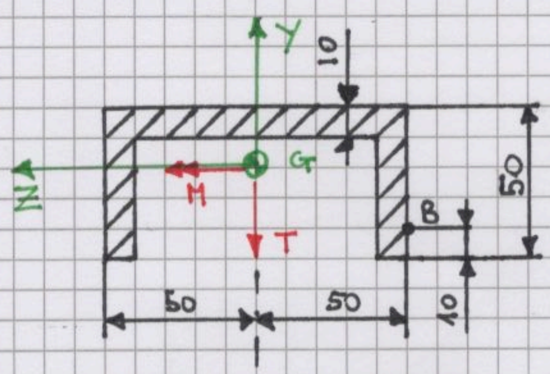
CALCOLO DEGLI SFORZI 3/12/2018

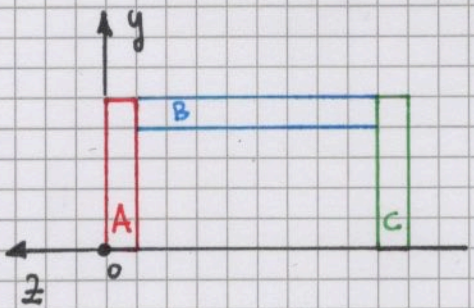


$$\begin{cases} T = 10\ \text{KN} \\ M = 250\ \text{N}\cdot\text{m} \end{cases}$$

- Calcolo degli sforzi principali in B.
- Calcolo delle τ_{max} nel punto B.

- CALCOLO DEL BARICENTRO

La sezione presenta un asse di simmetria quindi il baricentro si troverà sicuramente su quest'asse.



COORDINATE DEI BARICENTRI $\{0\,y\,z\}$

A $\begin{cases} z_{GA} = -5 \\ y_{GA} = 25 \end{cases}$

B $\begin{cases} z_{GB} = -50 \\ y_{GB} = 45 \end{cases}$

C $\begin{cases} z_{GC} = -95 \\ y_{GC} = 25 \end{cases}$

$A_A = 50 \cdot 10 = 500\ mm^2$

$A_B = 80 \cdot 10 = 800\ mm^2$

$A_C = 50 \cdot 10 = 500\ mm^2$

$A = 1800\ mm^2$

MOMENTI STATICI

$$S_z = A_A \cdot y_{GA} + A_B\, y_{GB} + A_C\, y_{GC} =$$
$$= 500\,(25) + 800\,(45) + 500\,(25) =$$
$$= 61'000\ mm^3$$

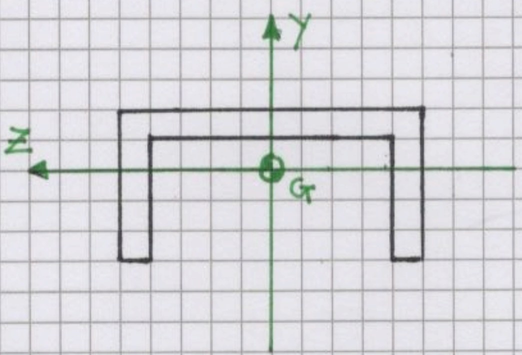
$$S_y = A_A\, z_{GA} + A_B\, z_{GB} + A_C\, z_{GC} =$$
$$= 500(-5) + 800(-50) + 500(-95) =$$
$$= -90'000\ mm^3$$

$$z_G = \frac{S_y}{A} = -\frac{90'000}{1800} = -50\ mm$$

$$y_G = \frac{S_z}{A} = \frac{61'000}{1800} = 33.8889\ mm$$

Il baricentro nel sistema di rif. $\{0\,y\,z\}$ ha coord. $G(-50,\ 33.8889)$. Come anticipato giace nell'asse di simmetria della sezione.

CALCOLO DEL BARICENTRO

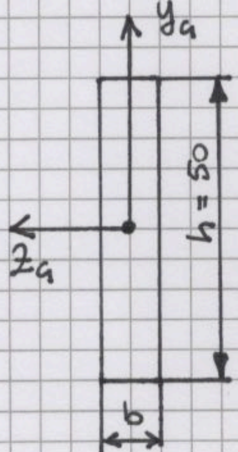


É utile a questo punto scrivere le coordinate dei baricentri delle sezioni A, B e C rispetto al nuovo sistema di riferimento baricentrico $\{G\,Y\,Z\}$

A $\begin{cases} Z_{GA} = z_{GA} - z_G = 45 \\ Y_{GA} = y_{GA} - y_G = -8.8889 \end{cases}$ B $\begin{cases} Z_{GB} = \emptyset \\ Y_{GB} = 11.1111 \end{cases}$ C $\begin{cases} Z_{GC} = -45 \\ Y_{GC} = -8.8889 \end{cases}$

CALCOLO DEI MOMENTI D'INERZIA DELLE SEZIONI A, B e C.

SEZIONI A, C



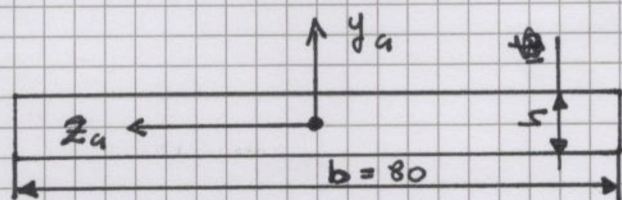
$I_{z_A} = \frac{bh^3}{12} = 1.0417E05\ mm^4$

$I_{y_A} = \frac{hb^3}{12} = 4.1667E03\ mm^4$

$I_{zy_A} = \emptyset = I_{zy_C}$

$I_{z_C} = I_{z_A}, \quad I_{y_C} = I_{y_A}$

SEZIONE B



$I_{z_B} = \frac{bh^3}{12} = 6.6667E03\ mm^4$

$I_{y_B} = \frac{hb^3}{12} = 4.2667E05\ mm^4$

$I_{zy_B} = \emptyset$

CALCOLO DEI MOMENTI D'INERZIA GLOBALI BARICENTRICI

$$I_Z = I_{z_A} + A_A (Y_{GA})^2 + I_{z_B} + A_B (Y_{GB})^2 + I_{z_C} + A_C (Y_{GC})^2 =$$

$$= I_{z_A} + 500(-8.8889)^2 + I_{z_B} + 800(11.1111)^2 + I_{z_C} + 500(-8.8889)^2 =$$

$$= 392'777.7778\ mm^4$$

$$I_Y = I_{y_A} + A_A (Z_{GA})^2 + I_{y_B} + A_B (Z_{GB})^2 + I_{y_C} + A_C (Z_{GC})^2 =$$

$$= I_{y_A} + 500(45)^2 + I_{y_B} + 800(\emptyset)^2 + I_{y_C} + 500(-45)^2 =$$

$$= 2'460'000\ mm^4$$

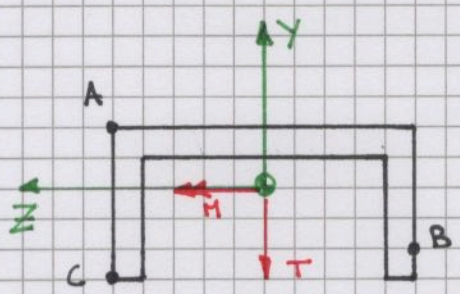
Il momento centrifugo I_{YZ} deve essere nullo perché è presente un asse di simmetria. La verifica è immediata

$$I_{YZ} = \cancel{I_{yz_A}}^{\nearrow 0} + A_A (Y_{GA})(Z_{GA}) + \cancel{I_{yz_B}}^{\nearrow 0} + A_B (Y_{GB})(Z_{GB}) + \cancel{I_{yz_C}}^{\nearrow 0} + A_C (Y_{GC})(Z_{GC}) =$$

$$= 500(-8.8883)(45) + 800(11.1111)(0) + 500(-8.8883)(-45) = 0$$

Il sistema baricentrico $\{G\,Y\,Z\}$ è quindi principale.

CALCOLO DEGLI SFORZI



Ci troviamo in un caso classico di flessione e taglio. Per calcolare gli sforzi tangenziali τ ci si avvale della formula di JOURAWSKY. Si ricorda che questa fornisce il valore MEDIO dello sforzo di taglio calcolato su una sezione.

• FLESSIONE

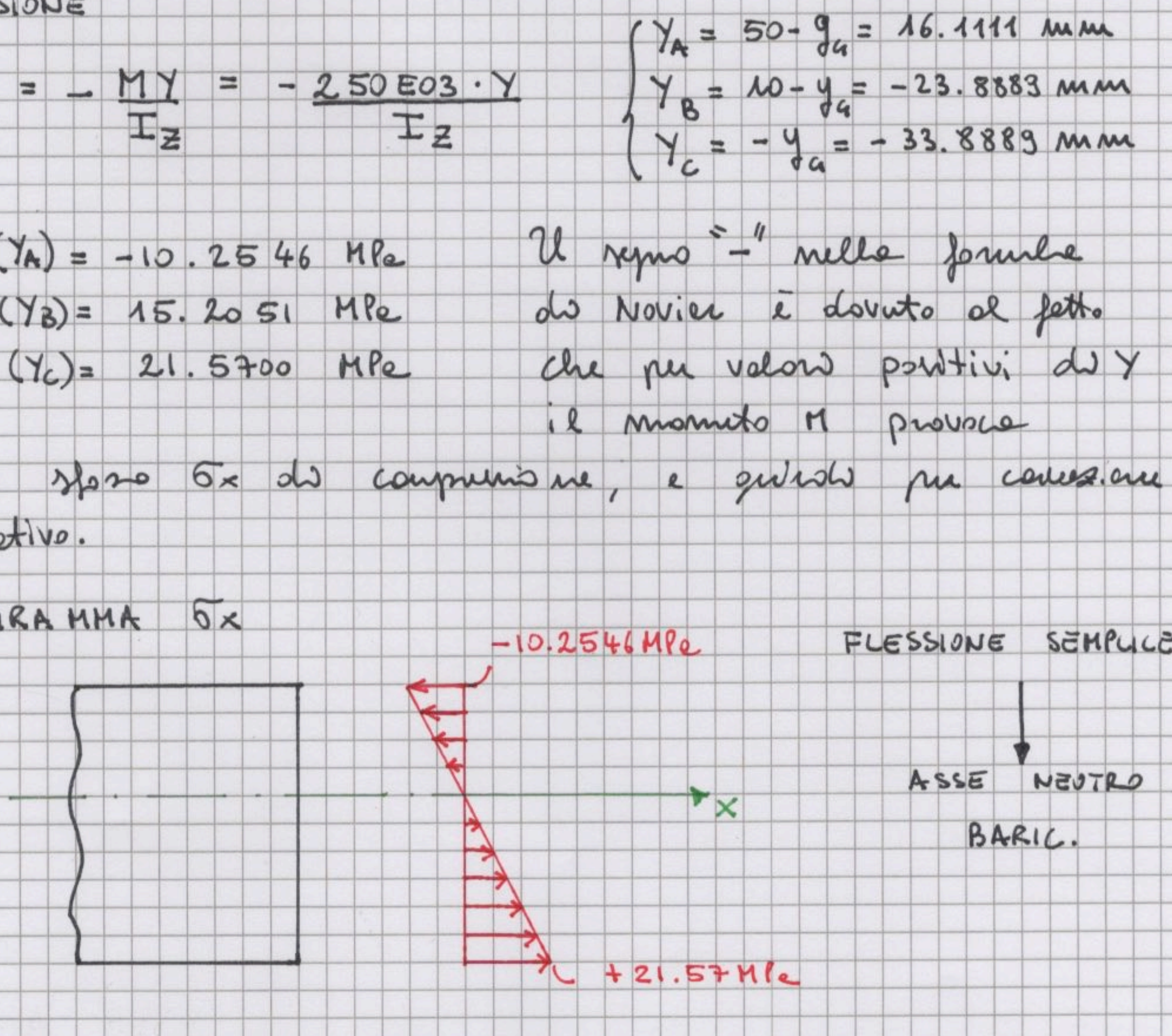
$$\sigma_x = -\frac{M\,Y}{I_Z} = -\frac{250E03 \cdot Y}{I_Z}$$

$$\begin{cases} Y_A = 50 - y_G = 16.1111 \text{ mm} \\ Y_B = 10 - y_G = -23.8883 \text{ mm} \\ Y_C = -y_G = -33.8889 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x(Y_A) = -10.2546 \text{ MPa} \\ \sigma_x(Y_B) = 15.2051 \text{ MPa} \\ \sigma_x(Y_C) = 21.5700 \text{ MPa} \end{cases}$$

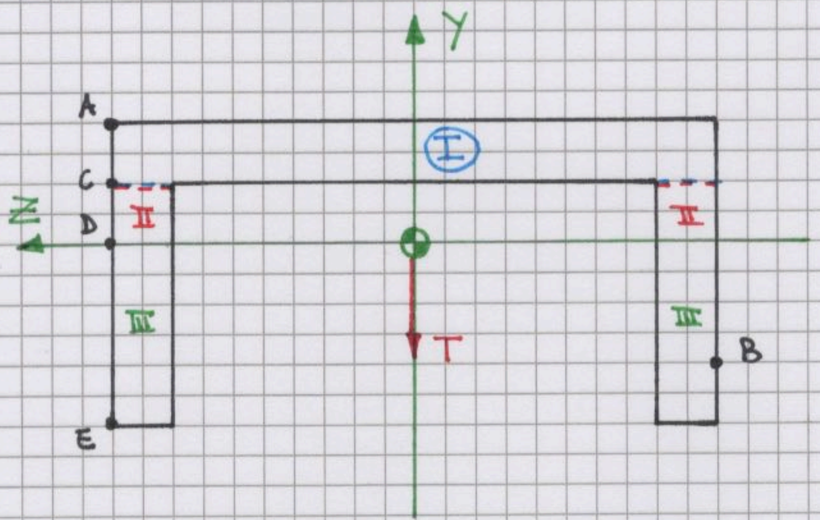
Il segno "−" nella formula di Navier è dovuto al fatto che per valori positivi di Y il momento M provoca uno sforzo σ_x di compressione, e quindi per convenzione negativo.

DIAGRAMMA σ_x



CALCOLO DEGLI SFORZI

• TAGLIO (JOURAWSKY)



$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z^*(y)}{b \cdot I_z}$$

SEZIONE (I)

$A \to y_A = 16.1111 \text{ mm} \qquad S_z^*(y_A) = \emptyset \qquad \tau_{xy}^A = \emptyset$

$C \to y_C = 6.1111 \text{ mm} \qquad S_z^*(y_C) = (100 \cdot 10)(45 - y_G) = 11.1111E03 \text{ mm}^3$

$b = 100 \text{ mm}$

$$\tau_{xy}^C = \frac{T \cdot S_z^*(y_C)}{b \cdot I_z} = 2.8283 \text{ MPa}$$

SEZIONE (II)

$C \to y_C = 6.1111 \text{ mm} \quad S_z^*(y_C) = 11.111E03 \text{ mm}^3 \quad b = 20 \text{ mm}$

$$\tau_{xy}^C = \frac{T \cdot S_z^*(y_C)}{b \cdot I_z} = 14.1443 \text{ MPa}$$

$D \to y_D = \emptyset \qquad S_z^*(y_D) = (100 \cdot 10)(45 - y_G) + 2\left[(40 - y_G) \cdot 10\right]\left(\frac{40 - y_G}{2}\right) =$

$b = 20 \qquad = 1.1485E04 \text{ mm}^3$

$$\tau_{xy}^D = \frac{T \cdot S_z^*(y_D)}{b \cdot I_z} = 14.6197 \text{ MPa}$$

SEZIONE (III)

$B \to y_B = -23.8889 \qquad S_z^*(y_B) = (100 \cdot 10)(45 - y_G) + 2\left[(40 - y_G) \cdot 10\right]\left(\frac{40 - y_G}{2}\right) +$

$+ 2\left[(y_G - 10) \cdot 10\right]\underbrace{\left(\frac{10 - y_G}{2}\right)}_{<\emptyset} =$

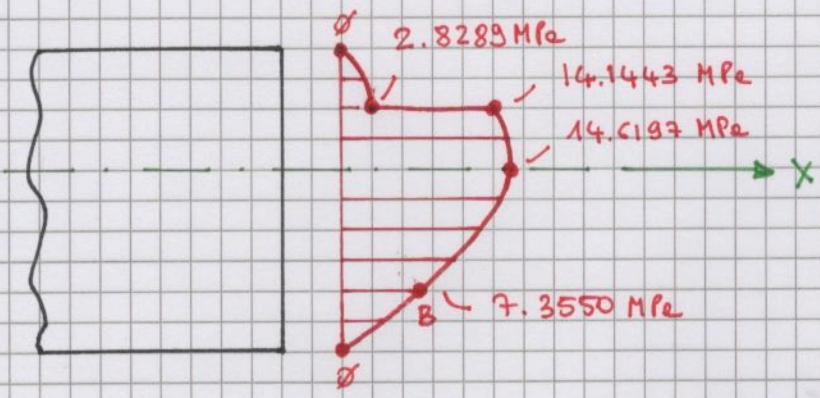
$b = 20 \text{ mm}$

$= 5777.7778 \text{ mm}^3$

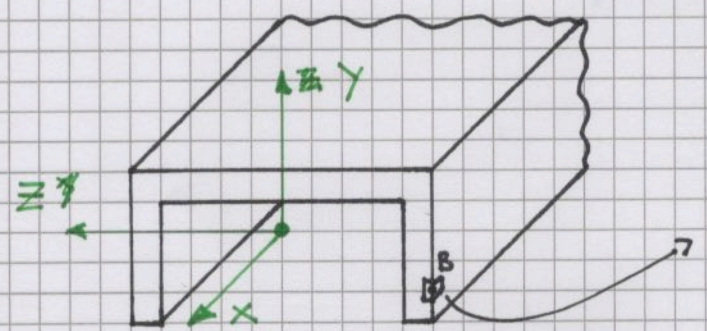
$$\tau_{xy}^B = \frac{T \cdot S_z^*(y_B)}{b I_z} = 7.3550 \text{ MPa}$$

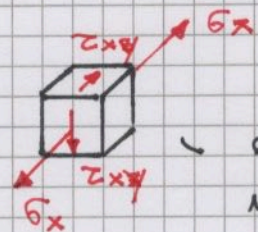
$E \to y_E = -33.8889 \qquad S_z^*(y_E) = \emptyset \qquad \tau_{xy}^E = \emptyset$

DISTRIBUZIONE SFORZI DI TAGLIO



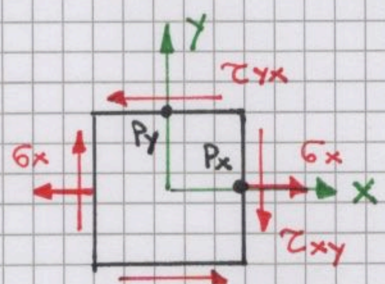
COSTRUZIONE DEL CIRCOLO DI MOHR IN B





elementino infinitesimo nell'intorno di B.

È presente solo la σ_x, di conseguenza la σ_z è nulla e quindi possiamo dire di trovarci in uno stato PIANO di tensione.



Nella rappresentazione delle τ si assumono positive se, nella faccia con normale concorde all'asse di riferimento, esse sono concordi in verso con l'asse che le identifica.

In questo caso: $\sigma_x = 15.2051$ MPa $\quad \tau_{xy} = -7.3550$ MPa

Il tensore degli sforzi sarà quindi (ridotto al caso 2D):

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.2051 & -7.3550 \\ -7.3550 & \emptyset \end{bmatrix} \qquad \sigma_y = \emptyset.$$

COSTRUZIONE DEL CIRCOLO DI MOHR (B)

Ricordiamo che il centro del cerchio di Mohr e il suo raggio sono facilmente ottenibili:

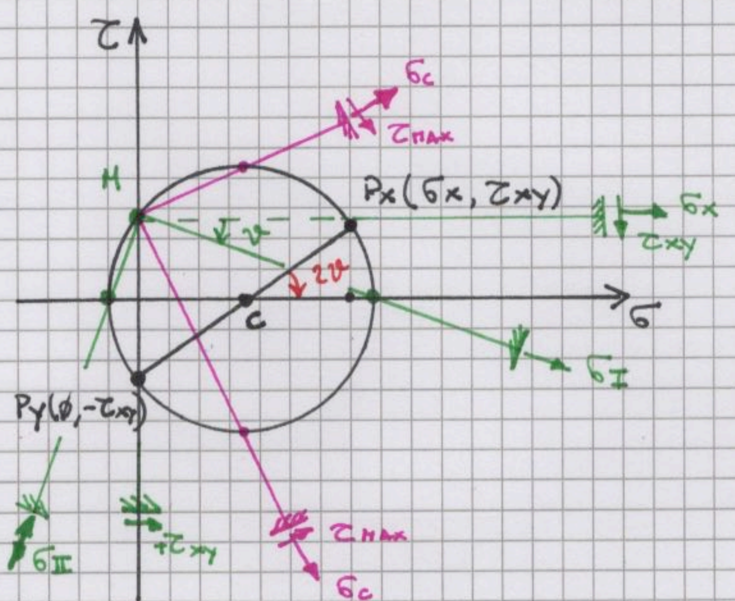
$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{atan}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

Per quanto riguarda la costruzione del cerchio di Mohr si considerano POSITIVE le τ che provocano una rotazione ORARIA (CW) dell' ~~elemento~~ elemento. In questo caso l'equilibrio alla rotazione sono $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$.

$$C = \frac{\sigma_x}{2} = 7.6025 \text{ MPa} \qquad R = 10.5780 \text{ MPa}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{atan}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x}\right) = 22.026^\circ$$



Come nel caso del cerchio di Mohr per le inerzie anche qui si ricorre all'utilizzo della costruzione del polo M. per le NORMALI.
Si conduce per il punto Px la parallela alla normale della faccia su cui giace Px. Lo stesso si faccia per Py.

$$\left\{\begin{matrix}\sigma_I \\ \sigma_{II}\end{matrix}\right. = C \pm R = \begin{cases} -2.9755 \text{ MPa} \\ 18.1806 \text{ MPa}\end{cases}$$

$$\tau_{MAX} = R = 10.5780 \text{ MPa}$$