https://unica.adobeconnect.com/p6c7v47v7rcl/

METODI ENERGETICI

La **densità di energia elastica** si calcola con la formula seguente:

$$\Psi = \frac{1}{2}[\sigma][\varepsilon]$$

dove $[\sigma]$ indica il tensore degli sforzi e $[\varepsilon]$ il tensore delle deformazioni. Talvolta si preferisce raccogliere le componenti dei due tensori in altrettanti vettori:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

In tal caso la **densità di energia elastica** si calcola attraverso il prodotto scalare dei due vettori:

$$\Psi = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\} = \frac{1}{2}\left[\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right]$$

Gli sforzi e le deformazioni si possono calcolare con le formule viste precedentemente:

a) Trazione/compressione semplice: $\sigma_x = \frac{N}{A}$; $\varepsilon_x = \frac{N}{EA}$

b) Flessione semplice: $\sigma_x = \frac{M_z\, y}{I_{zz}}$; $\varepsilon_x = \frac{M_z\, y}{EI_{zz}}$

c) Taglio: $\tau_{xy} = \frac{T_y\, S_z}{b\, I_{zz}}$; $\gamma_{xy} = \frac{T_y\, S_z}{G\, b\, I_{zz}}$

d) Torsione nelle sezioni circolari: $\tau_{xt} = \frac{M_x r}{I_p}$; $\gamma_{xt} = \frac{M_x r}{GI_p}$

Il contributo delle diverse componenti dello sforzo valgono:

$$\Psi_N = \frac{1}{2}\frac{N^2}{E\,A^2} \quad ; \quad \Psi_M = \frac{1}{2}\frac{M_z^2 y^2}{E\,I_{zz}^2} \quad ; \quad \Psi_T = \frac{1}{2}\frac{T_y^2 S_z^2}{G\,b^2 I_{zz}^2} \quad ; \quad \Psi_{M_x} = \frac{1}{2}\frac{M_x^2 r^2}{G\,I_p^2}$$

L'energia elastica immagazzinata in una trave, si calcola integrando la densità di energia elastica su tutto il volume; nel caso di una trave prismatica lunga L e di sezione trasversale costante A, il contributo di ogni termine all'energia elastica totale vale:

$$\mathcal{L}_N = \frac{1}{2}\frac{N^2 L}{EA} \quad ; \quad \mathcal{L}_M = \frac{1}{2}\frac{M_z^2 L}{E\,I_{zz}} \quad ; \quad \mathcal{L}_{M_x} = \frac{1}{2}\frac{M_x^2 L}{GI_p}$$

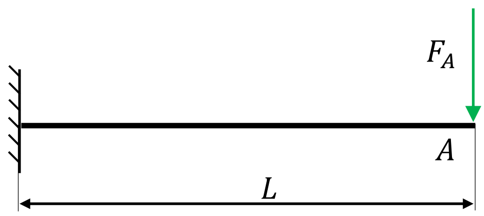
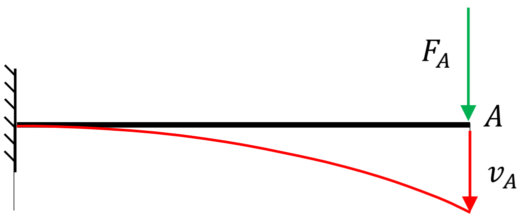
Per il contributo del taglio si preferisce utilizzare una formula più semplice:

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{2}\frac{\chi\, T_y^2\, L}{G\,A}$$

dove il valore del **fattore di taglio** χ dipende dalla forma della sezione trasversale della trave.

TEOREMA DI MAXWELL E TEOREMA DI BETTI

Si ipotizzi che sia valido il Principio di sovrapposizione degli effetti.

	Si consideri la trave a mensola rappresentata in figura caricata da una forza F_A trasversale al suo asse e applicata nel punto A.
	La forza viene fatta crescere lentamente (in modo "**quasi statico**") fino al suo valore finale. In seguito all'applicazione della forza, il punto A subisce uno spostamento la cui componente in direzione della forza F_A vale v_A.

Il lavoro compiuto dalla forza vale:

$$\mathcal{L} = \int_0^{v_A} F\,dv$$

Ipotizzando un comportamento lineare del tipo $Kv = F$ si può scrivere:

$$\mathcal{L} = \int_0^{v_A} F\,dv = \int_0^{v_A} Kv\,dv = \frac{1}{2}Kv_A^2$$

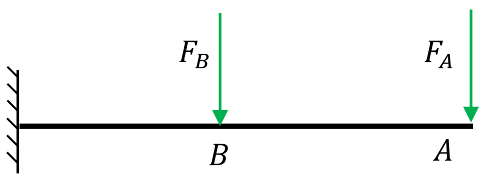
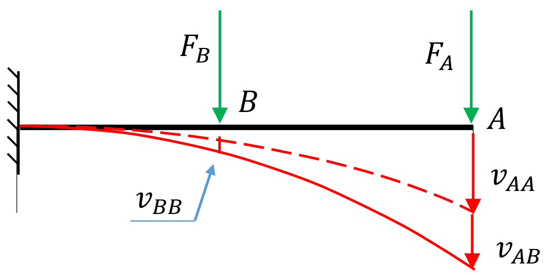
Poiché: $K = \frac{F_A}{v_A}$ sostituendo si ottiene:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}F_A v_A$$

Per maggiore chiarezza indichiamo il lavoro e lo spostamento con due pedici:

$$\mathcal{L}_{AA} = \frac{1}{2} F_A v_{AA}$$

$\mathcal{L}_{AA}$ indica il lavoro compiuto dalla forza F_A grazie allo spostamento v_{AA} del punto A provocato dalla forza F_A. Come detto è inteso che v_{AA} sia la componente dello spostamento del punto A in direzione di F_A.

	Applichiamo adesso nel punto B una seconda forza che viene fatta crescere lentamente fino a raggiungere il valore F_B (la forza F_A è sempre presente, ma il suo valore è costante).
	La forza F_B provoca la deformazione della trave, quindi sia lo spostamento del punto B che quello del punto A. Il lavoro da essa prodotto vale: $$\mathcal{L}_{BB} = \frac{1}{2} F_B v_{BB}$$

Il lavoro complessivo, accumulato nella trave in forma di energia elastica, vale:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{AA} + \mathcal{L}_{BB} + \mathcal{L}_{AB}$$

$\mathcal{L}_{AB}$ indica il lavoro *indiretto* prodotto dalla forza F_A grazie allo spostamento v_{AB} del punto A provocato dalla forza F_B. Mentre lo spostamento v_{AB} cresce sino al suo valore finale, la forza F_A è costante e di conseguenza:

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_0^{v_{AB}} F_A \, dv = F_A \, v_{AB} \qquad \textbf{\textit{Lavoro indiretto}}$$

Adesso immaginiamo di ripetere la procedura, ma applichiamo prima la forza F_B, poi la forza F_A. In questo secondo caso il lavoro complessivo vale:

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{BB} + \mathcal{L}_{AA} + \mathcal{L}_{BA}$$

dove:

$$\mathcal{L}_{BB} = \frac{1}{2} F_B v_{BB} \quad ; \qquad \mathcal{L}_{AA} = \frac{1}{2} F_A v_{AA} ; \qquad \mathcal{L}_{BA} = F_B v_{BA}$$

$\mathcal{L}_{BA}$ indica il lavoro *indiretto* prodotto dalla forza F_B grazie allo spostamento v_{BA} del punto B provocato dalla forza F_A.

Poiché si è supposto valido il principio di sovrapposizione degli effetti, il lavoro prodotto nei due casi deve essere identico, cioè $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ da cui:

$$\boxed{F_A v_{AB} = F_B v_{BA}} \qquad \textbf{TEOREMA DI MAXWELL}$$

Se invece di due forze, si applicassero due coppie M_A e M_B, il teorema sarebbe sempre valido ma assumerebbe la forma seguente:

$$\boxed{M_A \vartheta_{AB} = M_B \vartheta_{BA}}$$

dove ϑ_{AB} indica la rotazione del punto A causata dalla coppia M_B applicata nel punto B e ϑ_{BA} indica la rotazione del punto B causata dalla coppia M_A applicata nel punto A.

E' valida anche la seguente versione:

$$M_A \vartheta_{AB} = F_B v_{BA}$$

dove ϑ_{AB} indica la rotazione del punto A causata dalla forza F_B applicata nel punto B e v_{BA} indica lo spostamento del punto B causato dalla coppia M_A applicata nel punto A.

Il teorema di Betti è simile al precedente ma è di validità più ampia perché si riferisce a due sistemi di forze e non a forze singole:

$$\sum_{i=1}^{n_A} F_A(i) v_{AB}(i) = \sum_{i=1}^{n_B} F_B(i) v_{BA}(i) \qquad \textbf{TEOREMA DI BETTI}$$

dove il sistema A comprende n_A forze e il sistema B ne comprende n_B.

In forma vettoriale si può scrivere:

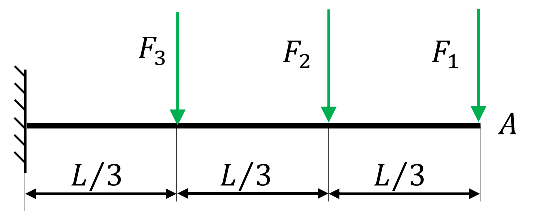
$$\boldsymbol{F}_A^T \boldsymbol{v}_{AB} = \boldsymbol{F}_B^T \boldsymbol{v}_{BA}$$

dove $\boldsymbol{F}_A^T = \{F_A(1) \quad F_A(2) \quad \cdots \quad F_A(n_A)\}$ e $\boldsymbol{F}_B^T = \{F_B(1) \quad F_B(2) \quad \cdots \quad F_B(n_B)\}$ sono ***forze generalizzate*** (il che significa che alcune componenti sono forze e altre possono essere coppie) e

$$\boldsymbol{v}_{AB} = \begin{Bmatrix} v_{AB}(1) \\ v_{AB}(2) \\ \vdots \\ v_{AB}(n_A) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{v}_{BA} = \begin{Bmatrix} v_{BA}(1) \\ v_{BA}(2) \\ \vdots \\ v_{BA}(n_B) \end{Bmatrix}$$

sono ***spostamenti generalizzati*** (il che significa che alcune componenti sono spostamenti e altre possono essere rotazioni); quando nella posizione i-esima del vettore delle forze generalizzate è presente una forza, nella corrispondente posizione del vettore degli spostamenti generalizzati deve comparire uno spostamento; quando nella posizione i-esima del vettore delle forze generalizzate è presente una coppia, nella corrispondente posizione del vettore degli spostamenti generalizzati deve comparire una rotazione. In ogni caso, il prodotto dei due vettori dà origine ad un lavoro.

ESEMPIO N.1



Calcolare l'abbassamento del punto A integrando due volte l'equazione della linea elastica.

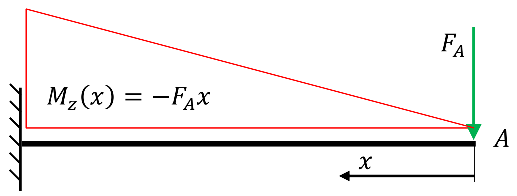
Se si applicasse il metodo dell'equazione della linea elastica direttamente alla mensola caricata da tre forze, sarebbe necessario integrare l'equazione due volte per ognuno dei tre tratti di trave: sarebbe quindi necessario determinare 6 condizioni al contorno, il che può richiedere molto tempo.

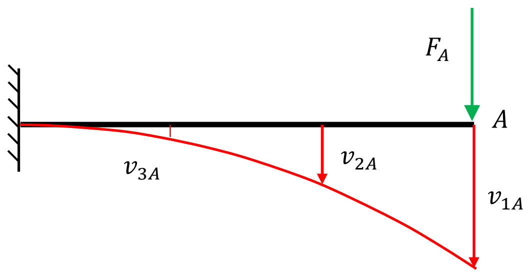
In alternativa è possibile applicare il Teorema di Betti.

Applichiamo la forza F_A nel punto A quindi scriviamo:

$$F_A v_{A1} + F_A v_{A2} + F_A v_{A3} = F_A(v_{A1} + v_{A2} + v_{A3}) = F_1 v_{1A} + F_2 v_{2A} + F_3 v_{3A}$$

Il lavoro indiretto prodotto dalla forza F_A grazie allo spostamento del punto A causato dalle forze applicate F_1, F_2 ed F_3 è uguale alla somma del lavoro indiretto prodotto dalle forze F_1, F_2 ed F_3 grazie agli spostamenti dei rispettivi punti di applicazione prodotti dalla forza F_A.





Posto $F_A = 1$, si ottiene:

$$v_A = v_{A1} + v_{A2} + v_{A3} = F_1 v_{1A} + F_2 v_{2A} + F_3 v_{3A}$$

Quindi per risolvere il problema è sufficiente calcolare v_{1A}, v_{2A} e v_{3A} (cioè gli spostamenti dei punti sui quali sono applicate le forze F_1, F_2 ed F_3) causati dalla forza unitaria applicata in A.

Posta l'origine dell'asse di riferimento x in A e diretto verso l'incastro si ha:

$$M_z = -x$$

Integrando due volte si ottiene:

$$EI_{zz}\vartheta(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$EI_{zz}v(x) = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

Condizioni al contorno:

Quando $x = L$ $\quad \vartheta(x) = 0$ da cui: $0 = \frac{L^2}{2} + c_1$ $\quad$ da cui $\quad c_1 = -\frac{L^2}{2}$

Quando $x = L$ $\quad v(x) = 0$ da cui: $0 = \frac{L^3}{6} - \frac{L^2}{2}L + c_2$ da cui: $\quad c_2 = \frac{L^3}{3}$

$$v(x) = \frac{1}{EI_{zz}}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{2}x + \frac{L^3}{3}\right)$$

$$\begin{cases} v_{1A} = v(x=0) = \dfrac{L^3}{3EI_{zz}} \\ v_{2A} = v\left(x = \dfrac{L}{3}\right) = \dfrac{1}{EI_{zz}}\left(\dfrac{L^3}{162} - \dfrac{L^3}{6} + \dfrac{L^3}{3}\right) = \dfrac{14L^3}{81EI_{zz}} \\ v_{3A} = v\left(x = \dfrac{2L}{3}\right) = \dfrac{1}{EI_{zz}}\left(\dfrac{8L^3}{162} - \dfrac{L^3}{3} + \dfrac{L^3}{3}\right) = \dfrac{4L^3}{81EI_{zz}} \end{cases}$$

Se le forze F_1, F_2 ed F_3 fossero tutte identiche si avrebbe:

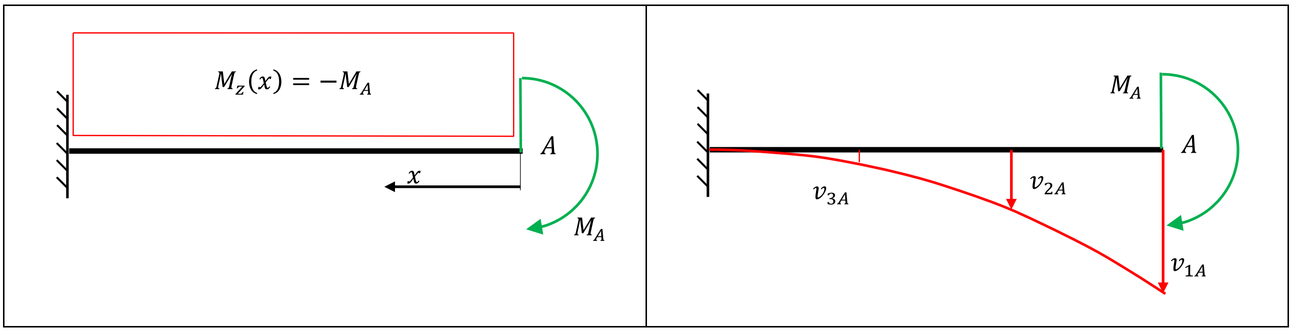
$$v_A = F_1(v_{1A} + v_{2A} + v_{3A}) = \frac{5F_1L^3}{9EI_{zz}}$$

ESEMPIO N.2

Per calcolare la rotazione del punto A dell'esempio precedente, si procede in modo analogo; si applica la coppia M_A nel punto A quindi si scrive:

$$M_A\vartheta_{A1} + M_A\vartheta_{A2} + M_A\vartheta_{A3} = M_A(\vartheta_{A1} + \vartheta_{A2} + \vartheta_{A3}) = F_1 v_{1A} + F_2 v_{2A} + F_3 v_{3A}$$

Il lavoro indiretto prodotto dalla coppia M_A grazie alla rotazione del punto A causata dalle forze applicate F_1, F_2 ed F_3 è uguale alla somma del lavoro indiretto prodotto dalle forze F_1, F_2 ed F_3 grazie agli spostamenti dei rispettivi punti di applicazione prodotti dalla coppia M_A.



Posto $M_A = 1$, si ottiene:

$$\vartheta_A = \vartheta_{A1} + \vartheta_{A2} + \vartheta_{A3} = F_1 v_{1A} + F_2 v_{2A} + F_3 v_{3A}$$

Quindi per risolvere il problema è sufficiente calcolare v_{1A}, v_{2A} e v_{3A} (cioè gli spostamenti dei punti sui quali sono applicate le forze F_1, F_2 ed F_3) causati dalla coppia unitaria applicata in A.

Posta l'origine dell'asse di riferimento x in A e diretto verso l'incastro si ha:

$$M_z = -1$$

Integrando due volte si ottiene:

$$EI_{zz}\vartheta(x) = x + c_1$$

$$EI_{zz}v(x) = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

Condizioni al contorno:

Quando $x = L$ $\vartheta(x) = 0$ da cui: $0 = L + c_1$ da cui $c_1 = -L$

Quando $x = L$ $v(x) = 0$ da cui: $0 = \frac{L^2}{2} + c_1 L + c_2$ da cui $c_2 = \frac{L^2}{2}$

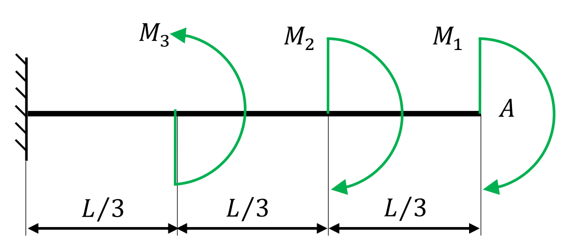
$$v(x) = \frac{1}{EI_{zz}}\left(\frac{x^2}{2} - Lx + \frac{L^2}{2}\right)$$

$$\begin{cases} v_{1A} = v(x = 0) = \dfrac{L^2}{2EI_{zz}} \\ v_{2A} = v\left(x = \dfrac{L}{3}\right) = \dfrac{1}{EI_{zz}}\left(\dfrac{L^2}{18} - \dfrac{L^2}{3} + \dfrac{L^2}{2}\right) = \dfrac{4L^2}{18EI_{zz}} \\ v_{3A} = v\left(x = \dfrac{2L}{3}\right) = \dfrac{1}{EI_{zz}}\left(\dfrac{2L^2}{9} - \dfrac{2L^2}{3} + \dfrac{L^2}{2}\right) = \dfrac{L^3}{18EI_{zz}} \end{cases}$$

Se le forze F_1, F_2 ed F_3 fossero tutte identiche la rotazione assumerebbe il seguente valore (in radianti):

$$\vartheta_A = F_1(v_{1A} + v_{2A} + v_{3A}) = \frac{7F_1L^2}{9EI_{zz}}$$

ESEMPIO N.3

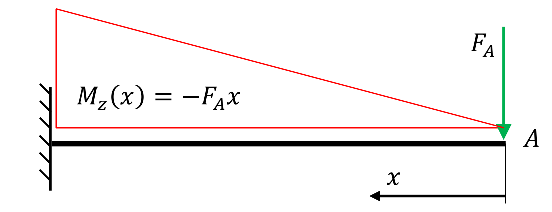


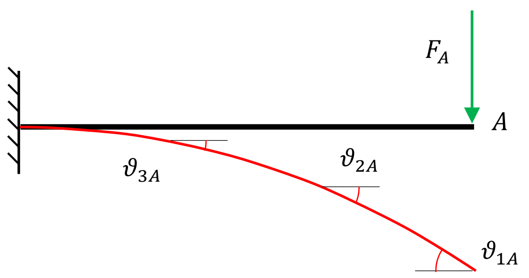
Calcolare l’abbassamento del punto A integrando due volte l’equazione della linea elastica.

Applichiamo la forza F_A nel punto A quindi scriviamo:

$$F_A v_{A1} + F_A v_{A2} + F_A v_{A3} = F_A(v_{A1} + v_{A2} + v_{A3}) = M_1\vartheta_{1A} + M_2\vartheta_{2A} + M_3\vartheta_{3A}$$

Il lavoro indiretto prodotto dalla forza F_A grazie allo spostamento del punto A causato dalle coppie applicate M_1, M_2 ed M_3 è uguale alla somma del lavoro indiretto prodotto dalle coppie M_1, M_2 ed M_3 grazie alle rotazioni dei rispettivi punti di applicazione prodotti dalla forza F_A.





Posto $F_A = 1$, si ottiene:

$$v_A = v_{A1} + v_{A2} + v_{A3} = M_1\vartheta_{1A} + M_2\vartheta_{2A} + M_3\vartheta_{3A}$$

Quindi per risolvere il problema è sufficiente calcolare le rotazioni ϑ_{1A}, ϑ_{2A} e ϑ_{3A} dei punti sui quali sono applicate le coppie M_1, M_2 ed M_3 causate dalla forza unitaria applicata in A.

Posta l'origine dell'asse di riferimento x in A e diretto verso l'incastro si ha:

$$M_z = -x$$

Integrando due volte si ottiene:

$$EI_{zz}\vartheta(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$EI_{zz}v(x) = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

Condizioni al contorno:

Quando $x = L$ $\quad\vartheta(x) = 0$ da cui: $0 = \frac{L^2}{2} + c_1$ $\quad$ da cui $\quad c_1 = -\frac{L^2}{2}$

Quando $x = L$ $\quad v(x) = 0$ da cui: $0 = \frac{L^3}{6} - \frac{L^2}{2}L + c_2$ $\quad$ da cui: $\quad c_2 = \frac{L^3}{3}$

$$\begin{cases} v(x) = \dfrac{1}{EI_{zz}}\left(\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{L^2}{2}x + \dfrac{L^3}{3}\right) \\ \vartheta(x) = \dfrac{1}{EI_{zz}}\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{L^2}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_{1A} = \vartheta(x=0) = -\dfrac{L^2}{2EI_{zz}} \\ \vartheta_{2A} = \vartheta\left(x = \dfrac{L}{3}\right) = \dfrac{1}{EI_{zz}}\left(\dfrac{L^2}{18} - \dfrac{L^2}{2}\right) = \dfrac{-4L^2}{9EI_{zz}} \\ \vartheta_{3A} = \vartheta\left(x = \dfrac{2L}{3}\right) = \dfrac{1}{EI_{zz}}\left(\dfrac{2L^2}{9} - \dfrac{L^2}{2}\right) = \dfrac{-5L^2}{18EI_{zz}} \end{cases}$$

Le rotazioni sono negative in quanto, se osservate dalle z positive[1], risultano orarie; alle M_1, M_2 ed M_3 è necessario attribuire il segno in modo coerente, positivo se antiorario.

Nell'esempio M_1 e M_2 sono negative mentre M_3 è positiva; di conseguenza prendendo i loro valori assoluti si ottiene

$$v_A = \frac{M_1 L^2}{2EI_{zz}} + \frac{4M_2 L^2}{9EI_{zz}} - \frac{5M_3 L^2}{18EI_{zz}}$$

[1] L'origine del sistema di riferimento è nel punto A e l'asse x è diretto verso sinistra; di conseguenza l'asse z è diretto verso l'osservatore.