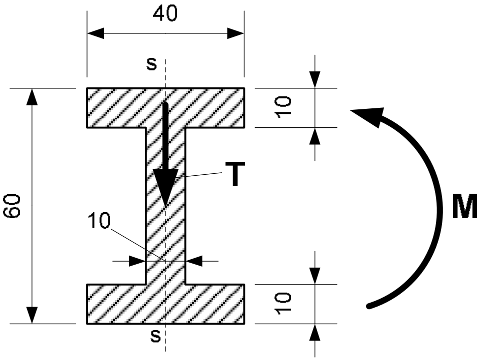
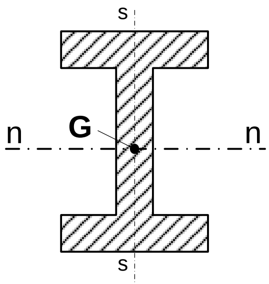
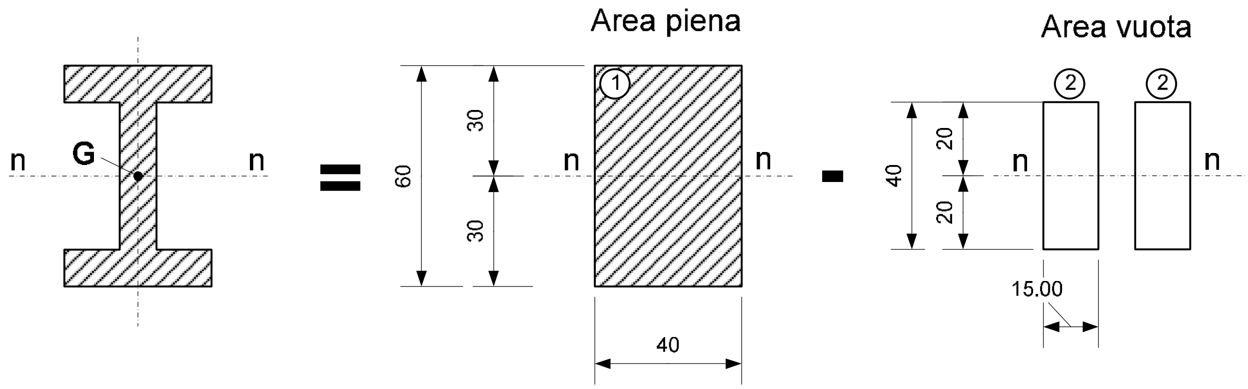
La sezione di trave di figura è soggetta ad un momento flettente pari a 3000 kNmm e ed un’azione di taglio pari a 15 kN, entrambe agenti su un piano verticale passante per l’asse s-s. Calcolare gli sforzi σ e τ massimi nella sezione.




La sezione ha due assi di simmetria (uno verticale, che coincide con l’asse di sollecitazione s-s, e l’altro orizzontale) e pertanto il baricentro G si trova nell’intersezione di questi assi.
L’asse neutro n-n è l’asse perpendicolare all’asse s-s e passante per il baricentro.

Per il calcolo del momento d’inerzia della sezione rispetto all’asse neutro si può considerare la sezione come composta dal rettangolo **j** (area piena) meno i due rettangoli **k** (area vuota).



Il momento d'inerzia $J$ della sezione completa rispetto all'asse neutro n-n è uguale alla differenza tra il momento d'inerzia del rettangolo $\mathbf{j}$ ed il momento d'inerzia dei rettangoli $\mathbf{k}$, entrambi ovviamente calcolati sempre rispetto all'asse n-n.

Poichè l'asse n-n passa per il baricentro del rettangoli $\mathbf{j}$ e dei rettangoli $\mathbf{k}$, i momenti d'inerzia delle aree piena ($J_p$, rettangolo $\mathbf{j}$) e dell'area vuota ($J_v$, rettangoli $\mathbf{k}$) valgono:

$$J_p = \frac{40 \cdot 60^3}{12} = 720000$$

$$J_v = 2 \cdot \frac{15 \cdot 40^3}{12} = 160000$$

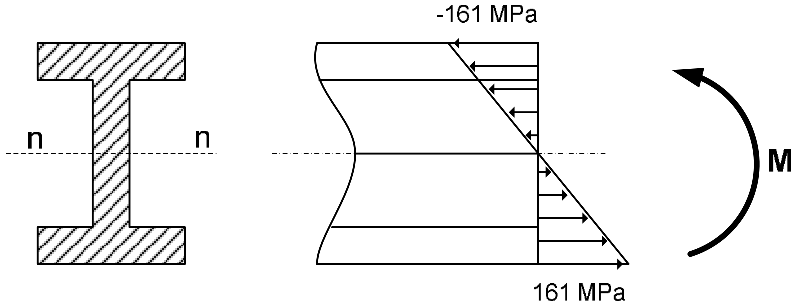
Pertanto

$$J = J_p - J_v = 720000 - 160000 = 560000\ mm^4$$

Per la formula di Navier ($s = \frac{M \cdot y}{J}$), gli sforzi normali σ più elevati nella sezione varranno:

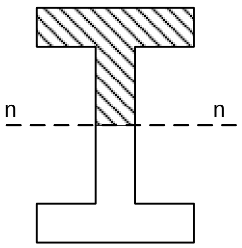
$s = -\frac{3000 \cdot 10^3 \cdot 30}{560000} = -161 \frac{N}{mm^2} = -161\ MPa$ alle fibre superiori più distanti dall'assse neutro (sforzo di compressione);

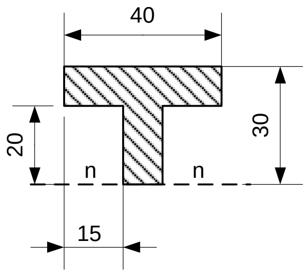
$s = \frac{3000 \cdot 10^3 \cdot 30}{560000} = 161 \frac{N}{mm^2} = 161\ MPa$ alle fibre inferiori più distanti dall'assse neutro(sforzo di trazione).



Per la formula di Jourawski ( $t = \dfrac{T \cdot S(y)}{b\,J}$ ), poichè l’asse neutro baricentrico passa per la parte più stretta della sezione (anima), gli sforzi tangenziali τ massimi si avranno all’asse neutro.

Il momento statico S di una delle due parti di sezione individuate dall’asse neutro (si prenda ad esempio la parte di sezione superiore, tratteggiata nella figura seguente) può essere calcolato come differenza dei momenti statici dell’area piena (rettangolo di base 40 ed altezza 30) e dell’area vuota (due rettangoli di base 15 ed altezza 20).



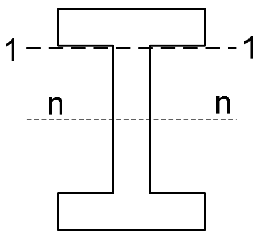

Si avrà dunque:

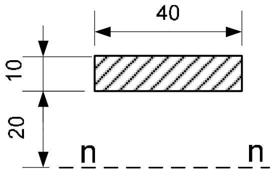
$$S = S_p - S_v = (40 \cdot 30) \cdot \frac{30}{2} - 2 \cdot (15 * 20) \cdot \frac{20}{2} = 12000\ mm^3$$

Lo sforzo τ all’asse neutro varra dunque:

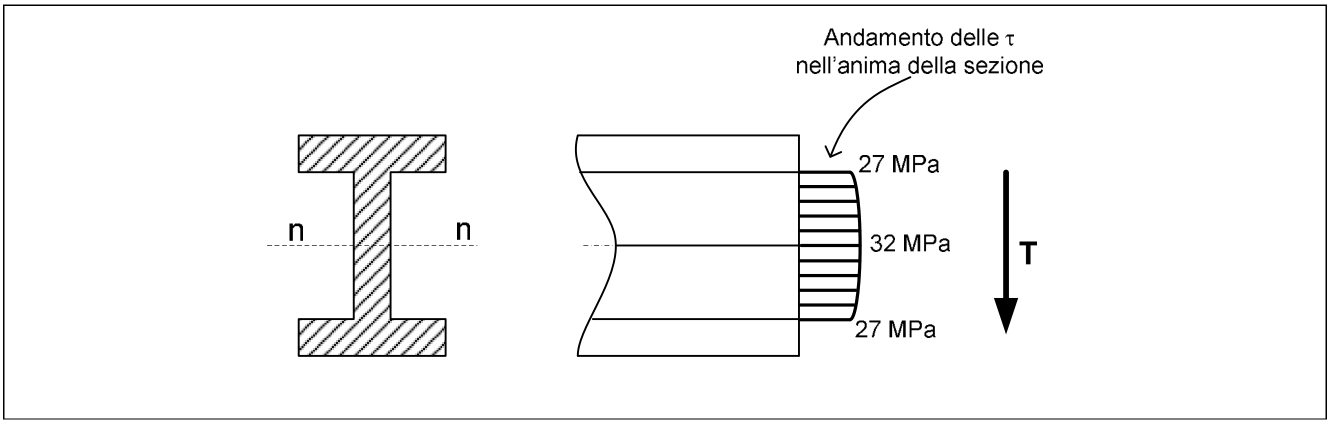
$$t = \frac{15000 \cdot 12000}{10 \cdot 560000} = 32 \frac{N}{mm^2} = 32\ MPa$$

Lo sforzo τ sulla linea 1-1 dell’anima (immediatamente sotto l’ala della sezione) vale invece:

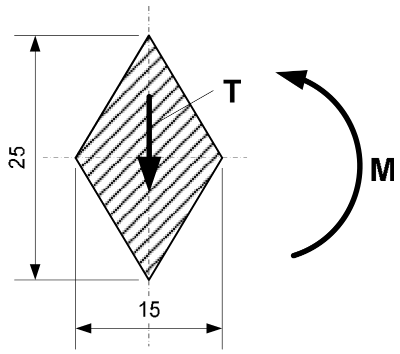


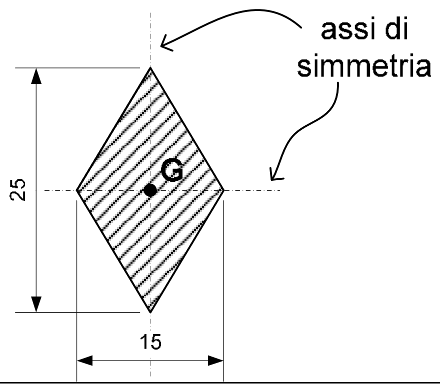



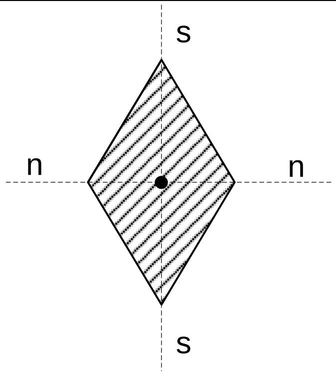

$$t = \frac{T \cdot S(y)}{b\,J} = \frac{15000 \cdot [(40 \cdot 10) \cdot 25]}{10 \cdot 560000} = 27 \frac{N}{mm^2} = 27\ MPa$$

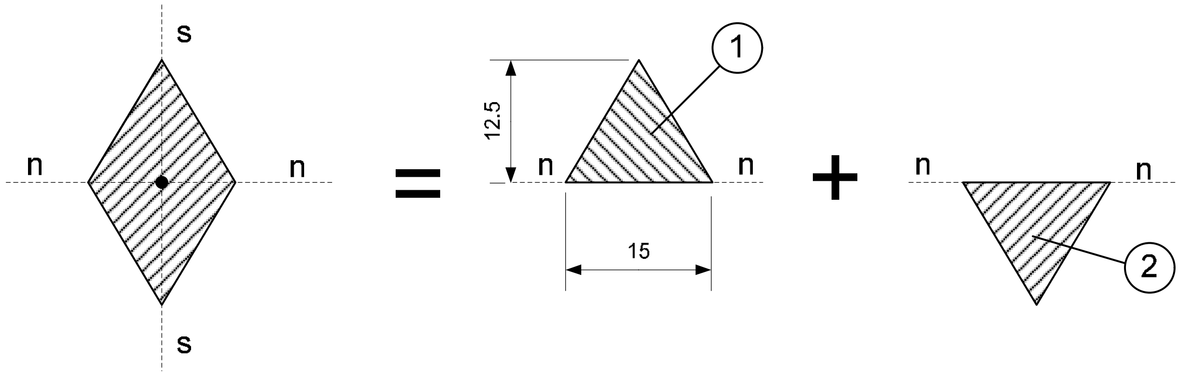

Andamento delle τ
nell'anima della sezione
n
n
27 MPa
32 MPa
27 MPa
T

**La sezione di figura è soggetta ad un momento flettente M = 15 kNmm (che agisce sul piano verticale di simmetria e che tende le fibre inferiori) e ad una azione di taglio pari a 4 kN. Calcolare gli sforzi s massimi nella sezione e la *t* all'asse neutro utilizzando rispettivamente le formule di Navier e di Jourawski.**




| | |
|---|---|
|   | La sezione ha due assi di simmetria e dunque la posizione del baricentro G è nota (G si trova all'intersezione dei due assi di simmetria). |

| | |
|---|---|
|   | L'asse neutro n-n passa per il baricentro della sezione ed è ortogonale all'asse di sollecitazione s-s- (intersezione del piano su cui giace il momento flettente con il piano della sezione). |




La sezione può essere vista come una sezione composta da due triangoli: il triangolo superiore **j** e quello inferiore **k**, entrambi aventi base 15 mm ed altezza 12.5 mm.
Il momento d'inerzia J della sezione completa rispetto all'asse neutro n-n si può pertanto scrivere come la somma del momento d'inerzia del triangolo **j** rispetto all'asse n-n ($J_1$) e del momento d'inerzia del triangolo **k** sempre rispetto all'asse n-n ($J_2$):

$J = J_1 + J_2$

Per i triangoli **j** e **k**, l'asse n-n coincide con la base (di lunghezza 15 mm); ricordando che il momento d'inerzia di un'area triangolare di base *b* ed altezza *h* rispetto ad una retta passante per la base vale $\frac{b \cdot h^3}{12}$, si ricavano $J_1$ *e* $J_2$ come

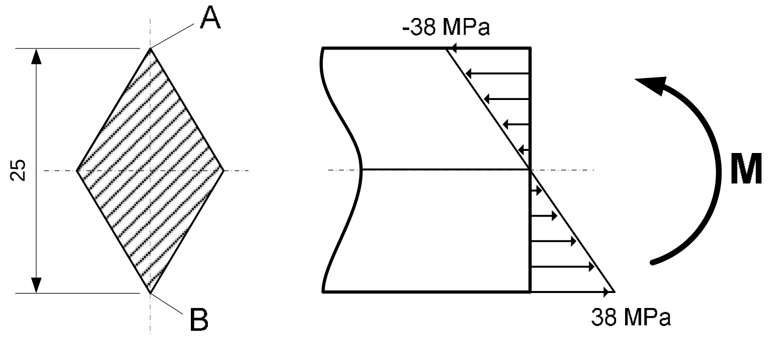
$$J_1 = J_2 = \frac{15 \cdot 12.5^3}{12} = 2441.4\ mm^4$$

Di conseguenza $J = J_1 + J_2 = 4882.8\ mm^4$

Per la formula di Navier ($s = \frac{M \cdot y}{J}$), gli sforzi massimi generati dal momento flettente saranno pari in valore assoluto a

$$s = \frac{15000 \cdot 12.5}{4882.8} = 38\ MPa$$

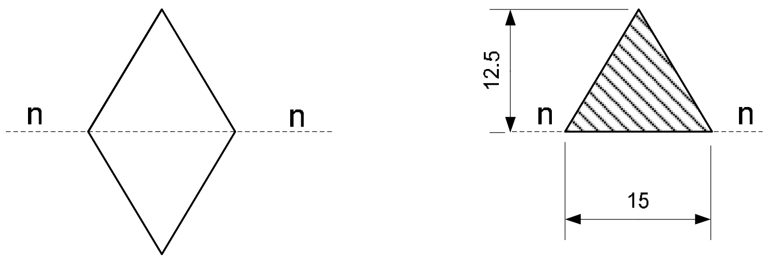
In particolare si avrà:
- uno sforzo negativo (compressione) pari a $s = -38\ MPa$ nel punto A,
- uno sforzo positivo (trazione) pari a $s = +38\ MPa$ nel punto B.




Per la formula di Jourawski, gli sforzi tangenziali all'asse neutro valgono:

$$t = \frac{T \cdot S(y)}{b\, J}$$

dove *S(y)* è il momento d'inerzia di metà sezione (area tratteggiata della figura sottostante) rispetto all'asse neutro.



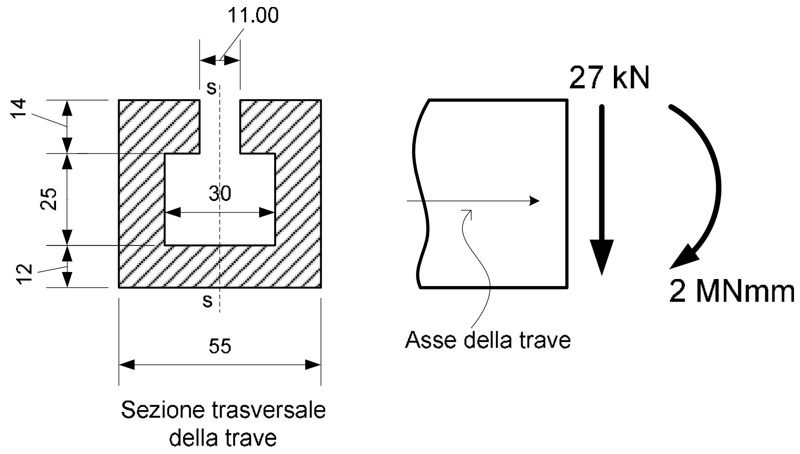

Poichè il baricentro di un triangolo si trova ad un terzo della sua altezza, il momento statico cercato vale:

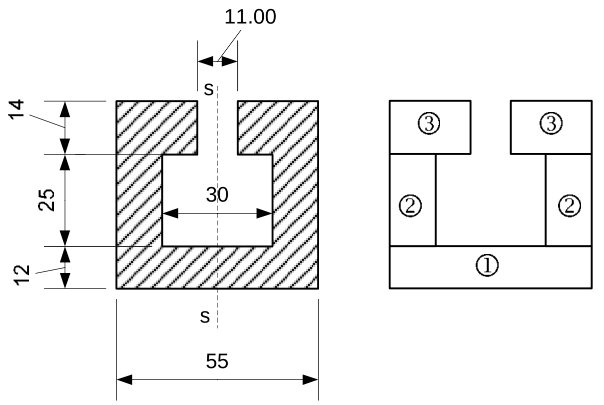
$$S(y) = (\frac{1}{2} 15 \cdot 12.5) \cdot \frac{12.5}{3} = 390.6\,\text{mm}^3$$

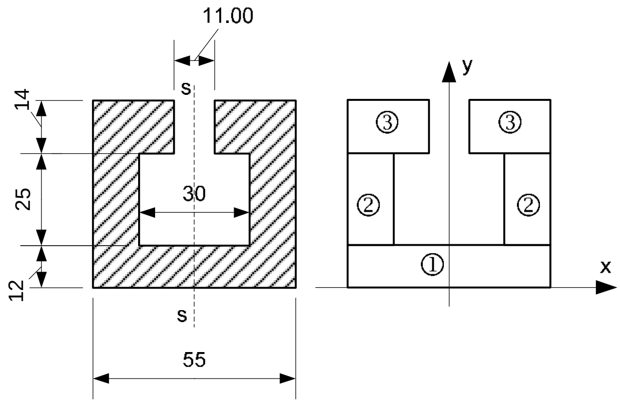
Lo sforzo $\tau$ all'asse neutro vale quindi

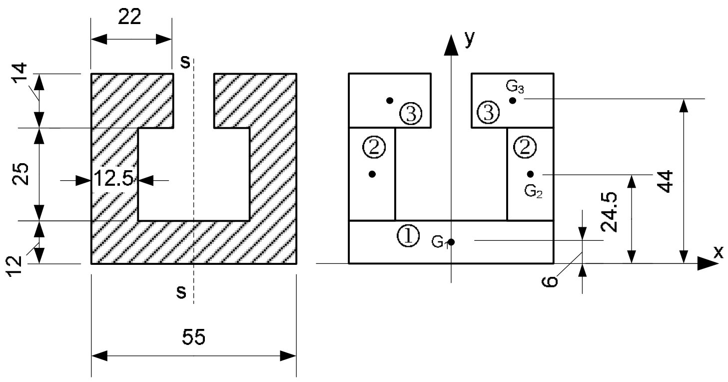
$$t = \frac{4000 \cdot 390.6}{15 \cdot 4882.8} = 21\, MPa$$

**La sezione di trave in figura è soggetta ad un momento flettente pari a 2 MNmm e ad una forza di taglio di 27 kN agenti lungo la traccia s-s. Si richiede il calcolo degli sforzi s massimi (positivi e negativi) e t massimi.**




| | |
|---|---|
|   | Il baricentro G si trova certamente sull'asse di simmetria s-s.<br>Per ricavare la posizione in altezza del baricentro possiamo immaginare la sezione come composta dai rettangoli **j** , **k** (destra e sinistra) e ***f*** (destra e sinistra). |

| | |
|---|---|
|   | I baricentri dei rettangoli **j** , **k** e ***f*** hanno le seguenti ordinate (intese come distanze y dall'asse x)<br><br>Baricentro $G_1$ del rettangolo **j** $\rightarrow$ $y_{G1}$= 6 mm<br><br>Baricentri $G_2$ dei rettangoli **k** $\rightarrow$ $y_{G2}$= 24.5 mm<br><br>Baricentri $G_3$ dei rettangoli ***f*** $\rightarrow$ $y_{G3}$= 44 mm |




I momenti statici rispetto all'asse x delle aree **j** , **k** e ***f*** sono i seguenti:

Area 1 → $S_{x\_1} = (55 \cdot 12) \cdot 6 = 3960\ mm^3$

Aree 2 → $S_{x\_2} = 2\ [(12.5 \cdot 25)] \cdot 24.5 = 15312.5\ mm^3$

Aree 3 → $S_{x\_3} = 2\ [(22 \cdot 14)] \cdot 44 = 27104\ mm^3$

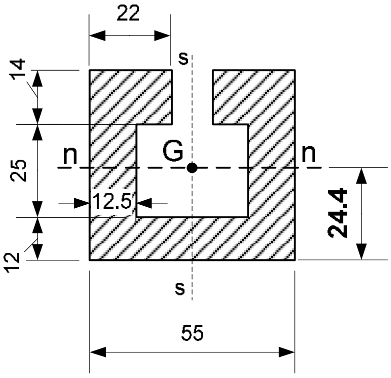
L'area totale della sezione vale $A = (55 \cdot 12) + 2 \cdot (12.5 \cdot 25) + 2 \cdot (22 \cdot 14) = 1901\ mm^3$

Il momento statico della sezione completa rispetto all'asse x vale dunque:

$S_x = S_{x\_1} + S_{x\_2} + S_{x\_3} = 3960 + 15312.5 + 27104 = 46376.5\ mm^3$

L'ordinata $y_G$ del baricentro è quindi:

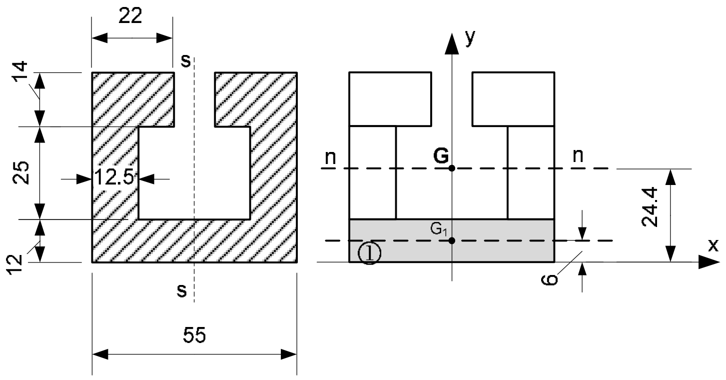
$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{46376.5}{1901} = 24.4\ mm$$




L’asse neutro n-n passa per il baricentro ed è ortogonale all’asse di sollecitazione s-s.

Per calcolare il momento d’inerzia della sezione rispetto all’asse neutro possiamo ancora considerare la sezione come composta dai rettangoli **j** , **k** e ***f*** .

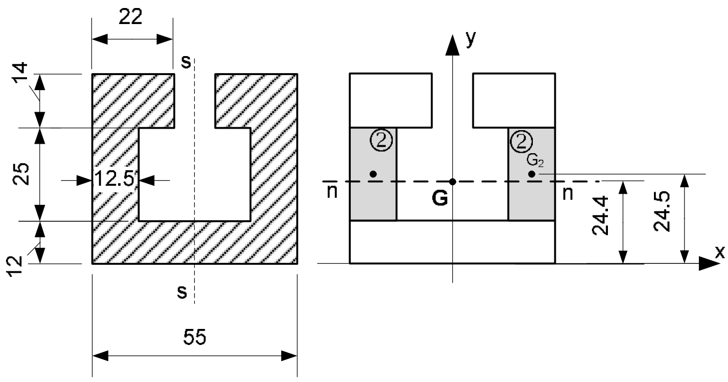
Per ogni rettangolo si procede dapprima al calcolo del momento d’inerzia rispetto ad un asse parallelo all’asse neutro che passa per il baricentro del singolo rettangolo.
Successivamente si utilizza la formula di trasporto per calcolare il momento d’inerzia del rettangolo rispetto all’asse neutro per la sezione completa (asse n-n).




Rettangolo **j**

Momento d’inerzia del rettangolo 1 rispetto all’asse neutro n-n, calcolato utilizzando la formula di trasporto:

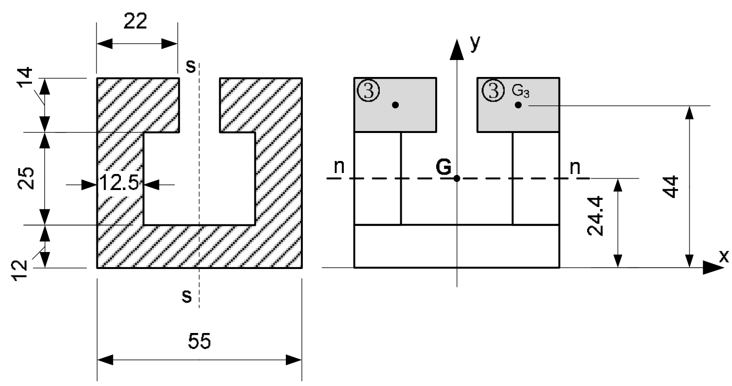
$$J_1 = \frac{55 \cdot 12^3}{12} + (55 \cdot 12) \cdot (24.4 - 6)^2 = 231370 \text{ mm}^4$$




Rettangoli **k**

Momento d’inerzia dei rettangoli 2 rispetto all’asse neutro n-n, calcolati utilizzando la formula di trasporto:

$$J_2 = 2\left[\frac{12.5 \cdot 25^3}{12} + (12.5 \cdot 25) \cdot (24.5 - 24.4)^2\right] =$$
$$= 32558 \text{ mm}^4$$

<table>
<tr>
<td>


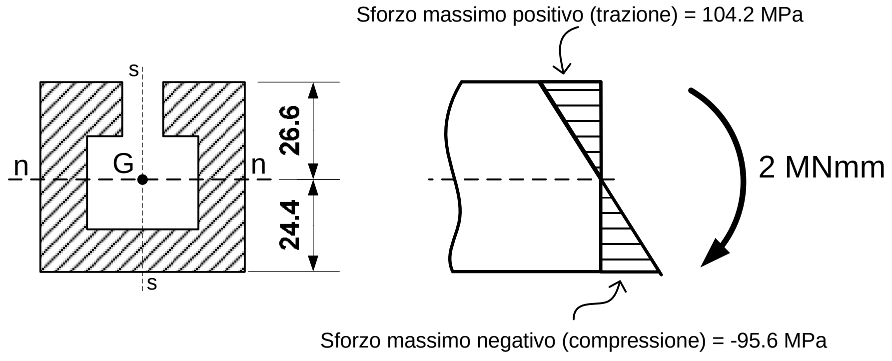
</td>
<td>
Rettangoli f<br><br>
Momento d'inerzia dei rettangoli 3 rispetto all'asse neutro n-n, calcolati utilizzando la formula di trasporto:<br><br>
$J_3 = 2\left[\frac{22\cdot 14^3}{12} + (22\cdot 14)\cdot(44-24.4)^2\right] =$<br>
$= 246704\ \text{mm}^4$
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
$J = J_1 + J_2 + J_3 = 231370 + 32558 + 246704 =$<br>
$J = 510632\ \text{mm}^4$
</td>
</tr>
</table>

Per la formula di Navier ($s = \frac{M\cdot y}{J}$), gli sforzi massimi positivi generati dal momento flettente saranno quelli sulle fibre superiori:

$$s = \frac{2\cdot 10^6\cdot 26.6}{510632} = 104.2\ MPa$$

Gli sforzi massimi di compressione (negativi) saranno quelli sulle fibre inferiori.

$$s = -\frac{2\cdot 10^6\cdot 24.4}{510632} = -95.6\ MPa$$



Poichè l'asse neutro baricentrico passa per la parte più stretta della sezione (anima), gli sforzi tangenziali τ massimi saranno quelli all'asse neutro (formula di Jourawski, $t = \frac{T \cdot S(y)}{b\,J}$.

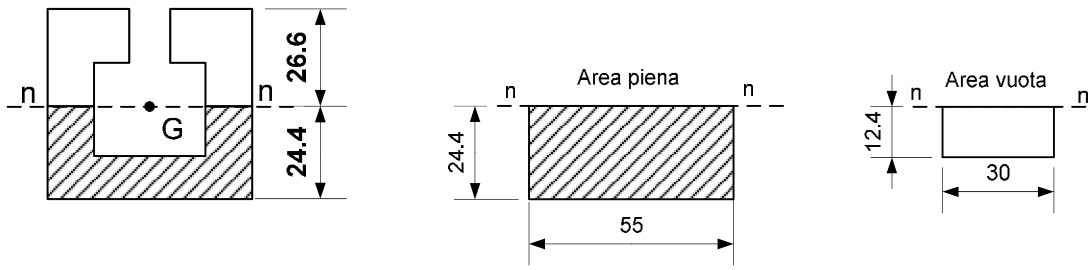
Il momento statico S di una delle due parti in cui l'asse neutro divide la sezione (è conveniente considerare la parte di sezione inferiore, tratteggiata nella figura seguente) può essere calcolato come differenza dei momenti statici dell'area piena (rettangolo di base 55 ed altezza 24.4) e dell'area vuota (rettangolo di base 30 ed altezza 12.4) rispetto all'asse neutro.

Il momento statico dell'area tratteggiata rispetto all'asse neutro vale quindi

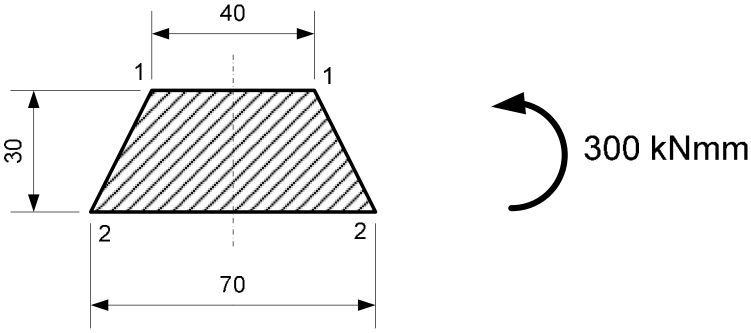
$$S(y) = S_p - S_v = (55 \cdot 24.4) \cdot \frac{24.4}{2} - (30 \cdot 12.4) \cdot \frac{12.4}{2} = 14066\ mm^3$$

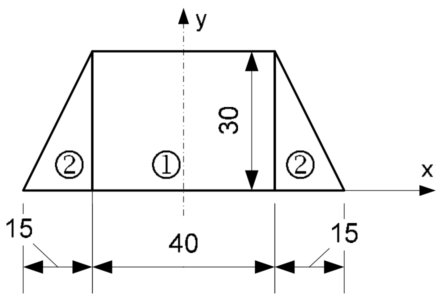
Lo sforzo tangenziale all'asse neutro è pari a

$$t = \frac{27000 \cdot 14066}{25 \cdot 510632} = 30\ MPa$$



**Calcolare i valori degli sforzi s in corrispondenza delle fibre superiori ed inferiori (linee 1-1 e 2-2) della sezione trapezoidale di figura, soggetta ad un momento flettente M = 300 kNmm, agente lungo l'asse di simmetria vertical della sezione.**




La sezione ha un asse di simmetria verticale (asse y in figura) ed il baricentro G si trova certamente su tale asse.
Per ricavare la posizione in altezza del baricentro possiamo immaginare la sezione come composta dal rettangolo **j** e dai triangoli **k**.

Il momento statico del rettangolo **j** rispetto alla base (asse x) vale

$$S_1 = 40 \cdot 30 \cdot \frac{30}{2} = 18000\ mm^3$$

Ricordando che il baricentro di un triangolo si trova ad un terzo della sua altezza, il momento statico dei triangoli **k** rispetto all'asse x vale

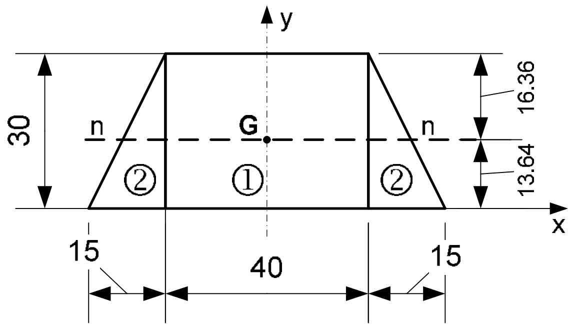
$$S_2 = 2\left(\frac{15 \cdot 30}{2}\right)\frac{30}{3} = 4500\ mm^3$$

Il momento statico dell'area totale (trapezio) rispetto all'asse x vale dunque:

$$S = S_1 + S_2 = 18000 + 4500 = 22500\ mm^3$$

Poichè l'area A del trapezio è pari a 1650 $mm^2$, l'ordinata $y_G$ del baricentro della sezione completa vale:

$$y_G = \frac{S}{A} = \frac{22500}{1650} = 13.64\ mm$$




L'asse neutro n-n passa per il baricentro ed è ortogonale all'asse y di sollecitazione.

Per calcolare il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro possiamo ancora considerare la sezione come composta dal rettangolo **j** e dai triangoli **k**.

Il momento d'inerzia del rettangolo **j** rispetto all'asse che passa per il suo baricentro $G_1$ vale

$$\frac{bh^3}{12} = \frac{40 \cdot 30^3}{12} = 90000\, mm^4$$

Il momento d'inerzia del <u>rettangolo 1</u> rispetto all'asse neutro n-n vale pertanto (formula di trasporto):

$$J_1 = 90000 + (40 \cdot 30)(15 - 13.64)^2 = 92220 mm^4$$

Il momento d'inerzia dei <u>triangoli **k**</u> rispetto all'asse che passa per il loro baricentro e parallelo all'asse n-n vale

$$2\left(\frac{bh^3}{36}\right) = 2\left(\frac{15 \cdot 30^3}{36}\right) = 22500\; mm^4$$

Il momento d'inerzia dei <u>triangoli 2</u> rispetto all'asse neutro n-n vale pertanto (formula di trasporto):

$$J_2 = 22500 + 2(15 \cdot 30)(13.64 - \frac{30}{3})^2 = 34425 mm^4$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro della sezione completa vale quindi:

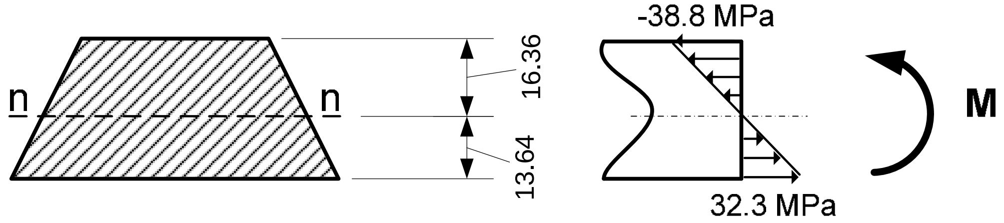
$$J = J_1 + J_2 = 92220 + 34425 = 126645 mm^4$$

Per la formula di Navier ($s = \frac{M \cdot y}{J}$), gli sforzi prodotti dal momento flettente sulle fibre della linea 1-1 (fibre superiori) valgono:

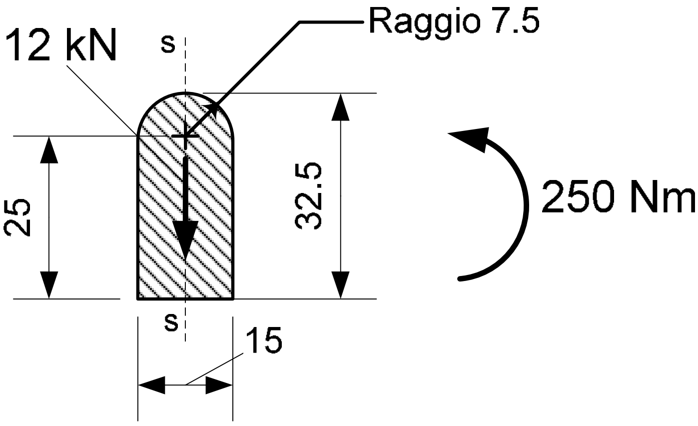
$$s = -\frac{300000 \cdot 16.36}{126645} = -38.8\,MPa$$

Gli sforzi sulle fibre della linea 2-2-(fibre inferiori) valgono

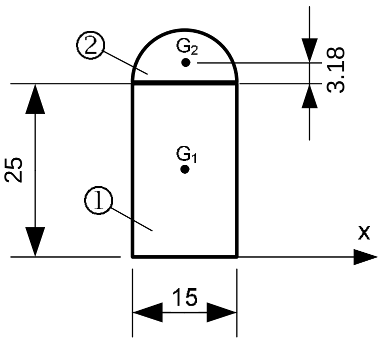
$$s = \frac{300000 \cdot 13.64}{126645} = +32.3\,MPa$$



**La sezione di trave in figura è soggetta ad un momento flettente pari a 250 Nm e ad una forza di taglio di 12000 N agenti lungo la traccia s-s. Si richiede il calcolo degli sforzi s massimi (positivi e negativi) e degli sforzi t massimi.**




La sezione ha un asse di simmetria verticale (asse s-s) ed il baricentro G si trova certamente su tale asse.
Per ricavare la posizione in altezza del baricentro possiamo immaginare la sezione come composta dal rettangolo **j** (avente base 15 mm ed altezza 25 mm) e dal semicerchio **k** (di diametro D =15 mm).




Il momento statico del rettangolo **j** rispetto alla base (asse x di figura) vale

$$S_1 = 15 \cdot 25 \cdot \frac{25}{2} = 4688\, mm^3$$

Ricordando che il baricentro di un semicerchio si trova ad una distanza dal diametro di base pari a $\frac{2}{3}\frac{D}{p}$, il momento statico del semicerchio <u>rispetto all'asse x</u> vale

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p \cdot D^2}{4}\left(25 + \frac{2}{3} \cdot \frac{D}{p}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p \cdot 15^2}{4}(25 + 3.18) = 2490\, mm^3$$

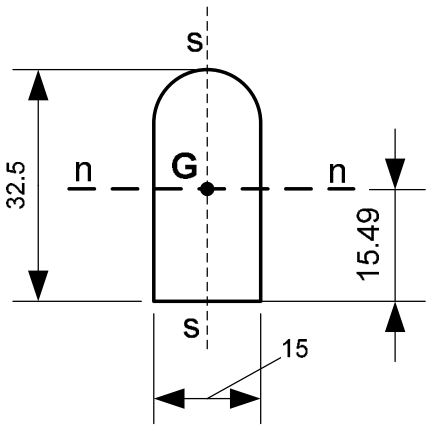
Il momento statico dell'area completa rispetto all'asse x vale dunque:

$$S = S_1 + S_2 = 4688 + 2490 = 7178\ mm^3$$

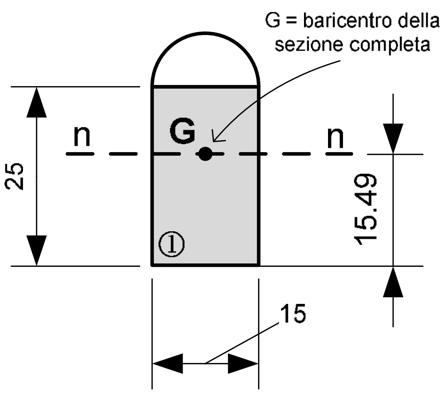
Poichè l'area della sezione completa è pari ad A = 463.4 $mm^2$, l'ordinata $y_G$ del baricentro della sezione completa vale:

$$y_G = \frac{S}{A} = \frac{7178}{463.4} = 15.49\ mm$$

L'asse neutro è quindi l'asse perpendicolare all'asse s-s e passante per il baricentro G della sezione completa.



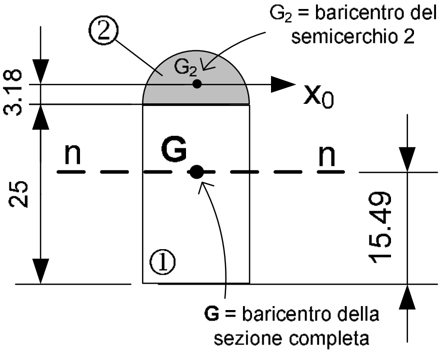

Il momento d'inerzia *J* della sezione completa rispetto all'asse neutro è uguale alla somma del momento d'inerzia del rettangolo $\mathbf{j}$ e del momento d'inerzia del semicerchio $\mathbf{k}$, entrambi sempre calcolati rispetto all'asse n-n.




Il momento d'inerzia del rettangolo $\mathbf{j}$ rispetto all'asse neutro n-n vale

$$J_1 = \frac{15 \cdot 25^3}{12} + (15 \cdot 25) \cdot \left(15.49 - \frac{25}{2}\right)^2 = 19531 + 3353$$

$$J_1 = 22884\ mm^4$$




Il momento d’inerzia del semicerchio **k** rispetto all’asse $x_0$ che passa per il suo baricento (vedi nota della pagina seguente) vale

$$J_{2xo} = \frac{1}{2}\frac{p\,D^4}{64} - \left(\frac{1}{2}\frac{p\,D^2}{4}\right)\left(\frac{2D}{3p}\right)^2 = 347\ mm^4$$

Il momento d’inerzia J del semicerchio rispetto all’asse neutro n-n vale pertanto, per il teorema del trasporto:

$$J_2 = J_{2xo} + \left(\frac{1}{2}\frac{p\cdot 15^2}{4}\right)\cdot(28.18-15.49)^2 = 347+14229$$

$$J_2 = 14576\,mm^4$$

Il momento d’inerzia J della sezione completa rispetto all’asse neutro è quindi :

$$J = J_1 + J_2 = 22884 + 14576 = 37460\,mm^4$$

Per la formula di Navier ($s = \frac{M\cdot y}{J}$), gli sforzi prodotti dal momento flettente sulle fibre superiori ed inferiori della sezione valgono rispettivamente:

$$s = -\frac{250000\cdot(32.5-15.49)}{37460} = -114\ MPa$$

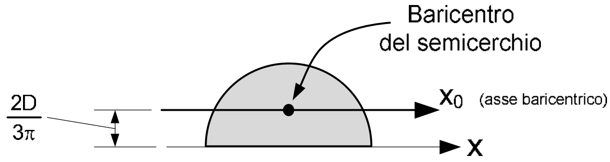
e

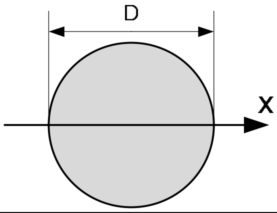
$$s = \frac{250000\cdot 15.49}{37460} = +103\,MPa$$

Gli sforzi tangenziali τ massimi sono quelli all’asse neutro (formula di Jourawski, $t = \frac{T\cdot S(y)}{b\,J}$) e valgono

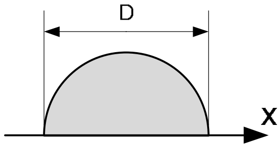
$$t = \frac{12000\cdot\left(15\cdot 15.49\cdot\frac{15.49}{2}\right)}{15\cdot 37460} = 38\,MPa$$

**MOMENTO D'INERZIA DI UN SEMICERCHIO RISPETTO AD UN ASSE BARICENTRICO**




$$J_x = \frac{p\,D^4}{64}$$

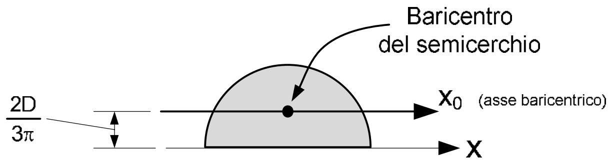



$$J_x = \frac{1}{2}\frac{p\,D^4}{64}$$

Poichè il momento d'inerzia di un cerchio di diametro D rispetto ad un asse diametrale (x in figura) vale $\frac{pD^4}{64}$, il momento d'inerzia del semicerchio rispetto allo stesso asse diametrale x varrà la metà ($\frac{1}{2}\frac{pD^4}{64}$).

Per la formula di trasporto, il momento d'inerzia del semicerchio rispetto all'asse x si può scrivere come

$$J_x = J_{xo} + \left(\frac{1}{2}\frac{p\,D^2}{4}\right)\left(\frac{2D}{3p}\right)^2$$




dove

$J_{xo}$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse z baricentrico;

$\left(\frac{1}{2}\frac{p\,D^2}{4}\right)$ è l'area del semicerchio;

$\left(\frac{2D}{3p}\right)$ è la distanza tra gli assi x e $x_o$.

Di conseguenza, il momento d'inerzia di un semicerchio rispetto all'asse baricentrico $x_o$ vale

$$J_{xo} = J_x - \left(\frac{1}{2}\frac{p\,D^2}{4}\right)\left(\frac{2D}{3p}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{p\,D^4}{64} - \left(\frac{1}{2}\frac{p\,D^2}{4}\right)\left(\frac{2D}{3p}\right)^2$$