

<https://unica.adobeconnect.com/poz97kv70mid/>

IL TAGLIO

Nel capitolo precedente è stato analizzato il caso di sezioni di travi sollecitate solo da momento flettente (al più con la presenza dell'azione normale) e si è ricavata la distribuzione delle deformazioni e degli sforzi secondo la teoria di Eulero-Bernoulli. La condizione di momento flettente puro richiede che il momento flettente sia costante lungo l'asse:

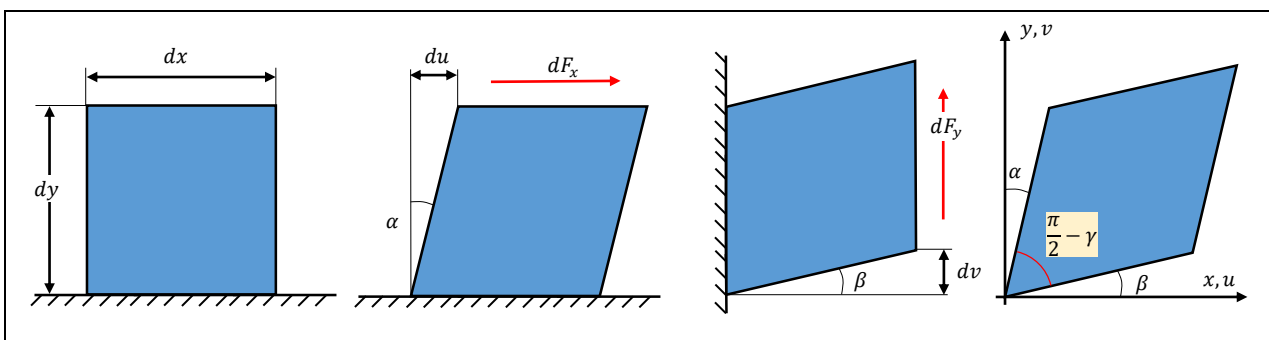
$$\frac{dM(x)}{dx} = T(x) = 0$$

Si tratta, come detto, di un caso particolare perché caratterizzato dall'assenza di azione tagliante T . **Tuttavia per il calcolo degli sforzi è ancora consentito applicare la formula di Navier** in quanto la presenza del taglio non modifica la distribuzione degli sforzi normali σ_x .

La presenza del taglio T aggiunge un campo di sforzi τ agenti tangenzialmente alla sezione, dette di **scorrimento o di taglio**, la cui distribuzione dipende dalla forma della sezione e, in generale, è di difficile determinazione.

Si immagini che un parallelepipedo di lati infinitesimi dx , dy e dz sia vincolato su un piano orizzontale, come rappresentato in figura. La forza infinitesima dF_x agente in direzione parallela al suolo ed applicata sulla faccia superiore del cubo, provoca uno scorrimento du .

Si immagini ora che la faccia sinistra dello stesso cubo sia vincolato al suolo: una forza verticale infinitesima dF_y agente in direzione parallela al suolo ed applicata sulla faccia verticale destra del cubo, provoca uno scorrimento dv .





$$dy \cdot \tan(\alpha) = du \quad ; \quad dx \cdot \tan(\beta) = dv$$

Poiché ipotizziamo che le rotazioni α e β siano molto piccole:

$$\tan(\alpha) \cong \alpha \quad ; \quad \tan(\beta) \cong \beta$$

e quindi:

$$dy \cdot \alpha = du \quad ; \quad dx \cdot \beta = dv$$

da cui:

$$\frac{du}{dy} = \alpha \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = \beta$$

Gli spostamenti u e v in generale sono funzioni del posto, quindi di x , y e z ; di conseguenza nelle espressioni precedenti si è soliti usare il simbolo di “*derivata parziale*” ∂ , quindi si scriverà: $\alpha = \frac{\partial u}{\partial y}$ e $\beta = \frac{\partial v}{\partial x}$.

Gli angoli del parallelepipedo prima dell'applicazione del carico erano retti $\left(\frac{\pi}{2}\right)$; dopo l'applicazione delle forze di taglio, alcuni angoli crescono $\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$ e altri diminuiscono $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$; la variazione complessiva dell'angolo vale:

$$\gamma = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Poiché queste variazioni angolari riguardano il piano $x - y$, lo scorrimento viene indicato con due indici:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

e si **misura in radianti**. Negli altri piani avremo:

$$\begin{cases} \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$$

dove w indica lo spostamento in direzione z .



Per molti materiali da costruzione (in particolare per quelli metallici), quando i carichi esterni non sono eccessivi, tra gli sforzi di taglio e i corrispondenti scorrimenti esiste una **legge di proporzionalità** analoga a quella che si osserva nelle prove di trazione/compressione monoassiale; se il materiale è isotropo (cioè se il suo comportamento meccanico è identico in tutte le direzioni) la **legge di Hooke** si estende al taglio ed assume la forma seguente:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}\end{aligned}$$

dove G è una costante del materiale che si chiama **modulo di elasticità tangenziale** e che si misura in GPa. Tra il modulo di elasticità tangenziale, il modulo di Young e il coefficiente di Poisson esiste la seguente relazione:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

che in seguito verrà dimostrata.

Per esempio:

- 1) Acciaio: $E = 210 [GPa]$; $\nu = 0.3$; $G \cong 81 [GPa]$
- 2) Lega di alluminio: $E = 70 [GPa]$; $\nu = 0.33$; $G \cong 26 [GPa]$

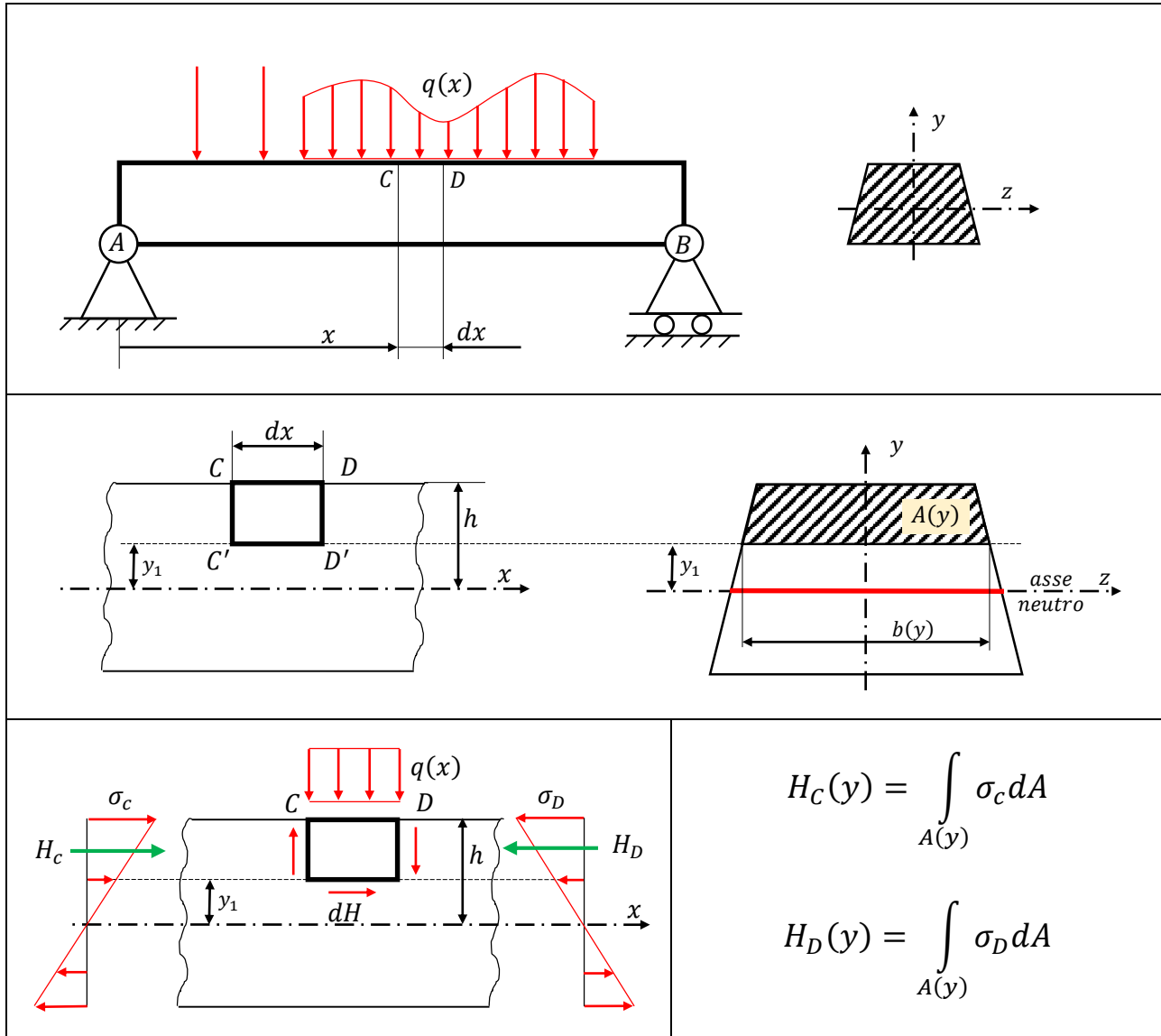
Ipotizziamo di applicare uno sforzo di taglio pari a $\tau_{xy} = 100 [MPa]$ ad un cubetto di acciaio; in questo caso lo scorrimento vale:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{100}{81000} = 1.234 \times 10^{-3} [rad] \cong 0.071^\circ$$

Come si può osservare, non ostante lo sforzo applicato sia considerevole, lo scorrimento è molto piccolo.

Calcolo degli sforzi di taglio: equazione di Jourawski

Si consideri una trave prismatica con un piano verticale di simmetria.



Ipotizziamo di isolare il volume CDD'C'; su di esso agiscono le seguenti forze:

- 1) sulla faccia verticale CC' di area $A(y)$ agiscono gli sforzi σ_C prodotti dal momento flettente M_C : la loro risultante vale H_C ;
- 2) sulla faccia verticale DD' di area $A(y)$ agiscono gli sforzi σ_D prodotti dal momento flettente M_D : la loro risultante vale H_D ;
- 3) sulla faccia C'D' di area $b(y)dx$ agisce la forza dH che mantiene il corpo in equilibrio.



$$\sum F_x = H_C(y) + dH(y) - H_D(y) = 0$$

da cui:

$$dH(y) = H_D(y) - H_C(y) = \int_{A(y)} (\sigma_D - \sigma_C) dA$$

Ricordando la **formula di Navier**:

$$\sigma_x = \frac{M_z(x)y}{I_{zz}}$$

$$dH(y) = \int_{A(y)} \left(\frac{M_z(x_D)y}{I_{zz}} - \frac{M_z(x_C)y}{I_{zz}} \right) dA = \frac{M_z(x_D) - M_z(x_C)}{I_{zz}} \int_{A(y)} y dA$$

$$dH(y) = \frac{dM}{I_{zz}} S_z(y)$$

$S_z(y)$ indica il momento statico dell'area sopra la coordinata y , calcolata rispetto all'asse z .

La forza infinitesima $dH(y)$ agisce sulla superficie C'D' di area $dA = b(y)dx$: di conseguenza lo sforzo di **taglio medio** (mediato sulla corda di lunghezza $b(y)$) vale:

$$\tau_{med}(y) = \frac{dH(y)}{dA} = \frac{dH(y)}{b(y)dx}$$

Ricordando che:

$$\frac{dM}{dx} = T(x)$$

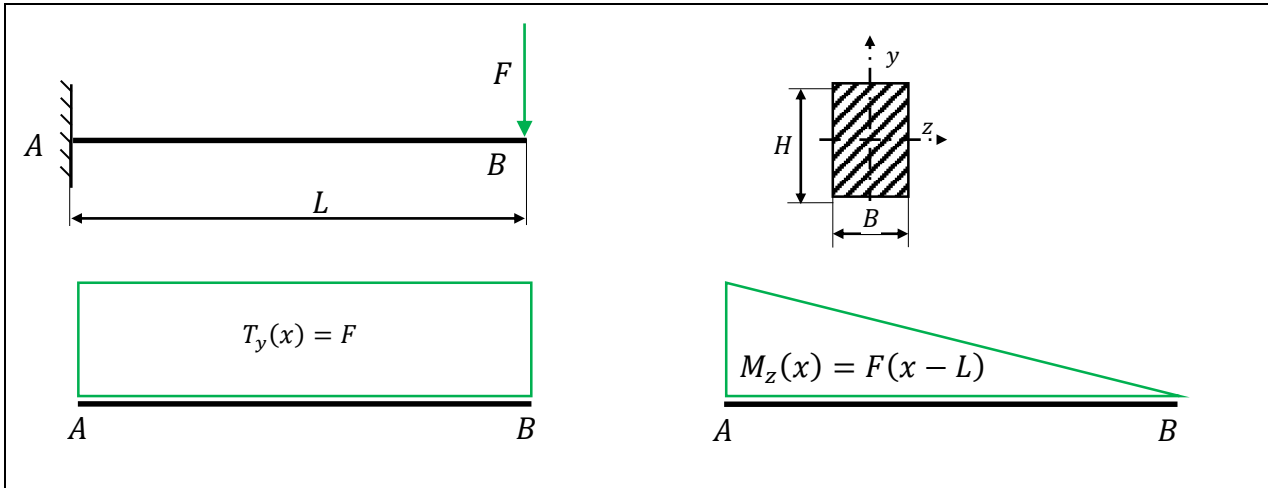
possiamo scrivere:

$$\tau_{med}(y) = \frac{1}{b(y)} \frac{dH}{dx} = \frac{1}{b(y)} \frac{dM}{dx} \frac{S_z(y)}{I_{zz}} = \frac{T(x) S_z(y)}{b(y) I_{zz}}$$

$$\tau_{med}(y) = \frac{T(x) S_z(y)}{b(y) I_{zz}} \quad \text{Formula di Jourawski}$$

Esempio

Calcoliamo gli sforzi di taglio in una trave a mensola caricata come mostrato in figura.



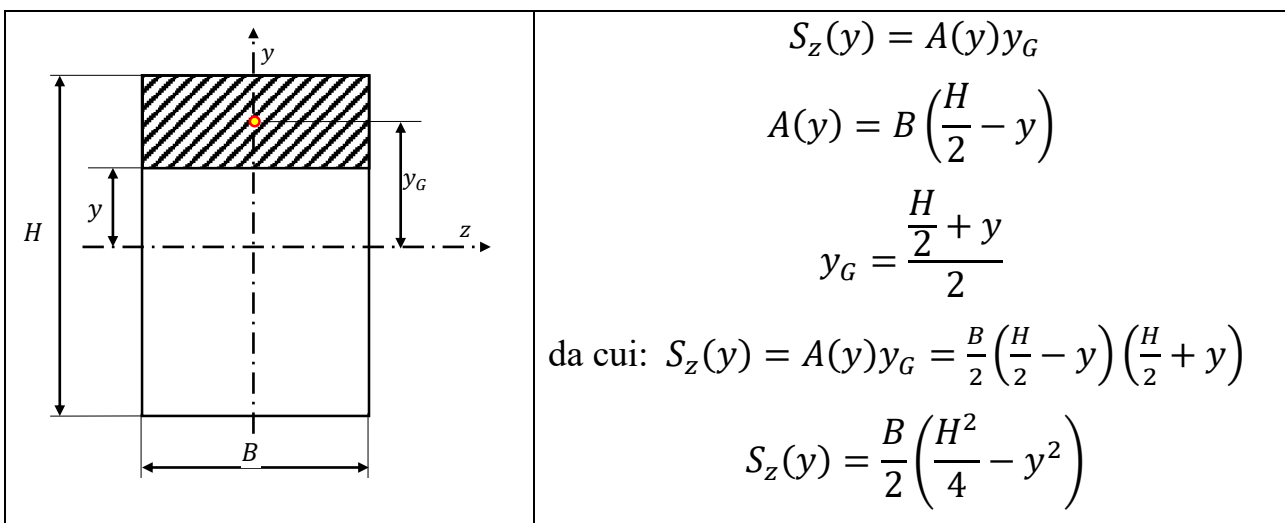
Ipotizziamo che la sezione trasversale della trave sia di forma rettangolare, di altezza H e base B . Il taglio T è costante lungo tutta la trave e vale F . La formula di Jourawski afferma che lo sforzo medio lungo ogni corda della sezione trasversale vale:

$$\tau_{med}(y) = \frac{T(x) S_z(y)}{b(y) I_{zz}}$$

In questo caso specifico abbiamo:

$$T(x) = F = cost \quad ; \quad b(y) = B = cost \quad ; \quad I_{zz} = \frac{BH^3}{12}$$

E' necessario calcolare il momento statico $S_z(y)$





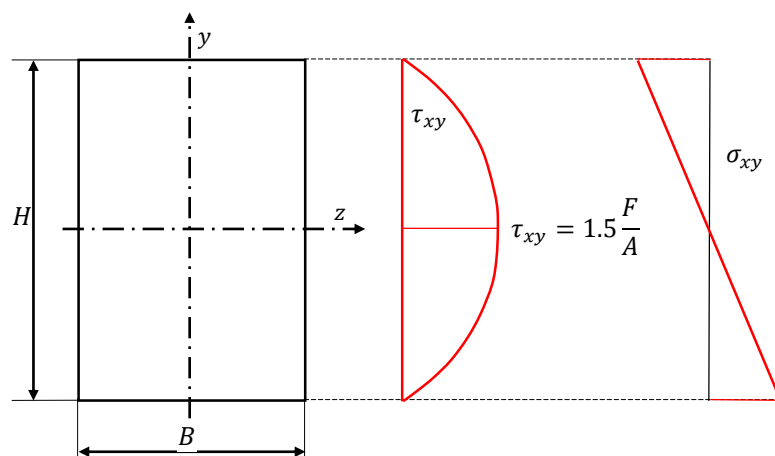
Il momento statico ha un **andamento parabolico**: il suo valore si annulla in $y = \pm \frac{H}{2}$ e raggiunge il valore massimo quando $y = 0$:

$$S_z(y = 0) = \frac{BH^2}{8}$$

Sostituendo questo valore nella formula di Jourawski si ottiene lo sforzo massimo di taglio che si manifesta in $y = 0$, cioè in corrispondenza dell'asse neutro:

$$\tau_{med}(y = 0) = \frac{T(x) S_z(y = 0)}{b(y = 0) I_{zz}} = \frac{F \frac{BH^2}{8}}{B \frac{BH^3}{12}} = \frac{12}{8} \frac{F}{BH} = \frac{3}{2} \frac{F}{A}$$

In altre parole, lo sforzo massimo di taglio è pari ad una volta e mezzo lo sforzo di taglio medio distribuito su tutta la sezione trasversale.

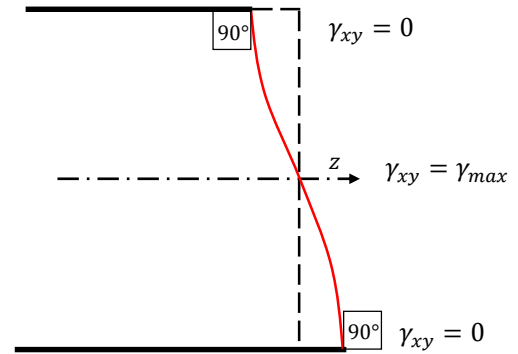
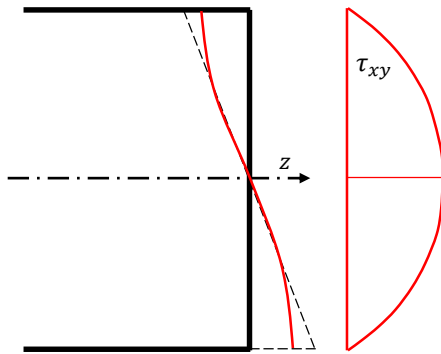


Ricordo la prima ipotesi cinematica della teoria delle travi di Eulero-Bernoulli:

In seguito all'applicazione del carico, le sezioni trasversali all'asse della trave, piane prima dell'applicazione del carico, ruotano ma rimangono piane.

Questa ipotesi è corretta solo quando il taglio è assente.

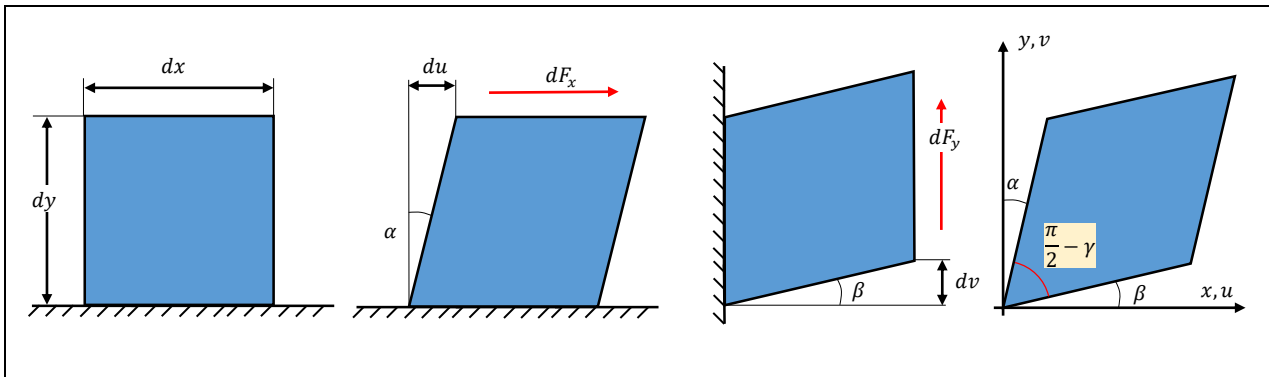
Come detto, la presenza delle azioni di taglio provoca lo scorrimento γ delle fibre della trave e di conseguenza gli angoli cambiano. Nella sezione rettangolare, gli scorrimenti sono nulli in $y = \pm \frac{H}{2}$ e raggiungono il massimo in $y = 0$ dove valgono: $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$.



Chiaramente lo schema qui rappresentato non è in scala !! Le rotazioni e gli spostamenti sono infatti molto piccoli.

Abbassamento dell'asse della trave causato dagli sforzi di taglio

L'abbassamento dell'asse della trave, in gergo detto “**la freccia**”, è la somma del contributo dovuto al momento flettente ed al contributo del taglio. Il contributo del momento flettente si ottiene con l'integrazione della equazione della linea elastica.



Come si può osservare, anche il taglio provoca degli spostamenti in direzione trasversale all'asse della trave.

	$dv = \gamma_{xy} dx$ <p>da cui:</p> $\frac{dv}{dx} = \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{T(x)}{GA}$ <p>da cui:</p> $dv = \frac{T(x)}{GA} dx$
--	---

In realtà gli sforzi di taglio τ_{xy} non sono uguali a $\frac{T(x)}{A}$, ma come visto poco fa:

$$\tau_{med}(y) = \frac{T(x) S_z(y)}{b(y) I_{zz}}$$

Quindi per il calcolo dello spostamento si utilizza un coefficiente correttivo χ che si chiama **fattore di taglio**:

$$dv = \frac{\chi T(x)}{GA} dx$$



La stima del fattore di taglio χ è abbastanza complicata:

$$\chi(x) = \frac{A(x)}{I_z^2(x)} \cdot \int_A \frac{S_z^2(x, y)}{b^2(x, y)} dA$$

per cui normalmente si utilizzano dei valori tabellati che si possono trovare nei manuali.

Forma della sezione	Fattore di taglio: χ
Rettangolare	$6/5 = 1.2$
Circolare	$10/9 = 1.11$
Circolare cava di piccolo spessore	2
Profilati	A_t/A_{anima}

ESEMPIO

Calcoliamo il contributo del taglio all'abbassamento della mensola vista nell'esempio precedente. Si tratta di integrare l'equazione:

$$dv = \frac{\chi T(x)}{GA} dx$$

Poiché $T(x) = F = cost$ l'abbassamento del punto B a distanza L dall'incastro vale:

$$v_T(x = L) = \frac{\chi FL}{GA}$$

Ricordo che il contributo del momento flettente all'abbassamento del punto B vale:

$$v_M(x = L) = \frac{FL^3}{3EI_{zz}}$$

Per giudicare l'importanza del contributo del taglio allo spostamento totale, calcoliamo il rapporto tra v_M e v_T :

$$\frac{v_M}{v_T}(x = L) = \frac{\frac{FL^3}{3EI_{zz}}}{\frac{\chi FL}{GA}} = \frac{1}{3\chi} \frac{G}{E} \frac{A}{I_{zz}} L^2$$

Ricordando che il **raggio d'inerzia** della sezione rispetto all'asse z è definito come:

$$r_{zz}^2 = \frac{I_{zz}}{A}$$



Definiamo snellezza λ_z della trave rispetto all'asse z, il rapporto:

$$\lambda_z = \frac{L}{r_{zz}}$$

Da cui

$$\frac{v_M}{v_T} = \frac{1}{3\chi} \frac{G}{E} \lambda_z^2$$

Poiché:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

abbiamo:

$$\frac{G}{E} = \frac{1}{2(1 + \nu)}$$

da cui:

$$\frac{v_M}{v_T} = \left[\frac{1}{6(1 + \nu)\chi} \right] \lambda_z^2$$

Posto $\chi = \frac{6}{5}$ (valido per una sezione rettangolare), posto $\nu = 0.3$ (valido per l'acciaio), si ottiene:

$$\frac{v_M}{v_T} = \frac{1}{9.36} \lambda_z^2 \cong \frac{\lambda_z^2}{10}$$

Se ne deduce che quando una trave è snella, il contributo del taglio al valore dello spostamento totale diventa trascurabile:

Snellezza: λ_z	$\frac{v_M}{v_T}$
10	10
20	40
30	90
40	160
50	250

Benché la formula precedente sia stata ricavata per una mensola caricata in punta, il ragionamento è di carattere generale e può essere esteso ad altre situazioni.



IL LAVORO DI DEFORMAZIONE

La densità di energia elastica nel caso del taglio puro vale:

$$\Psi = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

Ricordando che vale la legge di Hooke $\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$, ipotizzando valida la formula di Jourawski, si ottiene:

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{T_y(x) S_z(y)}{b(y) I_{zz}(x)} \quad \text{e} \quad \gamma_{xy}(x, y) = \frac{T_y(x) S_z(y)}{G b(y) I_{zz}(x)}$$

e quindi:

$$\Psi = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \frac{T_y^2(x) S_z^2(y)}{G b^2(y) I_{zz}^2(x)}$$

L'energia elastica complessiva accumulata nell'intero volume della trave si ottiene integrando la densità di energia elastica:

$$\mathcal{L} = \int_{vol} \frac{1}{2} \frac{T_y^2(x) S_z^2(y)}{G b^2(y) I_{zz}^2(x)} dvol$$

Il volume infinitesimo $dvol$ si può esprimere come: $dvol = dA \cdot dx$ e poiché $T_y(x)$, G , e $I_{zz}(x)$ sono funzione di x ma non di y e z , l'integrale diventa:

$$\mathcal{L} = \int_{vol} \frac{1}{2} \frac{T_y^2 S_z^2}{G b^2 I_{zz}^2} dvol = \int_L \left(\frac{1}{2} \frac{T_y^2}{G I_{zz}^2} \int_A \frac{S_z^2}{b^2} dA \right) \cdot dx$$

L'uso di questa formula è poco pratico, per cui abitualmente il lavoro elastico accumulato nella trave si esprime nel modo seguente:

$$\mathcal{L} = \int_L \frac{1}{2} \frac{\chi T_y^2}{GA} \cdot dx$$

dove è stato aggiunto il **fattore di taglio** χ per correggere la formula semplificata.



Uguagliando le ultime due espressioni del lavoro:

$$\mathcal{L} = \int_L \frac{1}{2} \frac{\chi T_y^2}{GA} \cdot dx = \int_L \left(\frac{1}{2} \frac{T_y^2}{G I_{zz}^2} \int_A \frac{S_z^2}{b^2} dA \right) \cdot dx$$

si può dedurre il valore del **fattore di taglio**:

$$\frac{1}{2} \frac{\chi T_y^2}{GA} = \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{G I_{zz}^2} \int_A \frac{S_z^2}{b^2} dA$$

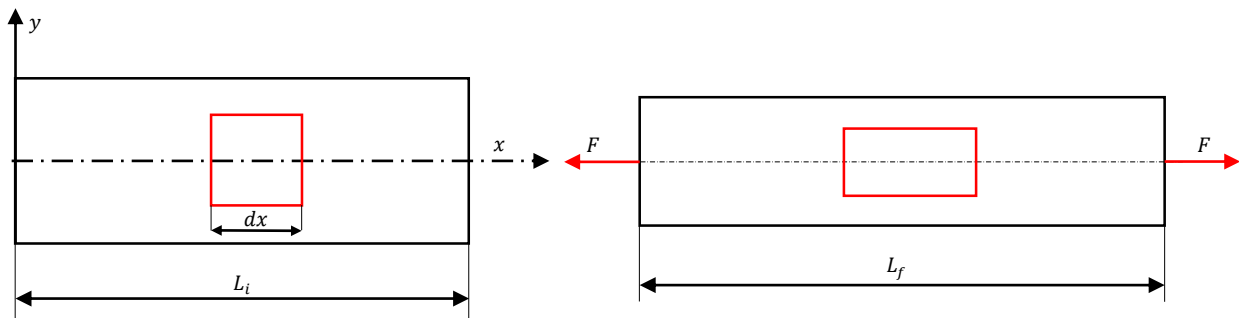
da cui:

$$\chi = \frac{A}{I_{zz}^2} \int_A \frac{S_z^2}{b^2} dA$$

Come detto, per le sezioni di forma più comune il valore del fattore di taglio è tabellato.

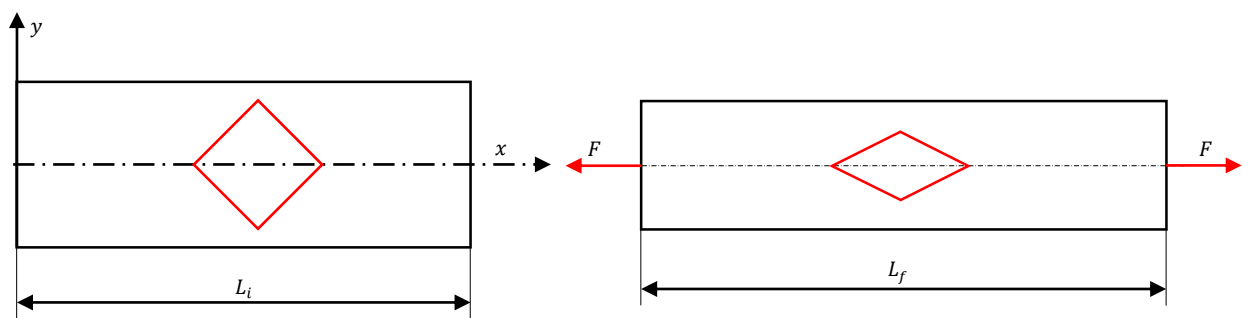
Rapporto tra le costanti elastiche di un materiale isotropo

Su una trave lunga L a sezione rettangolare costante di area A sottoposta ad uno stato di trazione semplice, disegniamo un piccolo rettangolo di lato dx , come rappresentato in figura:



Osserviamo che il quadratino si allunga in direzione x e si contrae in direzione y .

In un secondo momento, disegniamo sulla stessa trave un quadrato di lato dx , ma ruotato di 45° come rappresentato in figura.



Osserviamo che gli angoli interni del quadratino sono cambiati: ciò segnala la presenza di sforzi di taglio che creano scorrimento.



$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_x \cos^2(\alpha) \\ \tau_{nt} = \sigma_x \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\phi = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{nt}}{2}$$

$$\text{tang}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tang}(\alpha) - \text{tang}(\beta)}{1 + \text{tang}(\alpha) \cdot \text{tang}(\beta)}$$

quando

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} \\ \beta = \frac{\gamma_{nt}}{2} \end{cases} \quad \text{tang}(\phi) = \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{nt}}{2}\right) = \frac{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{tang}\left(\frac{\gamma_{nt}}{2}\right)}{1 + \text{tang}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{tang}\left(\frac{\gamma_{nt}}{2}\right)} = \frac{1 - \text{tang}\left(\frac{\gamma_{nt}}{2}\right)}{1 + \text{tang}\left(\frac{\gamma_{nt}}{2}\right)}$$

Poiché gli scorrimenti sono molto piccoli si può scrivere:

$$\text{tang}(\phi) = \frac{1 - \frac{\gamma_{nt}}{2}}{1 + \frac{\gamma_{nt}}{2}} = \frac{2 - \gamma_{nt}}{2 + \gamma_{nt}}$$

Osservando l'ultimo schema, possiamo scrivere:

$$dx \cdot (1 + \epsilon_x) \cdot \text{tang}(\phi) = dx \cdot (1 - \nu \epsilon_x)$$

da cui:

$$\text{tang}(\phi) = \frac{(1 - \nu \epsilon_x)}{(1 + \epsilon_x)} = \frac{2 - \gamma_{nt}}{2 + \gamma_{nt}}$$



da cui:

$$(1 - \nu \varepsilon_x)(2 + \gamma_{nt}) = (1 + \varepsilon_x)(2 - \gamma_{nt})$$

Sviluppando il prodotto e semplificando:

$$(1 - \nu \varepsilon_x)\gamma_{nt} + (1 + \varepsilon_x)\gamma_{nt} = 2(1 + \varepsilon_x) - 2(1 - \nu \varepsilon_x)$$
$$\gamma_{nt} = \frac{2(1 + \nu)\varepsilon_x}{2 + (1 - \nu)\varepsilon_x}$$

Poiché le deformazioni ε_x sono molto più piccole dell'unità (almeno in campo elastico), il denominatore si semplifica e si ottiene la seguente relazione:

$$\gamma_{nt} = \frac{2(1 + \nu)\varepsilon_x}{2} = (1 + \nu)\varepsilon_x$$

Poiché per la legge di Hooke:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \text{e} \quad \tau_{nt} = G\gamma_{nt}$$

sostituendo si ottiene:

$$\gamma_{nt} = \frac{\tau_{nt}}{G} = (1 + \nu)\varepsilon_x = (1 + \nu)\frac{\sigma_x}{E}$$

Poiché:

$$\tau_{nt} = \sigma_x \sin(45^\circ) \cos(45^\circ) = \frac{\sigma_x}{2}$$

ne discende:

$$\frac{\tau_{nt}}{G} = \frac{\sigma_x}{2G} = (1 + \nu)\frac{\sigma_x}{E}$$

e quindi semplificando:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$