

CAP. 14 – ELEMENTI ISOPARAMETRICI PER L'ANALISI DEI GUSCI

14.1 Introduzione.

I gusci non ostante abbiano una dimensione (quella in direzione dello spessore) molto più piccola rispetto alle altre due, possono essere modellati con gli elementi tridimensionali (vedi Fig.14.1a). Ma anche nel caso di gusci di grosso spessore, tre nodi disposti lungo lo spessore comportano un numero eccessivo di gradi di libertà. L'eliminazione del nodo intermedio conduce all'elemento mostrato nella Fig.14.1.b nel quale la deformazione ε_3 nella direzione dello spessore è considerata costante¹. Al diminuire dello spessore, i coefficienti della matrice di rigidezza elementare associati alla deformazione ε_3 diventano molto più grandi degli altri. Questo fatto conduce a gravi problemi di carattere numerico che si possono evitare imponendo nulla la deformazione ε_3 , cioè imponendo che i nodi disposti lungo lo spessore subiscano lo stesso spostamento lungo la loro congiungente. In questo modo i 6 gradi di libertà di spostamento associati ai due nodi si riducono a 5. Invece di avere due nodi lungo lo spessore, è possibile avere un unico nodo disposto sulla superficie media del guscio con cinque gradi di libertà, tre di spostamento e due di rotazione (vedi Fig.14.1.c). Questi cinque gradi di libertà definiscono il movimento di un segmento perpendicolare al piano medio del guscio che dopo la deformazione rimane rettilineo ma non necessariamente normale al piano medio. Quindi i nodi dell'elemento finale sono disposti solo sul piano medio. Quando si formula la matrice di rigidezza dell'elemento, si utilizza una matrice del materiale $[E]$ che corrisponde ad una condizione di stato di sforzo piano con $\sigma_3 = 0$.

Non è necessario che l'elemento contenga 8 nodi come quello rappresentato nella fig.14.1.c, ma ne esistono anche a 4 oppure 9 nodi: tutti seguono la teoria di Mindlin e quindi prendono in considerazione le deformazioni di scorrimento a taglio. Come altri tipi di elementi, anche questi possono manifestare eccessiva rigidezza a taglio ("locking") oppure modi di deformazione a energia nulla (meccanismi). Questi problemi possono essere provocati dalla forma geometrica dell'elemento, dal tipo e dal numero di gradi di libertà, dalle funzioni di forma e dal tipo d'integrazione numerica (completa, selettiva, ridotta, etc.).

14.2 Un elemento guscio di tipo generale. Campo di forma e spostamento

Nella Fig.14.2.1a è mostrato l'elemento di volume a 60 gradi di libertà. I confini dell'elemento sono $\xi = \pm 1, \eta = \pm 1, \zeta = \pm 1$. Diversamente da quanto visto per l'elemento piastra, le direzioni z e ζ non coincidono e quindi nella sua formulazione è necessario considerare anche ζ .

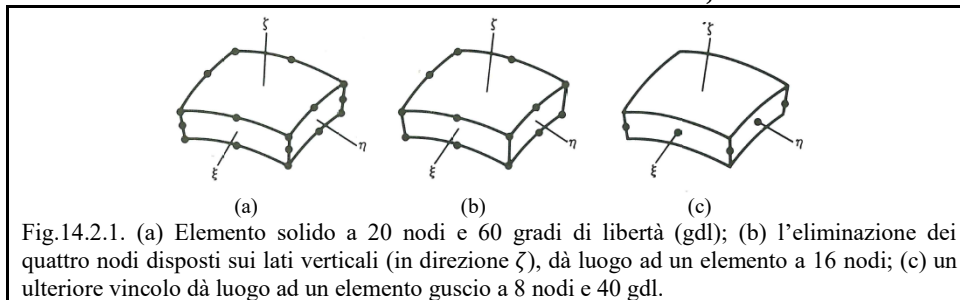


Fig.14.2.1. (a) Elemento solido a 20 nodi e 60 gradi di libertà (gdl); (b) l'eliminazione dei quattro nodi disposti sui lati verticali (in direzione ζ), dà luogo ad un elemento a 16 nodi; (c) un ulteriore vincolo dà luogo ad un elemento guscio a 8 nodi e 40 gdl.

La forma dell'elemento può essere definita come al solito attraverso le funzioni di forma:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (14.2.1)$$

Se le linee che uniscono i nodi in direzione dello spessore sono vincolate a rimanere dritte, è possibile eliminare i quattro nodi intermedi (vedi Fig.14.2.1b) e le funzioni di forma si possono dividere in una componente $N_i(\xi, \eta)$ (funzione quadratica delle coordinate naturali ξ ed η) e in una componente lineare in ζ :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{16} N_i(\xi, \eta) N_i(\zeta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (14.2.2)$$

dove per $1 \leq i \leq 8$ $N_i(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2}$ (cioè i primi 8 nodi si trovano in $\zeta = -1$), mentre per $9 \leq i \leq 16$

¹ L'indice 3 indica la direzione perpendicolare alla superficie media del guscio.



$N_i(\zeta) = \frac{1+\zeta}{2}$ (cioè i secondi 8 nodi si trovano in $\zeta = 1$). Di conseguenza, l'eq.(14.2.2) assume la forma:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{1-\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{1+\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_{i+8} \\ y_{i+8} \\ z_{i+8} \end{Bmatrix} \quad (14.2.3)$$

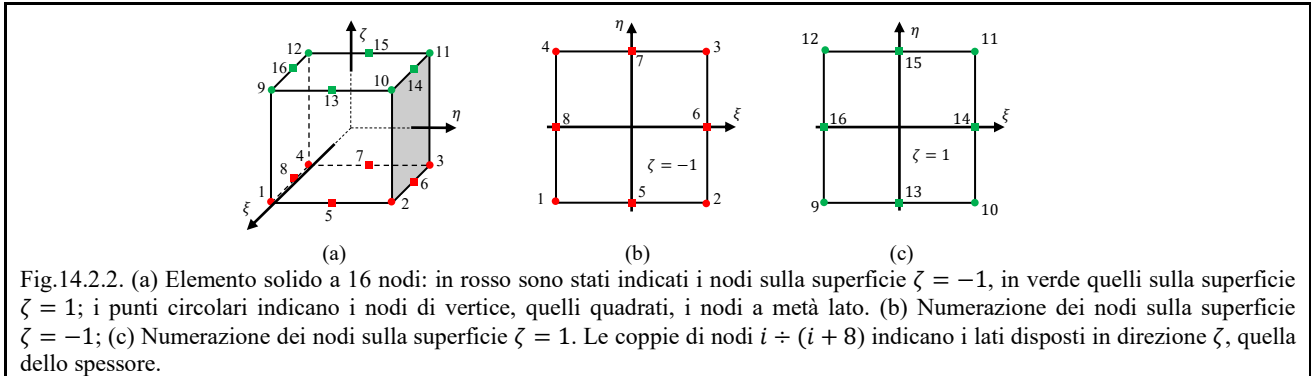


Fig.14.2.2. (a) Elemento solido a 16 nodi: in rosso sono stati indicati i nodi sulla superficie $\zeta = -1$, in verde quelli sulla superficie $\zeta = 1$; i punti circolari indicano i nodi di vertice, quelli quadrati, i nodi a metà lato. (b) Numerazione dei nodi sulla superficie $\zeta = -1$; (c) Numerazione dei nodi sulla superficie $\zeta = 1$. Le coppie di nodi $i \div (i + 8)$ indicano i lati disposti in direzione ζ , quella dello spessore.

Nelle seguenti espressioni, per identificare la faccia inferiore $\zeta = -1$ e superiore $\zeta = 1$ dell'elemento, alle quantità nodali verranno aggiunti, rispettivamente, gli indici b e t (da *bottom e top*). L'assenza di indice indica che le quantità nodali si riferiscono alla superficie media $\zeta = 0$ dell'elemento. Di conseguenza, l'eq(14.2.3) assume la forma:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{1-\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_{ib} \\ y_{ib} \\ z_{ib} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{1+\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_{it} \\ y_{it} \\ z_{it} \end{Bmatrix} \quad (14.2.4)$$

in cui x_{ib}, x_{it} , etc., sono le coordinate cartesiane globali dei 16 nodi disposti sulle superfici $\zeta = -1$ e $\zeta = 1$ e le N_i sono le funzioni di forma dell'elemento a 8 nodi. Osserviamo che l'eq.(14.2.4) si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_{ib} + x_{it} \\ y_{ib} + y_{it} \\ z_{ib} + z_{it} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_{it} - x_{ib} \\ y_{it} - y_{ib} \\ z_{it} - z_{ib} \end{Bmatrix} \quad (14.2.5)$$

Il vettore:

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_{ib} + x_{it} \\ y_{ib} + y_{it} \\ z_{ib} + z_{it} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}$$

indica la posizione del nodo i -esimo disposto sulla superficie $\zeta = 0$: le sue coordinate si trovano calcolando la media delle coordinate dei punti appartenenti allo stesso lato disposti in $\zeta = -1$ e $\zeta = 1$. Definiamo inoltre il seguente vettore:

$$\bar{V}_{3i} = \begin{Bmatrix} x_{it} \\ y_{it} \\ z_{it} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_{ib} \\ y_{ib} \\ z_{ib} \end{Bmatrix} \quad (14.2.6)$$

che rappresenta la normale alla superficie media nel nodo i -esimo. La lunghezza del vettore \bar{V}_{3i} non è altro che lo spessore t_i del guscio nel nodo i -esimo, per cui possiamo scrivere:

$$\bar{V}_{3i} = t_i \bar{v}_{3i} = t_i \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix}$$

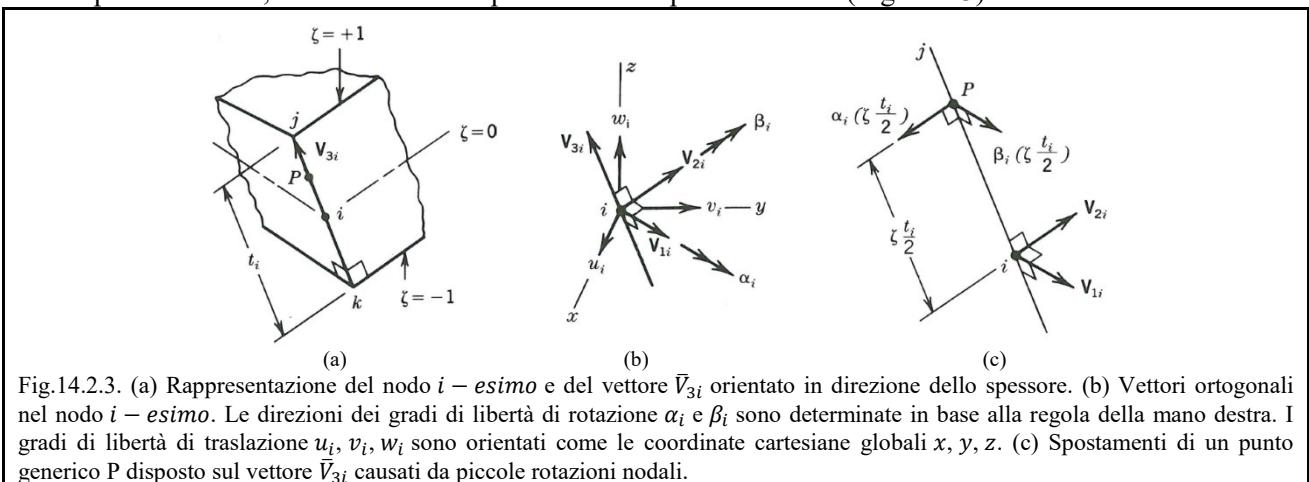
dove \bar{v}_{3i} è il versore in direzione dello spessore e l_{3i}, m_{3i} e n_{3i} sono i suoi coseni direttori.

In conclusione l'eq.(14.2.5) si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) t_i \frac{\zeta}{2} \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix} \quad (14.2.7)$$

che definisce la geometria dell'elemento in funzione delle coordinate nodali della superficie media e dei vettori normali al guscio \bar{V}_{3i} . Le funzioni di forma N_i sono funzioni di ξ e η , ma sono indipendenti da ζ . Se l'elemento fosse un quadrilatero a 4 nodi, le funzioni di forma sarebbero quelle bilineari già viste in precedenza; se fosse un elemento lagrangiano a 9 nodi, le N_i si otterrebbero dal prodotto delle funzioni di forma quadratiche monodimensionali.

Come detto, la deformazione normale alla superficie media viene trascurata e le linee in origine perpendicolari alla superficie media sono vincolate a rimanere dritte durante la deformazione. Ma queste linee non devono necessariamente rimanere normali alla superficie media, quindi l'elemento è capace di rappresentare la deformazione di scorrimento trasversale (la formulazione segue la teoria di Mindlin). Gli spostamenti dell'elemento sono completamente definiti dagli spostamenti nodali u_i, v_i, w_i della superficie media nelle direzioni delle coordinate globali x, y, z e dalle rotazioni α_i e β_i di una linea, in origine normale alla superficie media, intorno a due assi paralleli alla superficie media (Fig.14.2.3).



Nella Fig.14.2.3 i vettori $\bar{V}_{1i}, \bar{V}_{2i}, \bar{V}_{3i}$ sono mutuamente ortogonali e quindi \bar{V}_{1i} e \bar{V}_{2i} sono tangenti alla superficie media nel nodo i –esimo. \bar{V}_{1i} e \bar{V}_{2i} sono usati per definire le direzioni delle rotazioni nodali α_i e β_i , gradi di libertà nodali condivisi da tutti gli elementi che passano per il nodo i –esimo. E' possibile che le direzioni di rotazione α_i e β_i cambino da nodo a nodo. Se il materiale è ortotropo, è possibile definire il vettore \bar{V}_{1i} parallelo alla direzione principale del materiale. In alternativa è possibile definire un vettore \bar{V}_{1i} tangente alla superficie media nel nodo i nel modo seguente:

$$\bar{V}_{1i} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \end{Bmatrix} \quad (14.2.8)$$

da cui è possibile calcolare il vettore \bar{V}_{2i} per mezzo del prodotto vettoriale:

$$\bar{V}_{2i} = \bar{V}_{3i} \times \bar{V}_{1i} \quad (14.2.10)$$

In alternativa si potrebbe definire il seguente vettore \bar{V}_{2i} :

$$\bar{V}_{2i} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \end{Bmatrix} \quad (14.2.11)$$

col quale calcolare il vettore \bar{V}_{1i} per mezzo del prodotto vettoriale:

$$\bar{V}_{1i} = \bar{V}_{2i} \times \bar{V}_{3i} \quad (14.2.12)$$

I coseni direttori dei vettori $\bar{V}_{1i}, \bar{V}_{2i}$ e \bar{V}_{3i} si ottengono dividendo le loro componenti per il rispettivo modulo:



$$\frac{\bar{V}_{1i}}{\|\bar{V}_{1i}\|} = \begin{Bmatrix} l_{1i} \\ m_{1i} \\ n_{1i} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \frac{\bar{V}_{2i}}{\|\bar{V}_{2i}\|} = \begin{Bmatrix} l_{2i} \\ m_{2i} \\ n_{2i} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \frac{\bar{V}_{3i}}{\|\bar{V}_{3i}\|} = \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix} \quad (14.2.13)$$

Lo jacobiano $[J]$, di dimensione 3×3 , è il seguente:

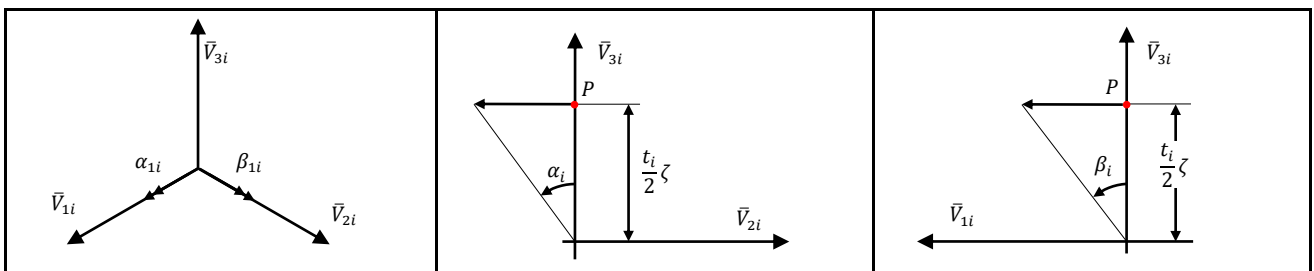
$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (14.2.13)$$

i cui coefficienti valgono (vedi eq.14.2.7):

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left(x_i + \frac{t_i l_{3i}}{2} \zeta \right) & y_{,\xi} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left(y_i + \frac{t_i m_{3i}}{2} \zeta \right) & z_{,\xi} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left(z_i + \frac{t_i n_{3i}}{2} \zeta \right) \\ x_{,\eta} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left(x_i + \frac{t_i l_{3i}}{2} \zeta \right) & y_{,\eta} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left(y_i + \frac{t_i m_{3i}}{2} \zeta \right) & z_{,\eta} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left(z_i + \frac{t_i n_{3i}}{2} \zeta \right) \\ x_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^8 N_i \frac{t_i l_{3i}}{2} & y_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^8 N_i \frac{t_i m_{3i}}{2} & z_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^8 N_i \frac{t_i n_{3i}}{2} \end{aligned} \quad (14.2.14)$$

Spostamenti e deformazioni. Lo spostamento di un punto P disposto sul vettore \bar{V}_{3i} (vedi Fig.14.2.3) si ottiene sommando lo spostamento del nodo i – esimo (che si trova sulla superficie media del guscio) allo spostamento causato dalla rotazione del vettore \bar{V}_{3i} intorno allo stesso nodo i . Le componenti dello spostamento relativo (mostrate nella Fig.14.2.3) hanno direzione \bar{V}_{1i} e \bar{V}_{2i} e devono quindi essere proiettate in direzione x , y e z prima di essere sommate agli spostamenti del nodo i – esimo. Di conseguenza lo spostamento risulta:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \alpha_i \zeta \begin{Bmatrix} l_{2i} \\ m_{2i} \\ n_{2i} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \beta_i \zeta \begin{Bmatrix} l_{1i} \\ m_{1i} \\ n_{1i} \end{Bmatrix} \quad (14.2.15)$$



Come si può osservare, la rotazione positiva α_i intorno al vettore \bar{V}_{1i} provoca lo spostamento del punto P distante $\frac{t_i}{2} \zeta$ dal punto i nel verso negativo del vettore \bar{V}_{2i} ; viceversa la rotazione positiva β_i intorno al vettore \bar{V}_{2i} provoca lo spostamento del punto P nel verso positivo del vettore \bar{V}_{1i} .

I passi per il calcolo dell'integrando $[B]^T [D] [B]$ necessario al calcolo della matrice di rigidità dell'elemento sono stati già descritti nei capitoli precedenti. Si parte scrivendo le relazioni deformazioni-spostamenti in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (14.2.16)$$

Le relazioni che legano le derivate degli spostamenti fatte rispetto alle coordinate globali xyz alle derivate fatte rispetto alle coordinate naturali $\xi\eta\zeta$ sono le seguenti:



$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (14.2.17)$$

dove $[J]$ indica la matrice jacobiana:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (14.2.18)$$

i cui coefficienti sono stati indicati nelle eq. (14.2.14). Invertendo lo jacobiano si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (14.2.17)$$

La matrice $[B]$ lega gli spostamenti nodali alle deformazioni:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 [B_i] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (14.2.18)$$

La matrice $[B]$ ha dimensioni 6×40 e si compone di otto blocchi 6×5 ognuno dei quali assume la forma seguente (vedi l'eq.14.2.15):

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{t_i l_{2i}}{2} \zeta & \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{t_i l_{1i}}{2} \zeta \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{t_i m_{2i}}{2} \zeta & \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{t_i m_{1i}}{2} \zeta \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & -\frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{t_i n_{2i}}{2} \zeta & \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{t_i n_{1i}}{2} \zeta \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -\left(\frac{\partial N_i}{\partial y} l_{2i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} m_{2i}\right) \frac{t_i}{2} \zeta & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} l_{1i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} m_{1i}\right) \frac{t_i}{2} \zeta \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & -\left(\frac{\partial N_i}{\partial z} m_{2i} + \frac{\partial N_i}{\partial y} n_{2i}\right) \frac{t_i}{2} \zeta & \left(\frac{\partial N_i}{\partial z} m_{1i} + \frac{\partial N_i}{\partial y} n_{1i}\right) \frac{t_i}{2} \zeta \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\left(\frac{\partial N_i}{\partial z} l_{2i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} n_{2i}\right) \frac{t_i}{2} \zeta & \left(\frac{\partial N_i}{\partial z} l_{1i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} n_{1i}\right) \frac{t_i}{2} \zeta \end{bmatrix} \quad (14.2.19)$$

Poiché le funzioni di forma $N_i(\xi, \eta)$ sono indipendenti dalla coordinata naturale ζ , abbiamo:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ogni blocco $[B_i]$ può essere scisso nel modo seguente:

$$[B_i] = [B_i]_0 + [B_i]_1 \zeta \quad (14.2.20)$$

dove:



$$[B_i]_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [B_i]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{t_i}{2} l_{2i} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{t_i}{2} l_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{t_i}{2} m_{2i} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{t_i}{2} m_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{t_i}{2} n_{2i} & \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{t_i}{2} n_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{\partial N_i}{\partial y} l_{2i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} m_{2i}\right) \frac{t_i}{2} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} l_{1i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} m_{1i}\right) \frac{t_i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{\partial N_i}{\partial z} m_{2i} + \frac{\partial N_i}{\partial y} n_{2i}\right) \frac{t_i}{2} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial z} m_{1i} + \frac{\partial N_i}{\partial y} n_{1i}\right) \frac{t_i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{\partial N_i}{\partial z} l_{2i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} n_{2i}\right) \frac{t_i}{2} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial z} l_{1i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} n_{1i}\right) \frac{t_i}{2} \end{bmatrix}$$

Matrice di rigiditàza [k]. La relazione sforzi – deformazioni si può esprimere nel modo seguente:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad \text{oppure} \quad \{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\mathbf{E}']\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} \quad (14.2.21)$$

dove $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ contiene gli sforzi in direzione degli assi cartesiani globali xyz e $\{\boldsymbol{\sigma}'\}$ quelli in coordinate locali, normali e tangenti alla superficie media del guscio. Quest'ultima relazione è la seguente:

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}/\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}/\chi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = [\mathbf{E}']\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} \quad (14.2.22)$$

dove le direzioni 1 e 2 sono tangenti alla superficie media del guscio e la direzione 3 è normale. Se il materiale è ortotropo queste direzioni devono coincidere con le direzioni principali del materiale. Il coefficiente χ indica il "fattore di taglio" che assume il valore 6/5 quando lo scorrimento trasversale prodotto dal taglio ha andamento parabolico attraverso lo spessore del guscio. E' importante notare che l'eq.(14.2.22) impone che lo sforzo σ_3 attraverso lo spessore si annulli. La matrice $[\mathbf{E}]$ si ottiene dalla $[\mathbf{E}']$ attraverso una trasformazione di coordinare (vedi i cerchi di Mohr):

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{T}_\varepsilon]^T [\mathbf{E}'] [\mathbf{T}_\varepsilon] \quad (14.2.23)$$

dove:

$$[\mathbf{T}_\varepsilon] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (14.2.24)$$

Per l'integrazione numerica della matrice di rigiditàza $[\mathbf{k}]$ è necessario calcolare questa trasformazione in ogni punto di Gauss. I coseni direttori necessari al calcolo della matrice di rotazione $[\mathbf{T}_\varepsilon]$ sono i coseni direttori dei vettori \bar{V}_1, \bar{V}_2 e \bar{V}_3 calcolati nei punti di Gauss. Anche questi vettori si possono calcolare per mezzo delle funzioni di forma una volta noti i loro valori nodali:

$$\bar{V}_1 = \sum_{i=1}^8 N_i \bar{V}_{1i} \quad ; \quad \bar{V}_2 = \sum_{i=1}^8 N_i \bar{V}_{2i} \quad ; \quad \bar{V}_3 = \sum_{i=1}^8 N_i \bar{V}_{3i} \quad (14.2.25)$$

in cui le funzioni di forma N_i sono calcolate nei punti di Gauss.

Se il materiale è isotropo, la matrice $[\mathbf{E}']$ assume la forma:

$$[\mathbf{E}'] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/(2\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/(2\chi) \end{bmatrix}$$



La matrice di rigidezza dell'elemento guscio con un numero di nodi pari a NNe vale:

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{[B]^T}_{(5 \times NNe) \times 6} \cdot \underbrace{[E]}_{6 \times 6} \cdot \underbrace{[B]}_{6 \times (5 \times NNe)} \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (14.2.26)$$

Se le proprietà del materiale non cambiano con lo spessore (e quindi sono indipendenti da ζ), l'integrazione lungo lo spessore si può calcolare in modo esplicito. Per adottare questa procedura (che comporta però un piccolo errore) si trascurano i coefficienti dello jacobiano che dipendono da ζ : questa approssimazione è accettabile purché il rapporto tra lo spessore e la curvatura del guscio sia piccolo. La matrice $[B]$ viene partizionata come descritto precedentemente (eq.14.2.20): la matrice $[B]_0$ non dipende da ζ , mentre $[B]_1 \zeta$ è lineare in ζ . Poiché:

$$\int_{-1}^1 d\zeta = 2 \quad ; \quad \int_{-1}^1 \zeta \cdot d\zeta = 0 \quad , \quad \int_{-1}^1 \zeta^2 \cdot d\zeta = \frac{2}{3}$$

i prodotti $[B_0]^T [D] [B_1] \zeta$ e $\zeta [B_1]^T [D] [B_0]$ sono lineari in ζ e perciò si annullano nell'integrazione attraverso lo spessore. I prodotti $[B_0]^T [D] [B_0]$ e $\zeta^2 [B_1]^T [D] [B_1]$ possono essere integrati rispetto a ζ senza ricorrere all'integrazione numerica. Così l'eq. 14.2.26 si riduce a

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ 2[B_0]^T [E] [B_0] + \frac{2}{3} [B_1]^T [E] [B_1] \right\} \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (14.2.27)$$

E' bene notare che sebbene l'integrazione di Gauss sia solo bidimensionale, lo Jacobiano $[J]$ rimane 3×3 . Per migliorare l'efficienza del software, si può sfruttare la presenza di numerosi coefficienti nulli nelle matrici $[B_0]$ e $[B_1]$. Se nello jacobiano si conservano i coefficienti che contengono ζ , per l'integrazione numerica nella direzione dello spessore sono sufficienti due punti di Gauss; ciò comporta però il raddoppio del costo computazionale.

Le difficoltà causate dall'eccessiva rigidezza a scorrimento (*shear locking*) e dalla presenza di modi a energia nulla (*meccanismi*) possono essere affrontate con l'integrazione selettiva, l'integrazione ridotta o altre strategie. Quando un elemento diventa sottile, la matrice di penalità (associata allo scorrimento trasversale necessaria ad evitare eventuali meccanismi che si dovessero produrre a causa dell'integrazione ridotta) non deve assumere valori eccessivi tali da annullare quelli della matrice di rigidezza.

Nel calcolo finale degli sforzi elementari, bisogna notare che le deformazioni calcolate con la formula:

$$\{\sigma\} = [E][B]\{d\}$$

si riferiscono alle coordinate globali xyz . Se l'obiettivo è il calcolo degli sforzi nelle coordinate locali $\xi\eta\zeta$ dell'elemento, è necessario utilizzare la formula seguente:

$$\{\sigma'\} = [E'] [T_\epsilon] [B] \{d\}$$

Gli sforzi calcolati nei punti di Gauss in genere sono più precisi di quelli calcolati altrove, per cui gli sforzi nodali si ottengono per estrapolazione dai punti di Gauss con le funzioni di forma (vedi capitoli precedenti).

Normalmente lungo i loro bordi gli elementi condividono lo stesso piano tangente, quindi i gradi di libertà α_i e β_i sono gli stessi in tutti gli elementi che condividono il nodo i -esimo. Questa circostanza ideale non si verifica se lungo la linea che condividono, gli elementi formano uno spigolo vivo. In tale circostanza il vettore \bar{V}_{3i} dovrebbe essere determinato come media dei vettori normali al guscio, e i vettori \bar{V}_{1i} e \bar{V}_{2i} risultano normali a tale vettore medio \bar{V}_{3i} . In questi casi è probabile che i risultati non siano particolarmente precisi.

Bibliografia

- [1] S.TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1940.
- [2] O.BELLUZZI, *Scienza delle costruzioni*, vol.3, Zanichelli Bologna,1996.
- [3] S. AHMAD, B.M. IRONS AND O.C. ZIENKIEWICZ, "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **2**, 419-451 (1970).
- [3] K.J. BATHE, *Finite Element Procedures for Engineering Analysis*, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, N J, 1982).



-
- [4] O.C. ZIENKIEWICZ, R.L.TAYLOR, *The Finite Element Method*, IV edition, vol.2, Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity, McGraw-Hill Book Company, 1991.
- [5] H.T.Y. Yang, S. Saigal, A. Masud, R.K. Kapania, "A Survey of Recent Shell Finite Elements", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **47**, 101-127 (2000).
- [6] D. CHAPELLE, K.J. BATHE, *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.