https://unica.adobeconnect.com/p60w64raa2ov/

https://unica.adobeconnect.com/pa7k97sgnqm4/

L'USO DELL'EQUZIONE DELLA LINEA ELASTICA

L'equazione della linea elastica, vista quando si è parlato della flessione semplice, è la seguente:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_z(x)}{EI_{zz}}$$

Attraverso una doppia integrazione, permette di trovare la funzione $v(x)$ che esprime la configurazione deformata della trave di rigidezza flessionale EI_{zz}, quando è sottoposta al momento flettente $M_z(x)$.

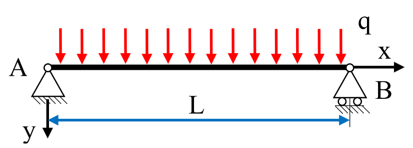
Abbiamo già visto un esempio di applicazione di questo metodo, che ha consentito di dimostrare che per le travi snelle, il contributo del taglio alla funzione $v(x)$ diventa trascurabile.

In questo capitolo vedremo come calcolare la freccia di una trave quando sia sottoposta a vari tipi di vincoli e carichi.

ESEMPI

Esercizio N.1

La trave prismatica semplicemente appoggiata AB porta un carico uniformemente distribuito q per unità di lunghezza. Determinare l'equazione della linea elastica e lo spostamento massimo della trave.



<u>Soluzione</u>

Ricordiamo l'equazione della linea elastica: $EI_{zz}\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -M_z(x)$ dove l'asse x coincide con l'asse della trave, lo spostamento $v(x)$ è orientato come l'asse y verso il basso e l'asse z è orizzontale e passa per il baricentro della sezione trasversale della trave. La reazione verticale nel punto A vale $ql/2$ e l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M(x)=\frac{q\cdot L}{2}\cdot x-\frac{q\cdot x^2}{2}=\frac{q\cdot x}{2}\cdot(L-x)$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica otteniamo:

$$EI_{zz}\cdot\frac{dv(x)}{dx}=EI_{zz}\cdot\vartheta(x)=\frac{q}{2}\cdot\int(x^2-L\cdot x)\cdot dx=\frac{q}{2}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-L\cdot\frac{x^2}{2}+c_1\right)$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$EI_{zz}\cdot v(x)=\int\frac{q}{2}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-L\cdot\frac{x^2}{2}+c_1\right)\cdot dx=\frac{q}{2}\cdot\left(\frac{x^4}{12}-L\cdot\frac{x^3}{6}+c_1\cdot x+c_2\right)$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per $x=0$ $\quad v(x=0)=0\rightarrow c_2=0$

b) Per $x=L$ $\quad v(x=L)=0\rightarrow\frac{q}{2}\cdot\left(\frac{L^4}{12}-L\cdot\frac{L^3}{6}+c_1\cdot L\right)=0$

da cui: $\quad c_1=\frac{L^3}{6}-\frac{L^3}{12}=\frac{L^3}{12}$

Di conseguenza, l'equazione della linea elastica è la seguente:

$$v(x)=\frac{\frac{q}{2}\cdot\left(\frac{x^4}{12}-L\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{L^3}{12}\cdot x\right)}{EI_{zz}}$$

Lo spostamento massimo della trave si ha nel punto in cui la tangente alla curva elastica è nulla:

$$\frac{dv(x)}{dx}=\vartheta(x)=\frac{\frac{q}{2}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-L\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{L^3}{12}\right)}{EI_{zz}}=0$$

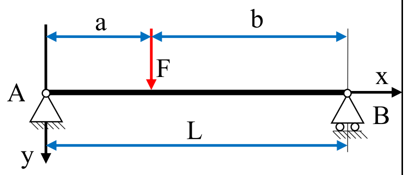
E' necessario trovare gli zeri del polinomio: $y=4\cdot x^3-6\cdot L\cdot x^2+L^3$

Uno degli zeri si trova in $x=L/2$, gli altri sono fuori dalla trave e quindi non hanno alcun significato fisico. Di conseguenza lo spostamento massimo della trave vale:

$$v_{max}=\frac{\frac{q}{2}\cdot\left[\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^4}{12}-L\cdot\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{6}+\frac{L^3}{12}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{EI_{zz}}=\frac{\frac{q}{2}\cdot\left[\frac{L^4}{192}-\frac{L^4}{48}+\frac{L^4}{24}\right]}{EI_{zz}}=\frac{5\cdot q\cdot L^4}{384\cdot EI_{zz}}$$

Esercizio N.2

Per la trave prismatica semplicemente appoggiata AB mostrata in figura, determinare lo spostamento e la rotazione nel punto di applicazione del carico.



Soluzione

Applicando le equazioni cardiali della statica possiamo calcolare le reazioni verticali negli appoggi A e B:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B \cdot L - F \cdot a = 0 \rightarrow V_B = \frac{a}{L} \cdot F$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_A + V_B - F = 0 \rightarrow V_A = F - \frac{a}{L} \cdot F = \frac{b}{L} \cdot F$$

Nel tratto: $0 \leq x \leq a$ l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M_z(x) = V_A \cdot x = \frac{b}{L} \cdot F \cdot x$$

Poniamo in B l'origine di un sistema di riferimento orientato verso sinistra, di coordinate $t - y$.

Nel tratto: $0 \leq t \leq b$ l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M_z(t) = V_B \cdot t = \frac{a}{L} \cdot F \cdot t$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica nel tratto $0 \leq x \leq a$ otteniamo (le relative equazioni avranno il pedice 1):

$$EI_{zz} \cdot \frac{dv_1(x)}{dx} = EI_{zz} \cdot \vartheta_1(x) = -\frac{b}{L} \cdot F \cdot \int x \cdot dx = -\frac{b}{L} \cdot F \cdot \left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$EI_{zz} \cdot v_1(x) = -\frac{b}{L} \cdot F \cdot \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) \cdot dx = -\frac{b}{L} \cdot F \cdot \left(\frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x + c_2\right)$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica nel tratto $0 \leq t \leq b$ otteniamo (le relative equazioni avranno il pedice 2):

$$EI_{zz} \cdot \frac{dv_2(t)}{dt} = EI_{zz} \cdot \vartheta_2(t) = -\frac{a}{L} \cdot F \cdot \int t \cdot dt = -\frac{a}{L} \cdot F \cdot \left(\frac{t^2}{2} + c_3\right)$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$EI_{zz}\cdot v_2(t)=-\frac{a}{L}\cdot F\cdot\int\left(\frac{t^2}{2}+c_3\right)\cdot dt=-\frac{a}{L}\cdot F\cdot\left(\frac{t^3}{6}+c_3\cdot t+c_4\right)$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per $x=0$ $\quad v_1(x=0)=0\rightarrow c_2=0$

b) Per $t=0$ $\quad v_2(t=0)=0\rightarrow c_4=0$

c) Per $x=a$ e $t=b$ $\quad v_1(x=a)=v_2(t=b)$ da cui

$$-\frac{b}{L}\cdot F\cdot\left(\frac{a^3}{6}+c_1\cdot a\right)=-\frac{a}{L}\cdot F\cdot\left(\frac{b^3}{6}+c_3\cdot b\right)$$

d) Per $x=a$ e $t=b$ $\quad \vartheta_1(x=a)=-\vartheta_2(t=b)$ da cui

$$-\frac{b}{L}\cdot F\cdot\left(\frac{a^2}{2}+c_1\right)=\frac{a}{L}\cdot F\cdot\left(\frac{b^2}{2}+c_3\right)$$

Semplificando, possiamo scrivere:

$$\frac{a^2}{6}+c_1=\frac{b^2}{6}+c_3 \qquad ; \qquad -\frac{a^2\cdot b}{2}-c_1\cdot b=\frac{a\cdot b^2}{2}+c_3\cdot a$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ b & a\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}c_1\\ c_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{b^2-a^2}{6}\\ -\dfrac{a\cdot b}{2}(a+b)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{(b-a)\cdot L}{6}\\ -\dfrac{a\cdot b\cdot L}{2}\end{Bmatrix}$$

da cui risulta:

$$c_1=\frac{\begin{Vmatrix}\dfrac{(b-a)\cdot L}{6} & -1\\ -\dfrac{a\cdot b\cdot L}{2} & a\end{Vmatrix}}{a+b}=\frac{(b-a)\cdot a}{6}-\frac{a\cdot b}{2}=-\frac{a}{6}\cdot(a+2b)$$

$$c_3=\frac{\begin{Vmatrix}1 & \dfrac{(b-a)\cdot L}{6}\\ b & -\dfrac{a\cdot b\cdot L}{2}\end{Vmatrix}}{a+b}=-\frac{a\cdot b}{2}-\frac{(b-a)\cdot b}{6}=-\frac{b}{6}\cdot(2a+b)$$

L'equazione della linea elastica risulta quindi la seguente:

a) per $0 \leq x \leq a$

$$v_1(x) = \frac{-F \cdot b \cdot x \cdot [x^2 - 2 \cdot a \cdot b - a^2]}{6L \cdot EI_{zz}} \quad ; \quad \vartheta_1(x) = \frac{-F \cdot b \cdot (3x^2 - 2 \cdot a \cdot b - a^2)}{6L \cdot EI_{zz}}$$

b) per $0 \leq t \leq b$

$$v_2(t) = \frac{-F \cdot a \cdot t \cdot (t^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2)}{6L \cdot EI_{zz}} \quad ; \quad \vartheta_2(t) = \frac{-F \cdot a \cdot (3t^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2)}{6L \cdot EI_{zz}}$$

In $x = a$ la freccia e la rotazione valgono:

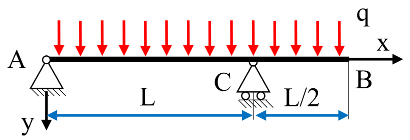
$$v_1(x = a) = \frac{F \cdot a^2 \cdot b^2}{3L \cdot EI_{zz}} \quad ; \quad \vartheta_1(x = a) = \frac{F \cdot a \cdot b}{3EI_{zz}}$$

Se $a = b = L/2$ allora: $v_1(x = a) = \frac{F \cdot L^3}{48EI_{zz}}$; $\vartheta_1(x = a) = \frac{F \cdot L^2}{12EI_{zz}}$

Linea elastica, scalata per la rappresentazione grafica

Esercizi N.3

Per il carico mostrato, determinare (a) l'equazione della linea elastica per la trave AB, (b) lo spostamento dell'estremità libera, (c) la rotazione dell'estremità libera.



Soluzione

Applicando le equazioni cardiali della statica possiamo calcolare le reazioni verticali negli appoggi A e C:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_C \cdot L - q \cdot \frac{(L+L/2)^2}{2} = 0 \ \rightarrow V_C = \frac{9}{8} \cdot q \cdot L$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_A + V_C - q \cdot (L + L/2) = 0 \rightarrow V_A = \frac{3}{2} \cdot q \cdot L - \frac{9}{8} \cdot q \cdot L = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$$

Nel tratto: $0 \leq x \leq L$ l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M_z = V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

Poniamo in B l'origine di un sistema di riferimento orientato verso sinistra, di coordinate $t - y$.

Nel tratto: $0 \leq t \leq L/2$ l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M_z = -\frac{q \cdot t^2}{2}$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica nel tratto $0 \leq x \leq L$ otteniamo (le relative equazioni avranno il pedice 1):

$$EI_{zz} \cdot \frac{dv_1(x)}{dx} = EI_{zz} \cdot \vartheta_1(x)$$

$$= \int \left(\frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{3}{8} \cdot q \cdot L \cdot x \right) \cdot dx = \frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{3}{16} \cdot q \cdot L \cdot x^2 + C_1$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$EI_{zz} \cdot v_2(x) = \frac{q \cdot x^4}{24} - \frac{1}{16} \cdot q \cdot L \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica nel tratto $0 \leq t \leq L/2$ otteniamo (le relative equazioni avranno il pedice 2):

$$EI_{zz} \cdot \frac{dv_2(t)}{dt} = EI_{zz} \cdot \vartheta_2(t) = \frac{q \cdot t^3}{6} + C_3$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$EI_{zz} \cdot v_2(t) = \frac{q \cdot t^4}{24} + C_3 \cdot t + C_4$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per $x = 0$ $\quad v_1(x = 0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per $x = L$ $\quad v_1(x = L) = 0 \rightarrow \frac{q \cdot L^4}{24} - \frac{q \cdot L^4}{16} + C_1 \cdot L = 0 \rightarrow C_1 = \frac{q \cdot L^3}{48}$

c) Per $t = L/2$ $\quad v_2(t = L/2) = 0 \rightarrow \frac{q \cdot L^4}{24 \cdot 16} + C_3 \cdot \frac{L}{2} + C_4 = 0$

da cui $\quad C_4 = -\frac{q \cdot L^4}{24 \cdot 16} - C_3 \cdot \frac{L}{2}$

d) Per $x = L$ e $t = L/2$ $\quad \vartheta_1(x = L) = -\vartheta_2(t = L/2)$

da cui $\quad \frac{q \cdot L^3}{6} - \frac{3 \cdot q \cdot L^3}{16} + \frac{q \cdot L^3}{48} = -\frac{q \cdot L^3}{48} - C_3$

Dalle ultime due equazioni risulta:

$$C_3 = \frac{-q \cdot L^3}{48} \quad ; \quad C_4 = \frac{q \cdot L^4}{128}$$

L'equazione della linea elastica risulta quindi la seguente:

a) per $0 \leq x \leq L$

$$v_1(x) = \frac{2 \cdot q \cdot x^4 - 3 \cdot q \cdot L \cdot x^3 + q \cdot L^3 \cdot x}{48 EI_{zz}} \quad ; \quad \vartheta_1(x) = \frac{8 \cdot q \cdot x^3 - 9 \cdot q \cdot L \cdot x^2 + q \cdot L^3}{48 EI_{zz}}$$

b) per $0 \leq t \leq L/2$

$$v_2(t) = \frac{16 \cdot q \cdot t^4 - 8 \cdot q \cdot L^3 \cdot t + 3 \cdot q \cdot L^4}{384 EI_{zz}} \quad ; \quad \vartheta_2(t) = \frac{8 \cdot q \cdot t^3 - q \cdot L^3}{48 EI_{zz}}$$

Nel punto A, dove $x = 0$ abbiamo:

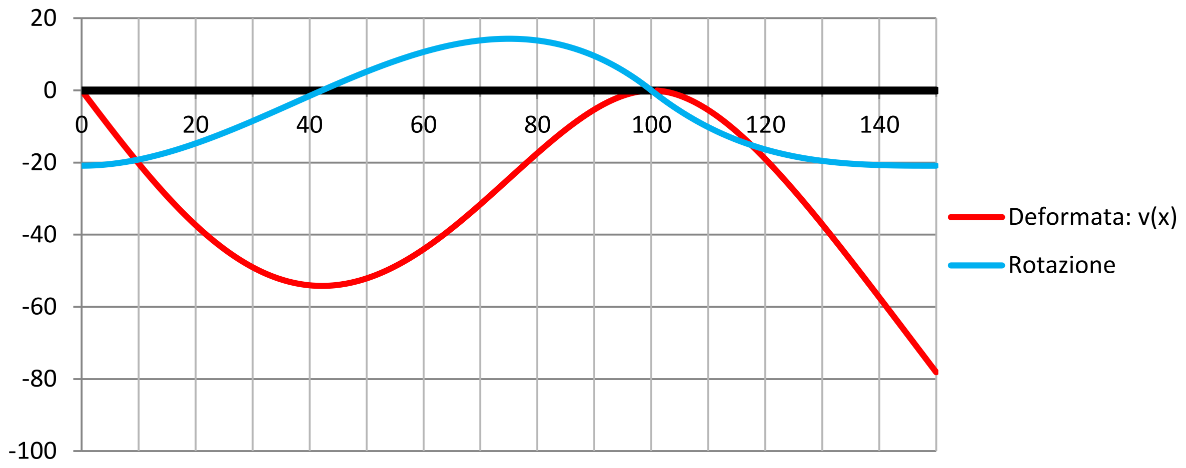
$$v_1(x = 0) = 0 \quad ; \quad \vartheta_1(x = 0) = \frac{q \cdot L^3}{48 EI_{zz}}$$

Nel punto B, dove $t = 0$ abbiamo:

$$v_2(t=0) = \frac{q \cdot L^4}{128 E I_{zz}} \quad ; \quad \vartheta_2(t=0) = -\frac{q \cdot L^3}{16 E I_{zz}}$$

Nel punto C, dove $x = L$ e $t = L/2$ abbiamo:

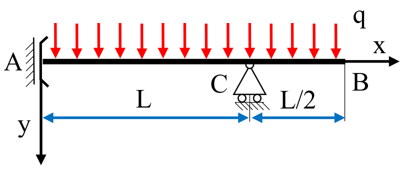
$$v_1(x=L) = 0 = v_2(t = L/2); \;\; \vartheta_1(x=L) = 0 \;\; ; \quad \vartheta_2(t=L/2) = 0$$



Linea elastica e rotazione, scalate per la rappresentazione grafica

Esercizi N.4

Per il carico mostrato, determinare (a) l'equazione della linea elastica per la trave AB, (b) lo spostamento dell'estremità libera, (c) la rotazione dell'estremità libera.



Soluzione

Applicando le equazioni cardiali della statica possiamo calcolare le reazioni vincolari:

$$\sum F_y = V_C - q \cdot (L + L/2) = 0 \qquad \text{da cui} \qquad V_C = \frac{3}{2} qL$$

$$\sum M_z = M_A + V_C \cdot L - q \cdot \frac{(L + L/2)^2}{2} = 0$$

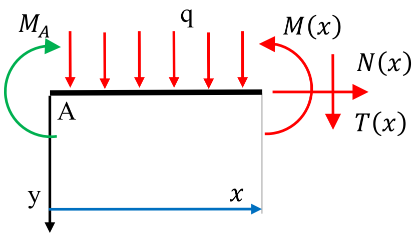
da cui: $\quad M_A = q \cdot \frac{(L+L/2)^2}{2} - V_C \cdot L = \frac{9}{8} qL^2 - \frac{3}{2} qL^2 = -\frac{3}{8} qL^2$

Poiché si era ipotizzato che il momento nel nodo A fosse antiorario, si cambia verso e segno al risultato: diventa orario di modulo pari a $M_A = \frac{3}{8} qL^2$.

Nel tratto: $0 \leq x \leq L$ l'equazione di equilibrio alla rotazione è la seguente:

$$\sum M_z = M(x) - M_A + \frac{qx^2}{2} = 0$$

$$M_z(x) = M_A - \frac{qx^2}{2} = \frac{3}{8} qL^2 - \frac{qx^2}{2}$$

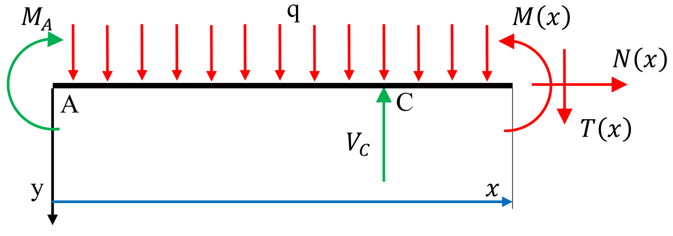


da cui risulta che:

$$M_z(L) = -\frac{qL^2}{8}$$

Nel tratto: $L \leq x \leq \frac{3}{2} L$

l'equazione di equilibrio alla rotazione è la seguente:



$$\sum M_z = M(x) - M_A - V_C \cdot (x - L) + \frac{qx^2}{2} = 0$$

da cui risulta:

$$M(x) = M_A + V_C \cdot (x-L) - \frac{qx^2}{2} = \frac{3}{8}qL^2 + \frac{3}{2}qL \cdot (x-L) - \frac{qx^2}{2}$$

Semplificando si ottiene: $M(x) = -\frac{9}{8}qL^2 + \frac{3}{2}qLx - \frac{qx^2}{2}$.

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica nel tratto $0 \leq x \leq L$ otteniamo (le relative equazioni avranno il pedice 1):

$$EI_{zz}\frac{dv_1(x)}{dx} = EI_{zz} \cdot \vartheta_1(x) = \frac{qx^3}{6} - \frac{3}{8}qL^2x + C_1$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$EI_{zz} \cdot v_1(x) = \frac{qx^4}{24} - \frac{3}{16}qL^2x^2 + C_1x + C_2$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica nel tratto $L \leq x \leq \frac{3}{2}L$ otteniamo (le relative equazioni avranno il pedice 2):

$$EI_{zz}\frac{dv_2(x)}{dt} = EI_{zz} \cdot \vartheta_2(x) = \frac{qx^3}{6} - \frac{3}{4}qLx^2 + \frac{9}{8}qL^2x + C_3$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$EI_{zz} \cdot v_2(x) = \frac{qx^4}{24} - \frac{1}{4}qLx^3 + \frac{9}{16}qL^2x^2 + C_3x + C_4$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per $x = 0$ $\quad \vartheta_1(x=0) = 0$

b) Per $x = L$ $\quad v_1(x=L) = 0$

c) Per $x = L$ $\quad v_2(x=L) = 0$

d) Per $x = L$ $\quad \vartheta_1(x=L) = \vartheta_2(x=L)$

Grazie all'equazione a) si ottiene: $C_1 = 0$

Dalla condizione b) $\quad EI_{zz} \cdot v_1(L) = \frac{qL^4}{24} - \frac{3}{16}qL^4 + C_2 = 0$ da cui:

$$C_2 = \frac{7}{48}qL^4$$

Dalla condizione c) $\quad EI_{zz} \cdot v_2(L) = \frac{qL^4}{24} - \frac{qL^4}{4} + \frac{9}{16}qL^4 + C_3L + C_4 = 0$

Dalla condizione d) $\vartheta_1(L) = -\frac{5}{24}\frac{qL^3}{EI_{zz}} = \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{9}{8}\right)\frac{qL^3}{EI_{zz}} + \frac{C_3}{EI_{zz}} = \vartheta_2(L)$

da cui: $C_3 = \left(-\frac{5}{24} - \frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{9}{8}\right)qL^3 = \frac{-3qL^3}{4}$

Sostituendo il valore della costante C_3 nell'equazione precedente si ottiene:

$$C_4 = -\frac{qL^4}{24} + \frac{qL^4}{4} - \frac{9}{16}qL^4 + \frac{3}{4}qL^4 = \left(\frac{-2 + 12 - 27 + 36}{48}\right)qL^4 = \frac{19}{48}qL^4$$

Per concludere le equazioni sono le seguenti:

Tratto AC: $0 \le x \le L$

$$\begin{cases} v_1(x) = \dfrac{q}{48EI_{zz}}(2x^4 - 9L^2x^2 + 7L^4) \\ \vartheta_1(x) = \dfrac{q}{24EI_{zz}}(4x^3 - 9L^2x) \end{cases}$$

Tratto CB: $L \le x \le \frac{3}{2}L$

$$\begin{cases} v_2(x) = \dfrac{q}{48EI_{zz}}(2x^4 - 12Lx^3 + 27L^2x^2 - 36L^3x + 19L^4) \\ \vartheta_2(x) = \dfrac{q}{24EI_{zz}}(4x^3 - 18Lx^2 + 27L^2x - 18L^3) \end{cases}$$

Controllo delle condizioni al contorno:

a) Per $x = 0$ $\quad \vartheta_1(x = 0) = 0$ OK

b) Per $x = L$ $\quad v_1(x = L) = 0$ OK

c) Per $x = L$ $\quad v_2(x = L) = 0$ OK

d) Per $x = L$ $\quad \vartheta_2(x = L) = \vartheta_2(x = L) = \frac{-5qL^3}{24EI_{zz}}$ OK

Lo spostamento verticale del punto A vale: $v_1(0) = \frac{7qL^4}{48EI_{zz}}$

Lo spostamento verticale del punto B vale: $v_2\left(\frac{3}{2}L\right) = \frac{-37qL^4}{384EI_{zz}}$

La rotazione del punto B vale: $\vartheta_2\left(\frac{3}{2}L\right) = \frac{-3qL^3}{16EI_{zz}}$

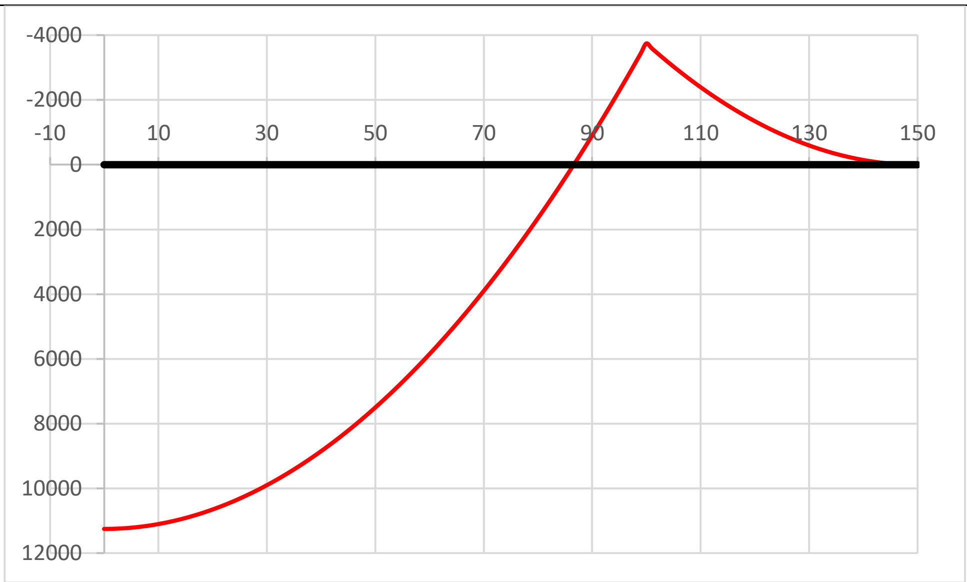
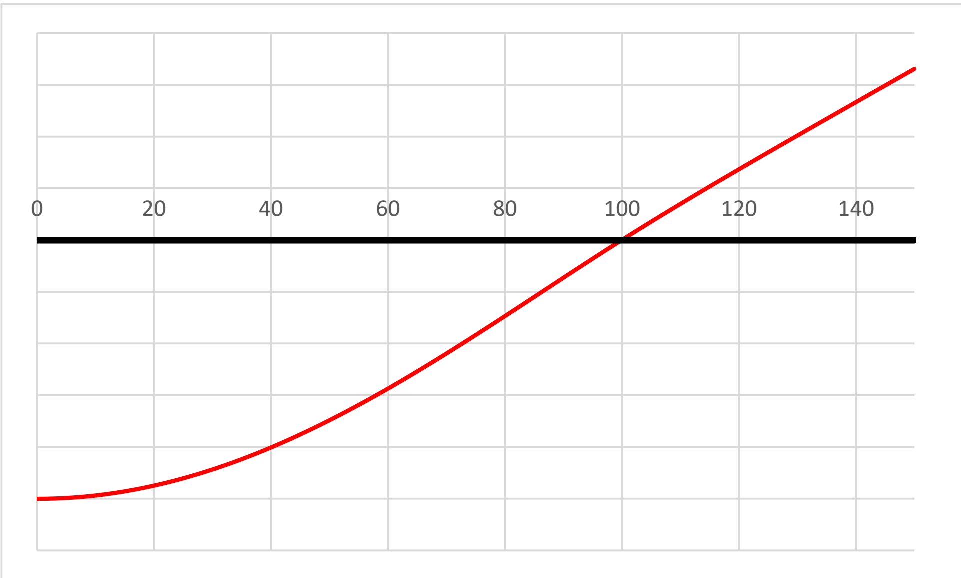


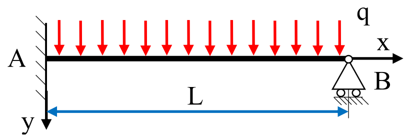
Diagramma dei momenti flettenti



Linea elastica, scalata per la rappresentazione grafica

Esercizio N.5

Determinare le reazioni nei vincoli per la trave prismatica di figura.



Soluzione

La trave è una volta iperstatica: per calcolare le reazioni a terra non possiamo considerarla indeformabile.

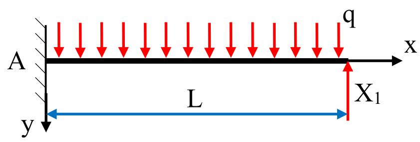
Possiamo immaginare di eliminare i vincoli sovrabbondanti (in questo caso uno solo) rendendo la struttura isostatica: eseguendo questa operazione è necessario evitare di renderla labile. Dove sono stati eliminati i vincoli è necessario aggiungere le corrispondenti reazioni incognite X_i. Non esiste una sola procedura: per esempio in questo esercizio possiamo eliminare il carrello nel punto B, oppure possiamo consentire la rotazione in A sostituendo all'incastro una cerniera a terra. Chiaramente la soluzione finale sarà identica.

Vediamo la prima procedura.

Calcoliamo le reazioni a terra utilizzando le equazioni cardinali della statica:

$$\sum F_x = H_A = 0$$

$$\sum F_y = q \cdot L - V_A - X_1 = 0$$



da cui ricaviamo:

$$V_A = q \cdot L - X_1 \quad \text{diretta verso l'alto}$$

$$\sum M = M_A - \frac{q \cdot L^2}{2} + X_1 \cdot L = 0 \text{ , (con } M_A \text{ antioraria)}$$

da cui ricaviamo: $M_A = \frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L$

Calcoliamo l'equazione dei momenti flettenti: $M(x) + \frac{q \cdot x^2}{2} + M_A - V_A \cdot x = 0$

da cui:

$$M(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2} - M_A + V_A \cdot x = -\frac{q \cdot x^2}{2} - \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) + (q \cdot L - X_1) \cdot x$$

In $x = 0$ il momento flettente vale :

$$M(x=0) = -\left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) = M_A$$

In $x = L$ il momento flettente vale :

$$M(x=L) = -\frac{q \cdot L^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{2} + X_1 \cdot L + q \cdot L^2 - X_1 \cdot L = 0$$

L'equazione della linea elastica è la seguente:

$$EI_{zz} \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x) = +\frac{q \cdot x^2}{2} + \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) - (q \cdot L - X_1) \cdot x$$

Integrando una prima volta otteniamo:

$$EI_{zz} \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = \frac{q \cdot x^3}{6} + \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) \cdot x - (q \cdot L - X_1) \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$EI_{zz} \cdot v(x) = \frac{q \cdot x^4}{24} + \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) \cdot \frac{x^2}{2} - (q \cdot L - X_1) \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

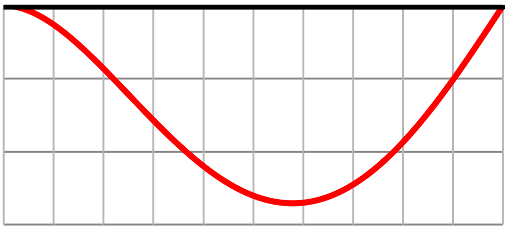
a) Per $x = 0$ $\quad v(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$
b) Per $x = 0$ $\quad \vartheta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$
c) Per $x = L$ $\quad EI_{zz} \cdot v(L) = \frac{q \cdot L^4}{24} + \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L\right) \cdot \frac{L^2}{2} - (q \cdot L - X_1) \cdot \frac{L^3}{6} = 0$

Grazie a l'ultima equazione possiamo calcolare l'iperstatica X_1:

$$X_1 = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$$

Di conseguenza, l'equazione della linea elastica è la seguente:

$$v(x) = \frac{2 \cdot q \cdot x^4 - 5 \cdot q \cdot L \cdot x^3 + 3 \cdot q \cdot L^2 \cdot x^2}{48 EI_{zz}}$$



Linea elastica, scalata per la rappresentazione grafica

Le reazioni nei vincoli valgono:

$$V_A = q \cdot L - X_1 = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L \qquad M_A = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

La freccia massima si trova nel punto, tra A e B, in cui si annulla la derivata prima:

$$EI_{zz} \cdot \vartheta(x) = \frac{q \cdot x^3}{6} + \frac{q \cdot L^2}{8} \cdot x - \frac{5}{16} \cdot q \cdot L \cdot x^2 = 0$$

Risolvendo l'equazione troviamo:

$$x(v_{\max}) = \frac{+15 - \sqrt{33}}{16} L \cong 0.5785 \cdot L$$

In corrispondenza di tale coordinata la freccia raggiunge il valore massimo che vale circa:

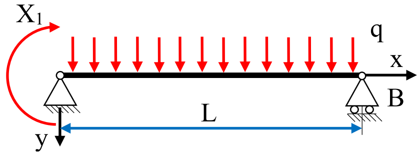
$$v_{max} \cong \frac{q \cdot L^4}{184.6 \cdot EI_{zz}}$$

<u>Vediamo la seconda procedura</u>.

Calcoliamo le reazioni a terra utilizzando le equazioni cardinali della statica:

$$\sum F_x = H_A = 0$$

$$\sum M = X_1 + \frac{q \cdot L^2}{2} - V_B \cdot L = 0$$



da cui ricaviamo:

$$V_B = \frac{q \cdot L}{2} + \frac{X_1}{L} \qquad \text{diretta verso l'alto}$$

$$\sum F_y = q \cdot L - V_A - V_B = 0$$

da cui ricaviamo:

$$V_A = q \cdot L - V_B = \frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}$$

Calcoliamo l'equazione dei momenti flettenti:

$$M(x) + \frac{q \cdot x^2}{2} - X_1 - V_A \cdot x = 0$$

da cui: $$M(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2} + X_1 + V_A \cdot x = -\frac{q \cdot x^2}{2} + X_1 + \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot x$$

In $x = 0$ il momento flettente vale :

$$M(x = 0) = X_1$$

In $x = L$ il momento flettente vale :

$$M(x = L) = -\frac{q \cdot L^2}{2} + X_1 + \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot L \ = 0$$

L'equazione della linea elastica è la seguente:

$$EI_{zz} \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x) = +\frac{q \cdot x^2}{2} - X_1 - \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot x$$

Integrando una prima volta otteniamo:

$$EI_{zz} \cdot \frac{dv(x)}{dx} = EI_{zz} \cdot \vartheta(x) = \frac{q \cdot x^3}{6} - X_1 \cdot x - \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$EI_{zz} \cdot v(x) = \frac{q \cdot x^4}{24} - X_1 \cdot \frac{x^2}{2} - \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per $x = 0$ $\qquad v(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per $x = 0$ $\qquad \vartheta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

c) Per $x = L$ $\qquad v(L) = \frac{q \cdot L^4}{24} - X_1 \cdot \frac{L^2}{2} - \left(\frac{q \cdot L}{2} - \frac{X_1}{L}\right) \cdot \frac{L^3}{6} = 0$

Grazie a l'ultima equazione possiamo calcolare l'iperstatica X_1:

$$X_1 = -\frac{q \cdot L^2}{8}$$

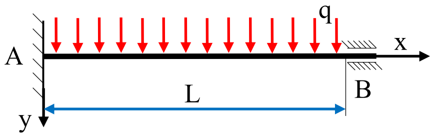
Di conseguenza, l'equazione della linea elastica è la seguente:

$$v(x) = \frac{2qx^4 - 5qLx^3 + 3qL^2x^2}{48EI_{zz}} = \frac{qx^2[2x^2 - 5Lx + 3L^2]}{48EI_{zz}}$$

Soluzione identica a quella trovata con la prima procedura.

Esercizi N.6

Per il carico mostrato, determinare (a) l’equazione della linea elastica per la trave a mensola AB, (b) lo spostamento dell’estremità libera, (c) la rotazione dell’estremità libera.



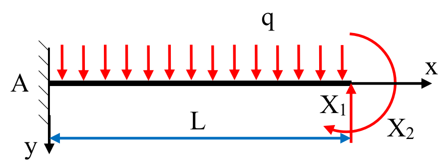
<u>Soluzione</u>

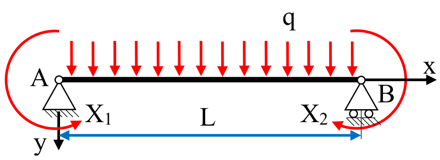
La trave è due volte iperstatica: per calcolare le reazioni a terra non possiamo considerarla indeformabile.

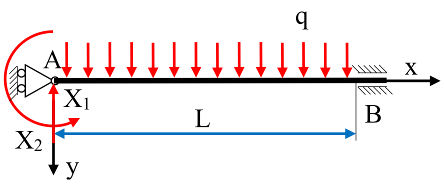
Possiamo immaginare di eliminare i vincoli sovrabbondanti (in questo caso due) rendendo la struttura isostatica: eseguendo questa operazione è necessario evitare di renderla labile. Osservando il terzo schema (in basso a destra), vediamo che se avessimo inserito il carrello nel nodo A ruotato di 90°, la struttura sarebbe risultata isostatica, ma labile, in quanto non sarebbero impediti gli spostamenti orizzontali.

Dove sono stati eliminati i vincoli è necessario aggiungere le corrispondenti reazioni incognite X_i.

Non esiste una sola procedura: per esempio in questo esercizio possiamo utilizzare i tre schemi statici mostrati nelle figure a lato. Chiaramente le tre soluzioni finali dovranno essere identiche.







Vediamo la prima procedura, relativa al primo schema statico mostrato in figura.

Calcoliamo le reazioni a terra utilizzando le equazioni cardinali della statica:

$$\sum F_x = H_A = 0$$

$$\sum F_y = q \cdot L - V_A - X_1 = 0$$

$$\sum M = \frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L + X_2 - M_A = 0$$

da cui ricaviamo:

$V_A = q \cdot L - X_1$ diretta verso l'alto

$M_A = \frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L + X_2$ diretta in senso antiorario

Calcoliamo l'equazione dei momenti flettenti: $M(x) + \frac{q \cdot x^2}{2} + M_A - V_A \cdot x = 0$

da cui:

$$M(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2} - M_A + V_A \cdot x$$

In $x = 0$ il momento flettente vale : $M(x = 0) = M_A$

In $x = L$ il momento flettente vale :

$$M(x = L) = -\frac{q \cdot L^2}{2} - M_A + V_A \cdot L$$

$$= -\frac{q \cdot L^2}{2} - \left(\frac{q \cdot L^1}{2} - X_1 \cdot L + X_2\right) + (q \cdot L - X_1) \cdot L = X_2$$

L'equazione della linea elastica è la seguente:

$$EI_{zz} \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x) = \frac{q \cdot x^2}{2} - V_A \cdot x + M_A$$

Integrando una prima volta otteniamo:

$$EI_{zz} \frac{dv(x)}{dx} = EI_{zz} \vartheta(x) = \frac{q \cdot x^3}{6} - V_A \frac{x^2}{2} + M_A x + C_1$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$EI_{zz} v(x) = \frac{q \cdot x^4}{24} - V_A \frac{x^3}{6} + M_A \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per $x = 0$ $\quad v(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per $x = 0$ $\quad \vartheta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

c) Per $x = L$ $\quad EI_{zz} \cdot v(L) = \frac{q \cdot L^4}{24} - V_A \cdot \frac{L^3}{6} + M_A \cdot \frac{L^2}{2} = 0$

d) Per $x = L$ $\quad EI_{zz} \cdot \frac{dv(L)}{dx} = EI_{zz} \cdot \vartheta(L) = \frac{q \cdot L^3}{6} - V_A \cdot \frac{L^2}{2} + M_A \cdot L = 0$

Semplificando le ultime due equazioni, possiamo scrivere il seguente sistema di due equazioni e due incognite:

$$4 \cdot L \cdot V_A - 12 \cdot M_A = q \cdot L^2$$
$$3 \cdot L \cdot V_A - 6 \cdot M_A = q \cdot L^2$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot L & -12 \\ 3 \cdot L & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \cdot L^2 \\ q \cdot L^2 \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$V_A = \frac{\begin{Vmatrix} q \cdot L^2 & -12 \\ q \cdot L^2 & -6 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 4 \cdot L & -12 \\ 3 \cdot L & -6 \end{Vmatrix}} = \frac{6 \cdot q \cdot L^2}{12 \cdot L} = \frac{q \cdot L}{2}; \qquad M_A = \frac{\begin{Vmatrix} 4 \cdot L & q \cdot L^2 \\ 3 \cdot L & q \cdot L^2 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 4 \cdot L & -12 \\ 3 \cdot L & -6 \end{Vmatrix}} = \frac{q \cdot L^3}{12 \cdot L} = \frac{q \cdot L^2}{12}$$

Ricordando che:

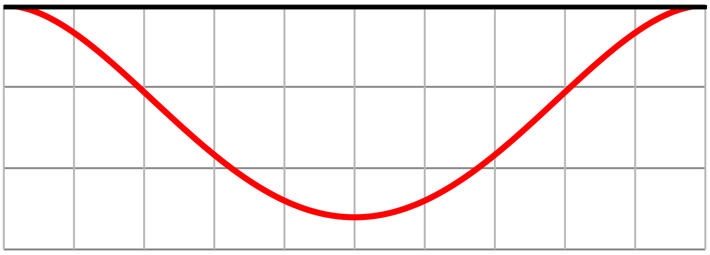
$$V_A = q \cdot L - X_1$$
$$M_A = \frac{q \cdot L^2}{2} - X_1 \cdot L + X_2$$

possiamo calcolare le reazioni iperstatiche X_1 e X_2:

$$X_1 = q \cdot L - V_A = q \cdot L - \frac{q \cdot L}{2} = \frac{q \cdot L}{2}$$
$$X_2 = M_A - \frac{q \cdot L^2}{2} + X_1 \cdot L = \frac{q \cdot L^2}{12} - \frac{q \cdot L^2}{2} + \frac{q \cdot L}{2} \cdot L = \frac{q \cdot L^2}{12}$$

L'equazione della linea elastica risulta la seguente:

$$v(x) = \frac{q \cdot x^4 - 4 \cdot V_A \cdot x^3 + 12 \cdot M_A \cdot x^2}{24 EI_{zz}} = \frac{q \cdot x^2}{24 EI_{zz}} (x^2 - 2 \cdot L \cdot x + L^2)$$



Linea elastica, scalata per la rappresentazione grafica