FILTRI IN BASSA FREQUENZA

I filtri a microonde vengono in genere costruiti a partire da un prototipo in bassa frequenza (e quindi a costanti concentrate) che viene poi trasformato in un circuito a microonde.

Pertanto esaminiamo dapprima il progetto di filtri LC.

Si definisce perdita di potenza P_{LR} il reciproco del guadagno totale di potenza

$$P_{LR} = \frac{P_{incidente}}{P_{carico}} = \frac{1}{1-|\Gamma(\omega)|^2}$$

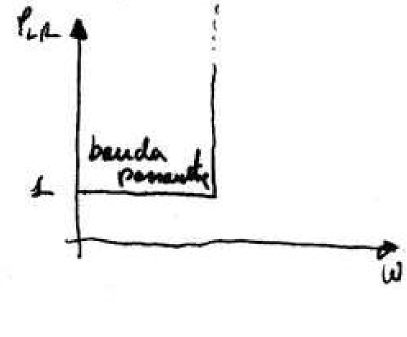
$\Gamma(\omega)$ è hermitiana e quindi $|\Gamma(\omega)|^2$ è necessariamente una funzione pari di ω

$$|\Gamma(\omega)|^2 = \frac{M(\omega^2)}{M(\omega^2)+N(\omega^2)}$$

$$P_{LR} = 1 + \frac{M(\omega^2)}{N(\omega^2)}$$

La funzione $P_{LR}(\omega)$ dovrebbe essere pari a 1 nella banda passante e a ∞ fuori di questa, e inoltre dovrebbe avere una fase lineare con ω per evitare distorsioni.

Queste specifiche non sono però ottenibili e occorre approssimare P_{LR} con un andamento realizzabile, in cui M, N sono polinomi.



Per un filtro passa-basso si usano

- Filtro di Butterworth (o maximally flat)

$$P_{LR} = 1 + K^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}$$

dove ω_c è la frequenza di taglio e $2N-1$ derivate di P_{LR} sono nulle per $\omega = 0$.

Se si fissa ω_c come la frequenza in cui $P_{LR} = 3\,dB$ allora $K = 1$

Per $\omega \gg \omega_c$ si ha $P_{LR} \simeq \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}$. Ha interesse la velocità di aumento di P_{LR} (che si misura in genere per decadi)

$$\frac{P_{LR}(\omega_0)}{P_{LR}(10\omega_0)} \simeq \frac{1}{(10)^{2N}}$$

e passando ai logaritmi si ha una variazione di $20N$ dB/decade

- Filtro di Chebychev o equiripple

$$P_{LR} = 1 + K^2\, T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

che ha un andamento oscillante tra 1 e $1+K^2$ nella banda passante. K^2 fissa quindi il ripple in tale zona. ω_c è la frequenza di taglio

Per $\omega \gg \omega_c$ $\quad P_{LR} \simeq \frac{K^2}{4}\left(\frac{2\omega}{\omega_c}\right)^{2N}$ per cui il decremento è ancora

$20N$ dB/decade ma la risposta è sempre $\frac{K^2}{4}(2)^{2N}$ più grande (ovvero il filtro di Chebychev attenua di più)

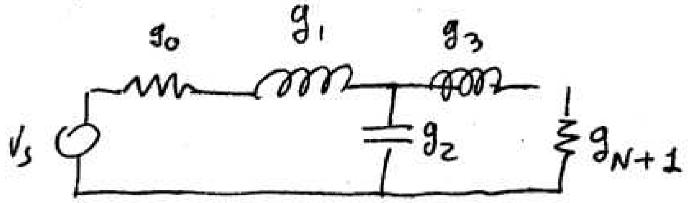
- Filtro a fase lineare

La fase della funzione di trasferimento di un filtro $\phi(\omega)$ entra nella risposta sfasando le varie componenti armoniche di un segnale. Se $\phi(\omega)$ è lineare con ω tale sfasamento è costante, altrimenti provoca una distorsione all'uscita.
I filtri che abbiamo visto (in particolare quello di Chebychev) hanno una fase che è non-lineare.
Per ottenere una fase sufficientemente lineare (ma con un taglio molto meno netto) occorre utilizzare filtri "a fase lineare" in cui

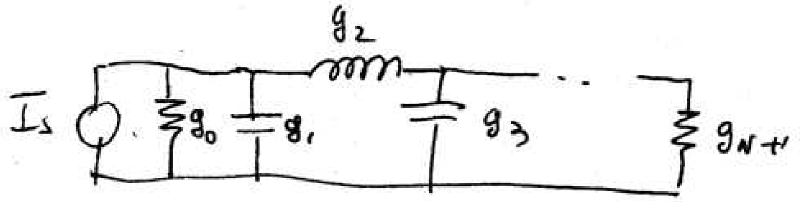
$$\phi(\omega) = A\omega \left[1 + p \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right]$$

ovvero in cui $\frac{\phi(\omega)}{\omega}$ sia massima piattezza.

Per quanto riguarda la realizzazione, un filtro passa-basso è costituito da condensatori in parallelo e induttori in serie e può quindi essere di due tipi



g_0, g_{N+1} resistenze



g_0, g_{N+1} conduttanze

Poichè la risposta in frequenza del filtro dipende dal rapporto reciproco tra le impedenze, possiamo sempre fissarne una. In genere si sceglie $g_0 = 1$ ($1\,\Omega$ o $1\,S$ nei due casi) e (salvo che per filtri di Chebychev con N pari) anche il carico è unitario (in Ω o in S nei due casi).

Esistono tabelle che forniscono i valori delle induttanze serie e capacità in parallelo per i vari filtri, nonchè del carico richiesto (che, ricordiamo, è in Ω o in S rispettivamente nei due circuiti base) se il filtro non ha uscita adattata o simile (in tale ultimo caso occorre un trasformatore a $\lambda/4$ che ha però una risposta in frequenza che può alterare quella del filtro: conviene quindi evitare tale caso)

L'ordine del filtro va preventivamente scelto in modo da avere la richiesta attenuazione fuori banda

I dati sono sempre relativi a $\omega_c = 1$ ma questo non lede la generalità in quanto è sempre possibile scalare i componenti per modificare ω_c.

TRASFORMAZIONI DI FILTRI

Le tabelle disponibili sono normalizzate a $g_0 = 1$ e $\omega_c = 1$
Per modificare tali valori basta ricordare che le impedenze devono essere uguali nei due casi (quello normalizzato e quello reale) per avere la stessa risposta. Più precisamente deve essere lo stesso il rapporto tra le impedenze.

Quindi se un induttore vale L nel caso normalizzato, vuol dire che alla frequenza di taglio unitaria deve essere

$$\frac{Z_L}{1} = jL$$

essendo Z_L la sua impedenza e 1 la <u>resistenza</u> (in entrambi i casi) della sorgente.
Nel filtro vero dovrà esserci la stessa impedenza alla frequenza di taglio $\overline{\omega_c}$. Quindi il nuovo valore di induttanza $\overline{L}$ è tale che

$$jL = \frac{Z_L}{1} = \frac{\overline{Z_L}}{R_0} = \frac{j\overline{\omega_c}\,\overline{L}}{R_0}$$

per cui $\overline{L} = \frac{L R_0}{\overline{\omega_c}}$ e analogamente $\overline{C} = \frac{C}{\overline{\omega_c} R_0}$

essendo R_0 il livello di impedenza necessario

La scalatura di impedenza e frequenza di taglio può essere sempre eseguita, specie per filtri a microonde, al termine del progetto.
Nell'esaminare quindi gli altri tipi di filtri lasciamo quindi i parametri normalizzati.

La trasformazione $\omega = -\frac{1}{\omega'}$ inverte i punti $\omega = 0$ e $\omega = \infty$ e quindi trasforma un filtro passa-basso in uno passa-alto (Per è pari rispetto a ω e quindi su questo il segno meno non ha effetto).

Per quanto riguarda i componenti reattivi, ora la loro impedenza deve variare in modo opposto con la frequenza rispetto a un filtro passa-basso.

Se un componente aveva impedenza a frequenza ω pari a $j\omega L$ ora dovrà avere la stessa impedenza a $\omega' = -\frac{1}{\omega}$. Quindi per esso

$$Z(\omega') = j\omega L = j\left(-\frac{1}{\omega'}\right)L = \frac{1}{j\omega'(1/L)}$$

del componente diviene quindi un condensatore di valore $1/L$. Allo stesso modo un condensatore C diviene un induttore di valore (normalizzato) $1/C$. Si noti che il segno meno nella trasformazione è necessario per avere il corretto segno delle reattanze (ovvero per avere segno e andamento in frequenza coerenti)

Consideriamo invece $\omega = \frac{1}{\Delta}\left(\omega' - \frac{1}{\omega'}\right) \Rightarrow (\omega')^2 - \omega\Delta\omega' - 1 = 0 \quad (*)$

Nelle ⊛ $\omega = 1$ e $\omega = -1$ corrispondono (funzione pari) alle soluzioni dell'equazione in quanto $\omega = 1$ e $\omega = -1$ sono le frequenze di taglio per il filtro passabasso.

Vogliamo vedere a cosa corrispondono $\omega = \pm 1$ per il filtro ottenuto con la trasformazione $\omega = \frac{1}{\Delta}\left(\omega' - \frac{1}{\omega'}\right)$

La ⊛ diventa:

per $\omega = 1 \Rightarrow (\omega')^2 - \omega'\Delta - 1 = 0$

con soluzioni

$$\omega'_1 = \frac{\Delta}{2} + \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{4}}$$

$$\omega'_2 = \frac{\Delta}{2} - \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{4}}$$

per $\omega = -1 \Rightarrow (\omega')^2 + \omega'\Delta - 1 = 0$

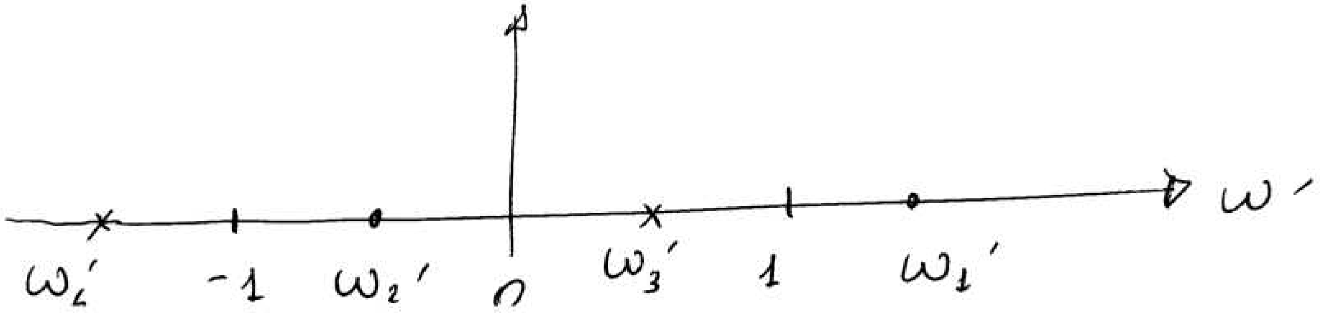
con soluzioni:

$$\omega_3' = -\frac{\Delta}{2} + \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{4}}$$

$$\omega_4' = -\frac{\Delta}{2} - \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{4}}$$

ω_1' e ω_3' sono valori attorno a $\omega = 1$

ω_2' e ω_4' sono valori attorno a $\omega = -1$



$$\omega_1' = -\omega_4'$$

$$\omega_3' = -\omega_2'$$

Quindi la banda passante del filtro PBanda è un intervallo centrato in $\omega' = 1$

e i limiti della banda (i punti corrispondenti alle freq. di taglio del passa basso) sono ω_3' e ω_1':

$$\left[-\frac{\Delta}{2}+\sqrt{1+\frac{\Delta^2}{4}}\ ;\ \frac{\Delta}{2}+\sqrt{1+\frac{\Delta^2}{4}}\right]$$

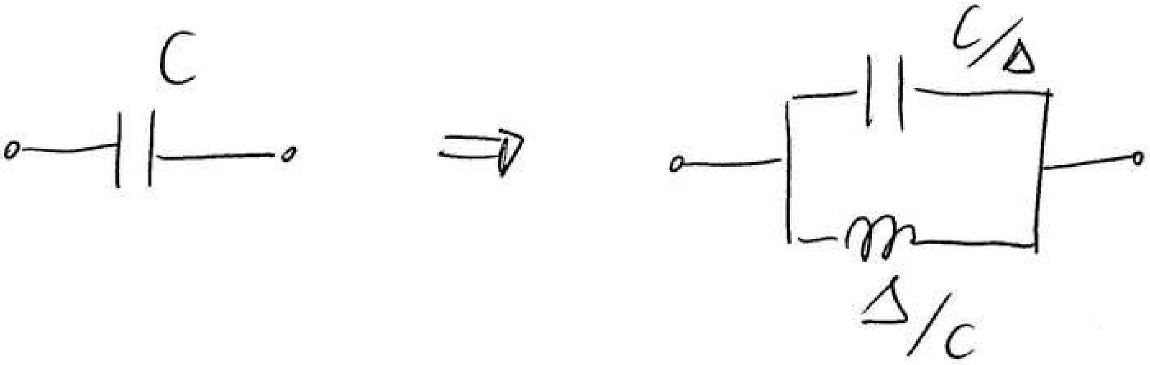
Inoltre $\omega_1'-\omega_3'=\Delta$ è la larghezza di banda del filtro PB espressa in percentuale di quella centrale che è unitaria.

Per quanto riguarda i componenti con la trasformazione PBasso $\rightarrow$ PBanda si ha:

$$j\omega L = j\,\frac{1}{\Delta}\left(\omega'-\frac{1}{\omega'}\right) = j\omega'\frac{L}{\Delta}+\frac{1}{j\omega'\left(\frac{\Delta}{L}\right)}$$

$$j\omega C = j\,\omega'\left(\frac{C}{\Delta}\right)+\frac{1}{j\omega'\left(\frac{\Delta}{C}\right)}$$

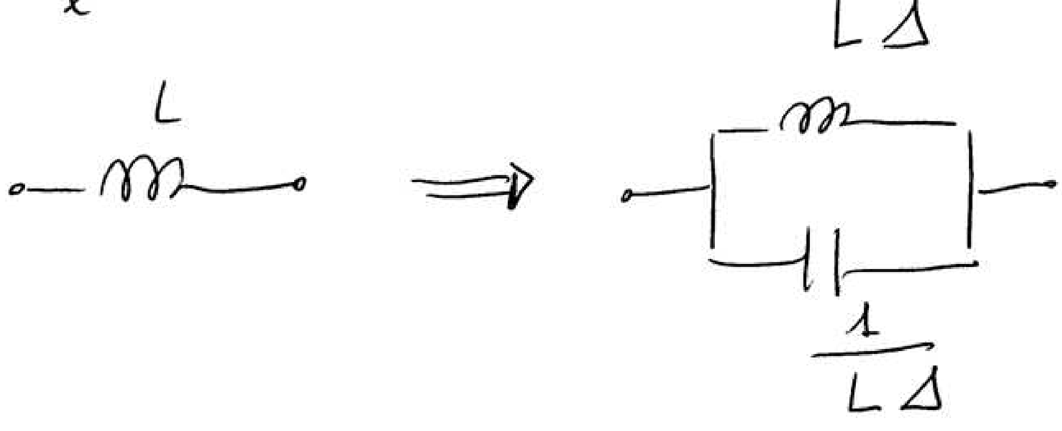
e quindi:

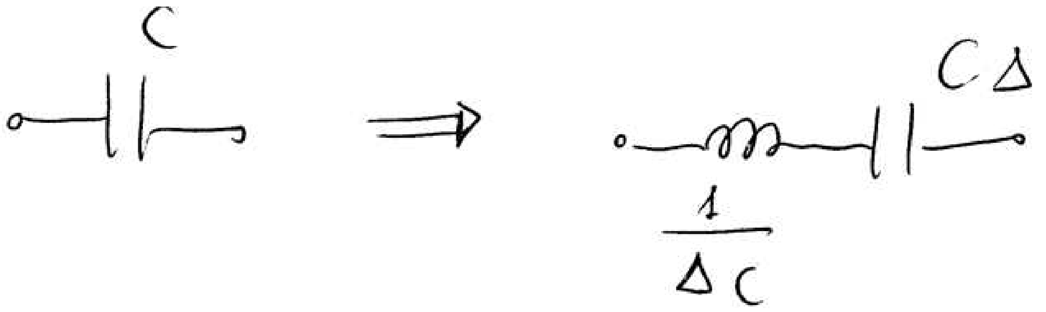


Per un filtro elimina banda la trasformazione è invece:

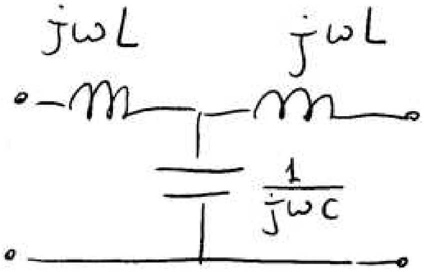
$$\omega = -\Delta\left(\omega' - \frac{1}{\omega'}\right)^{-1}$$

e



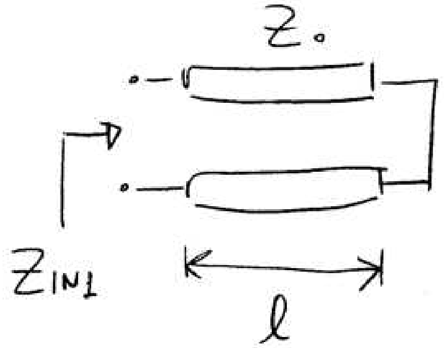


Implementazione di filtri passabasso

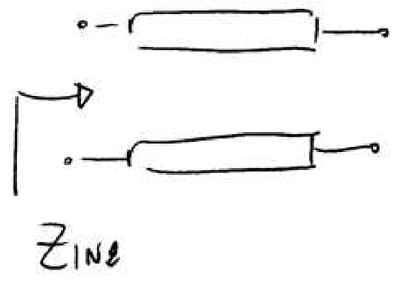


(FIG. 1)

Ad alte frequenze le reti LC non sono utilizzabili, occorre realizzarle tramite linee di trasmissione:



$$Z_{IN1} = j Z_0 \, tg\left(\frac{\omega l}{c}\right)$$

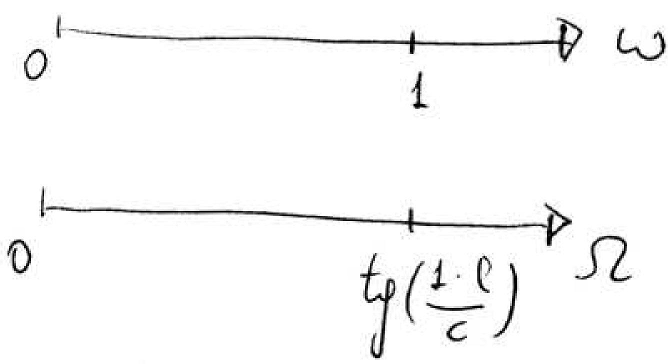


$$Z_{IN2} = -j Z_0 \frac{1}{tg\left(\frac{\omega l}{c}\right)}$$

quindi le reattanze utilizzabili hanno la corretta dipendenza non da "ω" ma da $\Omega = tg\left(\frac{\omega l}{c}\right)$ e la relazione tra ω e Ω non è lineare.

Possiamo accettare di usare Z_{IN1} e Z_{IN2} con alcune precisazioni:

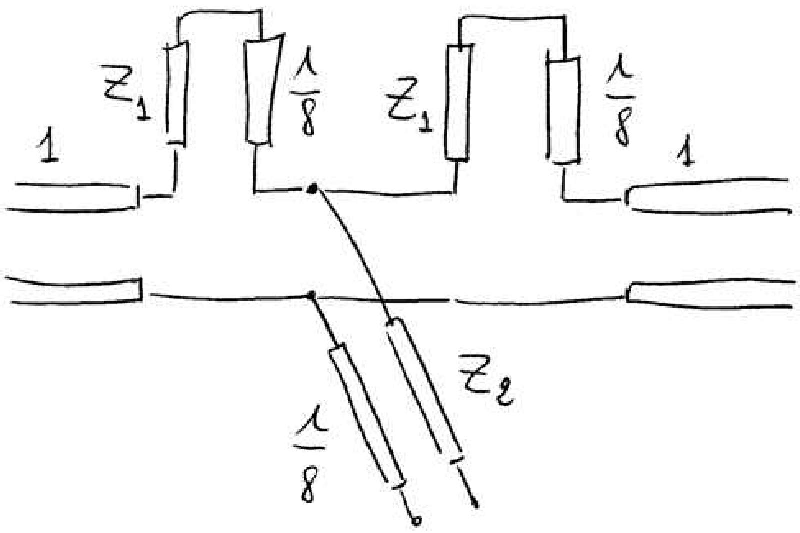
mettiamo in corrispondenza il segmento $[0, 1]$ in "ω" con il segmento $\left[0, tg\left(\frac{1 \cdot l}{c}\right)\right]$ in "Ω"



Si tratta di una trasformazione non lineare ma se imponiamo $tg\left(\frac{1 \cdot l}{c}\right) = 1$, troviamo che la banda passante del filtro espressa in funzione di ω e Ω è la stessa (ovviamente l'andamento in banda è leggermente diverso)

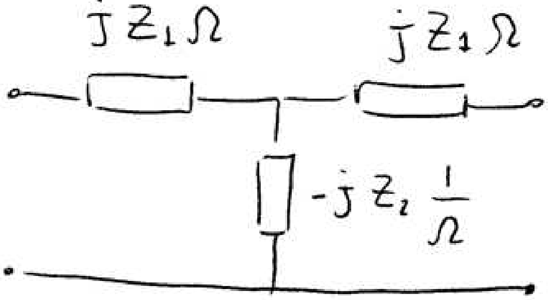
$$tg\left(\frac{1 \cdot l}{c}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1 \cdot l}{c} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow l = \frac{\pi c}{4} = \frac{\lambda}{8}$$

È quindi possibile realizzare un filtro passabasso utilizzando il seguente schema:



(FIG. 2)

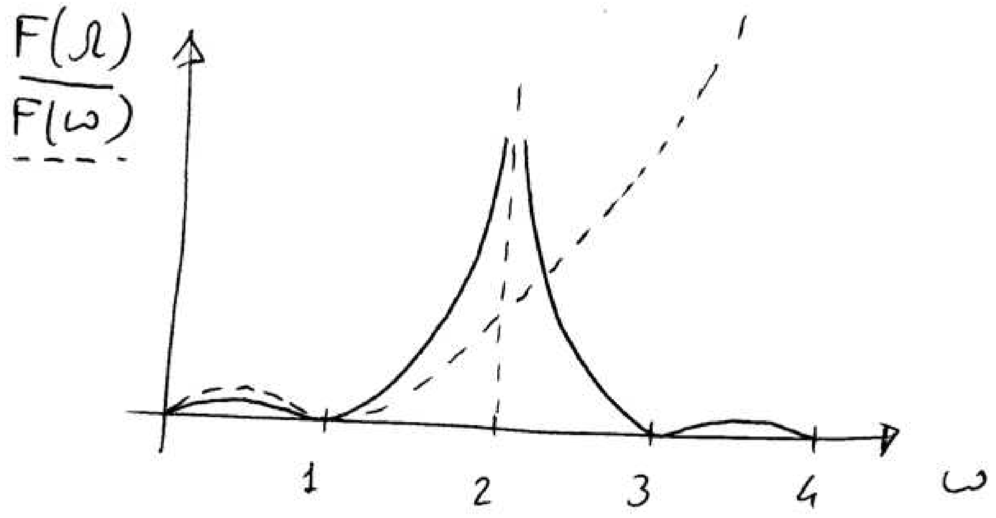
a cui corrisponde:



(FIG. 3)

Se la risposta del filtro in FIG. 1 è una $F(\omega)$, la risposta del filtro in FIG. 2 e 3 sarà una $F(\Omega)$ purché $Z_1 = L$ e $Z_2 = \frac{1}{C}$.
Inoltre, nei due casi, le bande passanti coincidono perché se Ω varia tra 0 e 1 allora Ω varia tra 0 e 1.

La trasformazione $\omega \leftrightarrow \Omega$ prende il nome di trasformazione di RICHARD



Si osservi l'andamento periodico di $F(\Omega)$ mentre $F(\omega)$ si attenua a frequenza elevata.

La scalatura in frequenza e impedenza per questo filtro è ovvia:

- L e $\frac{1}{C}$ sono impedenze e vanno moltiplicate per Z_0

- $\frac{\lambda}{8}$ deve essere scelto alla frequenza di cut-off ω_t (anziché a quella normalizzata $\omega_t = 1$)

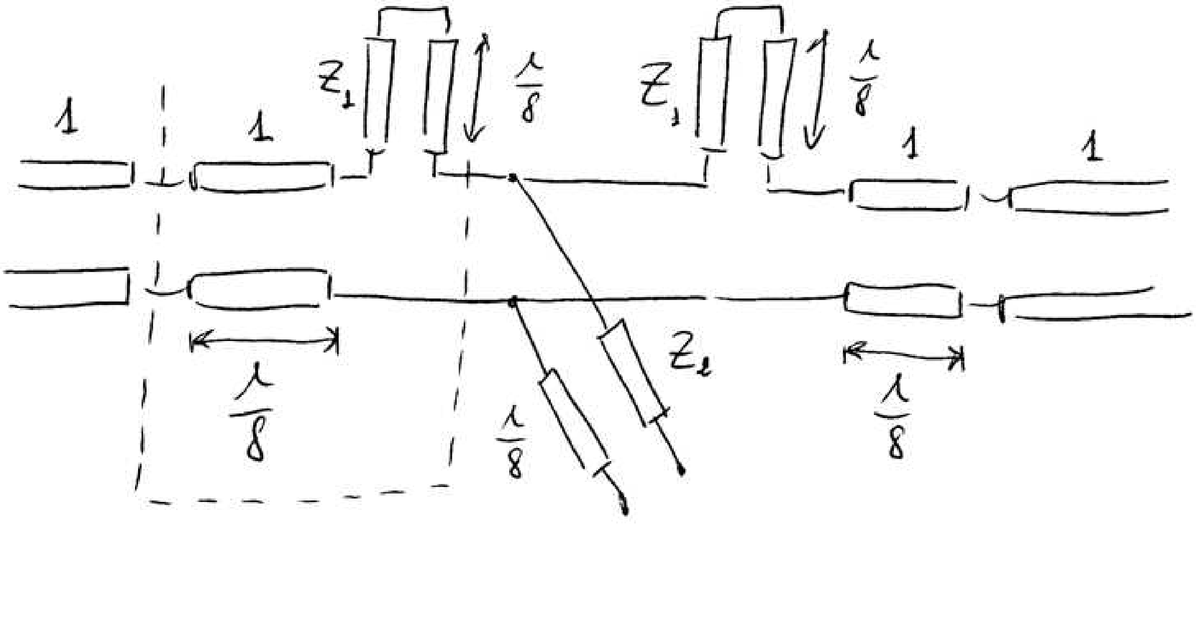
I filtri passabasso contengono solamente induttanze in serie e capacità in parallelo, che diventano quindi rispettivamente stub in serie e stub in parallelo.

Nelle realizzazioni planari gli stub in serie sono di difficile realizzazione e in microstriscia non sono realizzabili.

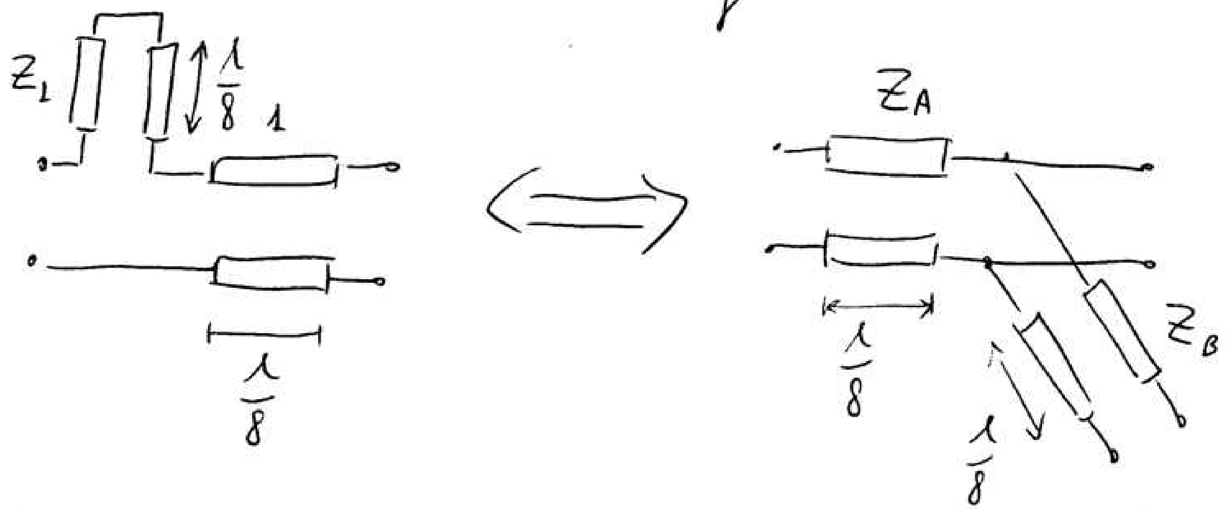
È possibile trasformare gli stub in serie in stub in parallelo utilizzando le: "identità di Kuroda".

Consideriamo il filtro in FIG. 2.

Aggiungendo a destra e a sinistra un tratto $\frac{\lambda}{8}$ di impedenza unitaria la risposta del filtro non cambia:



Possiamo trovare una equivalenza tra i due circuiti seguenti:



L'equivalenza si ottiene eguagliando le due matrici di trasmissione; per il circuito a sinistra:

$$\begin{bmatrix} 1 & jZ_1\Omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\Omega \\ j\Omega & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} \begin{bmatrix} 1 - Z_1\Omega^2 & j\Omega(1+Z_1) \\ j\Omega & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

con $\cos\left(\frac{\omega l}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\left(\frac{\omega l}{c}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}$

Per il circuito a destra :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}\begin{bmatrix} 1 & jZ_A\Omega \\ \frac{j\Omega}{Z_A} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j\Omega}{Z_B} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}\begin{bmatrix} 1-\frac{Z_A}{Z_B}\Omega^2 & jZ_A\Omega \\ j\Omega\left(\frac{1}{Z_A}+\frac{1}{Z_B}\right) & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

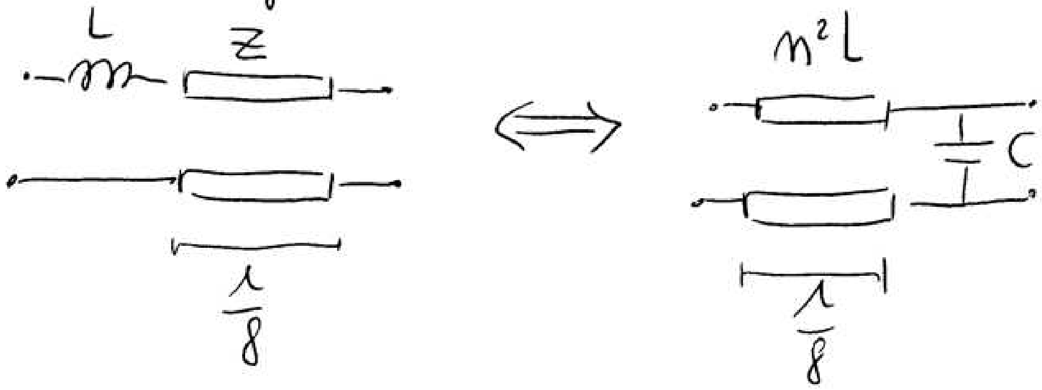
Le matrici (1) e (2) coincidono se :

$$Z_A = 1 + Z_1 = 1 + L$$

$$Z_B = 1 + \frac{1}{Z_1} = 1 + \frac{1}{L}$$

NOTA : Z_A può essere piuttosto elevato e difficile da realizzare o non realizzabile

Le identità di Kuroda si possono scrivere nella forma seguente :

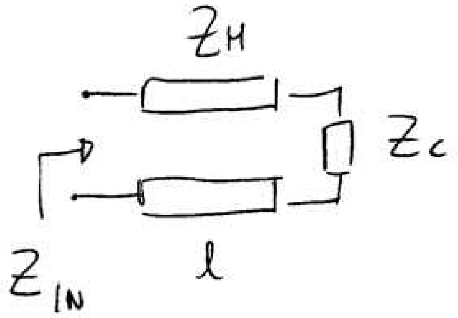


$$C = \frac{1}{n^2 Z}$$

$$n^2 = 1 + \frac{Z}{L}$$

FILTRI A SCALA

Consideriamo una linea di trasmissione corta ($\beta l \ll 1$) di impedenza elevata (~2,3,4) chiusa su un carico Z_c :

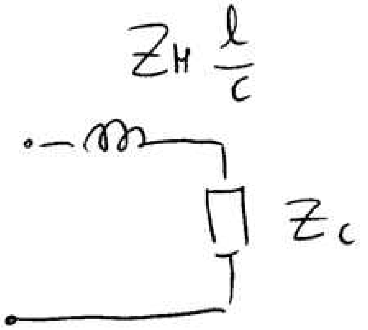


$$Z_{IN} = \frac{Z_H \left(Z_c + j Z_H \, tg(\beta l)\right)}{Z_H + j Z_c \, tg(\beta l)}$$

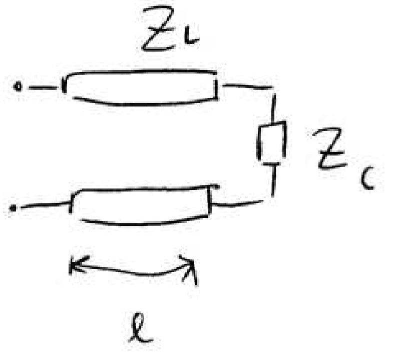
A denominatore $Z_c \, tg(\beta l) \ll Z_H$ quindi:

$$Z_{IN} \simeq \cancel{Z_H} \frac{Z_c + j Z_H \, tg(\beta l)}{\cancel{Z_H}} \simeq Z_c + j Z_H \left(\frac{\omega l}{c}\right)$$

Quest'ultima espressione è l'impedenza di:



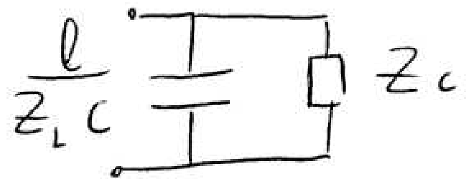
Se invece consideriamo una linea corta ma con $Z_L \ll 1$:



$$Y_{IN} = \frac{1}{Z_L} \frac{\frac{1}{Z_c} + j \frac{1}{Z_L} tg(\beta l)}{\frac{1}{Z_L} + j \frac{1}{Z_c} tg(\beta l)}$$

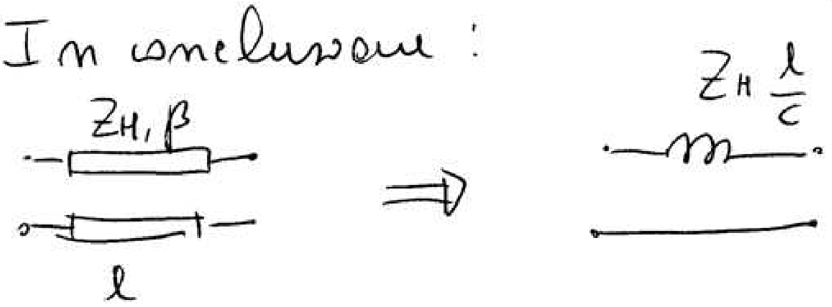
$$\simeq \frac{1}{Z_c} + j \frac{\omega l}{c} \cdot \frac{1}{Z_L}$$

che equivale ad una capacità in parallelo di valore $\dfrac{l}{Z_L c}$

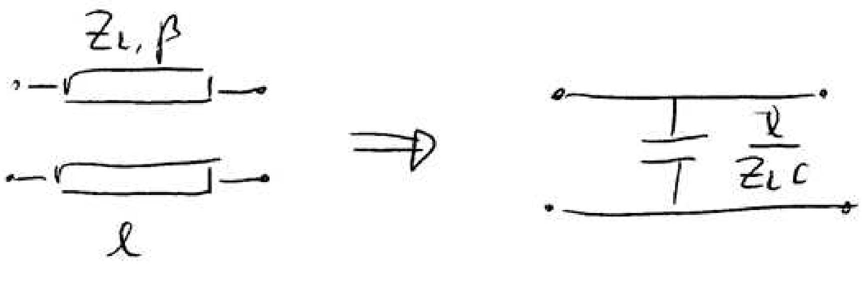


Si osserva che "Z_c" è quello che rimane del filtro a sinistra del componente (L o C).

In conclusione:



se $\beta l \ll 1$
Z_H elevato



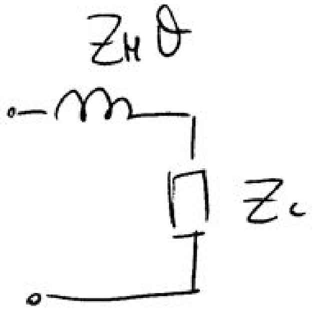
se $\beta l \ll 1$
Z_L piccolo

La precisione del filtro aumenta al crescere di Z_H/Z_L e quindi questo rapporto è scelto più grande possibile compatibilmente con i limiti tecnologici

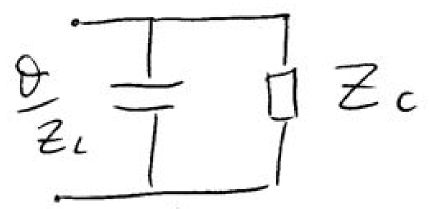
(in MS 10 - 180 Ω)

Si osserva che $\frac{l}{c} = \theta$ alla frequenza $\omega_t = 1$

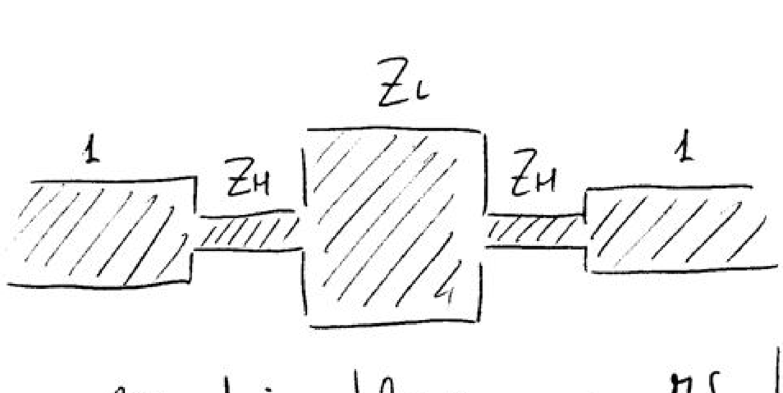
quindi:



e



che realizza la scalatura del filtro.



esempio: planare in MS per un filtro 3 stadi.

Un grosso vantaggio di un filtro stepped impedance rispetto ad un filtro di KURODA è che ha un piccolissimo ingombro trasversale e, tutto sommato, anche longitudinale. Ad esempio, un filtro stepped imp. di ordine 5 ha una lunghezza elettrica di circa 150° mentre un filtro di KURODA di ordine 5 ha una lunghezza elettrica di circa 180°.

Inoltre, mentre per un filtro di KURODA la linea di impedenza Z_A potrebbe non essere realizzabile (impedenza troppo elevata), nel caso di un filtro stepped imp. la realizzazione è garantita a priori scegliendo Z_L e Z_H realizzabili.

In un filtro stepped imp. le lunghezze delle linee sono in genere tutte differenti perché scelgo una volta per tutte Z_L e Z_H in modo che il rapporto $\frac{Z_H}{Z_L}$ sia più grande possibile.

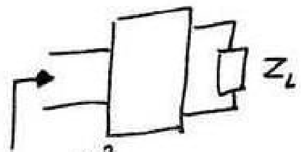
Ovviamente più grande è $\frac{Z_H}{Z_L}$ più preciso sarà il filtro. D'altra parte, poiché non posso fare Z_H molto grande (linee troppo sottili) né Z_L troppo piccolo (linee troppo larghe(*)) il filtro stepped imp. è intrinsecamente impreciso.

Inoltre il filtro stepped imp. non è periodico e, superata la freq. di taglio, si comporta talvolta in modo imprevedibile.

(*) teoricamente è possibile fare Z_L molto piccolo ma devo comunque tenere conto che il funzionamento deve essere TEM o Q-TEM. Ad esempio, non si può fare una linea da $3\,\Omega$ perché sarebbe larga quanto la lunghezza d'onda e avrei modi superiori.

INVERTITORI DI IMPEDENZA

Un inverter di impedenza è un doppio bipolo che trasforma una impedenza in ammettenza e viceversa. Il suo comportamento è quello mostrato in figura.



$$Z_{IN} = \frac{K^2}{Z_L}$$

Utilizzando la matrice di trasmissione si ha:

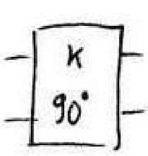
$$Z_{IN} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + BI_2}{CV_2 + DI_2} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

Imponendo $Z_{IN} = \frac{K^2}{Z_L}$ ***si trova***

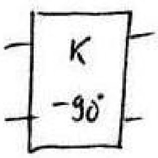
$$A = D = 0 \qquad \frac{B}{C} = K^2$$

D'altra parte, per la reciprocità -BC=1 e, se il doppio bipolo è privo di perdite, segue $B = \mp jK$, $C = \mp j/K$.

Sono possibili quindi due tipi di inverter a seconda del segno scelto



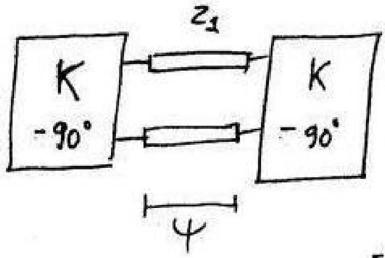
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & jK \\ j/K & 0 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -jK \\ -j/K & 0 \end{bmatrix}$$

Evidentemente un tale inverter è equivalente ad una linea lunga $\pm\pi/2$ (a <u>tutte</u> le frequenze) di impedenza K.
Esistono anche inverter di ammettenza, caratterizzati da una ammettenza J, la cui descrizione si ottiene sostituendo $K \to \frac{1}{J}$

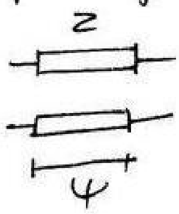
Evidentemente è sempre possibile inserire un inverter di impendenza in un circuito a patto di sostituire ogni impedenza Z a valle con K^2/Z.
Inoltre è possibile inserire due inverter uguali ai due lati di una linea, purchè se ne modifichi l'impedenza:



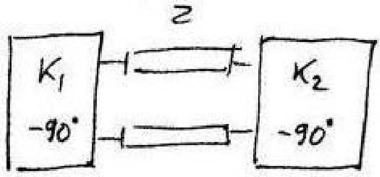
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -iK \\ -i/K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & iZ_1 \sin\psi \\ \frac{i\sin\psi}{Z_1} & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -iK \\ -i/K & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{K}{Z_1}\sin\psi & -iK\cos\psi \\ \frac{-i}{K}\cos\psi & \frac{Z_1}{K_1}\sin\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -iK \\ -i/K & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\psi & -\frac{iK^2}{Z_1}\sin\psi \\ -i\frac{Z_1}{K^2}\sin\psi & -\cos\psi \end{bmatrix}$$

che è la matrice di trasmissione di una linea di pari lunghezza e di impedenza Z se $Z_1 = \frac{K^2}{Z}$



E' anche possibile cambiare i valori di impedenza caratteristica ed inverters, infatti si ha:



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{K_1}{Z}\sin\psi & -iK_1\cos\psi \\ \frac{-i}{K_1}\cos\psi & \frac{Z}{K_1}\sin\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -iK_2 \\ -i/K_2 & 0 \end{bmatrix}$$

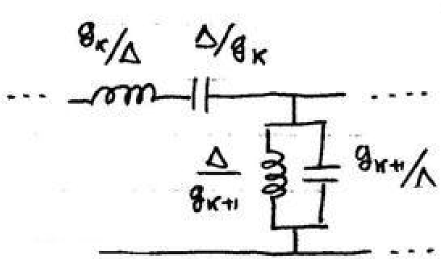
$$= \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{K_2}\cos\psi & -i\frac{K_1K_2}{Z}\sin\psi \\ -i\frac{Z}{K_1K_2}\sin\psi & -\frac{K_2}{K_1}\cos\psi \end{bmatrix}$$

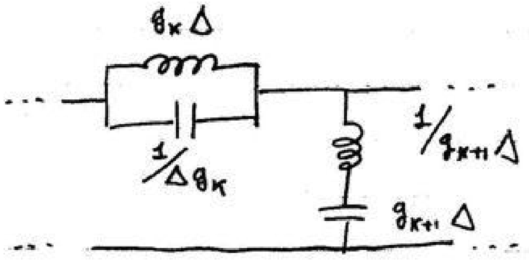
e possiamo quindi sostituire i valori K_1, K_2, Z con K_1', K_2', Z' purchè

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{K_1'}{K_2'} \qquad \frac{K_1K_2}{Z} = \frac{K_1'K_2'}{Z'}$$

FILTRI PASSA-BANDA ED ELIMINA-BANDA CON INVERTITORI DI AMMETTENZA

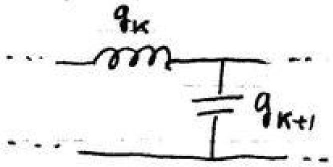
Il prototipo a bassa frequenza di un filtro passa-banda o elimina-banda è



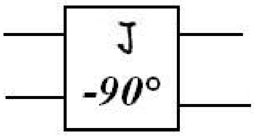


dove $\Delta = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$ è la larghezza di banda percentuale del filtro

centrato su ω_0 $\left[(\omega_1, \omega_2)\text{ è la banda passante}\right]$ e g_K sono i coefficienti del prototipo passa-basso:

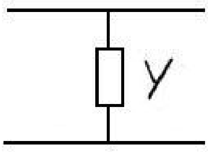


E' possibile ottenere prototipi diversi, in cui tutti i circuiti LC siano in parallelo (o in serie) utilizzando opportuni circuiti detti invertitori di ammettenza

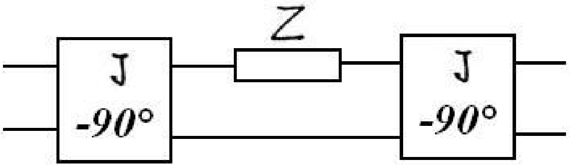


con matrice $\begin{bmatrix} 0 & -i/J \\ -iJ & 0 \end{bmatrix}$

Una ammettenza Y in parallelo diviene una impedenza in serie affiancata da due inverter uguali. Si ha infatti:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & -i/J \\ -iJ & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i/J \\ -iJ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -i/J \\ -iJ & -iJZ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i/J \\ -iJ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -J^2 Z & -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ J^2 Z & 1 \end{bmatrix}$$

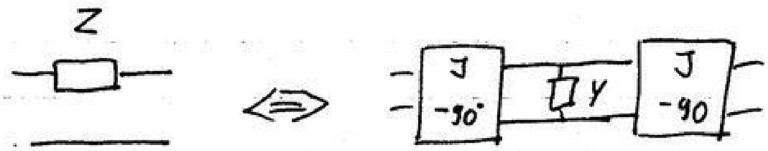
Il termine (-1) è un fattore che possiamo trascurare (non modifica la risposta del filtro) o al più tenere in conto con un trasformatore $-1 : 1$ posto in un punto qualunque.

Resta quindi la relazione $Y = J^2 Z$

Se ad esempio $Y = i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$ (LC parallelo) allora

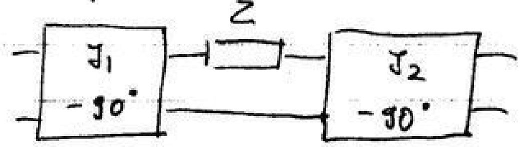
$Z = i \cdot \dfrac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{J^2}$ ovvero un LC serie con induttanza $\frac{C}{J^2}$ e capacità LJ^2 e, dualmente, un LC serie $Y = \left[i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]^{-1}$ diviene $Z = \frac{1}{J^2}\left[i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]^{-1}$ ovvero un LC parallelo con induttanza C/J^2 e capacità LJ^2.

Allo stesso modo



con $Z = Y/J^2$

In tal modo si ottiene un filtro con tutti inverter uguali (o uguali a coppie) e circuiti LC diversi. È però possibile ottenere anche circuiti LC uguali (e inverter diversi). Infatti per un circuito del tipo



si ha
$$\begin{bmatrix} 0 & -i/J_1 \\ -iJ_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i/J_2 \\ -iJ_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i/J_1 \\ -iJ_1 & -iJ_1 Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i/J_2 \\ -iJ_2 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= (-1) \begin{bmatrix} J_2/J_1 & 0 \\ J_1 J_2 Z & J_1/J_2 \end{bmatrix}$$

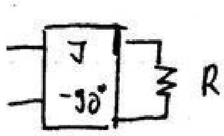
È quindi possibile sostituire Z con $\tilde{Z}$ se si modificano anche J_1, J_2 con
$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{\tilde{J}_2}{\tilde{J}_1} \qquad J_1 J_2 Z = \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 \tilde{Z}$$

Ovviamente $Z/\tilde{Z}$ deve essere una costante reale (ovvero è possibile cambiare solo il livello di impedenza del circuito LC).

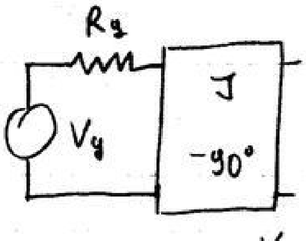
In tal caso si ha $\left(\tilde{J}_1\right)^2 = J_1^2 \dfrac{Z}{\tilde{Z}} \qquad \tilde{J}_2 = \tilde{J}_1 \dfrac{J_2}{J_1}$

Analogamente per una ammettenza $\left(\tilde{J}_K\right)^2 = J_K^2 \dfrac{\tilde{Y}}{Y}$

Infine è possibile cambiare anche il valore della resistenza di carico e di quella del generatore



$$R_{IN} = \frac{A\, V_2/I_2 + B}{C\, V_2/I_2 + D} = \frac{-i/J}{-iJ \cdot R_L} = \frac{1}{J^2 R_L}$$

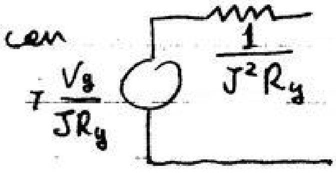


Applicando Thevenin si ha $R_{eq} = \dfrac{1}{J^2 R_g}$

Se l'uscita è a vuoto $R_{IN} = \dfrac{A}{C} = 0$ per cui

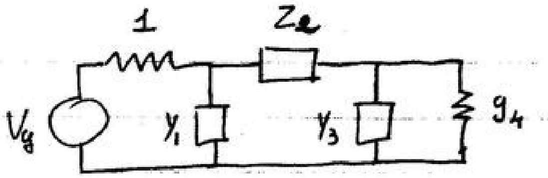
$V_1 = 0, \; I_1 = \dfrac{V_g}{R_g}$ e $\quad I_1 = C V_2 \;\Rightarrow\; V_2 = \dfrac{I_1}{C} = \dfrac{V_g}{R_g} \cdot \dfrac{1}{-iJ} = i \dfrac{V_g}{J R_g}$

e l'equivalenza è con



Se in particolare si moltiplica R_g per Y_0 e si divide J per Y_0 la sola resistenza R_{eq} va moltiplicata per Y_0 (scalatura di impedenza)

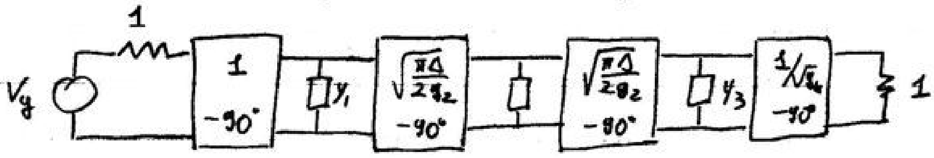
Si consideri ad esempio il filtro



con $Y_K = j\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\frac{g_K}{\Delta}$, $Z_K = j\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\frac{g_K}{\Delta}$

Si vuole trasformarlo in un filtro con le inverter 3 ammettenze $j\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\frac{\pi}{2}$ e carico unitario (equivalente a un filtro a linee accoppiate).

Il primo passo è



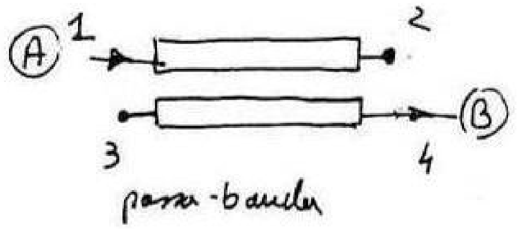
dove l'ammettenza centrale è già al valore corretto.
Per passare le altre due occorre moltiplicare il coefficiente dei due inverter per il rapporto $\left(\frac{g_K/\Delta}{\pi/2}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_K}}$

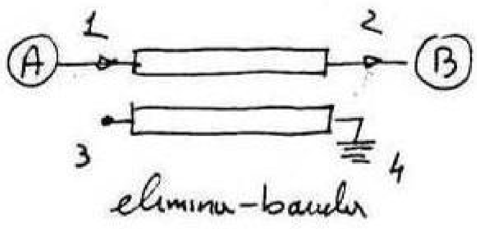
I vari inverter diventano quindi $\sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_1}}$, $\frac{\pi\Delta}{2\sqrt{g_1 g_2}}$, $\frac{\pi\Delta}{2\sqrt{g_2 g_3}}$, $\sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_3 g_4}}$

relazioni che si presta immediatamente alla generalizzazione a filtri di ordine N

FILTRI PASSA-BANDA A LINEE ACCOPPIATE

Una sezione di linee accoppiate di lunghezza elettrica pari a 90° a centro banda, può essere usata come cella elementare di un filtro passa-banda o elimina-banda se le due porte sono opportunamente terminate





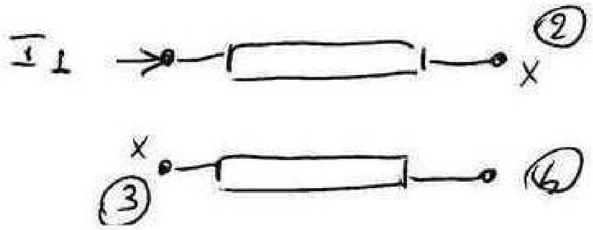
Consideriamo la cella elementare per il filtro passa-banda.
Possiamo calcolare la matrice delle impedenze relativa al circuito tra le porte A e B (ovvero 1 e 4)

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{14} I_4$$

$$V_4 = Z_{41} I_1 + Z_{44} I_4$$

ovviamente $I_2 = I_3 = 0$

Per calcolare la matrice delle impedenze si deve imporre $I_4 = 0$ *e alimentare dalla porta 1 con un generatore di corrente di ampiezza unitaria*



Questa eccitazione la posso decomporre in una eccitazione pari $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *e in una dispari* $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ *alle porte 1 e 3*

Quindi
$$V_{1p} = \frac{1}{2}\left(-j Z_p \cot g\, \theta\right)$$
(circuito aperto)
$$V_{1d} = \frac{1}{2}\left(-j Z_d \cot g\, \theta\right)$$

Le equazioni delle linee forniscono:

$$V_{2p/d} \left(= \underset{(-)}{V_{4p/d}}\right) = V_{1p/d} \cos\theta - j Z_{p/d} I_{1p} \operatorname{sen}\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left(-j Z_{p/d} \cot g\, \theta\right)\cos\theta - j Z_{p/d} \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(-J Z_{p/d} \cot g\, \vartheta \cos\vartheta\right) - J Z_{p/d} \frac{1}{2} \operatorname{sen}\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}\left(-J Z_{p/d} \frac{\cos\vartheta^2}{\operatorname{sen}\vartheta}\right) - J Z_{p/d} \frac{1}{2} \operatorname{sen}\vartheta =$$

$$= -\frac{1}{2} J Z_{p/d} \left[\frac{\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} J Z_{p/d} \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta} = \frac{-J Z_{p/d}}{2 \operatorname{sen}\vartheta}$$

$(V_{4p} = V_{2p})$ mentre ..

$$V_{4d} = -V_{2d} = \frac{J Z_d}{2 \operatorname{sen}\vartheta}$$

$$V_1 = V_{1p} + V_{1d} = -\frac{1}{2} J \cot g\,\vartheta \left(Z_p + Z_d\right) = Z_{11}$$

$$V_4 = V_{4p} + V_{4d} = -J \frac{Z_p}{2 \operatorname{sen}\vartheta} + J \frac{Z_d}{2 \operatorname{sen}\vartheta}$$

$$= -\frac{J}{2 \operatorname{sen}\vartheta}\left(Z_p - Z_d\right) = Z_{41}$$

$$\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \frac{-i}{2\sin\vartheta} \begin{pmatrix} (Z_p+Z_d)\cos\vartheta & Z_p-Z_d \\ Z_p-Z_d & (Z_p+Z_d)\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix}$$

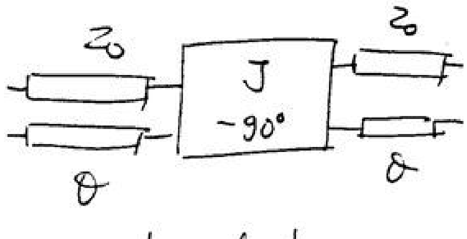
Posto $\cos\vartheta_1 = \dfrac{Z_p - Z_d}{Z_p + Z_d}$ si ottiene

$$\underline{\underline{Z}} = \frac{-i\,(Z_p - Z_d)}{2\sin\vartheta} \begin{pmatrix} \cos\vartheta/\cos\vartheta_1 & 1 \\ 1 & \cos\vartheta/\cos\vartheta_1 \end{pmatrix}$$

cui corrisponde una matrice ABCD

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta_1} & -i\,\dfrac{Z_p-Z_d}{2\sin\vartheta}\left(\dfrac{\cos^2\vartheta}{\cos^2\vartheta_1} - 1\right) \\ \dfrac{1}{-i\,\dfrac{Z_p-Z_d}{2\sin\vartheta}} & \dfrac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta_1} \end{bmatrix}$$

Se la banda è sufficientemente stretta $\left(\vartheta \simeq \frac{\pi}{2}\right)$ questa è anche la matrice della struttura seguente.



Infatti la sua matrice di trasmissione è

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & iZ_0 \operatorname{sen}\vartheta \\ \frac{i\sin\vartheta}{Z_0} & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i/J \\ -iJ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & iZ_0 \operatorname{sen}\vartheta \\ \frac{i\operatorname{sen}\vartheta}{Z_0} & \cos\vartheta \end{pmatrix} =$$

se $\vartheta \simeq \frac{\pi}{2}$

$\sin\vartheta \simeq 1$

$\cos^2\vartheta \simeq 0$

$$\begin{bmatrix} \left(JZ_0 + \frac{1}{JZ_0}\right) \underbrace{\sin\vartheta}_{\simeq 1} \cos\vartheta & i\left(JZ_0^2 \sin^2\vartheta - \frac{1}{J}\cos^2\vartheta\right) \\ i\left(\frac{1}{JZ_0^2}\sin^2\vartheta - J\cos^2\vartheta\right) & \left(JZ_0 + \frac{1}{JZ_0}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

e trascurare i termini in $\cos^2\vartheta$

Si può porre $\operatorname{sen}\vartheta \simeq 1$, il che limita la banda a $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$ ovvero a un massimo del 50% (in realtà meno se si vuole ottenere un filtro preciso). Per confronto si trova allora

$$\frac{1}{\cos\vartheta_1} = JZ_0 + \frac{1}{JZ_0}$$

$$\frac{2}{Z_p - Z_d} = \frac{1}{JZ_0^2}$$

ovvero

$$Z_p - Z_d = 2JZ_0^2$$

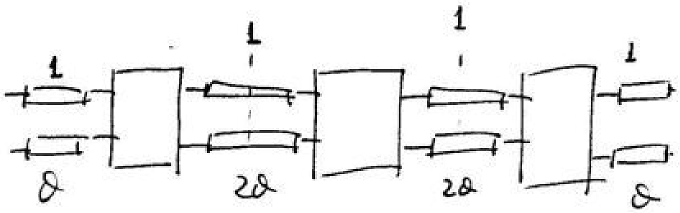
$$Z_p + Z_d = 2J^2Z_0^3 + 2Z_0$$

da cui segue

$$\begin{cases} Z_p = Z_0\left[1 + (JZ_0) + (JZ_0)^2\right] \\ Z_d = Z_0\left[1 - (JZ_0) + (JZ_0)^2\right] \end{cases}$$

Pertanto il circuito con inverter e linee è sempre equivalente alla sezione a linee accoppiate

Una sequenza di N sezioni a linee accoppiate è allora equivalente a N inverter ed N-1 linee lunghe 2θ, fra loro alternate, con due linee lunghe θ alle due estremità



purché Z_0 sia lo stesso per tutte le sezioni

La linea lunga 2θ ha matrice di trasmissione $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & jZ_0 \sin 2\theta \\ j\frac{1}{Z_0}\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$

e per $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$ si ha $\cos 2\theta \simeq -1$

$$\sin 2\theta = \sin(\pi + \Delta\theta) \simeq -\sin\Delta\theta \simeq -\Delta\theta = -\Delta\omega\frac{l}{c} = -\frac{\pi\Delta\omega}{\omega_0}$$

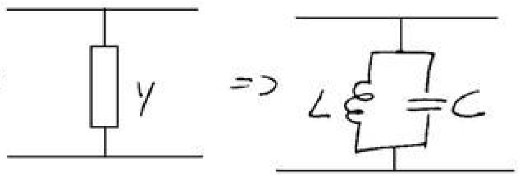
essendo a centrobanda $\frac{\omega_0 l}{c} = \pi$. Sostituendo si trova

$$(-1)\begin{pmatrix} 1 & j\frac{\pi Z_0}{\omega_0}\Delta\omega \\ j\frac{\pi}{Z_0\omega_0}\Delta\omega & 1 \end{pmatrix} \text{ cui corrisponde } \underline{\underline{Z}} = \begin{pmatrix} \frac{Z_0}{j\frac{\pi\Delta\omega}{\omega_0}} & \frac{Z_0}{j\frac{\pi\Delta\omega}{\omega_0}} \cancel{+jZ_0\frac{\pi\Delta\omega}{\omega_0}} \\ \frac{Z_0}{j\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_0}} & \frac{Z_0}{j\frac{\pi\Delta\omega}{\omega_0}} \end{pmatrix}$$

purché si elimini il termine (-1) (che non ha effetto sulla risposta in modulo)

Poichè $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ è piccolo allora

$$\underline{\underline{Z}} \simeq \frac{Z_0}{j\frac{\pi\Delta\omega}{\omega_0}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$



cui corrisponde una $Y = j\frac{\pi}{\omega_0 Z_0}\Delta\omega$ in parallelo e quindi un circuito risonante parallelo con

$$2C = \frac{\pi}{\omega_0 Z_0}$$

ovvero, in termini normalizzati, $C = \frac{\pi}{2}$

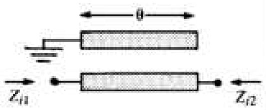
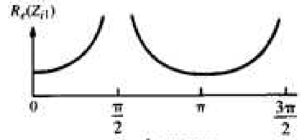
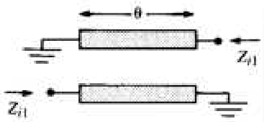
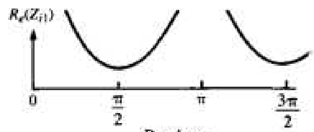
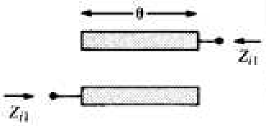
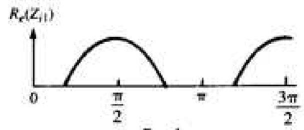
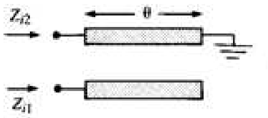
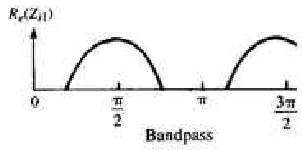
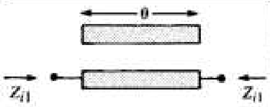
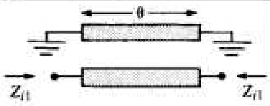
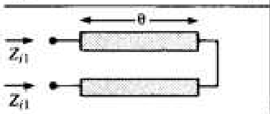
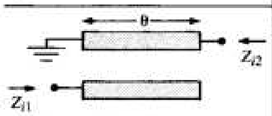
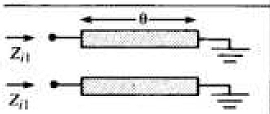
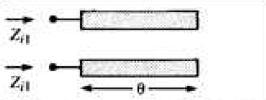
Pertanto un prototipo LC passa-banda con tutti i condensatori dei circuiti risonanti uguali e pari a $\pi/2$ può essere realizzato con una sequenza di linee accoppiate.

In particolare poichè nel prototipo del filtro si ha $J \simeq \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g}}$ essendo g un valore medio dei coefficienti del filtro e J un valore medio dei moltiplicanti inverter, allora

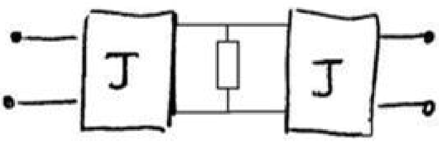
$$\frac{Z_p - Z_d}{2} = J \simeq \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g}} \qquad \frac{Z_p + Z_d}{2} = 1 + J^2 = 1 + \frac{\pi\Delta}{2g}$$

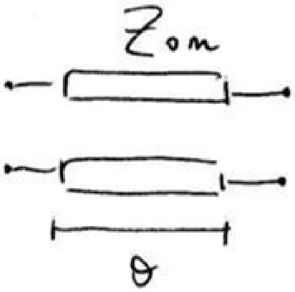
Valori elevati di Δ richiedono quindi linee molto sottili e vicine, e quindi difficilmente realizzabili.

Ten Canonical Coupled Line Circuits

Circuit	Image Impedance	Response
	$Z_{i1} = \dfrac{2Z_{0e}Z_{0o}\cos\theta}{\sqrt{(Z_{0e}+Z_{0o})^2\cos^2\theta-(Z_{0e}-Z_{0o})^2}}$ $Z_{i2} = \dfrac{Z_{0e}Z_{0o}}{Z_{i1}}$	Low pass
	$Z_{i1} = \dfrac{2Z_{0e}Z_{0o}\sin\theta}{\sqrt{(Z_{0e}-Z_{0o})^2-(Z_{0e}+Z_{0o})^2\cos^2\theta}}$	Bandpass
	$Z_{i1} = \dfrac{\sqrt{(Z_{0e}-Z_{0o})^2-(Z_{0e}+Z_{0o})^2\cos^2\theta}}{2\sin\theta}$	Bandpass
	$Z_{i1} = \dfrac{\sqrt{Z_{0e}Z_{0o}}\sqrt{(Z_{0e}-Z_{0o})^2-(Z_{0e}+Z_{0o})^2\cos^2\theta}}{(Z_{0e}+Z_{0o})\sin\theta}$ $Z_{i2} = \dfrac{Z_{0e}Z_{0o}}{Z_{i1}}$	Bandpass
	$Z_{i1} = \dfrac{Z_{0e}+Z_{0o}}{2}$	All pass
	$Z_{i1} = \dfrac{2\,Z_{0e}Z_{0o}}{Z_{0e}+Z_{0o}}$	All pass
	$Z_{i1} = \sqrt{Z_{0e}Z_{0o}}$	All pass
	$Z_{i1} = -j\,\dfrac{2\,Z_{0o}Z_{0e}}{Z_{0o}+Z_{0e}}\cot\theta$ $Z_{i2} = \dfrac{Z_{0e}Z_{0o}}{Z_{i1}}$	All stop
	$Z_{i1} = j\sqrt{Z_{0e}Z_{0o}}\tan\theta$	All stop
	$Z_{i1} = -j\sqrt{Z_{0e}Z_{0o}}\cot\theta$	All stop

Anziché usare linee accoppiate per realizzare
i circuiti risonanti serie o parallelo si possono utilizzare
degli stub lunghi circa $\frac{\lambda}{4}$. I circuiti equivalenti
di tali stub sono infatti quelli LC serie (stub aperti)
o parallelo (stub in c.c). Gli stub possono essere collegati
a due tratti $\frac{\lambda}{4}$ che fungono da inverter:





Per uno stub aperto:

$$Z_{IN} = -J Z_{0m} \cot\vartheta =$$

$$= -J Z_{0m} \cot\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\vartheta\right)$$

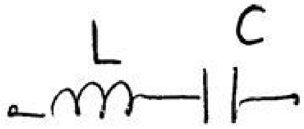
con $\Delta\vartheta = (\beta - \beta_0) l$ e $\beta_0 l = \frac{\pi}{2}$ ($\frac{\lambda}{4}$ a freq centrale)

Segue

$$Z_{IN} = J Z_{0m} \tan\Delta\vartheta \simeq J Z_{0m} \Delta\vartheta$$

$$= J Z_{0m} (\omega - \omega_0) \frac{l}{c}$$

Per una cella LC serie si ha d'altraparte



$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_n C_n}$$

$$Z_{IN} = J\omega L_n + \frac{1}{J\omega C_n} = J\sqrt{\frac{L_n}{C_n}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) =$$

$$= J\sqrt{\frac{L_n}{C_n}}\,\frac{(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)}{\omega\,\omega_0} \simeq \frac{2J}{\omega_0}\sqrt{\frac{L_n}{C_n}}\,(\omega-\omega_0)$$

avendo posto $\dfrac{\omega+\omega_0}{\omega_0} \simeq \dfrac{\omega_0+\omega_0}{\omega_0} = 2$

Ma $\omega_0\sqrt{C_n} = \dfrac{1}{\sqrt{L_n}}$ e quindi

$$Z_{IN} = 2J L_n(\omega-\omega_0)$$

Quindi si ha equivalenza se

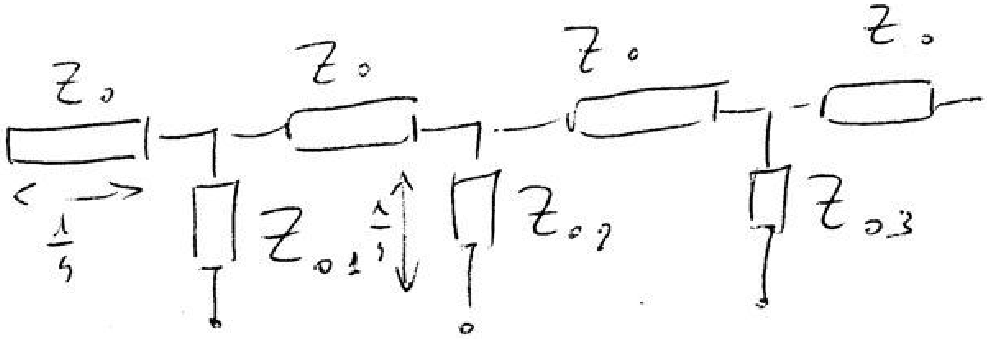
$$L_n = \frac{Z_{0n}\,l}{2c} = \frac{Z_{0n}}{2\omega_0}\,\frac{\omega_0 l}{c} = \frac{\pi}{4}\,\frac{Z_{0n}}{\omega_0}$$

(perché $\beta_0 l = \frac{\pi}{2}$)

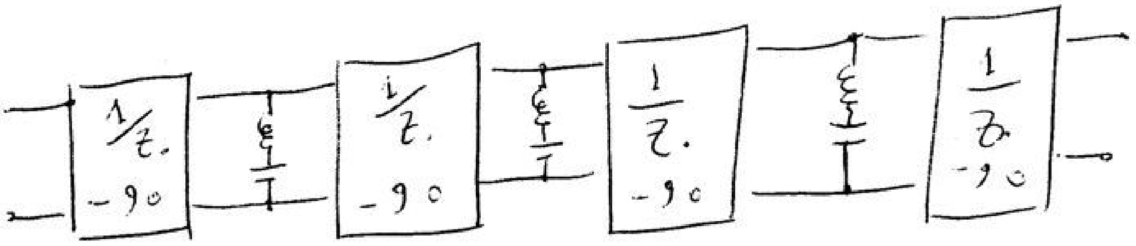
$$C_n = \frac{1}{L_n\omega_0^2} = \frac{4}{\pi\,\omega_0 Z_{0n}}$$

Quando una linea $\frac{\lambda}{4}$ aperta è effettivamente un circuito risonante serie dove $L_n = Z_{0n} \frac{\pi}{4} \frac{1}{\omega_0}$

Ad esempio un circuito del tipo:

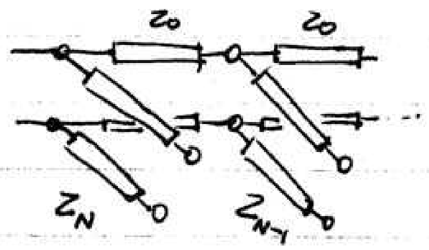


equivale a

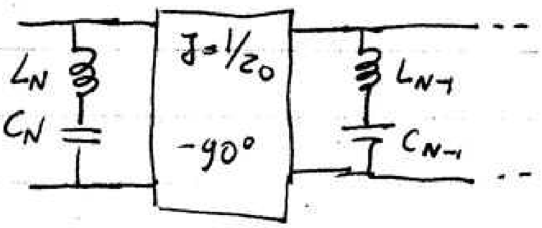


devo creare questo prototipo con gli invertitori tutti uguali dopodiché scelgo Z_{0n} degli stub in base ai valori che ho ottenuto per le induttanze utilizzando $L_n = Z_{0n} \frac{\pi}{4} \frac{1}{\omega_0}$ e tenendo presente che i valori di L_n normalizzati vengono forniti dal prototipo con tutti gli invertitori uguali..

Consideriamo allora il circuito in figura, con tutte le linee lunghe θ ($\lambda/4$ alla frequenza centrale)



Esso equivale a



ovvero un filtro elimina-banda (che diviene passa-banda usando stub in corto circuito.

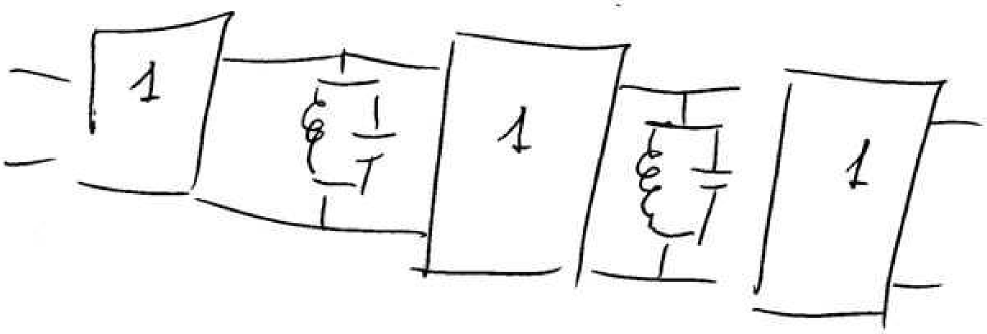
A partire dai coefficienti del prototipo LC si ha immediatamente

$$L_n = \frac{Z_0}{\omega_0 g_n \Delta} \quad \Rightarrow \quad Z_{0n} = \frac{4 Z_0}{\pi g_n \Delta}$$

mentre per un passa-banda $Z_{0n} = \dfrac{\pi Z_0 \Delta}{4 g_n}$

Anche qui Z_{0n} non può essere troppo grande, per cui sono realizzabili solo filtri elimina-banda con Δ elevato o passa-banda con Δ piccolo

Possiamo realizzare un filtro passa banda a stub utilizzando degli stub $\frac{\lambda}{2}$ di impedenza caratteristica opportuna.
Il prototipo da utilizzare è quello con tutti gli inverter uguali e risuonatori parallelo:



Per uno stub in parallelo risulta:

$$Y_{IN} = j Y_0 \, tg \, \beta l$$

$$\beta l = \beta_0 l + (\beta - \beta_0) l = \pi + (\beta - \beta_0) l$$

$$Y_{IN} = j Y_0 \, tg \left[\pi + (\beta - \beta_0) l \right] =$$

$$= j Y_0 \, tg \left[(\beta - \beta_0) l \right] \simeq j Y_0 (\beta - \beta_0) l$$

$$= J Y_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0 l}{c}\right)$$

$$= J Y_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \cdot \pi$$

— · ———

Per un circuito risonante parallelo si ha:

$$Y = 2 J C (\omega - \omega_0)$$

$$\Longrightarrow \quad 2 C_m = \frac{\pi Y_{0m}}{\omega_0}$$

$$C_m = \frac{\pi Y_{0m}}{\omega_0 \cdot 2}$$

$$\frac{f_m}{\Delta} = \frac{\omega_0 C_m}{Y_0} = \frac{\cancel{\omega_0} \pi \cdot Y_{0m}}{2 \cancel{\omega_0} Y_0} = \frac{\pi}{2} \frac{Y_{0m}}{Y_0}$$

$$\Rightarrow \quad Y_{0m} = \frac{2 f_m Y_0}{\pi \Delta} \quad \Big| \quad Z_{0m} = \frac{\pi \Delta Z_0}{2 f_m}$$