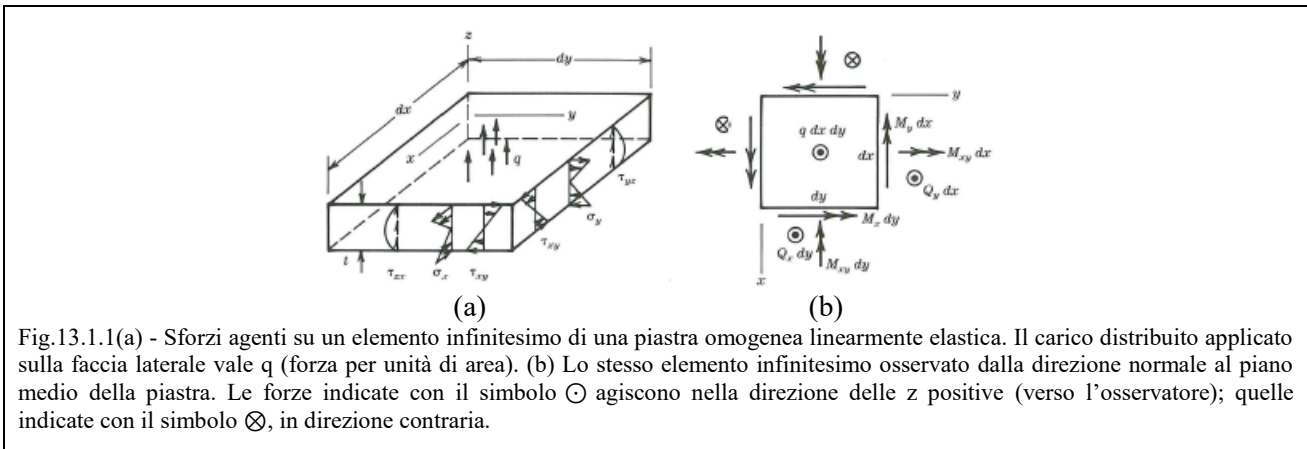




**CAP. 13 – FLESSIONE DELLE PIASTRE PIANE**

**13.1 Teoria flessionale delle piastre piane**

**Forze, sforzi e momenti.** Una piastra piana reagisce ai carichi trasversali grazie ai momenti flettenti, come capita anche alle travi rettilinee. La Fig.13.1.1a mostra gli sforzi che agiscono sulle sezioni trasversali di una piastra di materiale omogeneo e linearmente elastico. Gli sforzi  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  variano linearmente in direzione  $z$  e sono legati ai momenti flettenti  $M_x$  e  $M_y$ . Anche lo sforzo di taglio  $\tau_{xy}$  varia linearmente con  $z$  ed è legato al momento torcente  $M_{xy}$ . Si ammette che lo sforzo normale  $\sigma_z$  sia trascurabile rispetto agli sforzi  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ . Gli sforzi di taglio  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  variano in modo parabolico con  $z$ . Il carico laterale  $q$  comprende i carichi superficiali e quelli di massa, entrambe in direzione  $z$ . A meno che non si dica altrimenti, “*stato flessionale*” significa che i carichi esterni non hanno componenti parallele al piano medio  $xy$  e che su di esso gli sforzi  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  sono nulli. A parte lo sforzo  $\tau_{xy}$ , la distribuzione degli sforzi appena menzionata è una diretta estensione della teoria delle travi al caso bidimensionale.



Gli sforzi in Fig.13.1.1 producono i seguenti momenti flettenti e le seguenti forze di taglio:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \cdot dz \quad ; \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \cdot dz \quad ; \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \cdot dz \quad (13.1.1a)$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \cdot dz \quad ; \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \cdot dz \quad (13.1.1b)$$

I momenti  $M$  e le forze  $Q$  sono “*per unità di lunghezza*”. Gli incrementi infinitesimi dei momenti valgono  $M_x dy$ ,  $M_{xy} dy$ ,  $M_{xy} dx$  e  $M_y dx$  e quelli delle forze  $Q_x dy$  e  $Q_y dx$ , come mostrato in fig.13.1.1b. Gli sforzi  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  assumono i seguenti valori:

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{t^3/12} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{t^3/12} \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy} z}{t^3/12} \quad (13.1.2)$$

(come si può verificare sostituendo le eq.13.1.2 nelle eq.13.1.1a) e raggiungono i loro valori massimi sulla superficie della piastra dove valgono:

$$\sigma_x(z = \pm t/2) = \pm \frac{6M_x}{t^2} \quad ; \quad \sigma_y(z = \pm t/2) = \pm \frac{6M_y}{t^2} \quad ; \quad \tau_{xy}(z = \pm t/2) = \pm \frac{6M_{xy}}{t^2}$$

In genere gli sforzi di taglio  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  sono piccoli rispetto a  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  e raggiungono il loro valore massimo in  $z = 0$ , dove valgono:

$$\tau_{xz} = 1.5 \frac{Q_x}{t} \quad ; \quad \tau_{yz} = 1.5 \frac{Q_y}{t}$$

**Deformazioni secondo la teoria di Kirchhoff.** Come la piastra si deforma sotto i carichi flessionali, i punti appartenenti alla superficie media (in  $z = 0$ ) si spostano solo in direzione  $z$ . Si ipotizza che un segmento rettilineo e ortogonale al piano medio prima dell’applicazione dei carichi rimanga tale (cioè retto e ortogonale al piano medio) anche sotto carico (si osservi la linea OP nella Fig.13.1.2). Di conseguenza si ipotizza che gli scorrimenti trasversali  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  siano nulli. Indicando con  $w$  lo spostamento in direzione  $z$ ,



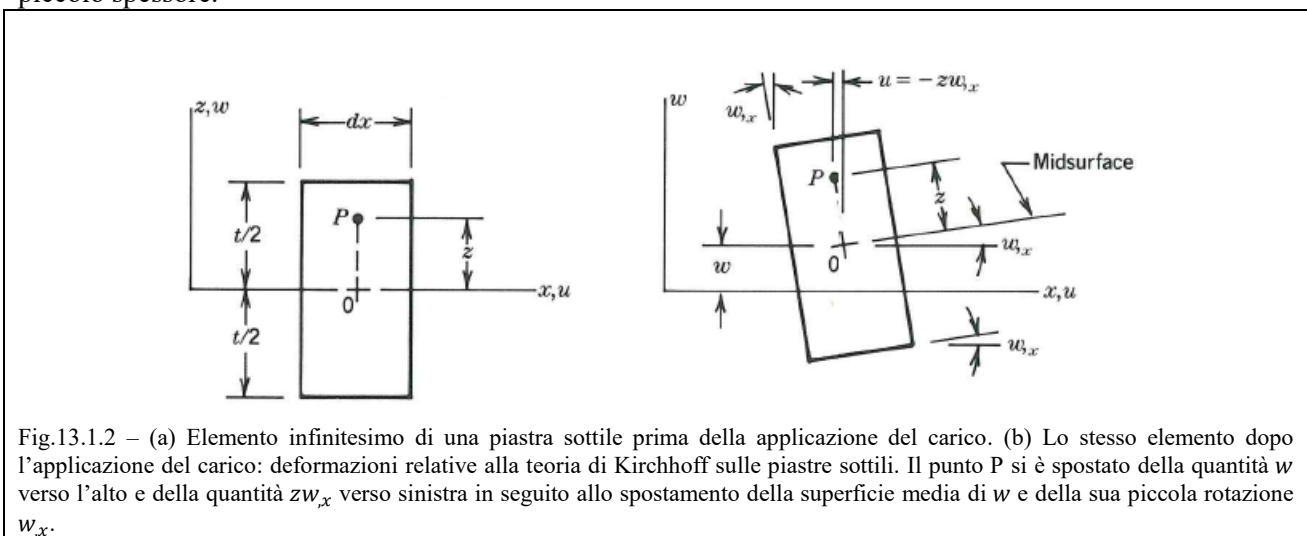
un punto disposto a distanza  $z$  dalla superficie media subisce uno spostamento  $u$  in direzione  $x$  e uno spostamento  $v$  in direzione  $y$  pari a:

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} = -z w_{,x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} = -z w_{,y} \end{cases} \quad (13.1.3a)$$

Di conseguenza le deformazioni valgono:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} = -z \frac{\partial w_{,x}}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z w_{,xx} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = v_{,y} = -z \frac{\partial w_{,y}}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -z w_{,yy} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u_{,y} + v_{,x} = -z \left( \frac{\partial w_{,x}}{\partial y} + \frac{\partial w_{,y}}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z w_{,xy} \end{cases} \quad (13.1.3b)$$

Si tratta delle relazioni deformazioni-spostamenti secondo la teoria di Kirchhoff, applicabile alle piastre di piccolo spessore.



**Deformazioni secondo la teoria di Mindlin.** Un segmento retto e normale alla superficie media della piastra prima dell'applicazione del carico rimane retto dopo l'applicazione del carico ma non necessariamente normale alla superficie media deformata. In questo modo si consente la deformazione di scorrimento trasversale. Il moto di un punto non appartenente alla superficie media non dipende più dalle pendenze  $w_{,x}$  e  $w_{,y}$  come nella teoria di Kirchhoff, ma dalle rotazioni  $\vartheta_x$  e  $\vartheta_y$  che subiscono i segmenti che prima dell'applicazione del carico erano retti e normali alla superficie media della piastra (Fig.13.1.1). Così indicando con  $\vartheta_x$  e  $\vartheta_y$  piccoli angoli di rotazione abbiamo:

$$\begin{cases} u = -z \vartheta_x \\ v = -z \vartheta_y \end{cases} \quad (13.1.4a)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} = -z \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} = -z \vartheta_{x,x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = v_{,y} = -z \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} = -z \vartheta_{y,y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u_{,y} + v_{,x} = -z \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right) = -z (\vartheta_{x,y} + \vartheta_{y,x}) \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = w_{,y} - \vartheta_y \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = w_{,x} - \vartheta_x \end{cases} \quad (13.1.4b)$$

Le precedenti equazioni rappresentano le relazioni deformazioni-spostamenti secondo la teoria di Mindlin, applicabile alle piastre di grosso spessore in quanto prendono in considerazione le deformazioni di scorrimento trasversale.

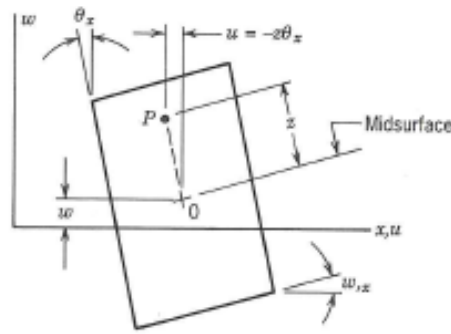


Fig.13.1.3 - Elemento infinitesimo di una piastra sottile (analoga alla Fig.13.1.2b) ma con la possibilità di scorrimenti trasversali ( $w_{,x} \neq \vartheta_x$  per cui  $\gamma_{zx} = w_{,x} - \vartheta_x \neq 0$ ).

**Relazione Momenti-Curvatura secondo la teoria di Kirchhoff.** Iniziamo ad analizzare le relazioni sforzi-deformazioni. Indichiamo con  $x$  ed  $y$  le direzioni principali di un materiale ortotropo. Si ipotizza che lo sforzo  $\sigma_z$  sia trascurabile rispetto agli sforzi  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ . Si ipotizza che anche gli scorrimenti trasversali siano trascurabili, per cui non è necessario scrivere le relazioni sforzi-deformazioni che riguardano tale deformazione. Ciò che rimane è la seguente relazione:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [E]\{\varepsilon\} \quad (13.1.5)$$

valida nel caso di materiale isotropo il cui modulo di Young valga  $E$  e il cui coefficiente di Poisson valga  $\nu$ .

La relazione momento-curvatura si ottiene sostituendo le eq.(13.1.3b) nell'eq.(13.1.5) e il risultato nelle eq. (13.1.1a). Questa procedura conduce al seguente risultato:

$$M_x = \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)} (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \quad ; \quad M_y = \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)} (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \quad ; \quad M_{xy} = \frac{-Gt^3}{6} w_{,xy}$$

che in forma matriciale assume la forma seguente:

$$\{\mathbf{M}\} = -[\mathbf{D}_K]\{\boldsymbol{\kappa}\} \quad (13.1.6)$$

dove i momenti e le curvature sono:

$$\{\mathbf{M}\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad e \quad \{\boldsymbol{\kappa}\} = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (13.1.7)$$

Per un materiale isotropo la matrice  $[\mathbf{D}_K]$  (dove l'indice  $K$  indica che la matrice è stata calcolata in base alla teoria di Kirchhoff) vale:

$$[\mathbf{D}_K] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (13.1.8)$$

Il coefficiente  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  prende il nome di "rigidezza flessionale" ed è analogo alla rigidezza flessionale  $EJ$  delle travi. In effetti se la piastra avesse larghezza unitaria e il coefficiente di Poisson fosse nullo (o, in altri termini, se la deformazione trasversale fosse impedita), allora risulterebbe:  $D = \frac{Et^3}{12} = EJ$ . L'eq.(13.1.6) mostra che anche per una piastra isotropa le azioni nelle direzioni  $x$  e  $y$  sono accoppiate. Nella Fig.13.1.4a,  $w_{,yy}$  è costante e  $w_{,xx} = w_{,xy} = 0$  (deformazione cilindrica, costante in una direzione e nulla nell'altra), ma  $M_x \neq 0$  a causa dell'effetto Poisson. Ma sui bordi liberi dove  $x = \pm a$  il momento unitario  $M_x$  si annulla, quindi questi lati subiscono una piccola torsione (*curl*) (Fig.13.1.3b). Solo quando  $a \cong t$  e  $M_x$  si approssima a zero, allora la piastra si comporta come una trave, mostrando la familiare superficie *anticlastica*. Se la piastra è isotropa, la torsione pura della Fig.13.1.4c è associata al solo momento  $-M_{xy}$  (con  $M_x = M_y = 0$ ).

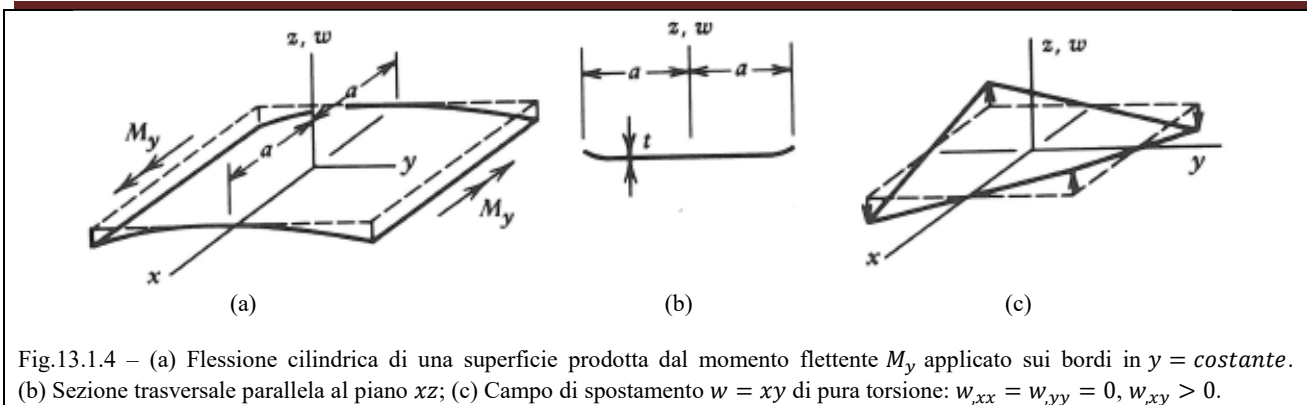


Fig.13.1.4 – (a) Flessione cilindrica di una superficie prodotta dal momento flettente  $M_y$  applicato sui bordi in  $y = costante$ . (b) Sezione trasversale parallela al piano  $xz$ ; (c) Campo di spostamento  $w = xy$  di pura torsione:  $w_{,xx} = w_{,yy} = 0, w_{,xy} > 0$ .

**Relazione Momenti-Curvatura secondo la teoria di Mindlin.** Ancora una volta si indichino con  $x$  ed  $y$  le direzioni principali di un materiale ortotropo. Le relazioni momenti-curvature della teoria delle piastre di Mindlin si ottengono essenzialmente attraverso la stessa procedura utilizzata per ottenere l'eq.(13.1.6). Comunque in questo caso invece di utilizzare le eq.13.1.3 è necessario utilizzare le eq.13.1.4 e considerare anche le relazioni taglio-scorrimento  $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$  e  $\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$ . La relazione momenti-curvature assume la forma:  $\{M\} = -[D_M]\{\kappa\}$  o per esteso:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [D_K] & 0 & 0 \\ 3 \times 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Gt \\ 0 \\ 0 \\ Gt \end{matrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_{x,x} \\ \vartheta_{y,y} \\ \vartheta_{x,y} + \vartheta_{y,x} \\ \vartheta_y - w_{,y} \\ \vartheta_x - w_{,x} \end{Bmatrix} = -[D_M]\{\kappa\} \quad (13.1.9)$$

dove  $[D_K]$  è la stessa matrice dell'eq.(13.1.6). I coefficienti di rigidità a scorrimento  $Gt$  nell'eq.(13.1.9) possono essere sostituiti da  $Gt/1.2$  per consentire di sostituire la distribuzione parabolica di  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  (vedi Fig.13.1.1a) con la distribuzione uniforme. Se sono rappresentati come vettori di rotazione con la regola della mano destra,  $\vartheta_x$  e  $\vartheta_y$  puntano rispettivamente in direzione  $-y$  e  $+x$ .

**Note.** Una piastra può essere caricata da forze laterali distribuite  $q$ , da forze concentrate o da forze distribuite lungo una linea. E' possibile applicare momenti  $M$  o forze di taglio  $Q$  come se si trattasse di forze esterne o di reazioni vincolari. A parte le forze applicate lungo una linea, queste azioni sono analoghe a quelle prese in considerazione nella teoria delle travi. Le forze nodali equivalenti ai carichi distribuiti  $q$  possono essere calcolate per mezzo dell'equazione (8.2.10):

$$\int_{sup} [N]^T \{\phi\} dsup$$

Nelle analisi delle piastre con il metodo degli elementi finiti, sia che si utilizzi la teoria di Kirchhoff che quella di Mindlin, normalmente i gradi di libertà nel nodo  $i$ -esimo sono lo spostamento laterale ( $w_i$ ) e due rotazioni ( $w_{,xi}$  e  $w_{,yi}$  oppure  $\vartheta_{xi}$  e  $\vartheta_{yi}$ ). Lungo un bordo libero non è vincolato alcun grado di libertà, mentre sono tutti impediti lungo un bordo incastrato.

La piena compatibilità degli spostamenti tra elementi adiacenti richiede che per ogni strato  $z = costante$  parallelo al piano medio, gli spostamenti  $u, v$  e  $w$  siano gli stessi lungo la linea che unisce due elementi. Di conseguenza, dall'eq.13.1.3 si deduce che gli elementi compatibili di Kirchhoff sono elementi  $C^1$ , in quanto tra elementi contigui devono garantire la continuità di  $w, w_{,x}$  e  $w_{,y}$ . E' importante notare che lungo il confine comune a due elementi, per esempio parallelo all'asse  $x$ , la continuità di  $w$  assicura la continuità di  $w_{,x}$ , ma non la continuità di  $w_{,y}$ . Dall'eq.(13.1.4) si deduce che gli elementi compatibili di Mindlin sono elementi  $C^0$  in quanto tra elementi contigui devono essere continue le funzioni  $w, \vartheta_x$  e  $\vartheta_y$  ma non le loro derivate. E' importante notare che lungo il confine comune a due elementi, per esempio parallelo all'asse  $y$ , la continuità di  $\vartheta_x$  non implica la continuità di  $w_{,x}$  a meno che la piastra sia talmente sottile che  $\gamma_{xz} = 0$ .



Abbiamo tacitamente ipotizzato che le proprietà del materiale siano indipendenti da  $z$  o che siano simmetriche rispetto al piano medio  $z = 0$ . Se così non fosse, la flessione potrebbe dar luogo a delle forze agenti nel piano  $xy$  tali che la superficie media non coinciderebbe più con il piano neutro dove  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ .

Se le flessioni  $w$  sono superiori ad alcuni decimi dello spessore  $t$  si possono manifestare notevoli forze nel piano della piastra. Ciò capita anche quando gli appoggi non applicano forze nel piano, perché la forma deformata della piastra impone l'allungamento o l'accorciamento del piano medio (a meno che le flessioni siano piccole o la deformata sia cilindrica o conica). Le forze che agiscono nel piano sostengono parte del carico. Così la rigidità della piastra aumenta al crescere della flessione, il che rende il problema non lineare. In alcune situazioni se gli spostamenti trasversali  $w$  sono pari allo spessore  $t$  della piastra, la teoria lineare può sovrastimare gli spostamenti del 50%.

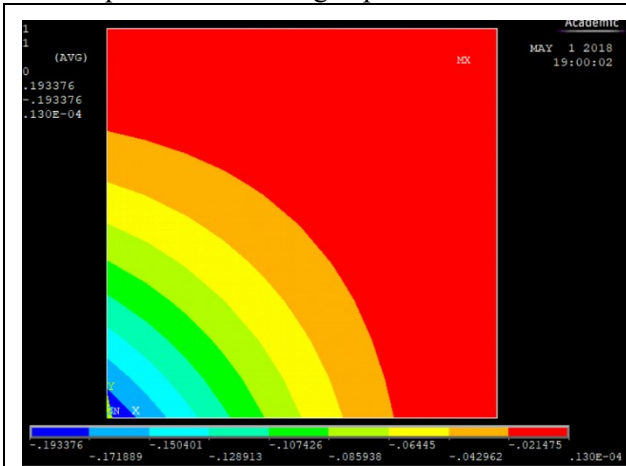


Fig.13.1.5a – Campo di spostamenti  $w$  fuori dal piano di una piastra quadrata di piccolo spessore ( $t = 2 [mm]$ ) sottoposta ad una forza concentrata nel centro: il modello rappresenta un quarto della piastra.

Lo spostamento massimo ( $w_{max} \cong -0.19 [mm]$ ) vale circa un decimo dello spessore.

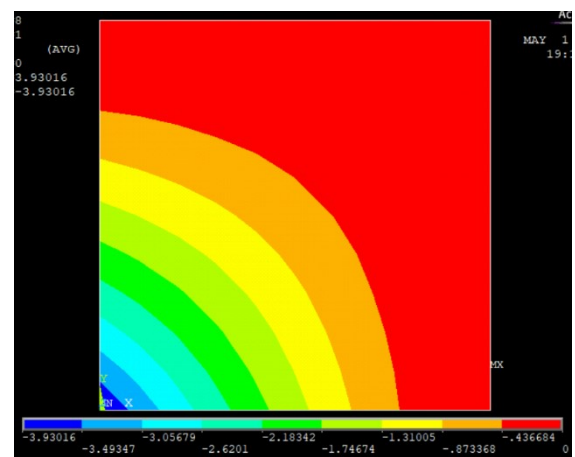


Fig.13.1.5b – Applicando un carico 100 volte superiore, se le forze membranali fossero assenti, lo spostamento massimo dovrebbe valere circa  $100 \times (-0.19) [mm]$ . Ma le forze membranali si oppongono allo spostamento che quindi risulta 5 volte inferiore al valore previsto dalla teoria lineare e pari a circa  $-3.93 [mm]$ . Per ottenere questo risultato è necessario un calcolo non lineare: con ANSYS è necessario attivare l'opzione "Large Displacement Static".

### 13.2 Elementi Finiti adatti all'analisi delle piastre

Per lo studio delle piastre piane sono stati proposti numerosi tipi di elementi: in una pubblicazione [1] del 1984 ne sono stati citati ben 88 e dopo di allora le ricerche sono proseguite [2, 3]. In ciò che segue esamineremo solo alcune semplici formulazioni.

**Elementi di Kirchhoff.** La teoria di Kirchhoff è applicabile alle piastre sottili nelle quali lo scorrimento trasversale è trascurabile. L'energia elastica nella piastra dipende interamente dalle deformazioni nel piano  $\epsilon_x, \epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  che dipendono esclusivamente dallo spostamento trasversale  $w = w(x, y)$ , come mostrato dalle eq.13.1.3.

Il punto di partenza per la formulazione della matrice di rigidità elementare è l'energia elastica:

$$U = \int_{vol} \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} \cdot dVol \quad \text{dove} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Zw_{,xx} \\ -Zw_{,yy} \\ -2Zw_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (13.2.1)$$

dove  $[E]$  è data dall'eq.(13.1.5). Posto  $dVol = dz \cdot dA$  dove  $dA = dx \cdot dy$  rappresenta un'area infinitesima appartenente al piano medio, l'integrazione attraverso lo spessore  $t$  fornisce:

$$U = \int_A \frac{1}{2} \{\kappa\}^T [D_K] \{\kappa\} \cdot dA \quad \text{dove} \quad \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (13.2.2)$$

dove  $[D_K]$  rappresenta la relazione momenti-curvature dell'eq.(13.1.8). Individuata una funzione



d'interpolazione dello spostamento  $w$  in funzione dei gradi di libertà nodali  $\{d\}$ , è possibile differenziarla per ottenere le curvature  $\{k\}$ . Per un elemento a  $NNe$  nodi abbiamo:

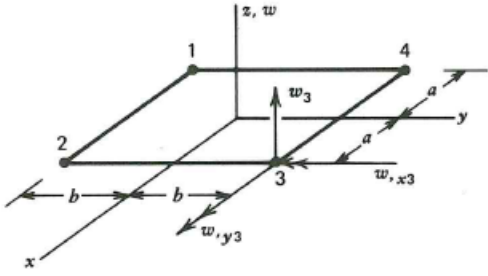
$$w = \underbrace{[N]}_{1 \times 3NNe} \{d\} \quad \text{quindi} \quad \{k\} = \underbrace{[B]}_{3 \times 3NNe} \{d\} \quad (13.2.3)$$

I gradi di libertà di un elemento di Kirchhoff sono:

$$\{d\} = \{w_1 \ w_{,x1} \ w_{,y1} \ \dots \ w_N \ w_{,xN} \ w_{,yN}\}^T$$

Infine, sostituendo l'eq.(13.2.3) nell'eq.(13.2.2) otteniamo la matrice di rigidezza dell'elemento:

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [k] \{d\} \quad \text{dove} \quad \underbrace{[k]}_{3NNe \times 3NNe} = \int_A [B]^T [D_K] [B] dA \quad (13.2.4)$$

<p>Per esempio si consideri l'elemento rettangolare a 12 gradi di libertà mostrato nella Fig.13.2.1. Due tipici gradi di libertà sono le pendenze <math>w_{,x3}</math> e <math>w_{,y3}</math> (cioè le rotazioni) della superficie media nel nodo n.3. Le loro rappresentazioni vettoriali, mostrate nella figura, sono state determinate in base alla "regola della mano destra". In accordo con quanto detto nei capitoli precedenti il polinomio che descrive <math>w</math> deve contenere gli stati di curvatura costante <math>\partial^2 w / \partial x^2</math>, <math>\partial^2 w / \partial y^2</math> e di torsione costante <math>\partial^2 w / \partial x \partial y</math>.</p>	
<p>Fig.13.2.1 – Elemento piastra di Kirchhoff, con 12 gdl di cui ne sono mostrati tre appartenenti al nodo n.3.</p>	

Inoltre l'elemento non dovrebbe prevedere direzioni preferenziali e nei suoi confini dovrebbe essere compatibile. Una sola funzione che soddisfi tutte queste proprietà non è facile da trovare, specie per elementi triangolari e quadrilateri di tipo generale. Nel tentativo di superare queste difficoltà, i ricercatori hanno proposto molti tipi di elementi, alcuni dei quali molto complicati. Nel 1961 Melosh [4] ha proposto un tipo di elemento che ha avuto un certo successo e che si basa su un polinomio contenente 12 coefficienti: lo spostamento  $w$  di questo elemento ha la forma seguente:

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$$

o, in forma matriciale:

$$w = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3\} \{a\} \quad (13.2.5)$$

Si tratta di un polinomio incompleto di quarto grado in quanto mancano i coefficienti che moltiplicano  $x^4$ ,  $x^2y^2$  e  $y^4$ . Il vettore  $\{a\}$  contiene 12 coordinate generalizzate che bisogna scambiare con i 12 gradi di libertà nodali  $\{d\}$  con il metodo già descritto nei capitoli precedenti. E' quindi possibile calcolare la matrice  $[B]$  (vedi l'eq.13.2.3) e la matrice di rigidezza elementare  $[k]$  per mezzo dell'eq.(13.2.4). La convergenza dell'elemento a 12 coefficienti non è monotona, quindi una mesh costituita da questi elementi può essere troppo rigida in alcuni problemi e troppo flessibile in altri. Ciò capita perché l'inclinazione della normale al piano medio, per esempio  $\partial w / \partial x$  lungo il lato  $x = costante$ , non è compatibile tra elementi contigui. In appendice è riportata la dimostrazione.

I primi tentativi di formulare un elemento triangolare di Kirchhoff seguendo la stessa procedura ha incontrato delle difficoltà inattese. Per un elemento triangolare come quello mostrato in fig.13.2.2a, per interpolare lo spostamento  $w$  è adatto un polinomio contenente 9 coefficienti. Sfortunatamente, come si può osservare nell'eq.(13.2.5), un polinomio cubico completo contiene 10 coefficienti.

E' quindi necessario rinunciare ad un coefficiente: sono quindi possibili le seguenti scelte:

$$w = \{1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3\} \{a\} \quad (13.2.6a)$$

$$w = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y + xy^2 \ y^3\} \{a\} \quad (13.2.6b)$$

Nell'eq.(13.2.6a) manca il coefficiente che moltiplica  $xy$ : l'elemento che si ottiene non supera il patch test perché non può rappresentare uno stato di torsione costante. Si tratta quindi di un elemento inaccettabile.



L'eq.(13.2.6b) conduce ad un elemento che non soddisfa l'isotropia geometrica, ha scarse proprietà di convergenza e per certe forme geometriche la matrice di trasformazione  $[A]$  necessaria per passare dalle coordinate generalizzate ai gradi di libertà nodali  $\{\mathbf{d}\} = [A]\{\mathbf{a}\}$  risulta singolare.

Il tentativo di risolvere questi problemi ha condotto all'elemento triangolare mostrato nella Fig.13.2.2b, che risulta essere il più semplice possibile elemento di Kirchhoff. E' in grado di rappresentare solo moti rigidi ( $w$  costante, oppure  $w_{,x}$  costante, oppure  $w_{,y}$  costante) e stati di curvatura costante ( $w_{,xx}$  costante, oppure  $w_{,yy}$  costante, oppure  $w_{,xy}$  costante). I suoi sei gradi di libertà sono le traslazioni  $w$  dei nodi d'angolo e le pendenze  $w_{,n}$  a metà dei lati, dove  $n$  rappresenta la direzione normale al lato.

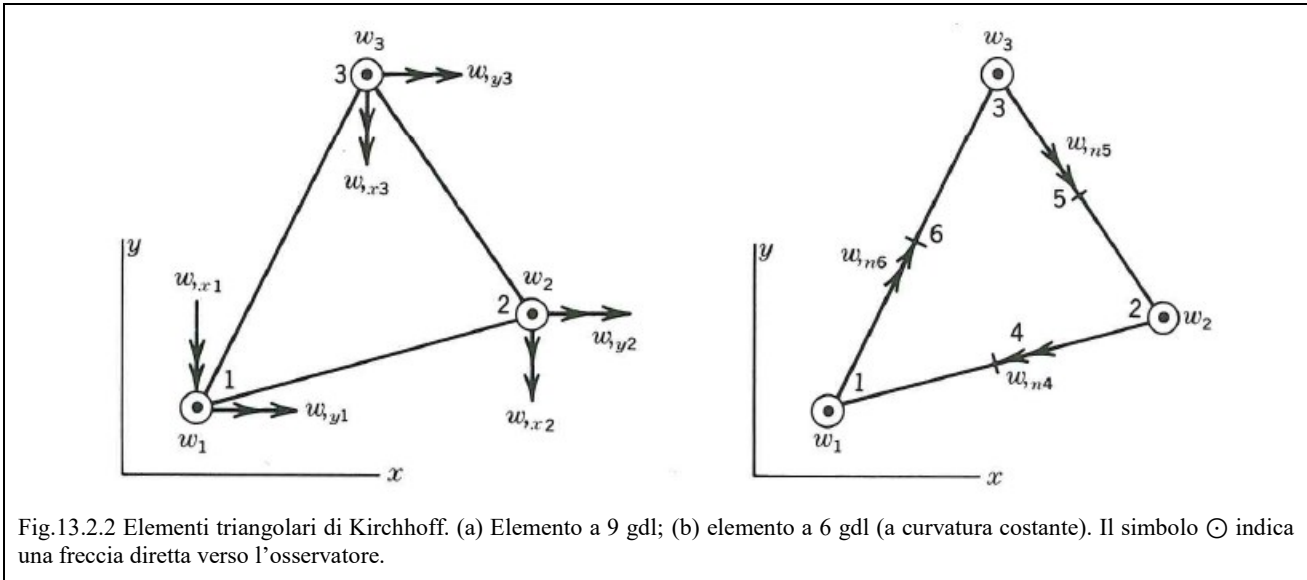


Fig.13.2.2 Elementi triangolari di Kirchhoff. (a) Elemento a 9 gdl; (b) elemento a 6 gdl (a curvatura costante). Il simbolo  $\odot$  indica una freccia diretta verso l'osservatore.

Dopo avere risolto il sistema delle equazioni di equilibrio dell'intera struttura sono noti i gradi di libertà nodali  $\{\mathbf{d}\}$ ; è quindi possibile calcolare le curvature  $\{\boldsymbol{\kappa}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{d}\}$ , i momenti flettenti  $\{\mathbf{M}\} = -[\mathbf{D}_K]\{\boldsymbol{\kappa}\}$  e finalmente gli sforzi con le eq.(13.1.2)

**Elementi di Mindlin.** I gradi di libertà nodali sono lo spostamento trasversale  $w_i$  e le rotazioni  $\vartheta_{xi}$  e  $\vartheta_{yi}$  delle normali alla superficie media. All'interno dell'elemento gli spostamenti e le rotazioni si trovano per mezzo delle funzioni di forma e delle tre interpolazioni indipendenti:

$$w = \sum_{i=1}^{NNe} N_i w_i \quad ; \quad \vartheta_x = \sum_{i=1}^{NNe} N_i \vartheta_{xi} \quad ; \quad \vartheta_y = \sum_{i=1}^{NNe} N_i \vartheta_{yi} \quad (13.2.7)$$

dove  $NNe$  indica il numero di nodi dell'elemento. Le (13.1.4) e (13.2.7) forniscono le deformazioni:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -z \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} = -z \vartheta_{x,x} \\ \varepsilon_y = -z \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} = -z \vartheta_{y,y} \\ \gamma_{xy} = -z \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = w_{,y} - \vartheta_y \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = w_{,x} - \vartheta_x \end{cases} \quad (13.1.4b)$$

Osserviamo che il campo di spostamento  $w$  è legato ai campi di rotazione  $\vartheta_x$  e  $\vartheta_y$  solo attraverso gli scorrimenti  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{xz}$ . Usando le deformazioni dell'eq.(13.1.4b) è possibile scrivere l'espressione dell'energia elastica da cui ottenere la matrice di rigidezza elementare.

### 13.3 Gli elementi piastra di Mindlin

Gli elementi piastra di Mindlin prendono in considerazione le deformazioni flessionali e le deformazioni di scorrimento a taglio. Di conseguenza possono essere utilizzate per analizzare sia le piastre di grosso spessore che quelle di piccolo spessore. Comunque quando vengono usati per le piastre sottili, possono



rivelarsi meno precisi degli elementi di Kirchhoff che non prendono in considerazione le deformazioni di scorrimento a taglio.

Nella Fig.13.3.1 sono mostrati alcuni tipici elementi di Mindlin. Per convenienza ipotizziamo che in ogni nodo siano presenti i tre gradi di libertà mostrati nella Fig.13.3.1c. Le rotazioni  $\vartheta_x$  e  $\vartheta_y$  sono indicate con una freccia a due punte e sono orientate in accordo con la “regola della mano destra”. Sono le rotazioni di un segmento che era normale alla superficie media della piastra indeformata. E’ bene ricordare che  $\vartheta_x \neq w_{,x}$  e  $\vartheta_y \neq w_{,y}$  a meno che lo spessore diventi molto piccolo, nel qual caso  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Una forma speciale di elemento piastra di Mindlin è l’elemento trave di Mindlin (detto anche elemento trave di Timoshenko).

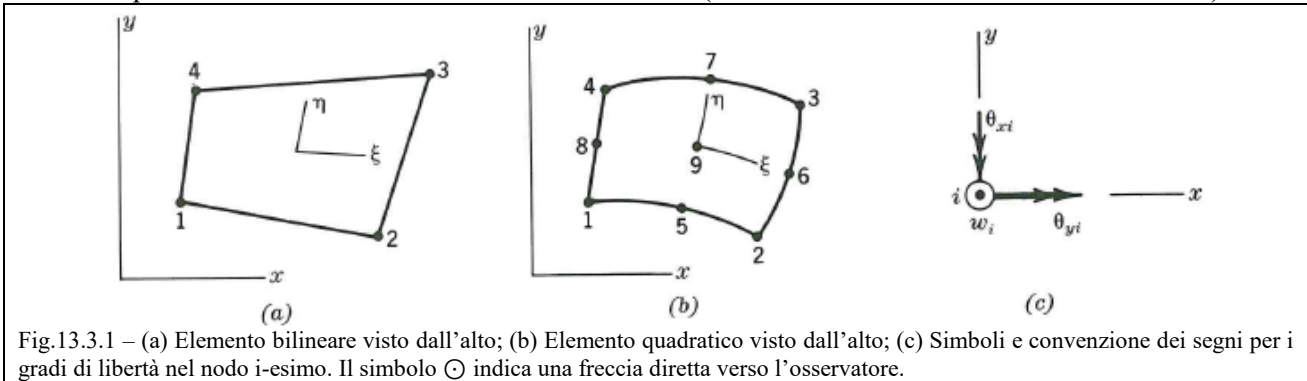


Fig.13.3.1 – (a) Elemento bilineare visto dall’alto; (b) Elemento quadratico visto dall’alto; (c) Simboli e convenzione dei segni per i gradi di libertà nel nodo i-esimo. Il simbolo  $\odot$  indica una freccia diretta verso l’osservatore.

**Matrice di rigidezza.** Il punto di partenza per la formulazione della matrice di rigidezza dell’elemento è un’espressione dell’energia di deformazione  $U$ . Indicando con  $A$  l’area della superficie media della piastra:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dz dA \quad \text{dove} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\vartheta_{x,x} \\ -z\vartheta_{y,y} \\ -z\left(\frac{\partial\vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial\vartheta_y}{\partial x}\right) \\ w_{,y} - \vartheta_y \\ w_{,x} - \vartheta_x \end{Bmatrix} \quad (13.3.1)$$

L’integrazione lungo lo spessore fornisce la seguente equazione:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\boldsymbol{\kappa}\}^T [\mathbf{D}_M] \{\boldsymbol{\kappa}\} dA \quad (13.3.2)$$

dove  $[\mathbf{D}_M]$  e  $\{\boldsymbol{\kappa}\}$  sono definiti nelle eq.(13.1.9). Se i gradi di libertà della Fig.13.3.1c sono presenti in tutti i nodi, si utilizzano le stesse funzioni di forma  $N_i$  per interpolare  $w$ ,  $\vartheta_x$  e  $\vartheta_y$  a partire dai loro valori nodali, cioè:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \vartheta_x \\ \vartheta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \vartheta_{xi} \\ \vartheta_{yi} \end{Bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \{\mathbf{s}\} = \underset{3 \times 3NNe}{[\mathbf{N}]} \{\mathbf{d}\} \quad (13.3.3)$$

dove  $NNe$  indica il numero di nodi per elemento e

$$\{\mathbf{d}\} = \{w_1 \quad \vartheta_{x1} \quad \vartheta_{y1} \quad \dots \quad w_N \quad \vartheta_{xN} \quad \vartheta_{yN}\}^T$$

Le curvature  $\{\boldsymbol{\kappa}\}$  presenti nell’eq.(13.1.9) sono:

$$\{\boldsymbol{\kappa}\} = \begin{Bmatrix} \vartheta_{x,x} \\ \vartheta_{y,y} \\ \vartheta_{x,y} + \vartheta_{y,x} \\ \vartheta_y - w_{,y} \\ \vartheta_x - w_{,x} \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\partial}]\{\mathbf{s}\} \quad \text{dove} \quad [\boldsymbol{\partial}] = \begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & 0 & 1 \\ -\partial/\partial x & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.3.4)$$

Le eq.(13.3.3) e (13.3.4) forniscono:





$$\{\mathbf{k}\} = \underbrace{[\mathbf{B}]}_{5 \times 3NNe} \{\mathbf{d}\} \quad \text{dove} \quad [\mathbf{B}] = [\boldsymbol{\partial}][\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_{1,y} & \dots \\ 0 & N_{1,y} & N_{1,x} & \dots \\ -N_{1,y} & 0 & N_1 & \dots \\ -N_{1,x} & N_1 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (13.3.5)$$

E finalmente, dalle eq.(13.3.2) e (13.3.5):

$$U = \frac{1}{2} \{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{d}\} \quad \text{dove} \quad \underbrace{[\mathbf{k}]}_{3NNe \times 3NNe} = \int_A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}_M] [\mathbf{B}] dA \quad (13.3.6)$$

Se la piastra è rettangolare, le funzioni di forma  $N_i$  si possono esprimere in funzione delle coordinate  $x$  e  $y$  e quindi  $dA = dx dy$ . Se la piastra ha una forma qualsiasi, come mostrato in Fig.13.3.1, le funzioni di forma  $N_i$  possono esprimersi in funzione delle coordinate naturali  $\xi$  e  $\eta$ . In questo caso abbiamo:

$$dA = \det[J] d\xi d\eta$$

dove  $\det[J]$  indica il determinante dello jacobiano  $J$ . Per gli elementi bilineari le funzioni di forma sono:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) ; \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) ; \quad N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) ; \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

mentre per gli elementi quadratici abbiamo:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}(N_8 + N_5) & ; & \quad N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6) & ; & \quad N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7) & ; & \quad N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}(N_7 + N_8) & ; & \quad N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (13.3.7)$$

Le derivate delle funzioni di forma necessarie per il calcolo della matrice  $[\mathbf{B}]$  si determinano nel solito modo:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

dove  $[J]^{-1}$  indica l'inverso dello Jacobiano che per l'elemento a 4 nodi assume la forma seguente:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{(2 \times 4)} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}_{(4 \times 2)}$$

Gli elementi di tipo piastra di Mindlin possono essere visti come una forma speciale degli elementi di volume. Per esempio, l'elemento piastra bilineare assomiglia all'elemento solido trilineare a 8 nodi se in una direzione questo diventa sottile. L'elemento solido ha tre gradi di libertà di spostamento per nodo e quindi complessivamente possiede il doppio di gradi di libertà dell'elemento piastra. Inoltre gli spostamenti subiti dai nodi del solido che giacciono su una linea normale al piano medio determinano la deformazione  $\varepsilon_z$  lungo lo spessore che viene trascurata nella teoria flessionale delle piastre. Se la deformazione  $\varepsilon_z$  fosse inserita nella formulazione, i nodi che giacciono lungo lo spessore verrebbero legati da coefficienti di rigidezza sempre più grandi, rispetto alle rigidità flessionali, man mano che la piastra diventa sottile. Questo fenomeno può condurre a notevoli difficoltà numeriche. In sintesi, considerazioni di carattere economico e di affidabilità indicano che gli elementi solidi non dovrebbero essere utilizzati per modellare le piastre.

**Regole d'integrazione e locking.** E' possibile pensare alla matrice di rigidezza dell'elemento piastra di Mindlin come alla somma di una matrice di rigidezza flessionale  $[\mathbf{k}_f]$  e di una matrice di rigidezza a taglio  $[\mathbf{k}_t]$ . Dall'eq.(13.3.6) posto  $[\mathbf{B}] = [\mathbf{B}_f] + [\mathbf{B}_t]$  abbiamo:



$$[k] = \underbrace{\int_A [B_f]^T [D_M] [B_f] dA}_{[k_f]} + \underbrace{\int_A [B_t]^T [D_M] [B_t] dA}_{[k_t]} \quad (13.3.8)$$

$[B_f]$  è associata alle deformazioni nel piano  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  e si ottiene annullando la quarta e la quinta riga della matrice  $[B]$ .  $[B_t]$  è associata alle deformazioni di scorrimento  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  e si ottiene annullando le prime tre righe della matrice  $[B]$ . I prodotti misti  $[B_f]^T [D_M] [B_t]$  e  $[B_t]^T [D_M] [B_f]$  sono nulli grazie alla disposizione dei coefficienti nulli all'interno delle matrici  $[B_f]$ ,  $[B_t]$  e  $[D_M]$ . Le rigidzze flessionali  $[k_f]$  coinvolgono solo la porzione  $[D_K]$  della matrice  $[D_M]$  e la rigidzza a scorrimento  $[k_t]$  coinvolge solo i coefficienti  $Gt$  della matrice  $[D_M]$ .

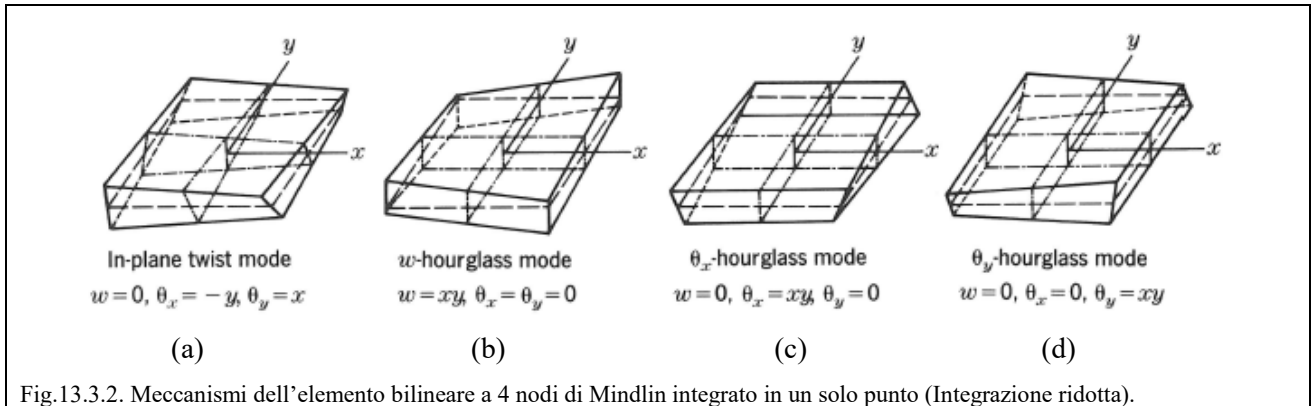


Fig.13.3.2. Meccanismi dell'elemento bilineare a 4 nodi di Mindlin integrato in un solo punto (Integrazione ridotta).

**Meccanismi.** Un elemento che ha uno o più meccanismi (detti anche “*modi a energia nulla*”) non è interamente soddisfacente. Nella Fig.13.3.2 sono mostrati i meccanismi dell'elemento bilineare calcolato con l'integrazione ridotta. Con l'integrazione selettiva rimangono possibili solo due di questi meccanismi: il modo (a) torsionale nel piano e il modo (b) clessidra dello spostamento  $w$ . Il primo non è trasmissibile tra elementi adiacenti per cui una mesh formata da due o più elementi non può subire questo meccanismo.

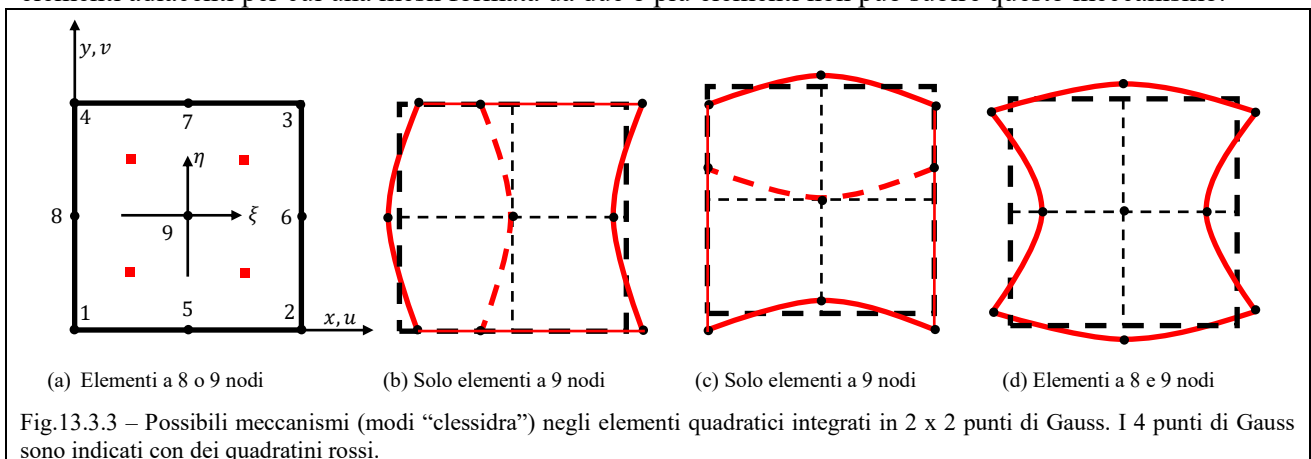


Fig.13.3.3 – Possibili meccanismi (modi “clessidra”) negli elementi quadratici integrati in 2 x 2 punti di Gauss. I 4 punti di Gauss sono indicati con dei quadratini rossi.

Utilizzando sia l'integrazione ridotta che quella selettiva, gli elementi quadratici hanno i meccanismi descritti dalla seguente equazione:

$$\begin{cases} u = -z\vartheta_x = \xi(3\eta^2 - 1) \\ v = -z\vartheta_y = \eta(1 - 3\xi^2) \end{cases}$$

Questo meccanismo non è trasmissibile tra elementi adiacenti. Nell'elemento quadratico a 9 nodi sotto integrazione ridotta sono possibili altri tre meccanismi. Il primo è descritto dall'equazione:

$$\begin{cases} u = -z\vartheta_x = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2 \\ v = 0 \end{cases} \quad \text{il secondo da} \quad \begin{cases} u = 0 \\ v = -z\vartheta_y = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2 \end{cases}$$



e il terzo da:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2 \end{cases}$$

**Calcolo degli sforzi.** Una volta noti gli spostamenti nodali  $\{\mathbf{d}\}$  degli elementi, l'equazione:

$$\{\boldsymbol{\kappa}\} = \underbrace{[\mathbf{B}]}_{5 \times 3NNe} \{\mathbf{d}\} \quad \text{dove} \quad [\mathbf{B}] = [\boldsymbol{\partial}][\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_{1,y} & \dots \\ 0 & N_{1,y} & N_{1,x} & \dots \\ -N_{1,y} & 0 & N_1 & \dots \\ -N_{1,x} & N_1 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

consente il calcolo delle curvature, l'equazione:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ \underbrace{[\mathbf{D}_K]}_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ Gt \\ Gt \end{matrix}$$

consente il calcolo dei momenti e delle forze di taglio e le equazioni

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{t^3/12} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{t^3/12} \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy} z}{t^3/12}$$

consentono il calcolo degli sforzi a distanza  $z$  dal piano medio della piastra. In genere gli sforzi di taglio  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  sono piccoli rispetto a  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  e raggiungono il loro valore massimo in  $z = 0$ , dove valgono:

$$\tau_{xz} = 1.5 \frac{Q_x}{t} \quad ; \quad \tau_{yz} = 1.5 \frac{Q_y}{t}$$

## Bibliografia

- [1] M.M. HRABOK, T. M. HRUDEY, "A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements", *Comp. Struct.* Vol. 19, No. 3, pp. 419-495, 1984.
- [2] K.J. BATHE, *Finite Element Procedures for Engineering Analysis*, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, N J, 1982).
- [3] O.C. ZIENKIEWICZ, R.L.TAYLOR, *The Finite Element Method*, IV edition, vol.2, Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity, McGraw-Hill Book Company, 1991.
- [4] R.J. MELOSH, "A Stiffness Matrix for the Analysis of Thin Plates in Bending", *Journal of the aerospace Sciences*, Jan., pp.34-42, 1961.
- [5] K.J. BATHE, E.N. DVORKIN, "A Four Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **21**, 367-383 (1985).