(x) = 0$



I diagrammi del taglio e del momento flettente sono i seguenti:



Il lavoro delle forze esterne vale:

$$\mathcal{L}_{est} = 1 \cdot \vartheta_B$$

dove l'1 è la coppia applicata nel punto B del sistema delle forze e ϑ_B è la rotazione del punto B appartenente alla struttura reale. Il lavoro delle forze interne vale:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_L \frac{M_{z1}(x) M_{z0}(x)}{E I_{zz}} dx + \int_L \frac{\chi T_{y1}(x) T_{y0}(x)}{G A} dx$$

Ipotizzando che i termini E , G , I_{zz} e A non dipendano dalla coordinata x :

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{E I_{zz}} \int_0^a (-1) F(x - L) dx$$

Per il Principio dei Lavori Virtuali perché la struttura permanga nel suo stato di equilibrio è necessario che:

$$\mathcal{L}_{est} = 1 \cdot \vartheta_B = \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{E I_{zz}} \int_0^a (-1) F(x - L) dx = \frac{-F}{E I_{zz}} \left(\frac{x^2}{2} - Lx \right)_0^a$$

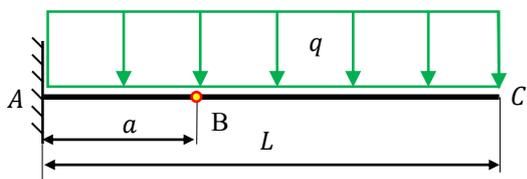
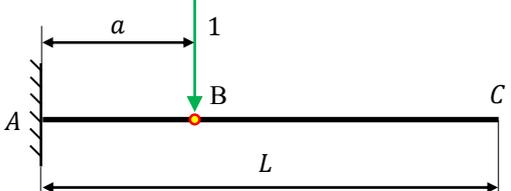
Sviluppando si ottiene:

$$\vartheta_B(x = a) = \frac{Fa}{E I_{zz}} \left(L - \frac{a}{2} \right)$$

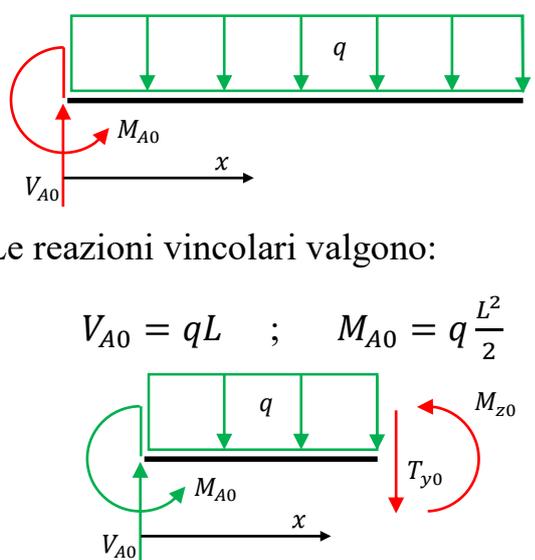
Quando $a = L$, ovvero quando si chiede la rotazione del punto C nell'estremità destra della trave dove è applicata la forza F , si ottiene:

$$\vartheta_B(x = L) = \frac{FL^2}{2EI_{zz}}$$

ESEMPIO N.3

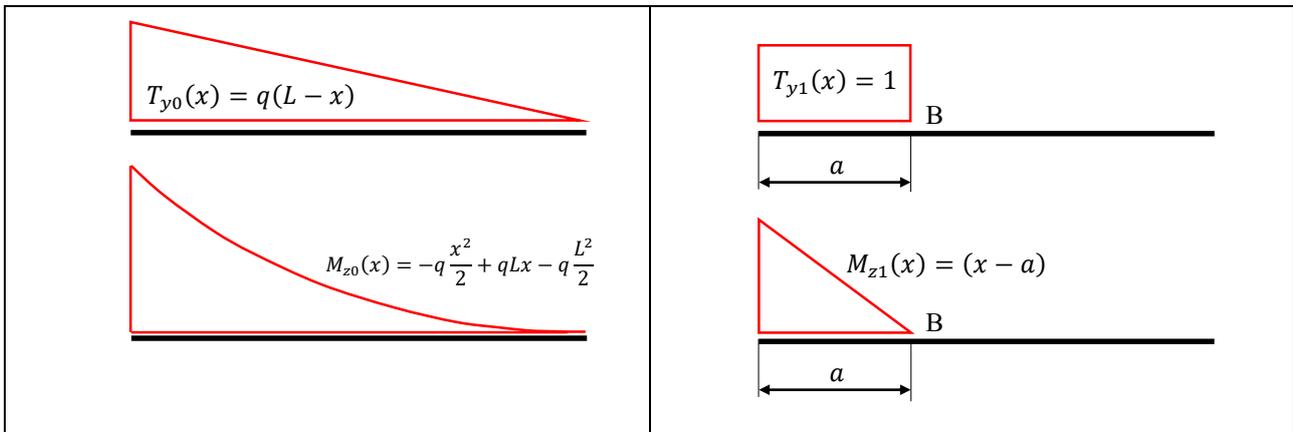
	<p>Calcolare l'abbassamento del punto B posto a distanza a dall'incastro utilizzando il Principio dei lavori Virtuali.</p>
<p>In questo caso la struttura fittizia è quella indicata qui a lato, caricata nel punto B da una forza unitaria diretta verso il basso.</p>	

Disponiamo l'origine del sistema di riferimento nel punto A con l'asse x diretto verso destra e calcoliamo le azioni interne nelle due strutture.

<p>Sistema degli spostamenti</p>  <p>Le reazioni vincolari valgono:</p> $V_{A0} = qL \quad ; \quad M_{A0} = q \frac{L^2}{2}$ <p>L'azione di taglio vale:</p> $T_{y0}(x) = V_{A0} - qx = q(L - x)$ <p>Il momento flettente vale:</p> $M_{z0}(x) = V_{A0}x - M_{A0} - q \frac{x^2}{2}$ $M_{z0}(x) = qLx - q \frac{L^2}{2} - q \frac{x^2}{2}$	<p>Sistema delle forze</p>  <p>Le reazioni vincolari valgono:</p> $V_{A1} = 1 \quad ; \quad M_{A1} = a$ <p>L'azione di taglio vale:</p> <ol style="list-style-type: none"> per $0 \leq x \leq a$ $T_{y1}(x) = V_{A1} = 1$ per $a \leq x \leq L$ $T_{y1}(x) = 0$ <p>Il momento flettente vale:</p> <ol style="list-style-type: none"> per $0 \leq x \leq a$ $M_{z1}(x) = V_{A1}x - M_{A1} = (x - a)$ per $a \leq x \leq L$ $M_{z1}(x) = 0$
--	--



I diagrammi del taglio e del momento flettente sono i seguenti:



Il lavoro delle forze esterne vale:

$$\mathcal{L}_{est} = 1 \cdot v_B$$

dove l'1 è la forza applicata nel punto B del sistema delle forze e v_B è lo spostamento del punto B appartenente alla struttura reale.

Il lavoro delle forze interne vale:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_L \frac{M_{z1}(x) M_{z0}(x)}{E I_{zz}} dx + \int_L \frac{\chi T_{y1}(x) T_{y0}(x)}{G A} dx$$

Ipotizzando il materiale omogeneo e a sezione costante, si può scrivere:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{E I_{zz}} \int_0^a \left(-q \frac{x^2}{2} + qLx - q \frac{L^2}{2} \right) (x - a) dx + \frac{\chi}{G A} \int_0^a q(L - x) dx$$

Per il Principio dei Lavori Virtuali perché la struttura permanga nel suo stato di equilibrio è necessario che:

$$1 \cdot v_B = \frac{q}{E I_{zz}} \int_0^a \left[-\frac{x^3}{2} + \left(L + \frac{a}{2} \right) x^2 - \left(\frac{L}{2} + a \right) Lx + a \frac{L^2}{2} \right] dx + \frac{\chi q}{G A} \int_0^a (L - x) dx$$

Sviluppando i due integrali si ottiene:

$$v_B = \frac{qa^2}{24E I_{zz}} [a^2 - 4La + 6L^2] + \frac{\chi qa}{G A} \left(L - \frac{a}{2} \right)$$

L'abbassamento del punto C nell'estremità destra della trave dove $a = L$, vale:

$$v_B(a = L) = \frac{qL^4}{8E I_{zz}} + \frac{\chi qL^2}{2G A}$$



Qual è il contributo percentuale r dell'azione di taglio all'abbassamento del punto C ?

$$r = \frac{\frac{\chi q L^2}{2G A}}{\frac{q L^4}{8E I_{zz}}} = \frac{\chi q L^2}{2G A} \frac{8E I_{zz}}{q L^4} = \frac{4\chi E}{G} \frac{I_{zz}/A}{L^2}$$

Ricordando che:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \quad i_z^2 = \frac{I_{zz}}{A} \quad \text{e} \quad \lambda_z = \frac{L}{i_z}$$

si può scrivere:

$$r = \frac{8\chi(1+\nu)}{\lambda_z^2}$$

Se la sezione è rettangolare $\chi = 1.2$; se il materiale è acciaio $\nu = 0.3$ da cui:

$$r \cong \frac{12.5}{\lambda_z^2}$$

λ_z	$1/r$
10	8
20	32
25	50
30	72
40	128

E' evidente che al crescere della snellezza, il contributo del taglio allo spostamento complessivo diventa trascurabile. Normalmente quando $\lambda_z > 25$ il contributo del taglio può essere trascurato.

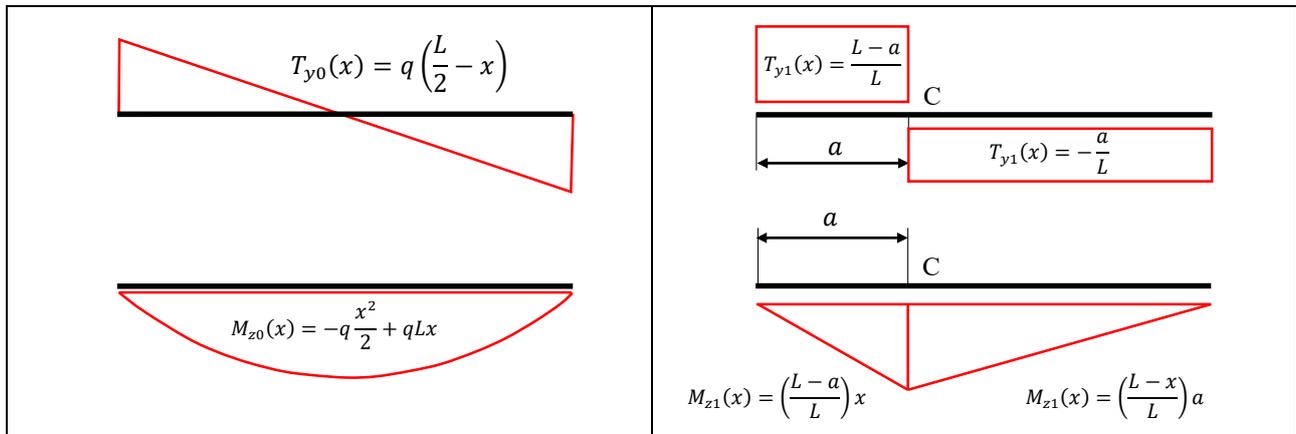
ESEMPIO N.4

	<p>Calcolare l'abbassamento del punto C posto a distanza a dall'appoggio sinistro.</p>
<p>In questo caso la struttura fittizia è quella indicata qui a lato, caricata nel punto B da una forza unitaria diretta verso il basso.</p>	

Disponiamo l'origine del sistema di riferimento nel punto A con l'asse x diretto verso destra e calcoliamo le azioni interne nelle due strutture.

<p>Sistema degli spostamenti</p> <p>Le reazioni vincolari valgono:</p> $V_{A0} = \frac{qL}{2} \quad ; \quad V_{B0} = \frac{qL}{2}$ <p>L'azione di taglio vale:</p> $T_{y0}(x) = V_{A0} - qx = q \left(\frac{L}{2} - x \right)$ <p>Il momento flettente vale:</p> $M_{z0}(x) = V_{A0}x - q \frac{x^2}{2}$ $M_{z0}(x) = \frac{qL}{2}x - q \frac{x^2}{2}$	<p>Sistema delle forze</p> <p>Le reazioni vincolari valgono:</p> $V_{A1} = \frac{L-a}{L} \quad ; \quad V_{B1} = \frac{a}{L}$ <p>L'azione di taglio vale:</p> <ol style="list-style-type: none"> per $0 \leq x \leq a$ $T_{y1}(x) = V_{A1} = \frac{L-a}{L}$ per $a \leq x \leq L$ $T_{y1}(x) = V_{A1} - 1 = -V_{B1} = -\frac{a}{L}$ <p>Il momento flettente vale:</p> <ol style="list-style-type: none"> per $0 \leq x \leq a$ $M_{z1}(x) = V_{A1}x = \left(\frac{L-a}{L} \right) x$ per $a \leq x \leq L$ $M_{z1}(x) = V_{A1}x - (x-a)$ $M_{z1}(x) = \left(\frac{L-x}{L} \right) a$
--	---

I diagrammi del taglio e del momento flettente sono i seguenti:



Il lavoro delle forze esterne vale:

$$\mathcal{L}_{est} = 1 \cdot v_C$$

dove l'1 è la forza applicata nel punto C del sistema delle forze e v_C è lo spostamento del punto C appartenente alla struttura reale.

Il lavoro delle forze interne vale:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_L \frac{M_{z1}(x) M_{z0}(x)}{E I_{zz}} dx + \int_L \frac{\chi T_{y1}(x) T_{y0}(x)}{G A} dx$$

Calcoliamo separatamente il contributo del momento flettente e del taglio; ipotizziamo inoltre che il materiale sia omogeneo e che la sezione trasversale della trave sia costante:

$$\mathcal{L}_{int}^M = \frac{1}{E I_{zz}} \int_0^a \left(\frac{qL}{2} x - q \frac{x^2}{2} \right) \left(\frac{L-a}{L} \right) x dx + \frac{1}{E I_{zz}} \int_a^L \left(\frac{qL}{2} x - q \frac{x^2}{2} \right) \left(\frac{L-x}{L} \right) a dx$$

$$\mathcal{L}_{int}^T = \frac{\chi}{G A} \int_0^a q \left(\frac{L}{2} - x \right) \left(\frac{L-a}{L} \right) dx + \frac{\chi}{G A} \int_a^L q \left(\frac{L}{2} - x \right) \left(\frac{-a}{L} \right) dx$$

Per il Principio dei Lavori Virtuali perché la struttura permanga nel suo stato di equilibrio è necessario che:

$$\mathcal{L}_{est} = 1 \cdot v_C = \mathcal{L}_{int}^M + \mathcal{L}_{int}^T = \mathcal{L}_{int}$$



Sviluppando gli integrali si ottiene:

$$\mathcal{L}_{int}^M = \frac{qa}{24L E I_{zz}} (4L^2 a^2 - 7La^3 + 3a^4)$$

$$\mathcal{L}_{int}^M = \frac{qa}{24LE I_{zz}} (L^4 - 6L^2 a^2 + 8La^3 - 3a^4)$$

$$\mathcal{L}_{int}^T = \frac{\chi q(L-a)a}{2 G A}$$

da cui:

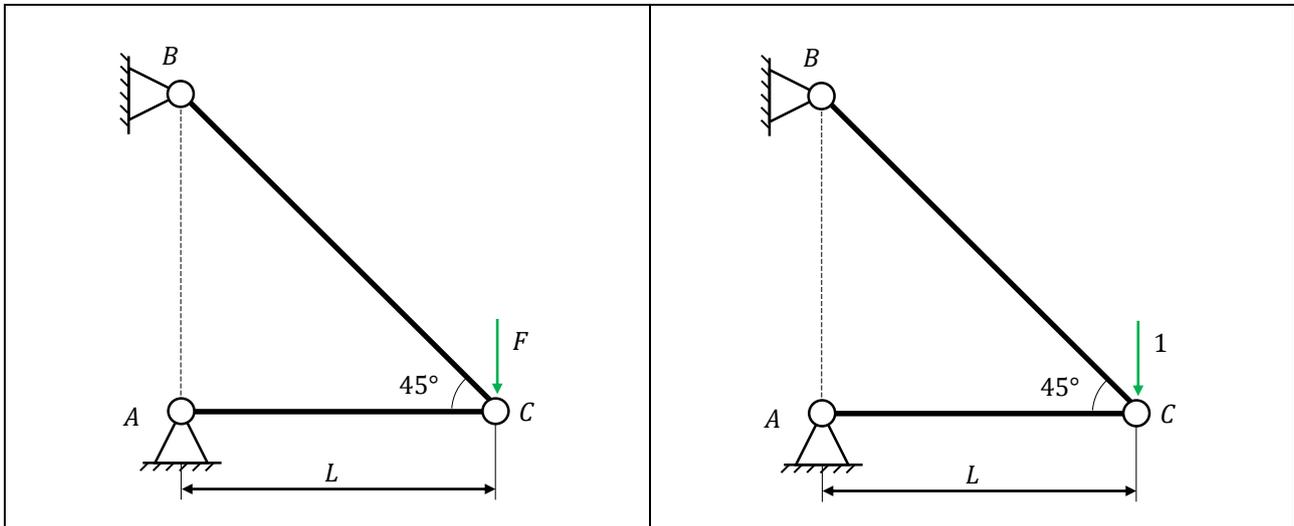
$$v_c = \frac{qa}{24 E I_{zz}} (L^3 - 2La^2 + a^3) + \frac{\chi q(L-a)a}{2 G A}$$

L'abbassamento massimo si ha in mezzeria dove $a = \frac{L}{2}$, e vale:

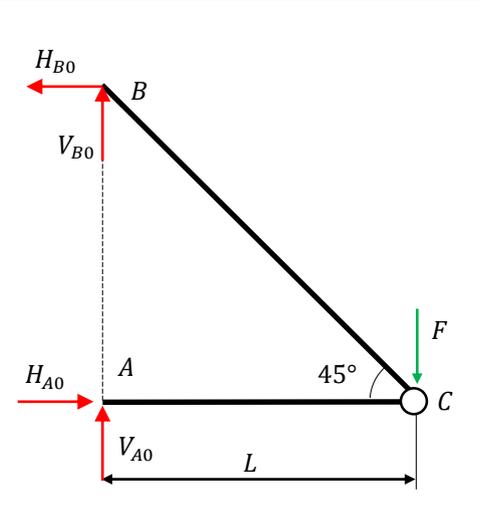
$$v_c \left(a = \frac{L}{2} \right) = \frac{5qL^4}{384 EI_{zz}} + \frac{\chi qL^2}{8 GA}$$

ESEMPIO N.5

Calcolare l'**abbassamento** del punto C della seguente struttura reticolare. In questo caso la struttura fittizia è caricata come la struttura reale, ma da una forza unitaria.



Le azioni interne che agiscono sulle aste sono solo le azioni normali, in quanto la struttura è formata da due bielle scariche.

	<p>1) Equazione di equilibrio alla rotazione dell'asta AC intorno al nodo C:</p> $V_{A0}L = 0$ <p>2) Equazione di equilibrio delle forze verticali su tutta la struttura:</p> $\sum_{tutto} F_y = V_{B0} - F = 0$
---	---

3) Equazione di equilibrio alla rotazione dell'asta BC intorno al nodo C:

$$\sum_c M_z = H_{B0}L - V_{B0}L = 0$$

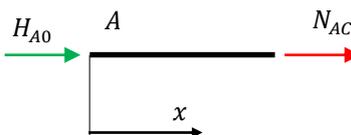
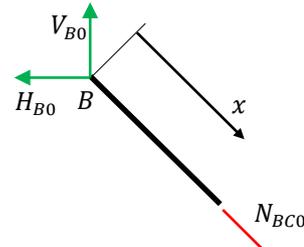
4) Equazione di equilibrio delle forze orizzontali su tutta la struttura:



$$\sum_{tutto} F_x = H_{A0} - H_{B0} = 0$$

In conclusione: $V_{A0} = 0$, $V_{B0} = H_{A0} = H_{B0} = F$.

Le azioni interne sono:

 <p style="text-align: center;">$N_{AC0} + H_{A0} = 0$</p> <p>da cui:</p> <p style="text-align: center;">$N_{AC0} = -H_{A0} = -F$</p>	 <p style="text-align: center;">$N_{BC0} - H_{B0} \cos(45^\circ) - V_{B0} \cos(45^\circ) = 0$</p> <p>da cui:</p> <p style="text-align: center;">$N_{BC0} = H_{B0} \frac{\sqrt{2}}{2} + V_{B0} \frac{\sqrt{2}}{2} = F\sqrt{2}$</p>
--	---

La struttura fittizia è caricata nello stesso modo, ma da una forza unitaria; di conseguenza le azioni interne valgono:

$$N_{AC1} = -1 ; \quad N_{BC1} = \sqrt{2}$$

Il lavoro delle forze esterne vale:

$$\mathcal{L}_{est} = 1 \cdot v_C$$

dove l'1 è la forza applicata nel punto C del sistema delle forze e v_C è lo spostamento del punto C appartenente alla struttura reale.

Il lavoro delle forze interne vale:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_A^C \frac{N_{z1}(x) N_{z0}(x)}{E_{AC} A_{AC}} dx + \int_B^C \frac{N_{z1}(x) N_{z0}(x)}{E_{BC} A_{BC}} dx$$

Ipotizzando che le due travi siano realizzate con lo stesso materiale con modulo di Young pari a E e che le due travi abbiano la stessa sezione trasversale di area A , sostituendo le equazioni delle azioni interne si ottiene:

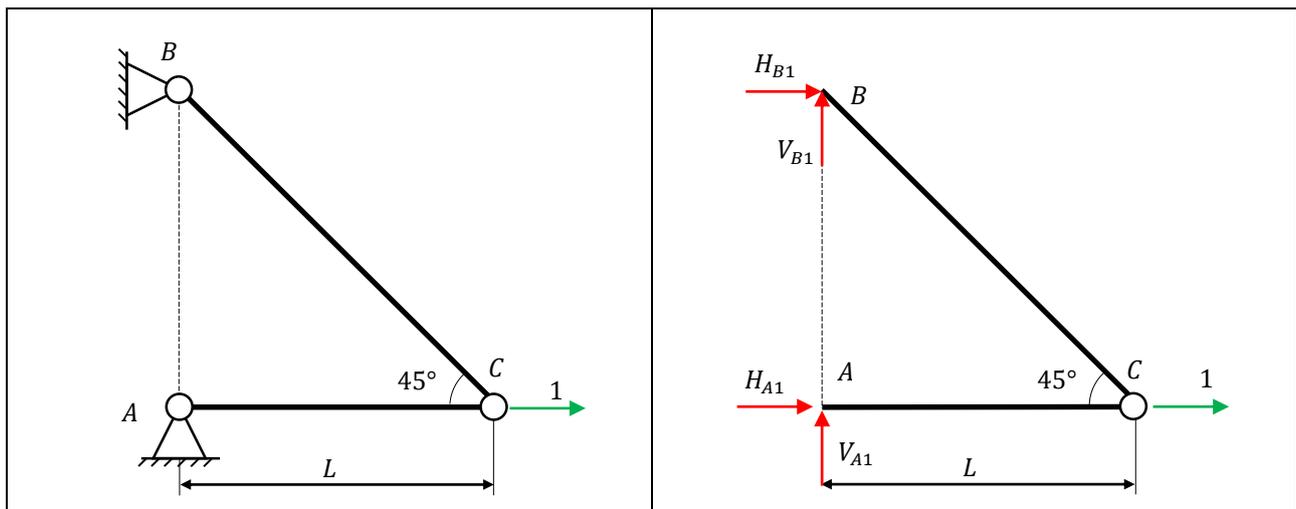
$$\mathcal{L}_{int} = \int_A^C \frac{(-1)(-F)}{EA} dx + \int_B^C \frac{(\sqrt{2})(\sqrt{2}F)}{EA} dx = \frac{FL_{AC}}{EA} + \frac{2FL_{BC}}{EA} = \frac{FL}{EA} (1 + 2\sqrt{2})$$

Di conseguenza lo spostamento verticale vale:

$$v_C = \frac{FL}{EA} (1 + 2\sqrt{2})$$

Per il calcolo dello **spostamento orizzontale** del punto C , è necessario caricare la struttura fittizia (o delle forze) con una forza unitaria orizzontale applicata nel nodo C .

Sostituendo le cerniere a terra con le reazioni vincolari incognite si ottiene:



Equazioni cardinali della statica:

- 1) Equazione di equilibrio alla rotazione dell'asta AC intorno al nodo C:

$$V_{A1}L = 0$$

- 2) Equazione di equilibrio delle forze verticali che agiscono su tutta la struttura:

$$\sum_{tutto} F_y = V_{B1} = 0$$

- 3) Equazione di equilibrio alla rotazione dell'asta BC intorno al nodo C:



$$\sum_c M_z = H_{B1}L = 0$$

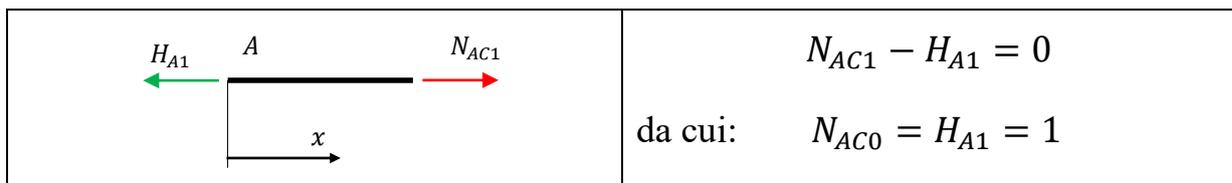
4) Equazione di equilibrio delle forze orizzontali su tutta la struttura:

$$\sum_{tutto} F_x = H_{A1} + 1 = 0$$

In conclusione: $V_{A1} = V_{B1} = H_{B1} = 0$, $H_{A1} = -1$.

Si cambia verso e segno alla reazione vincolare.

L'asta BC è scarica; l'azione normale che agisce sull'asta AC vale:



Il lavoro delle forze esterne vale:

$$\mathcal{L}_{est} = 1 \cdot u_C$$

dove l'1 è la forza applicata nel punto C del sistema delle forze e u_C è lo spostamento orizzontale del punto C appartenente alla struttura reale.

Il lavoro delle forze interne vale:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_A^C \frac{N_{z1}(x) N_{z0}(x)}{E_{AC} A_{AC}} dx$$

Sostituendo le equazioni delle azioni interne si ottiene:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_A^C \frac{(1)(-F)}{E A} dx = -\frac{FL}{E A}$$

Di conseguenza lo spostamento orizzontale vale:

$$v_C = -\frac{FL}{E A}$$

ed è diretto verso sinistra. Infatti lavoro negativo indica che lo spostamento ha segno contrario alla forza applicata nel sistema fittizio, in questo caso verso destra.