

## CAP. 11 – SOLIDI DI RIVOLUZIONE

### 11.1 – Introduzione

Per modellare i solidi di rivoluzione carichi e vincolati in modo assialsimmetrico possiamo considerare i modelli bidimensionali in quanto subiscono spostamenti solo nelle direzioni radiali  $r$  e assiali  $z$ . Di conseguenza, con poche variazioni, è possibile adattare gli elementi piani descritti nel cap.9 e seguire i miglioramenti suggeriti nel cap.10.

Nel caso in cui la geometria e le proprietà elastiche del solido rimangano indipendenti dalla coordinata circonferenziale  $\vartheta$ , i carichi di tipo arbitrario (non assialsimmetrici) possono essere sviluppati in serie di Fourier ed essere espressi come somma di diversi carichi sinusoidali indipendenti. In accordo con il principio di sovrapposizione degli effetti il problema originale si risolve sommando le soluzioni parziali. Ognuna delle singole analisi rimane essenzialmente bidimensionale, per cui l'originale problema tri-dimensionale si trasforma nella somma di alcuni problemi bi-dimensionali. Il passaggio da uno spazio all'altro è vantaggioso perché normalmente una singola soluzione tri-dimensionale è molto più costosa di alcune soluzioni bi-dimensionali. Un ragionamento analogo si potrà fare a proposito dello studio delle piastre.

### 11.2 – Formulazione dell'elemento nel caso di carichi assialsimmetrici

L'elemento finito è un anello a sezione trasversale costante (Fig.11.2.1). Un certo numero di questi elementi è sufficiente a modellare un solido di rivoluzione, come quello indicato nella Fig.11.2.1 con le linee tratteggiate. Il solido e ognuno dei suoi elementi sono solidi di rivoluzione intorno all'asse  $z$ . I punti nodali si trasformano in cerchi nodali il cui centro è l'asse  $z$ .

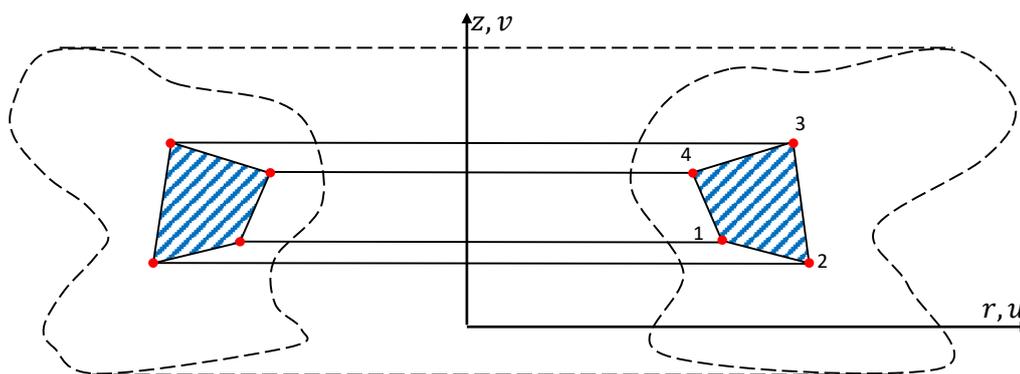


Fig. 11.2.1

Sotto l'azione di carichi assialsimmetrici nessun punto subisce spostamenti in direzione circonferenziale  $\vartheta$ . Di conseguenza, il campo di spostamento dell'elemento ha solo le componenti  $u$  e  $v$  in direzione  $r$  e  $z$ :

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{d\} \quad (11.2.1)$$

Se, per esempio, l'elemento è di tipo isoparametrico lineare,  $[N]$  sono le stesse funzioni di forma usate nel paragrafo 9.2 e  $\{d\}$  è lo stesso vettore degli spostamenti di dimensione  $8 \times 1$ . Se invece si usa l'elemento Quad4C2 descritto nel paragrafo 10.4,  $\{d\}$  contiene 12 gradi di libertà prima della condensazione.

Il problema assialsimmetrico differisce da quello piano in quanto la deformazione normale circonferenziale  $\{\varepsilon_\theta\}$  non è nulla e non è funzione delle altre deformazioni e quindi deve essere presente in forma esplicita. Nel caso di materiale a comportamento isotropo, la relazione sforzi-deformazioni  $\{\sigma\} = [E](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\})$  è perciò:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (11.2.2)$$

in cui  $E$  è il Modulo di Young,  $\nu$  è il coefficiente di Poisson,  $\alpha$  è il coefficiente di espansione termica lineare e  $T$  è la variazione di temperatura. La relazione che lega gli spostamenti alle deformazioni è la seguente:



$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z} \quad ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad ; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad (11.2.3)$$

che sostituisce l'eq.8.2.2. Per elementi di tipo semplice come il triangolo ed il rettangolo, gli spostamenti  $u$  e  $v$  possono essere espressi direttamente in funzione di  $r, z$  e dei gradi di libertà nodali. Per gli elementi isoparametrici sono anche necessarie le relazioni che legano gli spostamenti in coordinate  $r, z$  a quelle naturali  $\xi, \eta$ :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (11.2.4)$$

in cui i coefficienti  $J_{ij}^*$  appartengono alla matrice  $[J]^{-1}$  inversa dello Jacobiano  $[J]$ .

A questo punto sono disponibili tutti gli ingredienti necessari per formulare le proprietà dell'elemento ed è quindi possibile seguire la stessa procedura seguita nel paragrafo 9.2. Osserviamo che adesso la matrice  $[B]$  contiene 4 righe, rispetto alle tre necessarie nel caso piano; inoltre, la matrice del materiale  $[E]$  ha dimensione  $4 \times 4$ . Per un dato tipo di elemento, sia gli elementi piani che quelli assialsimmetrici hanno lo stesso numero e tipo di gradi di libertà. Prima dell'integrazione numerica gli elementi isoparametrici richiedono le usuali trasformazioni di coordinate:

$$\int_{vol} (---) vol = \int_{vol} (---) r \cdot d\theta dr dz = \int_{vol} (---) r \cdot d\theta \cdot det[J] \cdot d\xi d\eta \quad (11.2.5)$$

in cui  $det[J]$  è il determinante dello Jacobiano.

Invece d'integrare lungo tutta la circonferenza, ci si potrebbe limitare ad un settore circolare lungo un solo radiante; così tutti gli integrandi si ridurrebbero a  $(---) r dr dz$  oppure  $(---) r \cdot det[J] \cdot d\xi d\eta$ . I valori che assume la variabile  $r$  nei punti di Gauss si trovano per mezzo dell'interpolazione, usando le coordinate  $r_i$  nodali e le solite funzioni di forma:

$$r = \sum_i N_i r_i$$

Vediamo dalle eq.(11.2.3) e (11.2.5) che nell'integrale della matrice di rigidità compare il termine  $1/r$ : quando si usa la quadratura di Gauss questo coefficiente non crea problemi perché non è mai valutato in  $r = 0$ . Invece, nel successivo calcolo degli sforzi, poiché nel modello possono essere presenti dei nodi disposti sull'asse di simmetria, può capitare che sia necessario il calcolo della deformazione circonferenziale  $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$ . Quando i punti che giacciono sull'asse di simmetria non subiscono spostamenti radiali, cioè  $u = 0$ , la deformazione circonferenziale non è definita in quanto  $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{0}{0}$ . Questa difficoltà si può evitare valutando la deformazione in un punto molto vicino a  $r = 0$  oppure valutando le deformazioni nei punti di Gauss ed estrapolando i risultati ai nodi e quindi anche in  $r = 0$ . Esiste poi la possibilità di risolvere il problema osservando che sull'asse è valida la relazione  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_r$ : quindi nei nodi disposti sull'asse di simmetria possiamo calcolare il valore di  $\varepsilon_r$  e poi assegnarne il valore a  $\varepsilon_\theta$ .

A causa dell'assialsimmetria, il solo moto rigido consentito è una traslazione in direzione  $z$ : infatti gli spostamenti radiali  $u$  danno luogo alle deformazioni circonferenziali  $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$ . Per impedire i moti rigidi è sufficiente imporre lo spostamento parallelo all'asse di simmetria (solitamente verticale) in un solo nodo. Quando sono presenti dei nodi sull'asse di simmetria, è consigliabile imporgli lo spostamento radiale nullo per evitare che errori numerici possano dar luogo a spostamenti negativi e quindi alla compenetrazione del materiale.



L'uso di alcuni elementi incompatibili, come il Quad4C2 (l'elemento Q6 di Wilson), comporta certe difficoltà. Le deformazioni dell'elemento possono esprimersi nel modo seguente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 [B_i] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^2 [G_i] \begin{Bmatrix} u_{4+i} \\ v_{4+i} \end{Bmatrix}$$

in cui

$$[B_i] = \begin{bmatrix} N_{i,r} & 0 \\ 0 & N_{i,z} \\ N_{i,r}/r & 0 \\ N_{i,z} & N_{i,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ N_{i,r}/r & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix}; \quad [G_i] = \begin{bmatrix} P_{i,r} & 0 \\ 0 & P_{i,z} \\ P_{i,r}/r & 0 \\ P_{i,z} & P_{i,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_i}{\partial z} \\ P_{i,r}/r & 0 \\ \frac{\partial P_i}{\partial z} & \frac{\partial P_i}{\partial r} \end{bmatrix}$$

dove

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad ; \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta);$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad ; \quad N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta);$$

$$P_1(\xi, \eta) = 1 - \xi^2 \quad ; \quad P_2(\xi, \eta) = 1 - \eta^2$$

Lo Jacobiano vale:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i = -\frac{1}{4}(1 - \eta)x_1 + \frac{1}{4}(1 - \eta)x_2 + \frac{1}{4}(1 + \eta)x_3 - \frac{1}{4}(1 + \eta)x_4 = \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) + \frac{\eta}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i = -\frac{1}{4}(1 - \eta)y_1 + \frac{1}{4}(1 - \eta)y_2 + \frac{1}{4}(1 + \eta)y_3 - \frac{1}{4}(1 + \eta)y_4 = \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4) + \frac{\eta}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i = -\frac{1}{4}(1 - \xi)x_1 - \frac{1}{4}(1 + \xi)x_2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)x_3 + \frac{1}{4}(1 - \xi)x_4 = \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) + \frac{\xi}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i = -\frac{1}{4}(1 - \xi)y_1 - \frac{1}{4}(1 + \xi)y_2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)y_3 + \frac{1}{4}(1 - \xi)y_4 = \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) + \frac{\xi}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)$$

La deformazione di scorrimento  $\gamma_{rz}$  vale:

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}$$

dove, come già osservato, le derivate degli spostamenti valgono:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Sviluppando abbiamo:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = J_{21}^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial u}{\partial \eta} = J_{21}^* \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} u_i + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial P_i}{\partial \xi} u_{4+i} \right) + J_{22}^* \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} u_i + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial P_i}{\partial \eta} u_{4+i} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = J_{11}^* \frac{\partial v}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial v}{\partial \eta} = J_{11}^* \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} v_i + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial P_i}{\partial \xi} v_{4+i} \right) + J_{12}^* \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} v_i + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial P_i}{\partial \eta} v_{4+i} \right)$$



Si analizzi il caso in cui l'elemento sia un rettangolo con i lati orientati come gli assi coordinati (vedi Fig.11.2.2). Risulta quindi che:

$$\begin{aligned} x_1 = x_4 & & ; & & x_2 = x_3 & & ; & & x_2 - x_1 = x_3 - x_4 = a \\ y_1 = y_2 & & ; & & y_3 = y_4 & & ; & & y_4 - y_1 = y_3 - y_2 = h \end{aligned}$$

da cui:

$$[J] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [J]^{-1} = \frac{2}{ah} \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Poiché  $J_{21}^* = J_{12}^* = 0$  la deformazione di scorrimento vale:

$$\gamma_{rz} = J_{22}^* \frac{\partial u}{\partial \eta} + J_{11}^* \frac{\partial v}{\partial \xi} = J_{22}^* \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} u_i + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial P_i}{\partial \eta} u_{4+i} \right) + J_{11}^* \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} v_i + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial P_i}{\partial \xi} v_{4+i} \right)$$

Sviluppando si ottiene:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi) ; \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi) ; \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi) ; \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \eta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P_2}{\partial \eta} = -2\eta$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 - \eta) ; \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta) ; \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta) ; \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 + \eta)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \xi} = -2\xi \quad ; \quad \frac{\partial P_2}{\partial \xi} = 0$$

Poiché si è ipotizzato che gli spostamenti nodali  $u_i = u$  siano costanti e che i  $v_i$  siano nulli, si ottiene:

$$\gamma_{rz} = \frac{2}{h} \left( u \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial P_i}{\partial \eta} u_{4+i} \right) + \frac{2}{a} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\partial P_i}{\partial \xi} v_{4+i} \right)$$

Osservando che  $\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = 0$  risulta che lo scorrimento vale:

$$\gamma_{rz} = -\frac{4}{h} \eta u_6 - \frac{4}{a} \xi v_5$$

nullo solo nel centro dell'elemento dove  $\xi = \eta = 0$  mentre dovrebbe essere nullo ovunque (vedi Fig.11.2.2).

Gli spostamenti radiali dei nodi danno luogo alla deformazione circonferenziale  $\varepsilon_\theta$ :

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \left( \sum_{i=1}^4 [N_i] \{u_i\} + \sum_{i=1}^2 [P_i] \{u_{4+i}\} \right) = \frac{1}{r} \left( \sum_{i=1}^4 [N_i] \{u_i\} + (1 - \xi^2) u_5 + (1 - \eta^2) u_6 \right)$$

Poiché si è ipotizzato che gli spostamenti nodali  $u_i$  siano costanti e poiché  $\sum_{i=1}^4 [N_i] = 1$ , allora:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + (1 - \xi^2) \frac{u_5}{r} + (1 - \eta^2) \frac{u_6}{r}$$

In particolare lungo i lati dell'elemento paralleli all'asse di assialsimmetria per i quali  $\xi = \pm 1$  risulta:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + (1 - \eta^2) \frac{u_6}{r}$$

di conseguenza la deformazione  $\varepsilon_\theta$  non è costante come invece dovrebbe essere.

Se il raggio è molto più grande della dimensione dell'elemento, cioè se  $r \gg a$ , la deformazione di scorrimento è piccola rispetto alle altre deformazioni, ma potrebbe essere anche del tutto assente.

Un modo per eliminare questa difficoltà consiste nell'annullare il coefficiente che moltiplica  $u_6$  nella terza riga della matrice  $[B]$  dove compare  $\varepsilon_\theta$ . Così il miglioramento dell'elemento rispetto alla risposta alla flessione rimarrebbe intatto. Ma questa strategia non è del tutto soddisfacente, a meno che tutti gli assi  $\xi = cost$  e tutte le facce elementari  $\eta = \pm 1$  giacciono su piani perpendicolari all'asse di rivoluzione. Si potrebbe applicare la stessa variazione al coefficiente della terza riga di  $[B]$  che moltiplica  $u_5$ , ma ciò darebbe luogo ad un notevole peggioramento dell'elemento a meno che  $r \gg a$ .

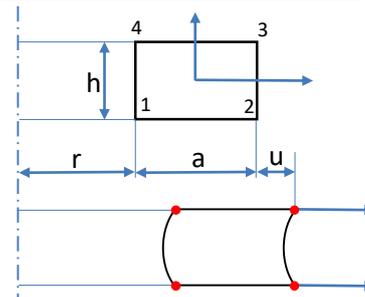


Fig.11.2.2

Probabilmente, lo schema migliore per un uso generale consiste nel conservare tutti i gradi di libertà in tutti i coefficienti delle deformazioni, ma quando si calcolano gli sforzi, valutare lo scorrimento  $\gamma_{rz}$  solo nel centro dell'elemento  $\xi = \eta = 0$ .

Si può notare che in un elemento quadratico a 8 nodi se le forze nodali causate dalla pressione non sono applicate adeguatamente si può manifestare la deformazione non voluta mostrata nella Fig.11.2.2. Ma negli elementi Quad4C2 (quello di Wilson) anche l'applicazione di carichi nodali pienamente consistenti non impedisce il comportamento descritto nella Fig.11.2.2. Di conseguenza, gli elementi Quad4C2 assialsimmetrici non superano il patch test, ma solo di poco quando  $r \gg a$ .

### 11.3 – Formulazione dell'elemento nel caso di carichi non-assialsimmetrici

In presenza di solidi assialsimmetrici soggetti a carichi non assialsimmetrici è ancora possibile risolvere il problema in modo quasi-bidimensionale scomponendo i carichi e gli spostamenti nodali in serie di Fourier lungo la circonferenza. Nel caso di carico non assialsimmetrico la componente tangenziale  $w$  dello spostamento non può più essere considerata nulla per cui:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (11.3.1)$$

Le componenti radiale, assiale e circonferenziale del carico sono:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \\ f_\vartheta \end{Bmatrix} \quad (11.3.2)$$

Queste possono essere espresse in serie di Fourier come:

$$\begin{cases} f_r = \sum_{h=0}^m (f_r^S)_h \cos(h\vartheta) + \sum_{h=0}^m (f_r^A)_h \sin(h\vartheta) \\ f_z = \sum_{h=0}^m (f_z^S)_h \cos(h\vartheta) + \sum_{h=0}^m (f_z^A)_h \sin(h\vartheta) \\ f_\vartheta = \sum_{h=0}^m (f_\vartheta^S)_h \sin(h\vartheta) + \sum_{h=0}^m (f_\vartheta^A)_h \cos(h\vartheta) \end{cases} \quad (11.3.3)$$

dove ciascun termine della serie è anche chiamata *armonica* ed  $h$  è l'ordine di ciascuna armonica. Gli esponenti  $S$  e  $A$  denotano le componenti simmetriche ed antisimmetriche del carico riferite al piano  $\vartheta = 0$ : questo è il motivo per cui i coefficienti della serie relative a  $f_\vartheta$  sono invertiti, cioè i termini simmetrici moltiplicano i seni e i termini antisimmetrici i coseni. La sommatoria è estesa agli  $m$  termini necessari per descrivere correttamente la distribuzione di carico. In modo analogo gli spostamenti sono espressi in serie di Fourier:

$$\begin{cases} u(r, z, \vartheta) = \sum_{h=0}^m u_h^S \cos(h\vartheta) + \sum_{h=0}^m u_h^A \sin(h\vartheta) \\ v(r, z, \vartheta) = \sum_{h=0}^m v_h^S \cos(h\vartheta) + \sum_{h=0}^m v_h^A \sin(h\vartheta) \\ w(r, z, \vartheta) = \sum_{h=0}^m w_h^S \sin(h\vartheta) + \sum_{h=0}^m w_h^A \cos(h\vartheta) \end{cases} \quad (11.3.4)$$

dove  $u_h^S, v_h^S, w_h^S, u_h^A, v_h^A$  e  $w_h^A$  sono i coefficienti di Fourier per l'armonica di ordine  $h$ . In forma matriciale possiamo esprimere la (11.3.4) nel modo seguente:



$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{h=0}^m \begin{bmatrix} \cos(h\vartheta) & 0 & 0 & \sin(h\vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(h\vartheta) & 0 & 0 & \sin(h\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(h\vartheta) & 0 & 0 & \cos(h\vartheta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_h^S \\ v_h^S \\ w_h^S \\ u_h^A \\ v_h^A \\ w_h^A \end{Bmatrix}$$

In altri termini:

$$\{s\} = \sum_{h=0}^m [\Theta_h^S] \{s_h^S\} + \sum_{h=0}^m [\Theta_h^A] \{s_h^A\} \quad (11.3.5)$$

ovvero:

$$\{s\} = \sum_{h=0}^m \left\{ \begin{bmatrix} [\Theta_h^S] & [\Theta_h^A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{s_h^S\} \\ \{s_h^A\} \end{Bmatrix} \right\} \quad (11.3.6)$$

con

$$\{s_h^S\} = \begin{Bmatrix} u_h^S \\ v_h^S \\ w_h^S \end{Bmatrix} ; \quad \{s_h^A\} = \begin{Bmatrix} u_h^A \\ v_h^A \\ w_h^A \end{Bmatrix} \quad (11.3.7)$$

e

$$[\Theta_h^S] = \begin{bmatrix} \cos(h\vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(h\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(h\vartheta) \end{bmatrix} ; \quad [\Theta_h^A] = \begin{bmatrix} \sin(h\vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(h\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(h\vartheta) \end{bmatrix} \quad (11.3.8)$$

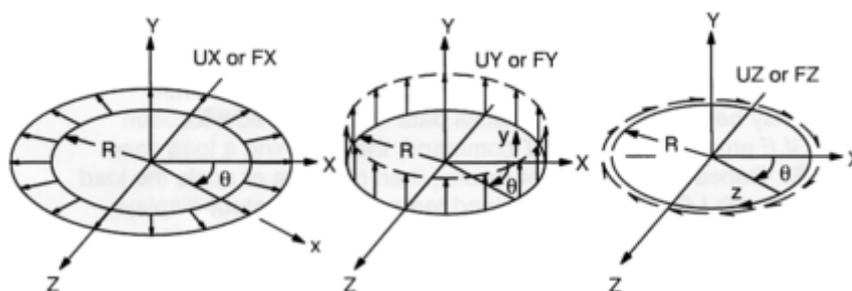


Figure 11.3.1: Carichi e spostamenti radiali, assiali e torsionali per il modo  $h = 0$ .

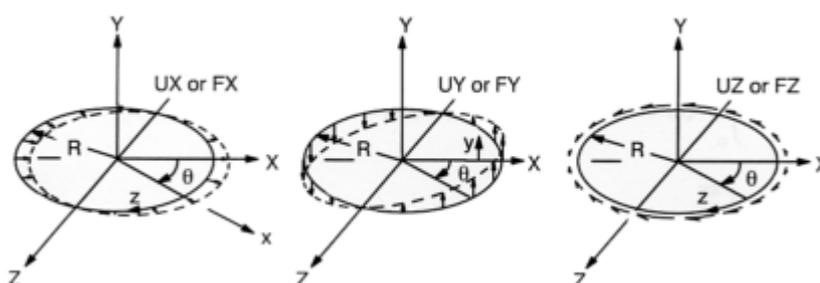


Figure 11.3.2: Carichi e spostamenti radiali, assiali e torsionali per il modo  $h = 1 (u_1^S, v_1^S, w_1^S)$ .

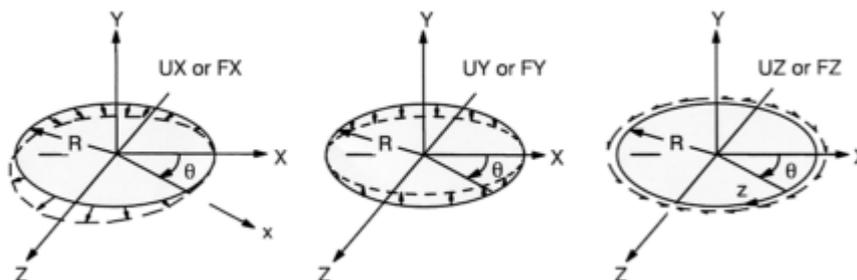
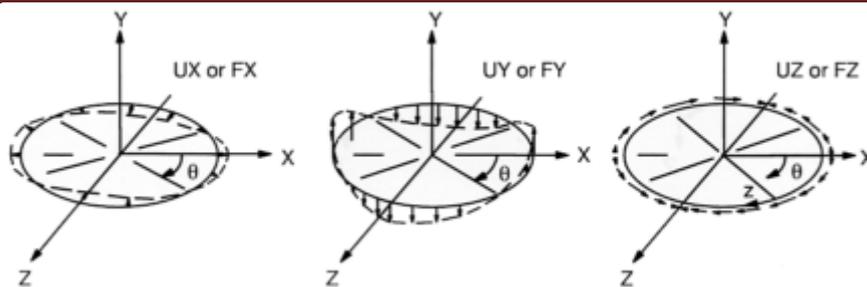


Figure 11.3.3: Carichi e spostamenti radiali, assiali e torsionali per il modo  $h = 1 (u_1^A, v_1^A, w_1^A)$ .


 Figure 11.3.4: Carichi e spostamenti radiali, assiali e torsionali per il modo  $h = 2$  ( $u_2^S, v_2^S, w_2^S$ ).

Nella Fig. 11.3.1 sono riportati gli andamenti dei carichi e degli spostamenti assialsimmetrici, quando  $h = 0$ . Nelle Fig. 11.3.2 e 11.3.3 sono indicati rispettivamente gli andamenti delle forze e degli spostamenti simmetrici ed antisimmetrici per  $h = 1$ ; nella Fig.11.3.4 gli andamenti delle forze e degli spostamenti simmetrici per  $h = 2$ .

Per l'armonica  $h$ -esima gli spostamenti di un punto dell'elemento sono espressi in funzione degli spostamenti nodali  $\{d_h^S\}$  e  $\{d_h^A\}$  attraverso le funzioni di forma  $[N]$ :

$$\{s_h^S\} = [N]\{d_h^S\} \quad ; \quad \{s_h^A\} = [N]\{d_h^A\} \quad (11.3.9)$$

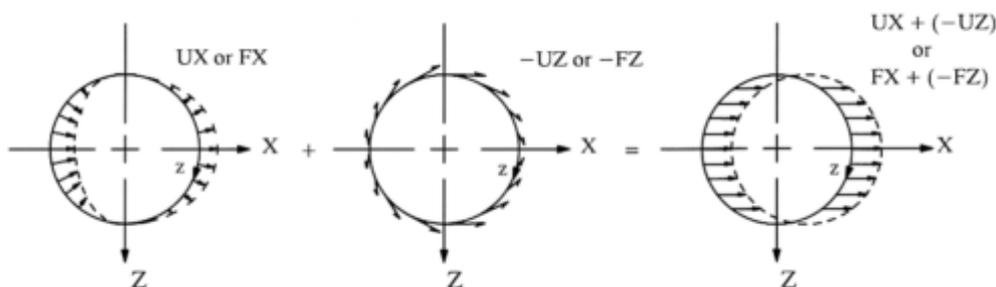
e gli spostamenti complessivi:

$$\{s\} = \sum_{h=0}^m [\Theta_h^S][N]\{d_h^S\} + \sum_{h=0}^m [\Theta_h^A][N]\{d_h^A\} \quad (11.3.10)$$

ovvero:

$$\{s\} = \sum_{h=0}^m \left( \begin{bmatrix} [\Theta_h^S][N] & [\Theta_h^A][N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_h^S\} \\ \{d_h^A\} \end{Bmatrix} \right) \quad (11.3.10a)$$

Se si desidera applicare una forza laterale nella direzione  $x$  globale sulla sezione trasversale di una struttura cilindrica, è necessario sommare il contributo delle forze in direzione radiale ( $u_1^S$ ) e tangenziale ( $-w_1^S$ ), come mostrato nella seguente figura.


 Figure 11.3.5: Combinazione del carico radiale  $(f_r^S)_1$  e di quello tangenziale  $-(f_\vartheta^S)_1$  per ottenere un carico in direzione orizzontale  $X$ . La stessa procedura si può adottare per imporre uno spostamento.

Se con  $(f_r^S)_1 = F_r \cos(\vartheta)$  indichiamo la prima armonica del carico radiale applicato lungo una circonferenza di raggio  $R$  e con  $(f_\vartheta^S)_1 = F_\vartheta \sin(\vartheta)$  il corrispondente carico circonferenziale, il carico complessivo in direzione  $X$  globale si ottiene dalla differenza dei due contributi:

$$F_x = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{F_r \cos(\vartheta)}{2\pi R} \times \cos(\vartheta) - \frac{F_\vartheta \sin(\vartheta)}{2\pi R} \times [-\sin(\vartheta)] \right\} \times (R d\vartheta) = \frac{F_r + F_\vartheta}{2}$$



Esaminiamo le relazioni spostamenti-deformazioni per un corpo assialsimmetrico sottoposto ad un campo di spostamenti tridimensionale:

La deformazione radiale è definita nel modo seguente:

$$\epsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

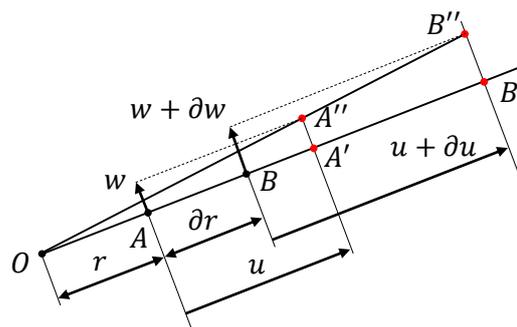
Ma, come si deduce dalla figura qui a lato:

$$A'B' = AB' - AA' = (\partial r + u + \partial u) - (u) = \partial r + \partial u$$

$$AB = \partial r$$

da cui:

$$\epsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(\partial r + \partial u) - \partial r}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

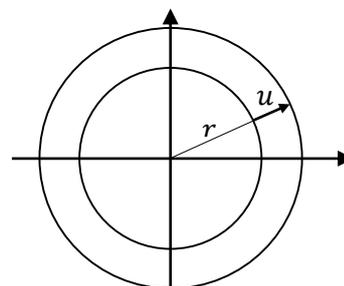


Per la deformazione in direzione assiale è possibile scrivere un'equazione analoga:  $\epsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z}$

La deformazione circonferenziale nel caso di soli spostamenti radiali varrebbe:

$$\epsilon_\vartheta = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

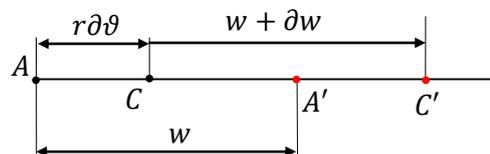
A causa della variazione degli spostamenti  $w$  circonferenziali in funzione dell'angolo  $\vartheta$  è necessario correggere questa espressione.



Nello schema a lato i punti A, C, A' e C' si trovano lungo una circonferenza di raggio  $r$ .

$$\epsilon_\vartheta = \frac{A'C' - AC}{AC} = \frac{(AC' - AA') - AC}{AC}$$

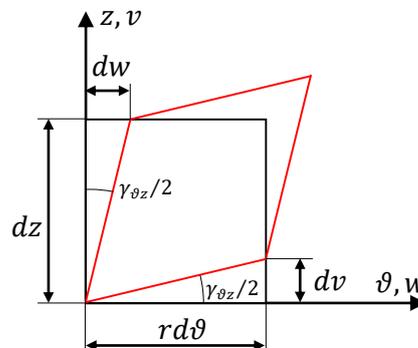
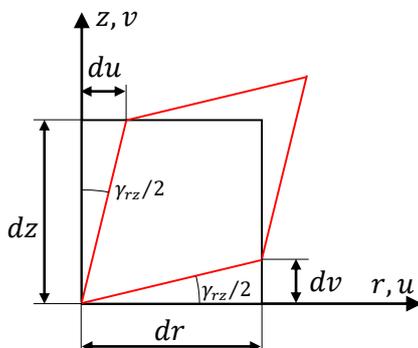
$$\epsilon_\vartheta = \frac{(r\partial\vartheta + w + \partial w - w) - r\partial\vartheta}{r\partial\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta}$$



In conclusione:  $\epsilon_\vartheta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta}$

Per quanto riguarda lo scorrimento nel piano  $rz$  abbiamo:  $\gamma_{rz} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}$ , mentre nel piano  $z\vartheta$  abbiamo:

$$\gamma_{z\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial z}$$



Nel piano  $r - \vartheta$  perpendicolare all'asse del corpo abbiamo:  $\gamma_{r\vartheta} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{w}{r}$  dove il terzo termine ( $w/r$ ) è necessario per eliminare la rotazione rigida.

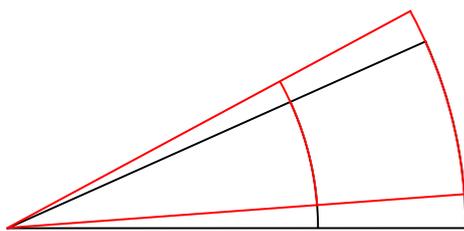


Fig.11.3.6 – Rotazione rigida:  $\gamma_{z\theta} = 0$

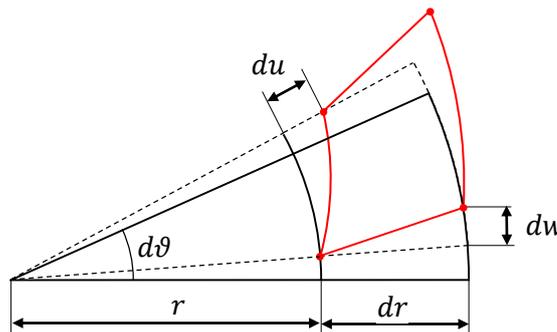


Fig.11.3.7 – Scorrimento  $\gamma_{r\theta}$

In forma matriciale abbiamo:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{\theta r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & 0 \\ 1/r & 0 & \partial/r\partial\theta \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r & 0 \\ 0 & \partial/r\partial\theta & \partial/\partial z \\ \partial/r\partial\theta & 0 & \partial/\partial r - 1/r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\partial]\{s\} \quad (11.3.11)$$

Sostituendo la (11.3.10) abbiamo:

$$\{\varepsilon\} = \sum_{h=0}^m [\partial][\Theta_h^S][N]\{d_h^S\} + \sum_{h=0}^m [\partial][\Theta_h^A][N]\{d_h^A\} \quad (11.3.12)$$

ovvero:

$$\{\varepsilon\} = \sum_{h=0}^m [B_h^S]\{d_h^S\} + \sum_{h=0}^m [B_h^A]\{d_h^A\} \quad (11.3.13)$$

o, in altra forma:

$$\{\varepsilon\} = \sum_{h=0}^m \left( \begin{bmatrix} [B_h^S] & [B_h^A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_h^S\} \\ \{d_h^A\} \end{Bmatrix} \right) = \sum_{h=0}^m [B_h]\{d_h\} \quad (11.3.14)$$

Il vettore delle tensioni è:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{\theta r} \end{Bmatrix} \quad (11.3.15)$$

e la relazione sforzi deformazioni è la seguente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{\theta r} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{\theta r} \end{Bmatrix} = [E]\{\varepsilon\} \quad (11.3.16)$$

e, sostituendo per le deformazioni la 11.3.13:

$$\{\sigma\} = [E] \sum_{h=0}^m [B_h^S]\{d_h^S\} + \sum_{h=0}^m [B_h^A]\{d_h^A\} \quad (11.3.17)$$

ovvero:

$$\{\sigma\} = [E] \sum_{h=0}^m \left( \begin{bmatrix} [B_h^S] & [B_h^A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_h^S\} \\ \{d_h^A\} \end{Bmatrix} \right) = [E] \sum_{h=0}^m [B_h]\{d_h\} \quad (11.3.18)$$

La matrice di rigidezza dell'elemento è data da:



$$[K] = \sum_{h=0}^m \sum_{l=0}^m [K_{hl}]$$

avendo indicato con  $[K_{hl}]$  il contributo alla rigidezza delle armoniche di ordine  $h$  e  $l$ :

$$[K_{hl}] = \int_V [B_h]^T [E] [B_l] dvol = \int_V \begin{bmatrix} [B_h^S]^T \\ [B_h^A]^T \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} [B_l^S] & [B_l^A] \end{bmatrix} dvol \quad (11.3.19)$$

Il volume infinitesimo è espresso da:

$$dvol = r \cdot d\vartheta dr dz = r \cdot d\vartheta dA$$

Si ha:

$$[K_{hl}] = \int_A \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} [B_h^S]^T \\ [B_h^A]^T \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} [B_l^S] & [B_l^A] \end{bmatrix} r \cdot d\vartheta dA \quad (11.3.20)$$

dove  $A$  è l'area della sezione retta dell'elemento assialsimmetrico. La (11.3.20) si può elaborare nel modo seguente:

$$[K_{hl}] = \int_A \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} [B_h^S]^T [E] [B_l^S] & [B_h^S]^T [E] [B_l^A] \\ [B_h^A]^T [E] [B_l^S] & [B_h^A]^T [E] [B_l^A] \end{bmatrix} r \cdot d\vartheta dA \quad (11.3.21)$$

La matrice di rigidezza  $[K]$  di un elemento è quindi la seguente:

$$[K] = \int_A \int_0^{2\pi} \sum_{h=0}^m \sum_{l=0}^m \begin{bmatrix} [B_h^S]^T [E] [B_l^S] & [B_h^S]^T [E] [B_l^A] \\ [B_h^A]^T [E] [B_l^S] & [B_h^A]^T [E] [B_l^A] \end{bmatrix} r \cdot d\vartheta dA \quad (11.3.22)$$

E' necessario quindi calcolare i seguenti integrali:

$$\int_A \int_0^{2\pi} \sum_{h=0}^m \sum_{l=0}^m [B_h^S]^T [E] [B_l^S] r \cdot d\vartheta dA \quad (11.3.23a)$$

$$\int_A \int_0^{2\pi} \sum_{h=0}^m \sum_{l=0}^m [B_h^A]^T [E] [B_l^A] r \cdot d\vartheta dA \quad (11.3.23b)$$

$$\int_A \int_0^{2\pi} \sum_{h=0}^m \sum_{l=0}^m [B_h^S]^T [E] [B_l^A] r \cdot d\vartheta dA \quad (11.3.24a)$$

$$\int_A \int_0^{2\pi} \sum_{h=0}^m \sum_{l=0}^m [B_h^A]^T [E] [B_l^S] r \cdot d\vartheta dA \quad (11.3.24b)$$

Tutti i coefficienti delle matrici (11.3.24) contengono i seguenti integrali, il cui valore è sempre nullo quando l'intervallo d'integrazione si estende da 0 e  $2\pi$ :

$$\int_0^{2\pi} \sin(h\vartheta) \cos(l\vartheta) d\vartheta = 0 \quad h = l = 0, 1, 2, \dots, m \quad (11.3.25)$$

I termini simmetrici e antisimmetrici dell'espressione in serie sono quindi disaccoppiati, come d'altronde era chiaro visto che le serie di Fourier sono ortogonali. In modo analogo si può constatare che gli integrali nelle espressioni (11.3.23) sono riconducibili a due tipi:

$$\int_0^{2\pi} \cos(h\vartheta) \cos(l\vartheta) d\vartheta = \begin{cases} 0 & h \neq l \\ \pi & h = l \neq 0 \\ 2\pi & h = l = 0 \end{cases} \quad (11.3.26)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(h\vartheta) \sin(l\vartheta) d\vartheta = \begin{cases} 0 & h \neq l \\ \pi & h = l \neq 0 \\ 2\pi & h = l = 0 \end{cases} \quad (11.3.27)$$

Le uniche sottomatrici diverse da zero che compongono la matrice di rigidezza elementare  $[K]$  sono quelle disposte lungo la diagonale principale. Le singole armoniche possono quindi essere analizzate separatamente ed il risultato finale può essere ottenuto sovrapponendo i risultati relativi alle  $m$  armoniche, come indicato in (11.3.10), (11.3.13) e (11.3.17). La matrice di rigidezza globale assume quindi la forma seguente:



$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{00}^{SS}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K_{11}^{SS}] & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [K_{ii}^{SS}] & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{mm}^{SS}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{00}^{AA}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{11}^{AA}] & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{ii}^{AA}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{mm}^{AA}] \end{bmatrix}$$

La matrice  $[K_{ii}^{SS}]$  ha dimensione  $(3 \times NN)$  dove  $NN$  indica il numero di nodi del modello.

Questo tipo di analisi può essere condotta solo nel caso in cui la struttura abbia un comportamento lineare, cioè valga il principio di sovrapposizione degli effetti.

**Note sullo sviluppo in serie di Fourier**

Quante armoniche  $m$  sono necessarie per risolvere in modo corretto il problema quando i carichi non sono assialsimmetrici ?

Se  $f(\vartheta)$  è una funzione a valori reali, periodica, con periodo  $2\pi$ , è possibile rappresentarla per mezzo della serie di Fourier:

$$f(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} [a_h \cdot \cos(h\vartheta) + b_h \cdot \sin(h\vartheta)]$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cdot d\vartheta \quad ; \quad a_h = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cdot \cos(h\vartheta) \cdot d\vartheta \quad ; \quad b_h = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cdot \sin(h\vartheta) \cdot d\vartheta$$

I coefficienti  $a_h$  e  $b_h$  esprimono le ampiezze, ovvero i pesi delle sinusoidi e cosinusoidi, mentre  $a_0/2$  corrisponde al valor medio della funzione  $f(\vartheta)$  in un periodo  $2\pi$ .

Le funzioni *seno* sono chiamate *dispari* o antisimmetriche, in quanto  $\sin(\vartheta) = -\sin(-\vartheta)$ ; le funzioni *coseno* sono dette *pari* o simmetriche perché  $\cos(\vartheta) = \cos(-\vartheta)$ .

Nel seguente esempio svilupperemo in serie di Fourier la funzione periodica  $Rect(\vartheta)$  così definita:

$$\begin{aligned} q(\vartheta) &= q_0 = \text{costante} && \text{nell'intervallo } 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ q(\vartheta) &= 0 && \text{nell'intervallo } \pi \leq \vartheta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Si tratta di un'onda quadra che si ripete con un periodo  $\vartheta = 2\pi$ . Si può dimostrare che lo sviluppo in serie di Fourier di tale funzione è la seguente:

$$q(\vartheta) = q_0 \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{h \text{ dispari}} \frac{1}{h} \cdot \sin(h\vartheta) \right]$$

Infatti abbiamo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cdot d\vartheta = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} q_0 \cdot d\vartheta = \frac{q_0}{\pi} \cdot [\vartheta]_0^{\pi} = q_0$$

$$a_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cos(h\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_0 \cdot \cos(h\vartheta) \cdot d\vartheta = \frac{q_0}{h\pi} \cdot [\sin(h\vartheta)]_0^{\pi} = 0$$

$$b_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \sin(h\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_0 \cdot \sin(h\vartheta) \cdot d\vartheta = -\frac{q_0}{h\pi} \cdot [\cos(h\vartheta)]_0^{\pi} = -\frac{q_0}{h\pi} \cdot \{\cos(h\pi) - \cos(0)\}$$

da cui:



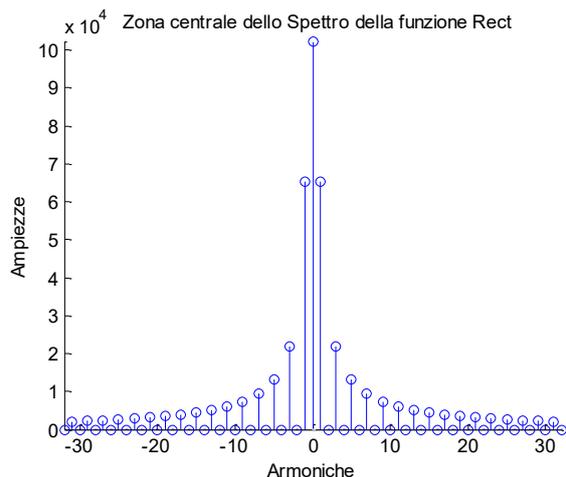
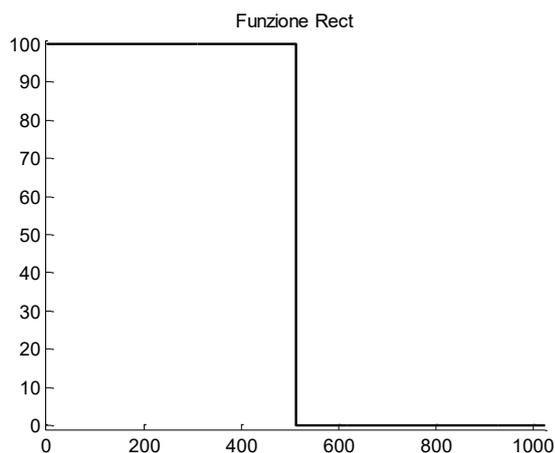
$$b_h = \frac{q_0}{h\pi} \cdot [1 - \cos(h\pi)]$$

Se  $h$  è dispari abbiamo  $1 - \cos(h\pi) = 2$  da cui:  $b_h = \frac{2q_0}{h\pi}$

mentre se  $h$  è pari abbiamo  $1 - \cos(h\pi) = 0$  da cui:  $b_h = 0$

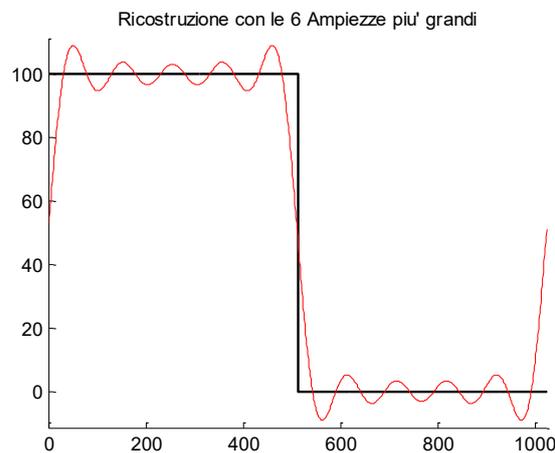
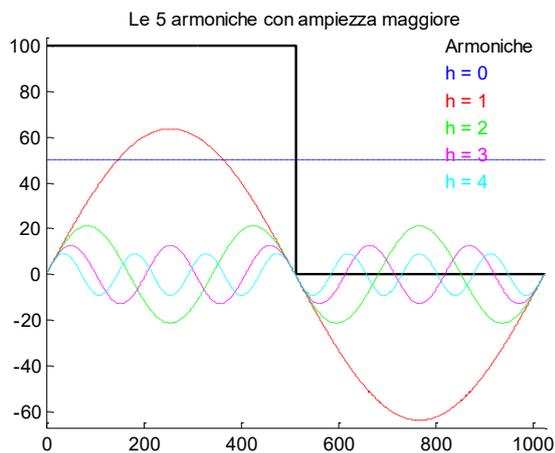
Lo sviluppo in serie di Fourier della funzione periodica  $Rect(\vartheta)$  è quindi la seguente:

$$q(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} [a_h \cdot \cos(h\vartheta) + b_h \cdot \sin(h\vartheta)] = \frac{q_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} b_h \cdot \sin(h\vartheta) = \frac{q_0}{2} + \frac{2q_0}{\pi} \sum_{h \text{ dispari}} \frac{1}{h} \cdot \sin(h\vartheta)$$



L'ascissa del diagramma a sinistra indica il numero di punti (in questo caso 1024) utilizzati per la Trasformata discreta di Fourier della funzione Rect. Nel diagramma di destra l'asse orizzontale indica i valori assunti da  $h$ .

Come si può intuire osservando la seguente figura, aggiungendo un numero crescente di termini, la serie approssima sempre meglio la funzione esatta di partenza.



Definiamo l'errore come la radice quadrata dell'integrale esteso a tutto il periodo  $2\pi$ , del quadrato della differenza tra la funzione esatta e quella approssimata:

$$Err = \sqrt{\int_0^{\pi} [q_0 - q(\vartheta)]^2 d\vartheta + \int_{-\pi}^0 [-q(\vartheta)]^2 d\vartheta}$$

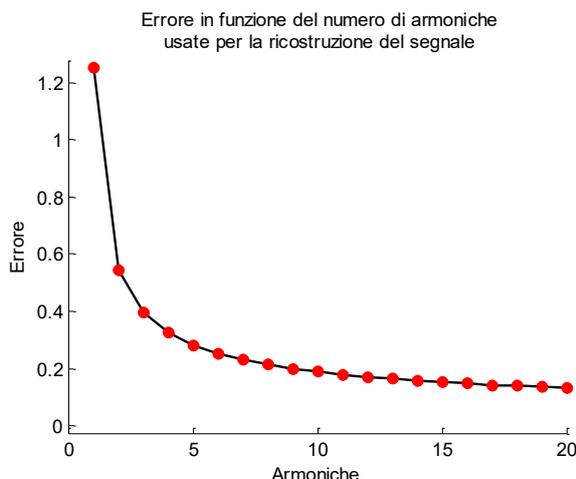
Sviluppando abbiamo:

$$Err(h) = q_0 \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1,3,5,\dots,h} \frac{1}{j^2}}$$



Nella seguente tabella e nel diagramma a lato sono riportati i primi valori della funzione  $Err(h)$  per  $q_0 = 1$ :

| $h$ | Err  |
|-----|--|
| 0   | $q_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.2533 \cdot q_0$  |
| 1   | $q_0 \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}} = 0.545488 \cdot q_0$                                |
| 3   | $q_0 \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1,3} \frac{1}{j^2}} = 0.395077 \cdot q_0$     |
| 5   | $q_0 \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1,3,5} \frac{1}{j^2}} = 0.324278 \cdot q_0$   |
| 7   | $q_0 \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1,3,5,7} \frac{1}{j^2}} = 0.281375 \cdot q_0$ |



Come è evidente dal diagramma, l'errore si riduce notevolmente usando le prime armoniche, dopo di che il miglioramento procede sempre più lentamente. In questo caso bastano poche armoniche per la soluzione del problema con il carico non assialsimmetrico.

Nel seguente esempio sviluppiamo in serie di Fourier la seguente funzione periodica:

$$q(\vartheta) = q_0 = \text{costante} \quad \text{nell'intervallo } 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$$

$$q(\vartheta) = 0 \quad \text{altrove}$$

I coefficienti della serie risultano i seguenti:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cdot d\vartheta = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\vartheta_0} q_0 \cdot d\vartheta = \frac{q_0}{\pi} \cdot [\vartheta]_0^{\vartheta_0} = q_0 \frac{\vartheta_0}{\pi}$$

$$a_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cos(h\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\vartheta_0} q_0 \cdot \cos(h\vartheta) \cdot d\vartheta = \frac{q_0}{h\pi} \cdot [\sin(h\vartheta)]_0^{\vartheta_0} = \frac{q_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(h\vartheta_0)}{h}$$

$$b_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \sin(h\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\vartheta_0} q_0 \cdot \sin(h\vartheta) \cdot d\vartheta = -\frac{q_0}{h\pi} \cdot [\cos(h\vartheta)]_0^{\vartheta_0} = -\frac{q_0}{h\pi} \cdot \{\cos(h\vartheta_0) - \cos(0)\}$$

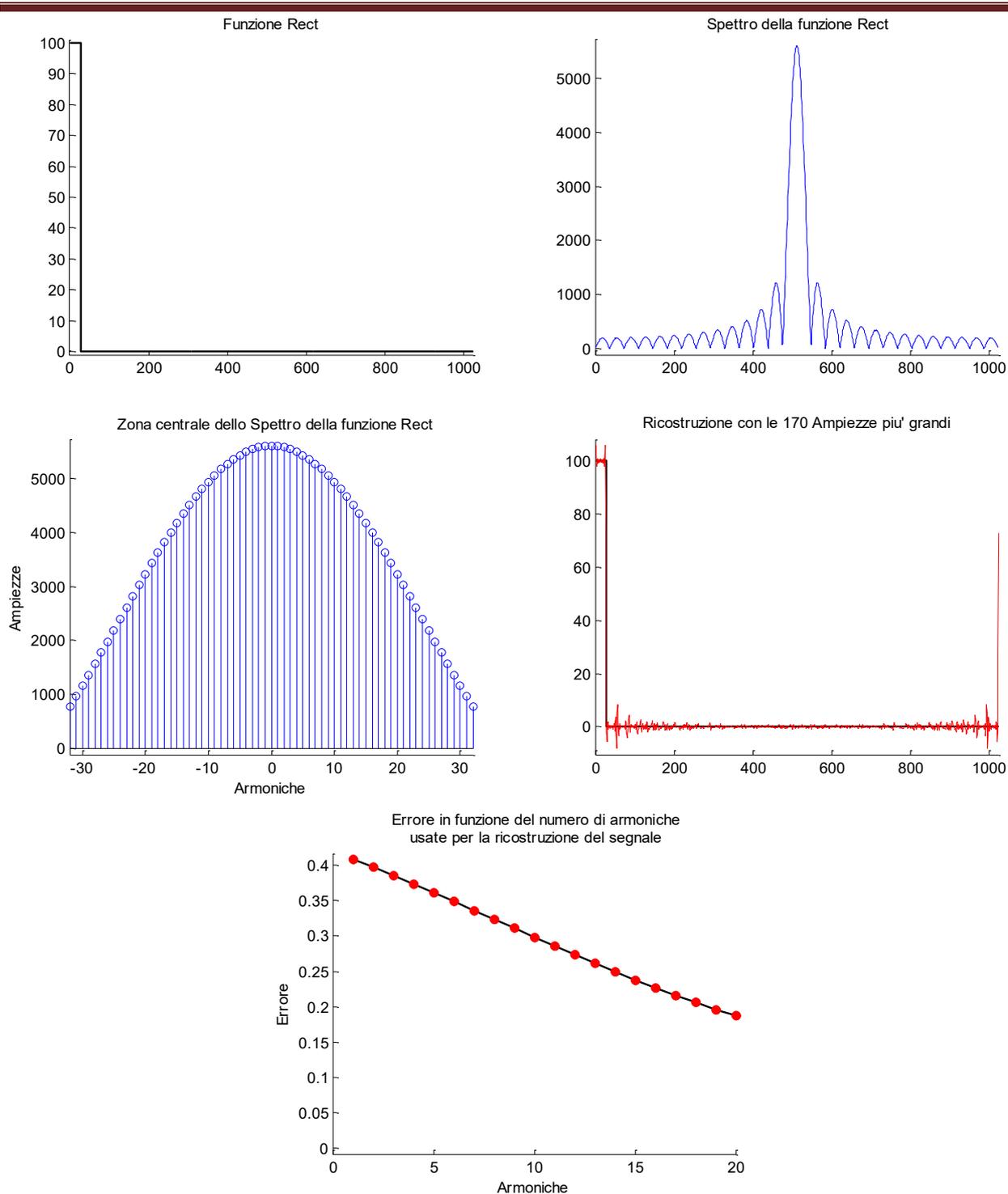
da cui:

$$b_h = \frac{q_0}{h\pi} \cdot [1 - \cos(h\vartheta_0)]$$

Lo sviluppo in serie di Fourier risulta dunque il seguente:

$$q(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} [a_h \cdot \cos(h\vartheta) + b_h \cdot \sin(h\vartheta)] = \frac{q_0}{\pi} \left\{ \frac{\vartheta_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin(h\vartheta_0)}{h} \cdot \cos(h\vartheta) \right] + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{[1 - \cos(h\vartheta_0)]}{h} \cdot \sin(h\vartheta) \right\}$$

Man mano che  $\vartheta_0$  si avvicina a zero, ovvero quando il carico diventa concentrato in direzione circonferenziale, le ampiezze dello spettro rimangono elevate per gran parte dello spettro e quindi per la ricostruzione precisa del segnale sono necessarie numerose armoniche. Di conseguenza, in tali circostanze, i tempi di calcolo si allungano notevolmente.



Come è evidente dall'ultimo diagramma, al crescere del numero di armoniche utilizzate per la ricostruzione del segnale, l'errore si riduce molto lentamente, di conseguenza sono necessarie numerose armoniche.