

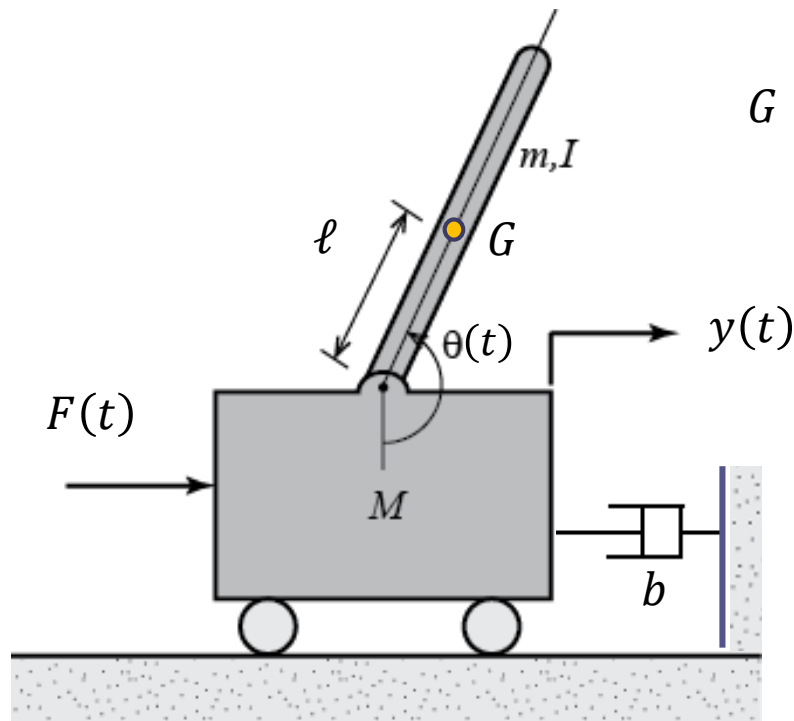
Controllo digitale

Esercitazione 7

Assegnamento poli mediante retroazione dello stato misurato e stimato mediante osservatore di Luenberger. Applicazione ad un sistema meccanico non lineare (pendolo inverso su carrello)

Ing. Alessandro Pisano
`apisano@unica.it`

Si considera il sistema meccanico in figura, costituito da un'asta omogenea di massa m incernierata ad uno degli estremi su un carrello di massa M libero di traslare lungo una direzione rettilinea sotto l'effetto di una forza esterna $F(t)$, che è l'ingresso del sistema, e della forza di attrito viscoso con coefficiente di attrito b .



G = centro di gravità dell'asta

I è il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse ortogonale al piano del disegno e passante per il centro di massa G . Il suo valore è $I = \frac{1}{3} m \ell^2$

L'obiettivo di controllo è quello di traslare il carrello da una posizione di partenza ad una posizione finale mantenendo l'asta in posizione verticale (con l'estremo libero in alto), che è una posizione di **equilibrio instabile**.

Questo video mostra una soluzione al problema di controllo (più sofisticato rispetto a quello di cui ci occupiamo nella esercitazione) denominato «**swing up**» del pendolo, in cui l'asta parte in posizione verticale con l'estremo libero verso il basso, e si desidera giungere ad una posizione di equilibrio con l'estremo libero verso l'alto.

CartPole Swing Up



Il problema dello swing-up del pendolo su carrello è risolvibile unicamente mediante tecniche di **controllo non lineare**.

Modello matematico

$$(M + m)\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + m\ell\ddot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) - m\ell\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t)) = F(t)$$

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta}(t) + mg\ell\sin(\theta(t)) + m\ell\ddot{y}(t)\cos(\theta(t)) = 0$$

Modello in forma vettoriale

$$\begin{bmatrix} (M + m) & m\ell\cos(\theta(t)) \\ m\ell\cos(\theta(t)) & (I + m\ell^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b\dot{y}(t) - m\ell\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t)) \\ -mg\ell\sin(\theta(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

$$A(\theta(t)) \begin{bmatrix} \ddot{y}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b\dot{y}(t) - m\ell\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t)) \\ -mg\ell\sin(\theta(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

$$A(\theta(t)) = \begin{bmatrix} (M + m) & m\ell\cos(\theta(t)) \\ m\ell\cos(\theta(t)) & (I + m\ell^2) \end{bmatrix} \quad \text{Matrice di inerzia}$$

Modello in forma esplicita:

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = A(\theta(t))^{-1} \begin{bmatrix} -b\dot{y}(t) - m\ell\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t)) \\ -mg\ell\sin(\theta(t)) \end{bmatrix} + A(\theta(t))^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

Modello matematico

$$\ddot{y}(t) = -b(I + m\ell^2) \frac{\dot{y}(t)}{\Delta(\theta(t))} + m\ell \frac{\dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t))}{\Delta(\theta(t))} + m^2 \ell^2 g \frac{\sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{\Delta(\theta(t))} + \frac{(I + m\ell^2)}{\Delta(\theta(t))} F(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = m\ell b \frac{\dot{y}(t) \cos(\theta(t))}{\Delta(\theta(t))} + m^2 \ell^2 \frac{\dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{\Delta(\theta(t))} + (M + m)mg\ell \frac{\sin(\theta(t))}{\Delta(\theta(t))} - \frac{m\ell \cos(\theta(t))}{\Delta(\theta(t))} F(t)$$

$$\Delta(\theta(t)) = (M + m)(I + m\ell^2) - m^2 \ell^2 \cos^2(\theta(t))$$

*Determinante della
matrice di inerzia*

Esprimiamo il modello matematico non lineare in variabili di stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad \text{Vettore di stato} \quad u(t) = F(t) \quad \text{Ingresso del sistema}$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -b(I + m\ell^2) \frac{x_2(t)}{\Delta(x_3(t))} + m\ell \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 g \frac{\sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + \frac{(I + m\ell^2)}{\Delta(x_3(t))} u(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = m\ell b \frac{x_2(t) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + (M + m)mg\ell \frac{\sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} - \frac{m\ell \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} u(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -b(I + m\ell^2) \frac{x_2(t)}{\Delta(x_3(t))} + m\ell \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 g \frac{\sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + \frac{(I + m\ell^2)}{\Delta(x_3(t))} u(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = m\ell b \frac{x_2(t) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + (M + m)mg\ell \frac{\sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} - \frac{m\ell \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} u(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -b(I + m\ell^2) \frac{x_2(t)}{\Delta(x_3(t))} + m\ell \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 g \frac{\sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} \\ x_4(t) \\ m\ell b \frac{x_2(t) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + (M + m)mg\ell \frac{\sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I + m\ell^2)}{\Delta(x_3(t))} \\ 0 \\ -\frac{m\ell \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x(t)) + \mathbf{g}(x(t))\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \\ f_3(x(t)) \\ f_4(x(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(x(t)) \\ g_2(x(t)) \\ g_3(x(t)) \\ g_4(x(t)) \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

*Sistema non lineare
«affine nel controllo»*

Modello linearizzato

Il comportamento di un processo non lineare può essere approssimato mediante un modello matematico **lineare** associato ad uno dei punti di equilibrio del sistema.

La validità di tale approssimazione dipenderà dal fatto che lo stato del sistema non lineare non si allontani eccessivamente dai valori di equilibrio.

In accordo con la formulazione del problema di controllo del presente esercizio, il punto di equilibrio che scegliamo è quello in cui il carrello è in quiete con l'asta in posizione verticale.

Punto di equilibrio

$$x_{1EQ} = 0 \quad x_{2EQ} = 0 \quad x_{3EQ} = \pi \quad x_{4EQ} = 0 \quad F_{EQ} = 0$$

Il modello linearizzato ha come variabili di stato le differenze fra i valori dello stato ed i valori di equilibrio. L'ingresso del modello linearizzato è anch'esso la differenza fra il valore dell'ingresso $u(t)$ ed il relativo valore di equilibrio.

Modello linearizzato

Punto di equilibrio

$$x_{1EQ} = 0 \quad x_{2EQ} = 0 \quad x_{3EQ} = \pi \quad x_{4EQ} = 0 \quad F_{EQ} = 0$$

Variabili di stato del modello linearizzato

$$\delta x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_{1EQ} \\ x_2(t) - x_{2EQ} \\ x_3(t) - x_{3EQ} \\ x_4(t) - x_{4EQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \theta(t) - \pi \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

Ingresso del modello linearizzato

$$\delta u(t) = F(t) - F_{EQ} = F(t)$$

Uscite del modello linearizzato

$$\delta y(t) = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \theta(t) - \pi \end{bmatrix}$$

Modello linearizzato

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C\delta x(t) \end{aligned}$$

Calcolo della matrice A del modello linearizzato

Gli elementi a_{ij} della matrice A si determinano secondo la seguente formula

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{EQ}$$

Si calcolano le derivate parziali delle funzioni non lineari $f_1(x(t)), \dots, f_4(x(t))$ rispetto alle 4 variabili di stato e si valuta quanto ottenuto in corrispondenza dei valori associati al punto di equilibrio

$$\begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \\ f_3(x(t)) \\ f_4(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -b(I + m\ell^2) \frac{x_2(t)}{\Delta(x_3(t))} + m\ell \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 g \frac{\sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} \\ x_4(t) \\ m\ell b \frac{x_2(t) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + (M + m)mg\ell \frac{\sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \\ f_3(x(t)) \\ f_4(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -b(I + m\ell^2) \frac{x_2(t)}{\Delta(x_3(t))} + m\ell \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 g \frac{\sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} \\ x_4(t) \\ m\ell b \frac{x_2(t) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + (M + m) m g \ell \frac{\sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} \end{bmatrix}$$

Determiniamo gli elementi a_{11}, \dots, a_{14} della **prima riga** della matrice A

$$a_{1j} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \right|_{EQ} \quad j = 1, \dots, 4 \quad f_1(x(t)) = x_2(t)$$

$$a_{11} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{EQ} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad a_{11} = 0 \quad a_{12} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{EQ} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \quad a_{12} = 1$$

$$a_{13} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right|_{EQ} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 \quad a_{13} = 0 \quad a_{14} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \right|_{EQ} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0 \quad a_{14} = 0$$

Determiniamo gli elementi a_{11}, \dots, a_{14} della **seconda riga** della matrice A

$$a_{2j} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \right|_{EQ} \quad j = 1, \dots, 4$$

$$f_2(x(t)) = -b(I + m\ell^2) \frac{x_2(t)}{\Delta(x_3(t))} + m\ell \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 g \frac{\sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))}$$

$$a_{21} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{EQ} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \quad a_{21} = 0$$

$$a_{22} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{EQ} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{b(I+m\ell^2)}{\Delta(x_3(t))} = -\frac{b(I+m\ell^2)}{(M+m)(I+m\ell^2) - m^2 \ell^2 \cos^2(x_3(t))}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= \left. -\frac{b(I+m\ell^2)}{(M+m)(I+m\ell^2) - m^2 \ell^2 \cos^2(x_3(t))} \right|_{EQ} = -\frac{b(I+m\ell^2)}{(M+m)(I+m\ell^2) - m^2 \ell^2} \\ &= -\frac{b(I+m\ell^2)}{I(M+m) + mM\ell^2} \end{aligned}$$

Determiniamo gli elementi a_{11}, \dots, a_{14} della **seconda riga** della matrice A (continua)

$$a_{23} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right|_{EQ}$$

Riscriviamo $f_2(x(t))$ in modo più conveniente

$$\begin{aligned} f_2(x(t)) &= -b(I + m\ell^2) \frac{x_2(t)}{\Delta(x_3(t))} + m\ell \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + m^2 \ell^2 g \frac{\sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} \\ &= -b(I + m\ell^2) \frac{x_2(t)}{\Delta(x_3(t))} + m\ell \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + \frac{1}{2} m^2 \ell^2 g \frac{\sin(2x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} \end{aligned}$$

Si noti che : $\frac{d}{dx_3} [\Delta(x_3(t))] = \frac{d}{dx_3} [(M + m) (I + m\ell^2) - m^2 \ell^2 \cos^2(x_3(t))] = m^2 \ell^2 \sin(2x_3(t))$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= b(I + m\ell^2) \frac{m^2 \ell^2 \sin(2x_3(t))}{[\Delta(x_3(t))]^2} x_2(t) + m\ell x_4^2(t) \frac{\cos(x_3(t)) \Delta(x_3(t)) - m^2 \ell^2 \sin(2x_3(t)) \sin(x_3(t))}{[\Delta(x_3(t))]^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} m^2 \ell^2 g \frac{2 \cos(2x_3(t)) \Delta(x_3(t)) - m^2 \ell^2 \sin^2(2x_3(t))}{[\Delta(x_3(t))]^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = b(I + m\ell^2) \frac{m^2 \ell^2 \sin(2x_3(t))}{[\Delta(x_3(t))]^2} x_2(t) + m\ell x_4^2(t) \frac{\cos(x_3(t))\Delta(x_3(t)) - m^2 \ell^2 \sin(2x_3(t))\sin(x_3(t))}{[\Delta(x_3(t))]^2} \\ + \frac{1}{2} m^2 \ell^2 g \frac{2\cos(2x_3(t))\Delta(x_3(t)) - m^2 \ell^2 \sin^2(2x_3(t))}{[\Delta(x_3(t))]^2}$$

Una volta valutati in corrispondenza dei valori di equilibrio dello stato, **i primi due termini di $\frac{\partial f_2}{\partial x_3}$ sono identicamente nulli.**

$$a_{23} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right|_{EQ} = \frac{1}{2} m^2 \ell^2 g \frac{2\cos(2\pi)\Delta(\pi) - m^2 \ell^2 \sin^2(2\pi)}{[\Delta(\pi)]^2} = \frac{m^2 \ell^2 g}{\Delta(\pi)} = \frac{m^2 \ell^2 g}{I(M+m) + mM\ell^2}$$

$$\Delta(\pi) = (M + m) (I + m\ell^2) - m^2 \ell^2 \cos^2(\pi) = (M + m) (I + m\ell^2) - m^2 \ell^2 = I(M + m) + mM\ell^2$$

Calcoliamo l'ultimo elemento della seconda riga di A

$$a_{24} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \right|_{EQ} \quad f_2(x(t)) = -b(I + m\ell^2) \frac{x_2(t)}{\Delta(x_3(t))} + m\ell \frac{x_4^2(t) \sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} + \frac{1}{2} m^2 \ell^2 g \frac{\sin(2x_3(t))}{\Delta(x_3(t))}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = 2m\ell \frac{x_4(t) \sin(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))}$$

$$a_{24} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \right|_{EQ} = 0$$

Si proceda analogamente per la determinazione dei coefficienti della terza e quarta riga della matrice A

Calcolo della matrice B del modello linearizzato

Gli elementi b_i del vettore colonna B si determinano secondo la seguente formula, valutando le funzioni non lineari $g_1(x(t)), \dots, g_4(x(t))$ in corrispondenza dei valori di equilibrio dello stato

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad b_i = g_i(x(t)) \Big|_{EQ} \quad \begin{bmatrix} g_1(x(t)) \\ g_2(x(t)) \\ g_3(x(t)) \\ g_4(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I + m\ell^2)}{\Delta(x_3(t))} \\ 0 \\ -\frac{m\ell \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} \end{bmatrix}$$

$$b_1 = b_3 = 0$$

$$b_2 = \frac{(I+m\ell^2)}{\Delta(x_3(t))} \Big|_{EQ} = \frac{(I+m\ell^2)}{(M+m)(I+m\ell^2) - m^2\ell^2 \cos^2(x_3(t))} \Big|_{EQ} = \frac{(I+m\ell^2)}{I(M+m) + mM\ell^2}$$

$$b_4 = -\frac{m\ell \cos(x_3(t))}{\Delta(x_3(t))} \Big|_{EQ} = -\frac{m\ell \cos(x_3(t))}{(M+m)(I+m\ell^2) - m^2\ell^2 \cos^2(x_3(t))} \Big|_{EQ}$$

$$= \frac{m\ell}{I(M+m) + mM\ell^2}$$

Modello linearizzato

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t)$$

$$\delta y(t) = C \delta x(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b(I + m\ell^2)}{I(M + m) + mM\ell^2} & \frac{m^2 g \ell^2}{I(M + m) + mM\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m\ell b}{I(M + m) + mM\ell^2} & \frac{mg\ell(m + M)}{I(M + m) + mM\ell^2} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I + m\ell^2)}{I(M + m) + mM\ell^2} \\ 0 \\ \frac{m\ell}{I(M + m) + mM\ell^2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Parametri del sistema fisico

$$M = 0.5 \text{ kg}$$

Massa del carrello

$$m = 0.2 \text{ kg}$$

Massa dell'asta

$$b = 0.1$$

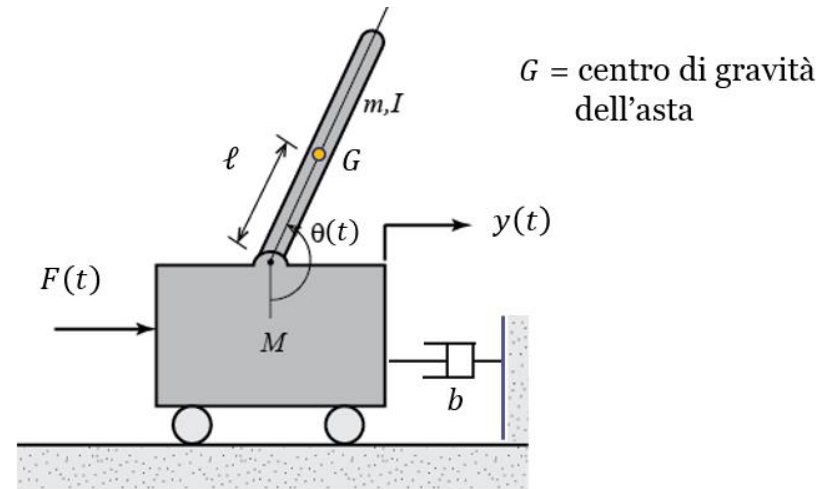
Coeff. di attrito viscoso carrello

$$\ell = 0.3 \text{ m}$$

Semilunghezza dell'asta (distanza fra l'estremo incernierato ed il centro di gravità dell'asta)

$$I = \frac{1}{3} m \ell^2 = 0.006 \text{ kg m}^2$$

Momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse ortogonale al piano del disegno e passante per il centro di massa G .



Matrici del modello linearizzato

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t)$$

$$\delta y(t) = C \delta x(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.673 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4545 & 31.18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ 4.545 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```

M = 0.5; m = 0.2; g = 9.8;
b = 0.1; l = 0.3;
I = 1/3*m*l^2;
p = I*(M+m)+M*m*l^2;
A = [0      1      0      0;
      0 -(I+m*l^2)*b/p (m^2*g*l^2)/p 0;
      0      0      0      1;
      0 -(m*l*b)/p    m*g*l*(M+m)/p 0];
B = [0; (I+m*l^2)/p; 0; m*l/p];
C = [1 0 0 0; 0 0 1 0];
D = [0; 0];
sistema_tc = ss(A,B,C,D);

```



```

sistema_tc =
      A =
           x1      x2      x3      x4
      x1      0      1      0      0
      x2      0 -0.1818  2.673  0
      x3      0      0      0      1
      x4      0 -0.4545  31.18  0
      B =
           u1
      x1      0
      x2  1.818
      x3      0
      x4  4.545

```

Modello linearizzato **discretizzato** (periodo di campionamento $T_c = 0.02$ s)

$$\delta x(k+1) = A_d \delta x(k) + B_d \delta u(k)$$

$$\delta y(k) = C \delta x(k)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 & 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.9964 & 0.0535 & 0.0005 \\ 0 & -0.0001 & 1.0062 & 0.02 \\ 0 & -0.0091 & 0.6247 & 1.0062 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0.0004 \\ 0.0363 \\ 0.0009 \\ 0.0909 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
Tc=0.02;
sistema_td=c2d(sistema_tc,Tc)
[Ad,Bd,Cd,Dd] = ssdata(sistema_td)
```



```
Ad =
    1.0000    0.0200    0.0005    0.0000
         0    0.9964    0.0535    0.0005
         0   -0.0001    1.0062    0.0200
         0   -0.0091    0.6247    1.0062
```

```
Bd =
    0.0004
    0.0363
    0.0009
    0.0909
```

Affrontiamo il problema di controllo secondo il metodo dell'assegnamento poli mediante retroazione sullo stato, ipotizzando in via preliminare di avere accesso per misura a tutte e 4 le variabili di stato e successivamente rimuovendo tale ipotesi mediante l'impiego di un osservatore di stato che utilizzi, come misure dal sistema, solamente la posizione del carrello e l'angolo dell'asta.

Verifica della controllabilità

La matrice di controllabilità è

$$M_c = [B_d \quad A_d B_d \quad A_d^2 B_d \quad A_d^3 B_d]$$

```
%% verifica controllabilità
```

```
Mc=[Bd Ad*Bd Ad^2*Bd Ad^3*Bd]
```

```
Mc=ctrb(Ad,Bd) % istruzione Matlab alternativa
```

```
rankMc=rank(Mc)
```



Mc =

0.0004	0.0011	0.0018	0.0025
0.0363	0.0363	0.0363	0.0365
0.0009	0.0027	0.0046	0.0065
0.0909	0.0917	0.0937	0.0968

rankMc =

4

$$M_c = \begin{bmatrix} 0.0004 & 0.0011 & 0.0018 & 0.0025 \\ 0.0363 & 0.0363 & 0.0363 & 0.0365 \\ 0.0009 & 0.0027 & 0.0046 & 0.0065 \\ 0.0909 & 0.0917 & 0.0937 & 0.0968 \end{bmatrix}$$

La matrice M_c ha rango pieno. Il problema dell'assegnamento poli è pertanto risolvibile.

Il polinomio caratteristico della matrice A_d è

$$P_{car}(A_d) = z^4 - 4.0089z^3 + 6.0140z^2 - 4.0016z + 0.9964$$

$$= (z - 0.894)(z - 0.9971)(z - 1)(z - 1.1177)$$

Il sistema linearizzato è instabile a ciclo aperto

$$a_3 = -4.0089 \quad a_2 = 6.0140 \quad a_1 = -4.0016 \quad a_0 = 0.9964$$

```
Autov_Ad=eig(Ad)
Pcar=poly(Autov_Ad)
```

```
Autov_Ad =
    1.0000
    0.9971
    1.1177
    0.8940

PcarAd =
    1.0000   -4.0089    6.0140   -4.0016    0.9964
```

Scegliamo come autovalori desiderati

$$p^{des} = [0.95, 0.95, 0.95, 0.95]$$

Tale scelta è motivata dal fatto che non vengono formulate specifiche sul comportamento transitorio, e si scelgono pertanto **autovalori non troppo distanti da quelli del sistema a ciclo aperto** onde limitare l'azione di controllo e ottenere dal sistema controllato un processo di convergenza non troppo «brusco» e tale da mantenerne l'evoluzione sufficientemente prossima alla condizione di equilibrio

Il **polinomio caratteristico desiderato**, le cui radici sono i poli desiderati sarà pertanto

$$P_{car}^{des} = (z + 0.95)^4 = z^4 - 3.8z^3 + 5.415z^2 - 3.4295z + 0.8145$$

$$\gamma_3 = -3.8 \quad \gamma_2 = 5.415 \quad \gamma_1 = -3.4295 \quad \gamma_0 = 0.8145$$

```
pdes=[0.95 0.95 0.95 0.95];
Pcardes=poly(pdes)
```

```
Pcardes =
```

```
1.0000 -3.8000 5.4150 -3.4295 0.8145
```

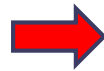
I coefficienti $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_4$ sono determinati facendo la **differenza fra i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato ed i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice A_d**

$$\bar{k}_1 = \gamma_0 - a_0 = -0.1822$$

$$\bar{k}_2 = \gamma_1 - a_1 = 0.5671$$

$$\bar{k}_3 = \gamma_2 - a_2 = -0.588$$

$$\bar{k}_4 = \gamma_3 - a_3 = 0.2031$$



$$\bar{K} = [-0.1819 \quad 0.5721 \quad -0.5990 \quad 0.2089]$$

```
a3=PcarAd(2)
a2=PcarAd(3);
a1=PcarAd(4);
a0=PcarAd(5);
```

```
pdes=[0.95 0.95 0.95 0.95];
Pcardes=poly(pdes)
gamma3=Pcardes(2)
gamma2=Pcardes(3)
gamma1=Pcardes(4)
gamma0=Pcardes(5)
```



Kbar =

```
-0.1819    0.5721   -0.5990    0.2089
```

```
Kbar=[gamma0-a0,gamma1-a1,gamma2-a2,gamma3-a3]
```


Come ultimo passo, determiniamo i coefficienti della legge di controllo in retroazione sullo stato $x(k)$ post-moltiplicando il vettore \bar{K} per la matrice T^{-1} , essendo T la matrice di passaggio del sistema dalla forma originaria alla forma compagna controllabile

$$K = \bar{K}T^{-1}$$

La matrice T si calcola mediante la formula

$$T = M_c \Gamma \quad \Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.0016 & 6.0140 & -4.0089 & 1 \\ 6.0140 & -4.0089 & 1 & 0 \\ -4.0089 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.0004 & -0.0004 & -0.0004 & 0.0004 \\ 0.0363 & 0.1093 & -0.1093 & 0.0363 \\ 0.0009 & -0.0009 & -0.0009 & 0.0009 \\ -0.0909 & 0.2728 & -0.2728 & 0.0909 \end{bmatrix}$$

```

a3=PcarAd(2);
a2=PcarAd(3);
a1=PcarAd(4);
a0=PcarAd(5);

pdes=[0.95 0.95 0.95 0.95];
Pcardes=poly(pdes)

gamma3=Pcardes(2);
gamma2=Pcardes(3);
gamma1=Pcardes(4);
gamma0=Pcardes(5);

Kbar=[gamma0-a0,gamma1-a1,gamma2-a2,gamma3-a3]

Gamma=[a1 a2 a3 1;
        a2 a3 1 0;
        a3 1 0 0;
        1 0 0 0];

T=Mc*Gamma

%calcolo guadagni del controllo state-feedback
K=Kbar*inv(T)

%verifica autovalori
Autov_ciclochiuso=eig(Ad-Bd*K)

```



```

T =

    0.0004    -0.0004    -0.0004    0.0004
   -0.0363     0.1093    -0.1093     0.0363
    0.0009    -0.0009    -0.0009     0.0009
   -0.0909     0.2728    -0.2728     0.0909

K =

   -0.8776   -1.4778   15.2048    2.7384

Autov_ciclochiuso =

    0.9499 + 0.0001i
    0.9499 - 0.0001i
    0.9501 + 0.0001i
    0.9501 - 0.0001i

```

Il vettore K contenente i guadagni della legge di controllo è pari a:

$$K = \bar{K}T^{-1} = [-0.8776 \quad -1.4778 \quad 15.2048 \quad 2.7384]$$

Utilizziamo pertanto la seguente espressione per la legge di controllo (la forza applicata al carrello) in retroazione sulle 4 variabili di stato

$$\begin{aligned} \delta u(k) &= F(k) = -K\delta x(k) + \beta r(k) \\ &= -k_1 \delta x_1(k) - k_2 \delta x_2(k) - k_3 \delta x_3(k) - k_4 \delta x_4(k) + \beta r(k) \\ &= 0.8776 \delta x_1(k) + 1.4778 \delta x_2(k) - 15.2048 \delta x_3(k) - 2.7384 \delta x_4(k) + \beta r(k) \end{aligned}$$

La dinamica del sistema a ciclo chiuso è:

$$\begin{aligned} \delta x(k+1) &= (A_d - B_d K) \delta x(k) + B_d \beta r(k) \\ \delta y(k) &= C \delta x(k) \end{aligned}$$

Prima di verificare mediante simulazione il comportamento del sistema retroazionato, **valutiamo quello che sarà il comportamento delle variabili di uscita in risposta ad un set-point $r(k)$ costante.**

Si noti che rispetto alla legge di controllo proposta a lezione abbiamo inserito un coefficiente moltiplicativo costante β , che determineremo per ottenere una relazione soddisfacente fra il set-point ed il valore di regime delle uscite.

Determiniamo le funzioni di trasferimento fra il set-point $r(k)$ e le due uscite del sistema

$$\delta y(k) = \begin{bmatrix} \delta x_1(k) \\ \delta x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ \theta(k) - \pi \end{bmatrix}$$

che sono rispettivamente la posizione $y(k)$ del carrello e la differenza fra l'angolo $\theta(k)$ ed il valore di equilibrio π

Dato il sistema a ciclo chiuso (con $\beta = 1$)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta x(k+1) = (A_d - B_d K) \delta x(k) + B_d r(k)$$

$$\delta y(k) = C \delta x(k)$$

$$\delta y(k) = \begin{bmatrix} \delta x_1(k) \\ \delta x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ \theta(k) - \pi \end{bmatrix}$$

le **funzioni di trasferimento fra l'ingresso e le due uscite** sono determinabili mediante la formula seguente

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} G_r^y(z) \\ G_r^{\delta x_3}(z) \end{bmatrix} = C(zI - (A_d - B_d K))^{-1} B_d$$

```
[num den]=ss2tf(Ad-Bd*K,Bd,C,D);
Gry=tf(num(1,:),den,Tc)
Grdx3=tf(num(2,:),den,Tc)
```

```
Gry =
```

$$\frac{0.0003633 z^3 - 0.0003673 z^2 - 0.000366 z + 0.0003628}{z^4 - 3.8 z^3 + 5.415 z^2 - 3.429 z + 0.8145}$$

```
Sample time: 0.02 seconds
```

```
Discrete-time transfer function.
```

```
Grdx3 =
```

$$\frac{0.0009089 z^3 - 0.00091 z^2 - 0.0009067 z + 0.0009078}{z^4 - 3.8 z^3 + 5.415 z^2 - 3.429 z + 0.8145}$$

```
Sample time: 0.02 seconds
```

```
Discrete-time transfer function.
```

Come atteso, **entrambe le FdT hanno il medesimo polinomio caratteristico.**

Analizziamo più nel dettaglio la struttura delle due FdT. Calcoliamone in particolare gli zeri onde verificare che non vi siano cancellazioni.

```
zeri_Gry=roots(num(1,:))
```



```
zeri_Gry =
```

```
-0.9988
```

```
1.1041
```

```
0.9057
```

$$G_r^y(z) = \frac{0.0003633(z + 0.9989)(z - 1.1041)(z - 0.9057)}{(z - 0.95)^4}$$

```
zeri_Grdx3=roots(num(2,:))
```



```
zeri_Grdx3 =
```

```
-0.9988 + 0.0000i
```

```
1.0000 + 0.0000i
```

```
1.0000 - 0.0000i
```

$$G_r^{\delta x_3}(z) = \frac{0.0009089(z + 0.9988)(z - 1)^2}{(z - 0.95)^4}$$

Guadagno pari a zero

Nelle due FdT non intervengono cancellazioni.

Poiché il guadagno $G_r^{\delta x_3}(1)$ della funzione di trasferimento fra l'ingresso e la variabile $\delta x_3(k)$ (differenza fra l'angolo $\theta(k)$ ed il valore di equilibrio π) è pari a zero, l'applicazione di un valore costante $r(k) = R$ non sortisce a regime effetti sul comportamento della $\delta x_3(k)$

La funzione di trasferimento $G_r^y(z)$ associata alla posizione $y(k)$ del carrello ha invece guadagno non nullo $\mu = G_r^y(1)$. Quindi, il valore di regime della posizione del carrello in risposta ad un set point $r(k) = R$ sarà pari a μR .

Valutiamo il valore di $\mu = G_r^y(1)$ mediante al funziona Matlab `dcgain`

```
mu = dcgain(Gry)
```

```
mu =
```

```
-1.1395
```


Per fare in modo che ad un valore costante $r(k) = R$ corrisponda a regime il medesimo valore $y(k) = R$ della posizione del carrello, è sufficiente scegliere il coefficiente moltiplicativo del controllo β pari al reciproco del guadagno μ

$$\beta = \frac{1}{\mu} = -0.8776$$

Si noti come questa soluzione sia **non robusta**, nel senso che variazioni nei parametri del modello causerebbero un errore a regime fra il valore del set point ed il valore dell'uscita. Il valore di μ può essere più convenientemente stimato eseguendo un test sperimentale di funzionamento del processo utilizzando un valore costante per $r(k)$ e valutando sperimentalmente il valore di regime della posizione del carrello

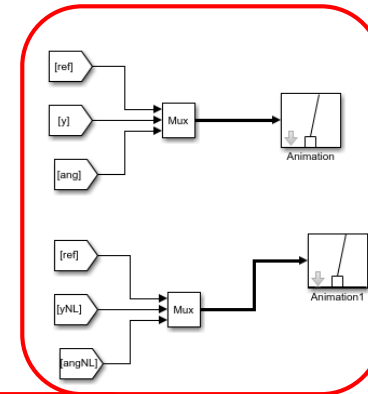
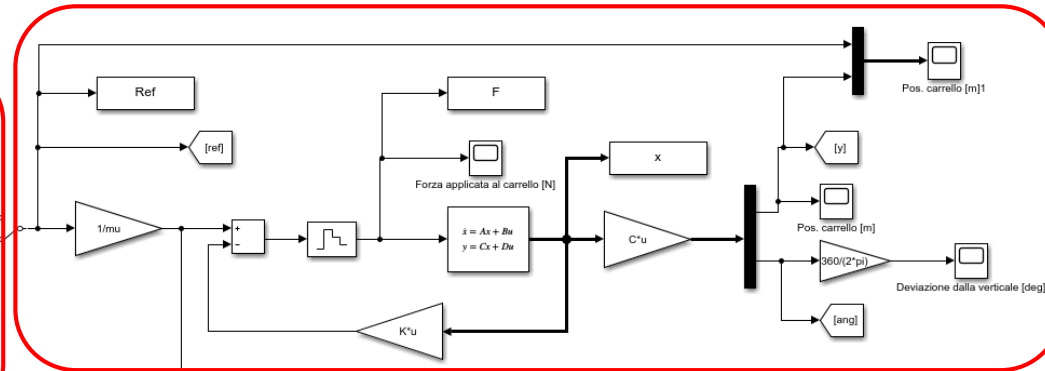
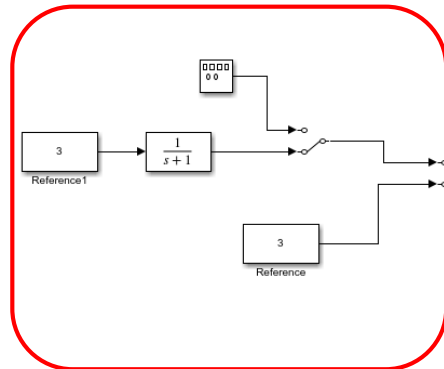
La legge di controllo in retroazione sullo stato misurato assume pertanto la seguente forma finale

$$F(k) = 0.8776\delta y(k) + 1.4778\dot{y}(k) - 15.2048(\theta(k) - \pi) - 2.7384\dot{\theta}(t) - 0.8776r(k)$$

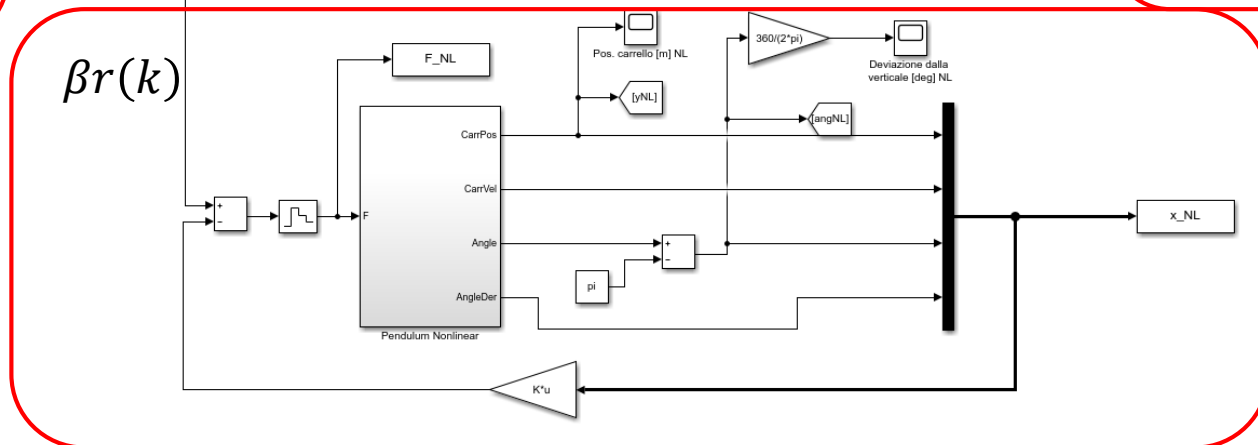
Analizziamo mediante Simulink le prestazioni del sistema di controllo

Processo linearizzato + controllore

Animazioni



Generazione
set-point



Processo non lineare + controllore

Il modello Simulink mette a confronto le prestazioni del sistema di controllo in retroazione sullo stato (misurato) applicato al sistema linearizzato oppure al sistema non lineare originale.

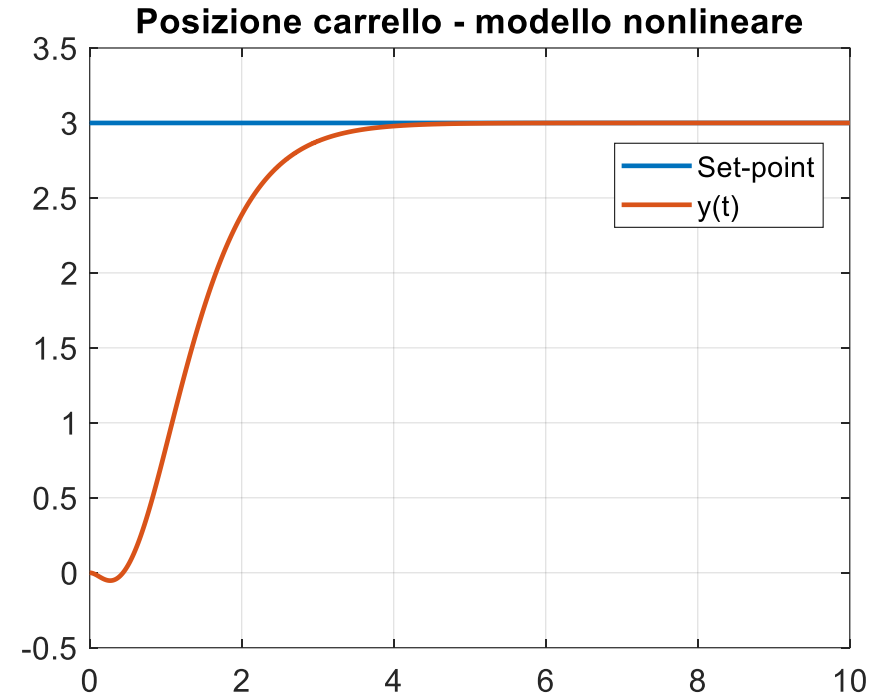
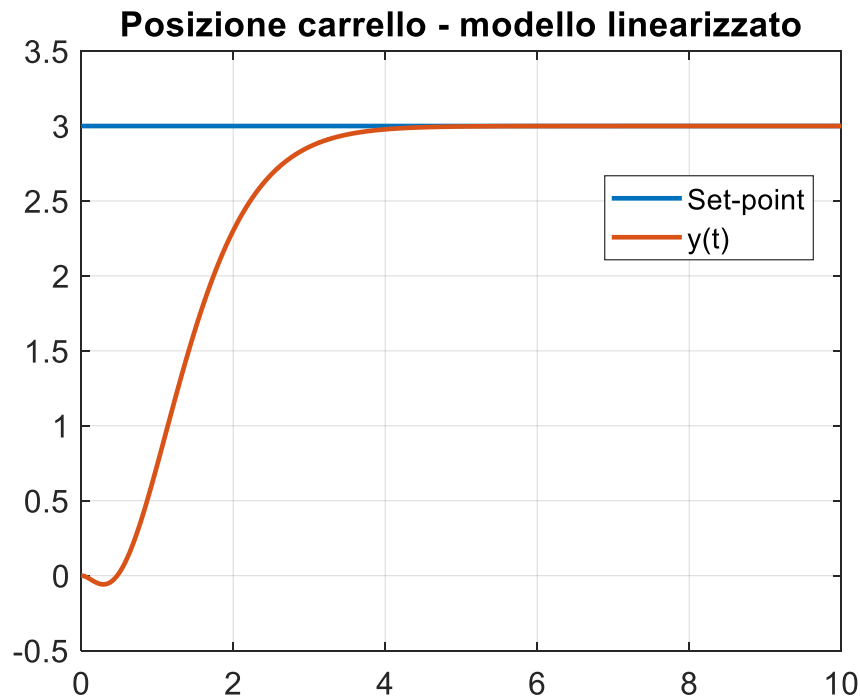
Sono inoltre presenti 2 blocchi che generano animazioni grafiche in tempo reale che mostrano visivamente l'evoluzione del processo linearizzato e quella del processo non lineare.

Nel primo test applichiamo un **set point costante**

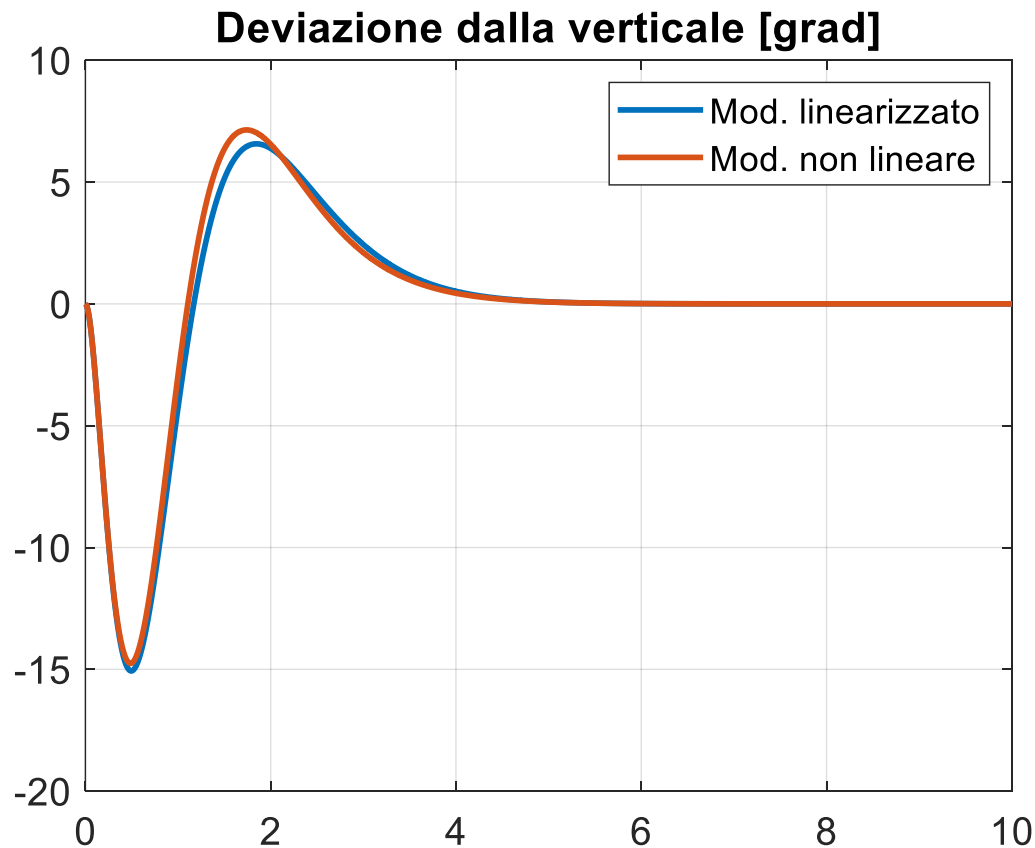
$$r(k) = 3m$$

che equivale a richiedere una traslazione del carrello dalla posizione iniziale $y(0)$ verso un valore di regime pari a $3m$

Per quanto concerne la posizione del carrello, il sistema linearizzato ed il sistema non lineare rispondono in maniera pressoché indistinguibile.

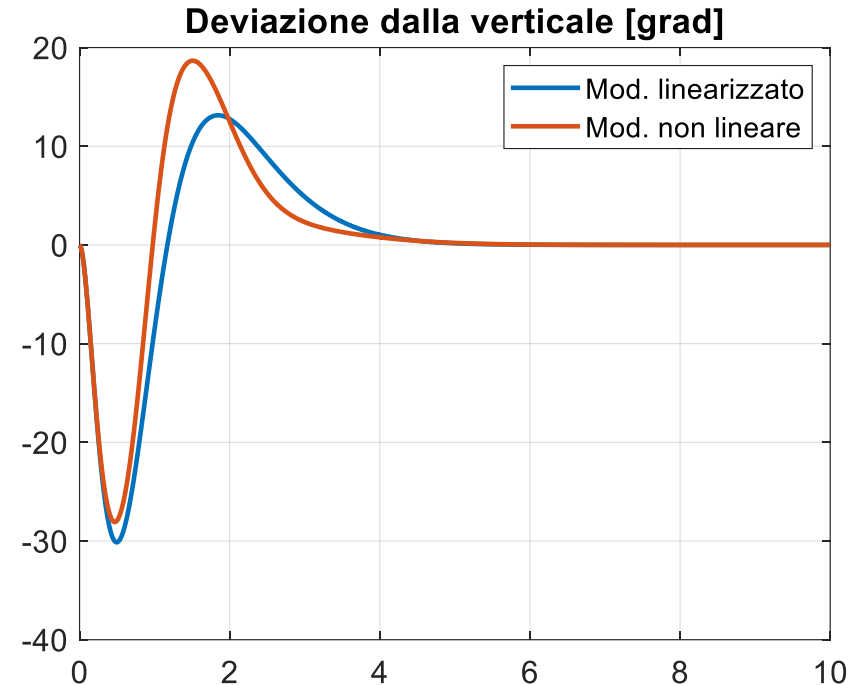
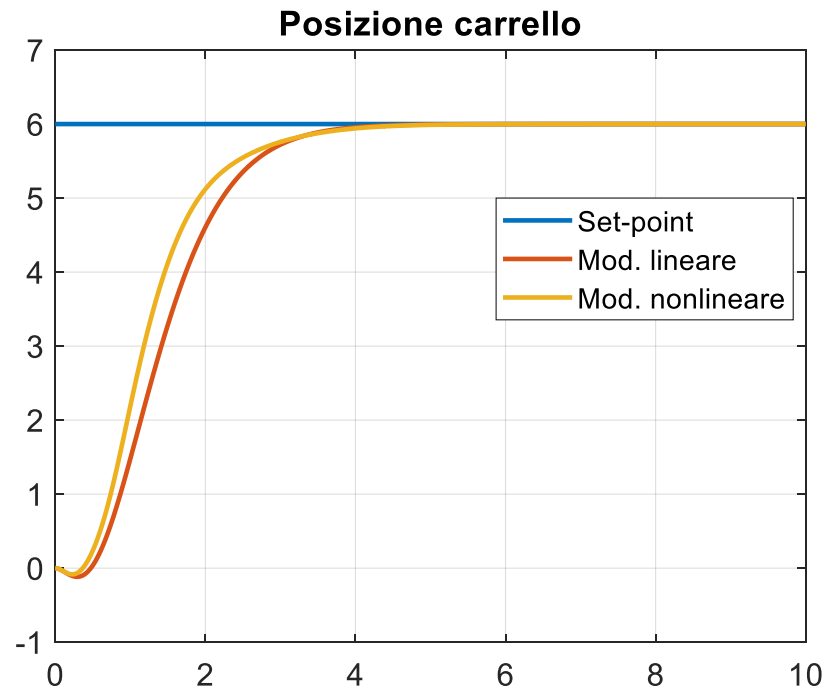


La deviazione fra l'angolo del pendolo e la verticale mostra una lieve discrepanza fra il modello linearizzato e non lineare. La massima deviazione transitoria si mantiene comunque in entrambi i casi sotto i 15 gradi.



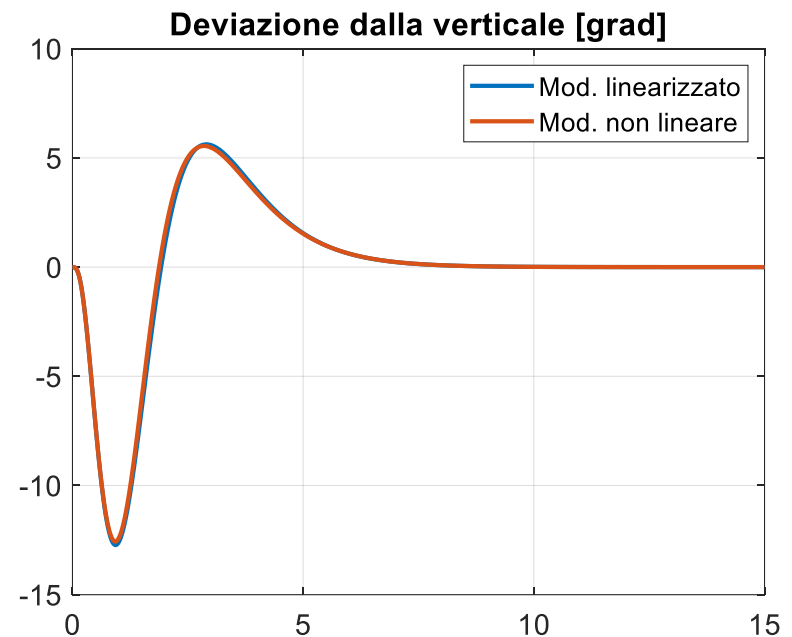
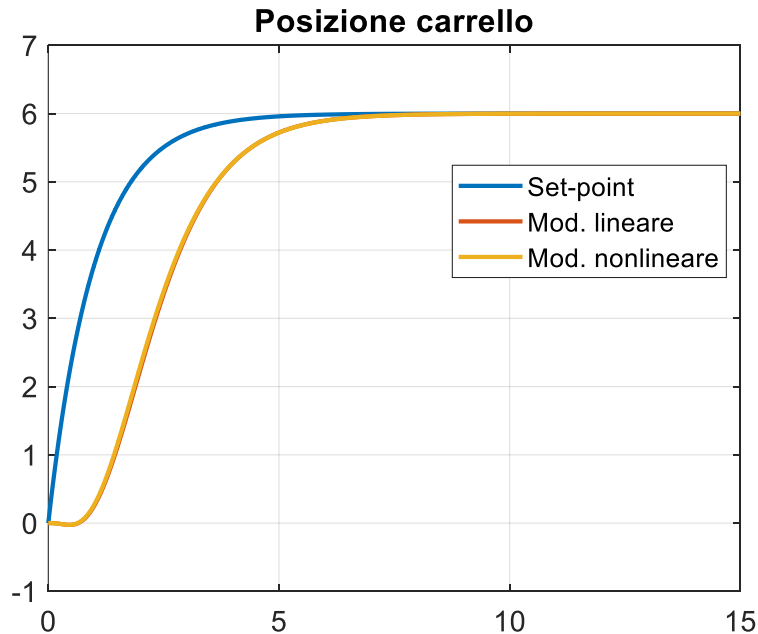
Nel secondo test applichiamo un set point costante di ampiezza maggiore

$$r(k) = 6m$$

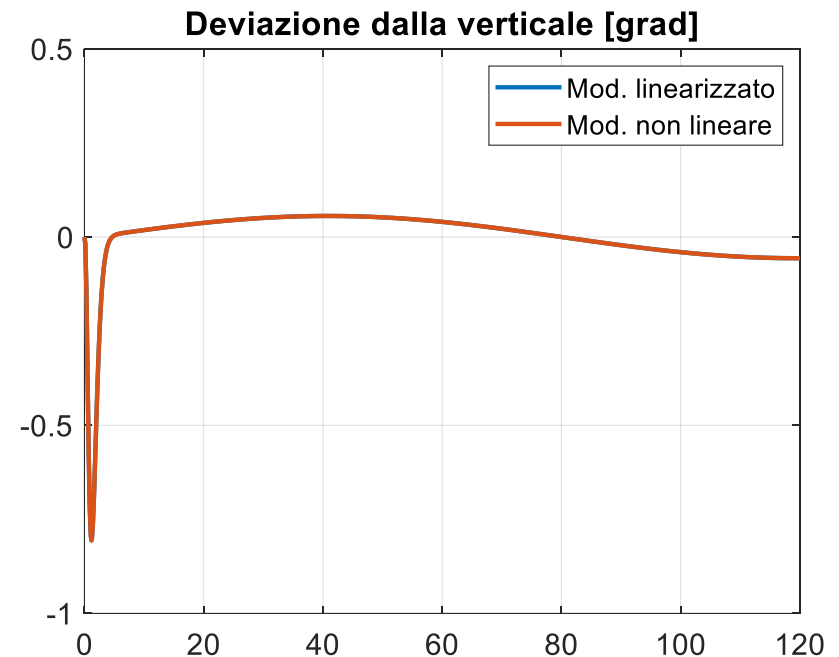
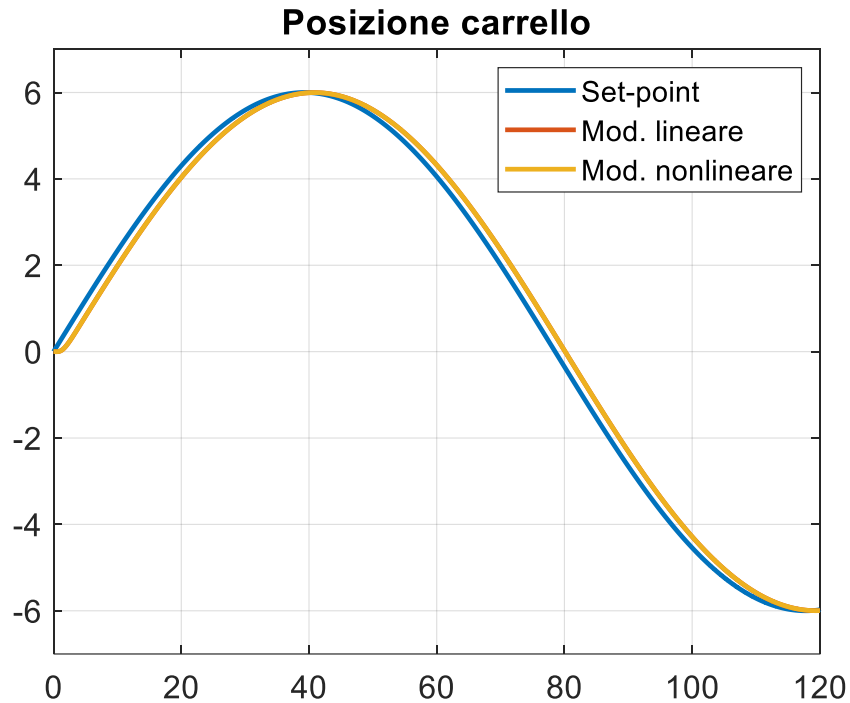


La deviazione massima dalla verticale è significativamente maggiore, per effetto del fatto che viene impressa al carrello una accelerazione maggiore. In conseguenza di ciò, le risposte del modello linearizzato e non lineare tendono a scostarsi l'una dall'altra in modo più marcato rispetto al test precedente

Nel terzo test applichiamo un set point che parte da zero ed aumenta progressivamente e gradualmente verso il valore desiderato di regime pari a 6 metri. Usando tale set-point si ottiene un transitorio più lento, per effetto della minore accelerazione impressa al carrello, ma l'accuratezza nel mantenere l'asta in posizione verticale aumenta significativamente



Nel quarto test applichiamo un set point sinusoidale. Si osserva un soddisfacente inseguimento del set point ed un ridottissimo scostamento dell'angolo dell'asta dalla verticale, inferiore ad un grado.



Ora progettiamo un **osservatore di stato** in grado di ricostruire lo stato del sistema impiegando, come misure, la posizione del carrello e l'angolo dell'asta.

A lezione abbiamo sviluppato la trattazione per processi SISO, aventi cioè ingresso ed uscita scalari, mentre nel presente caso le uscite sono due.

La struttura dell'osservatore di Luenberger è analoga a quella del caso SISO

$$\delta \hat{x}(k+1) = A_d \delta \hat{x}(k) + B_d u(k) + L_0 (\delta y(k) - C \delta \hat{x}(k))$$

e anche la dinamica dell'errore di osservazione assume la medesima forma:

$$e(k+1) = [A_d - L_0 C] e(k) \quad e(k) = \delta x(k) - \delta \hat{x}(k)$$

Gli autovalori della matrice $[A - L_0 C]$ dovranno pertanto essere collocati sicuramente all'interno del disco unitario, ed in aggiunta sufficientemente prossimi all'origine.

Il problema è risolubile se la matrice di osservabilità (che non sarà più quadrata, come nel caso SISO, ma diventa **rettangolare**) ha rango pieno.

```
%VERIFICA OSSERVABILITA
```

```
Mo = [Cd; Cd*Ad; Cd*Ad^2]
```

```
rankMo = rank(Mo)
```



```
Mo =
```

```
1.0000    0    0    0
    0    0    1.0000    0
1.0000    0.0200    0.0003    0.0000
    0   -0.0000    1.0032    0.0200
1.0000    0.0399    0.0011    0.0000
    0   -0.0002    1.0128    0.0402
```

```
rankMo =
```

```
4
```

La procedura «sistematica» per la determinazione della matrice L_0 che colloca gli autovalori della matrice $[A - L_0C]$ in posizioni desiderate è però alquanto più laboriosa, e per semplicità utilizziamo una funzione Matlab preposta allo scopo, la funzione `place`

Scegliamo gli autovalori **cinque volte più «rapidi»** di quelli assegnati al sistema a ciclo chiuso (che erano $p^{des} = [0.95, 0.95, 0.95, 0.95]$)

Poiché la funzione `place` non è in grado di assegnare autovalori multipli, operiamo la scelta seguente per gli **autovalori desiderati della dinamica dell'errore di osservazione**

$$p_{oss}^{des} = [0.19, 0.18, 0.17, 0.16]$$

`% Progetto dell'osservatore con il comando Matlab "place"`

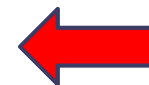
```
p_oss_des=[0.19 0.18 0.17 0.16];
```

```
Lo = place(Ad',Cd',p_oss_des)'
```

`%verifica autovalori dinamica errore`

```
Autov_errore=eig(Ad-Lo*Cd)
```

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1.6458 & -0.0101 \\ 33.7747 & -0.3924 \\ -0.0139 & 1.6574 \\ -0.6852 & 34.6158 \end{bmatrix}$$

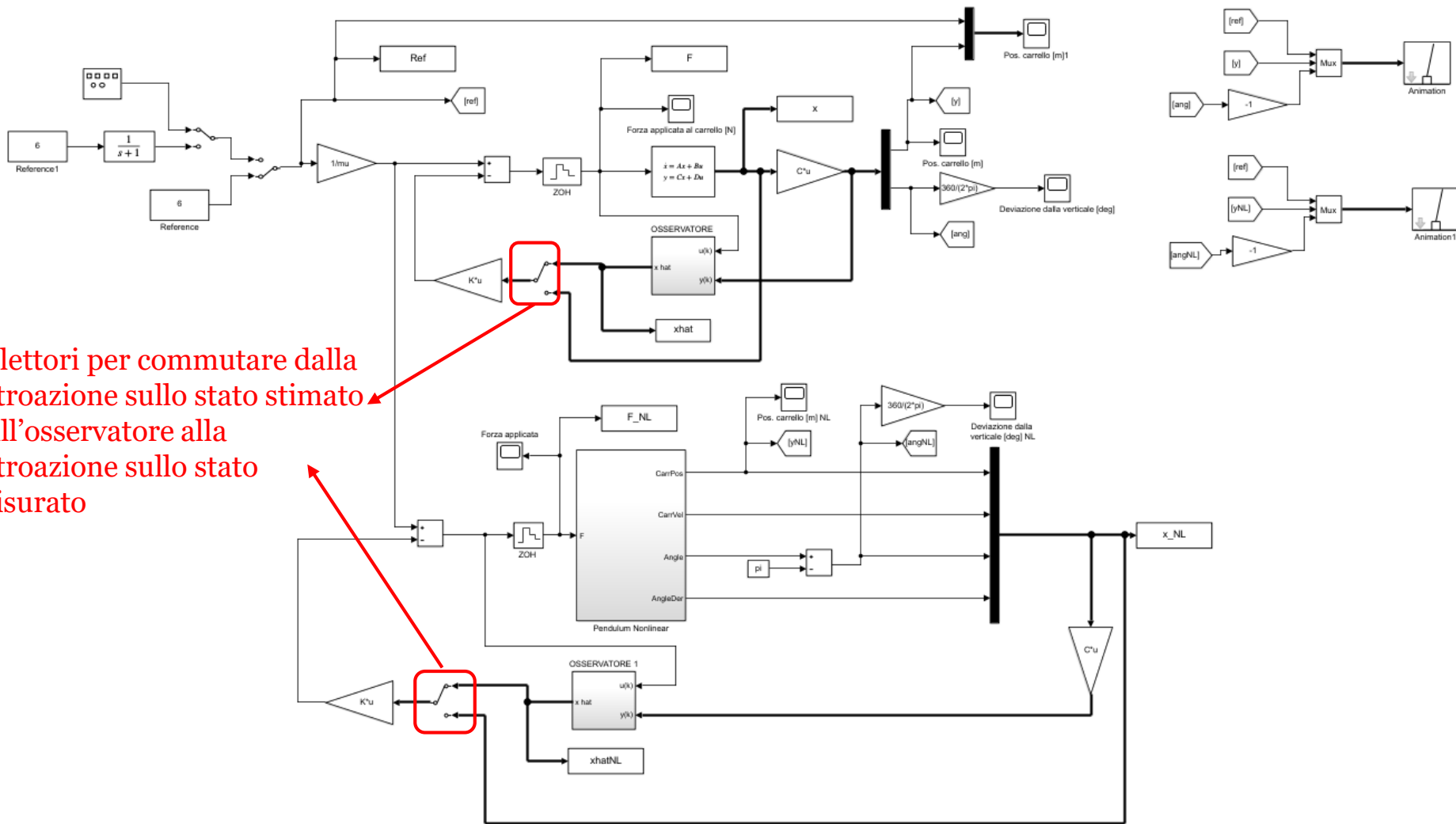


Lo =

```
1.6458    -0.0101
33.7747   -0.3924
-0.0139    1.6574
-0.6852   34.6158
```

Autov_errore =

```
0.1600
0.1700
0.1900
0.1800
```



Il modello ha la medesima struttura di quello impiegato per i test con retroazione sullo stato, ma in parallelo al modello linearizzato ed al modello non lineare è ora posto **l'osservatore di Luenberger**

$y(k)$: posizione del carrello misurata

$$\delta \hat{x}(k+1) = A_d \delta \hat{x}(k) + B_d u(k) + L_0 (\delta y(k) - C \delta \hat{x}(k))$$

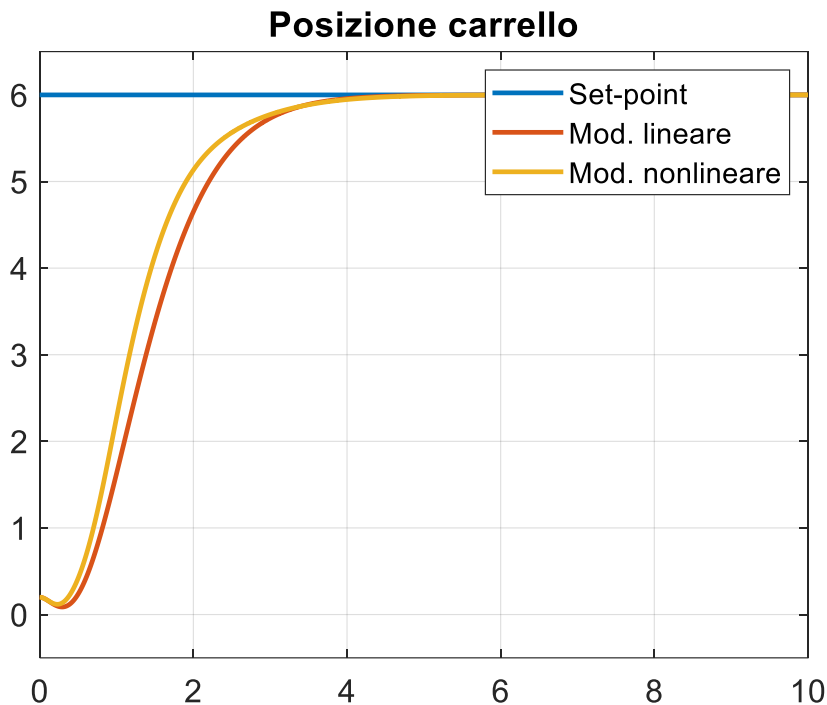
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.02 & 0.0003 & 0 \\ 0 & 0.9967 & 0.0273 & 0.0003 \\ 0 & -4.6 \cdot 10^{-5} & 1.0032 & 0.02 \\ 0 & -0.0046 & 0.3193 & 1.0032 \end{bmatrix} \delta \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.0003 \\ 0.0325 \\ 0.0005 \\ 0.0465 \end{bmatrix} F(k) + \begin{bmatrix} 1.6458 & -0.0101 \\ 33.7747 & -0.3924 \\ -0.0139 & 1.6574 \\ -0.6852 & 34.6158 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) - \delta \hat{x}_1(k) \\ \theta(k) - \pi - \delta \hat{x}_3(k) \end{bmatrix}$$

$F(k)$: forza applicata al carrello

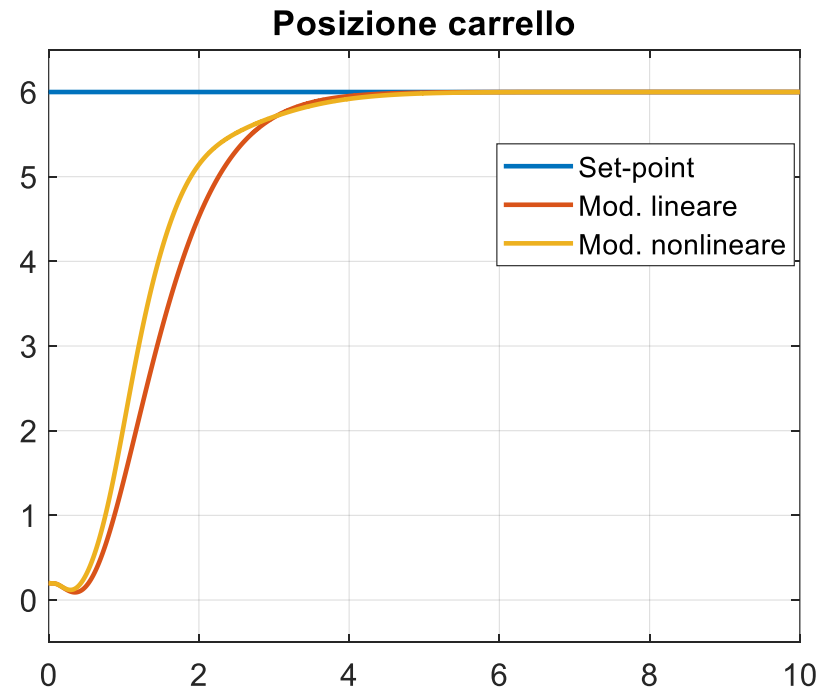
$\theta(k)$: angolo dell'asta misurato

Applichiamo un set point costante di ampiezza $r(k) = 6m$.
 Introduciamo anche un **mismatch fra le condizioni iniziali del processo e quelle dell'osservatore**. La condizione iniziale della posizione del carrello è posta pari a 0.2 nel processo, ed a zero nell'osservatore.

Retroazione sullo stato misurato



Retroazione sullo stato osservato

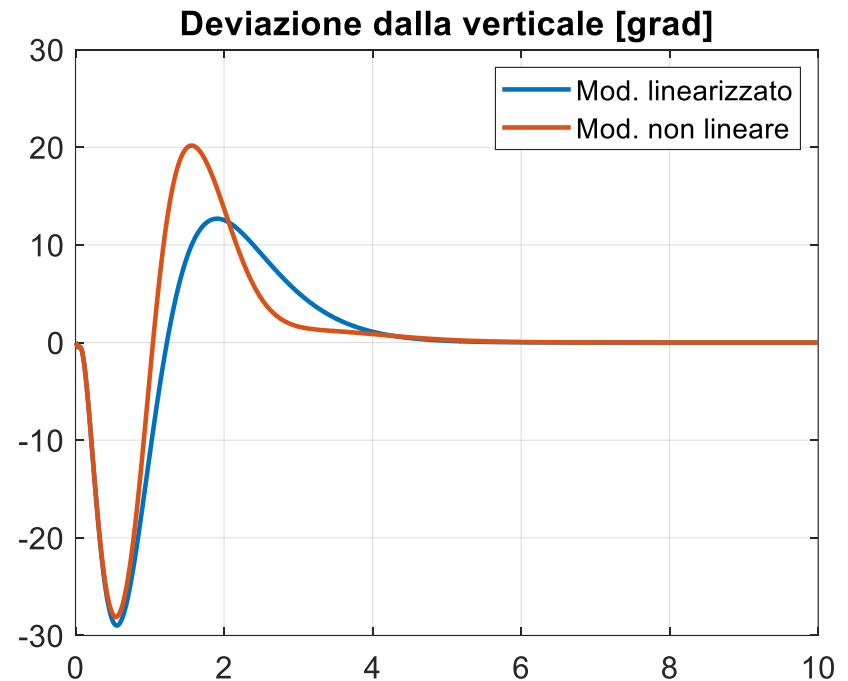
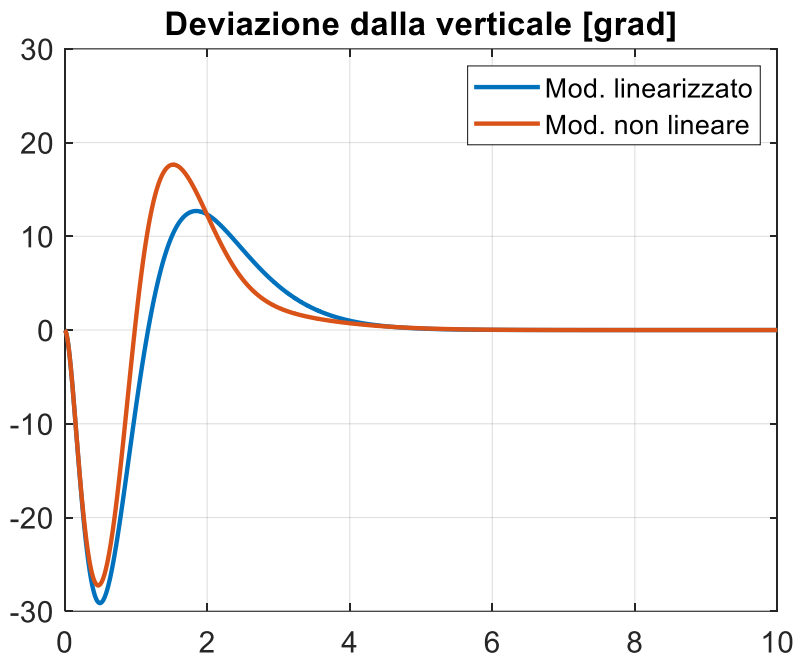


Le prestazioni del sistema di controllo observer-based sono indistinguibili da quelle del sistema di controllo con retroazione dello stato misurato

Ora confrontiamo le evoluzioni temporali dell'angolo dell'asta rispetto alla direzione verticale.

Retroazione sullo stato misurato

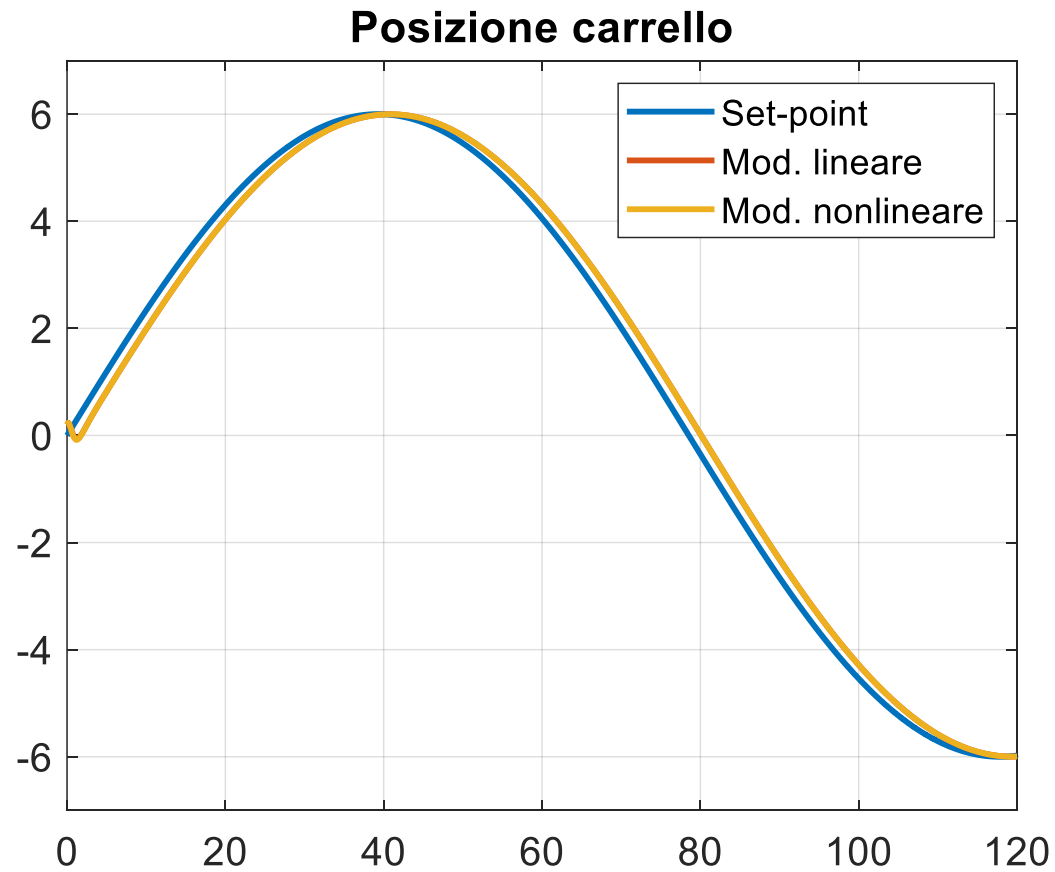
Retroazione sullo stato osservato



Le prestazioni del sistema di controllo observer-based sono indistinguibili da quelle del sistema di controllo con retroazione dello stato misurato

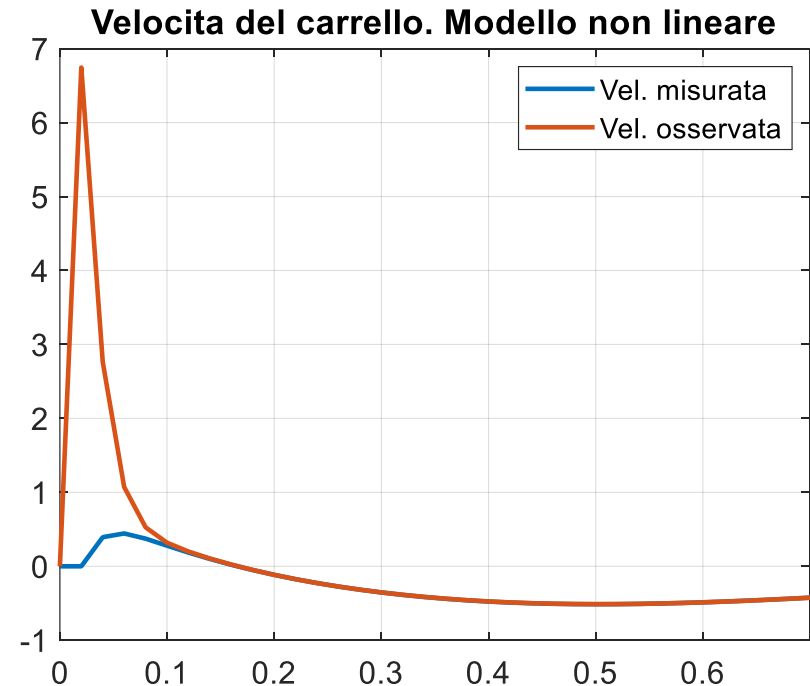
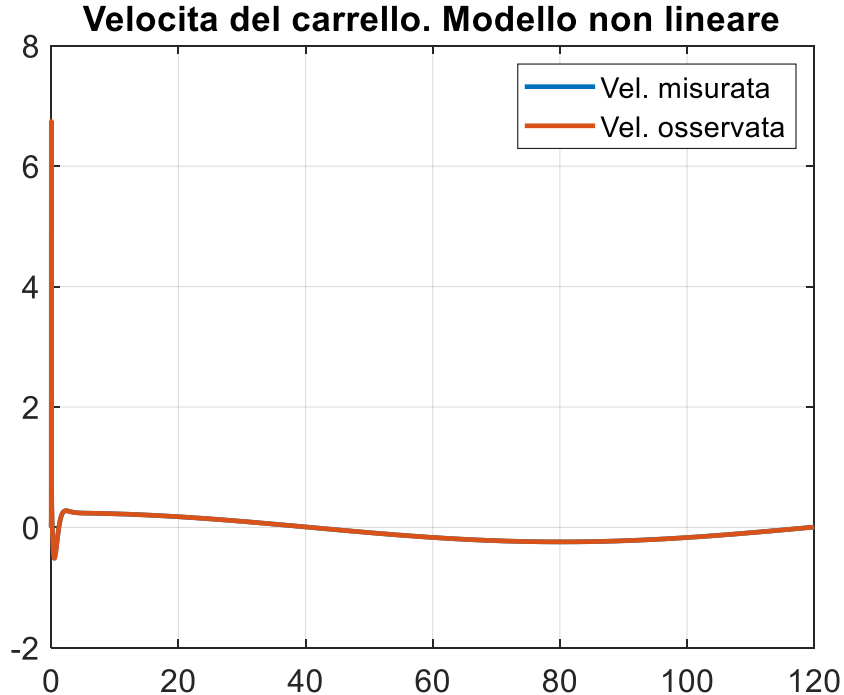
Applichiamo un set point sinusoidale.

Retroazione sullo stato osservato



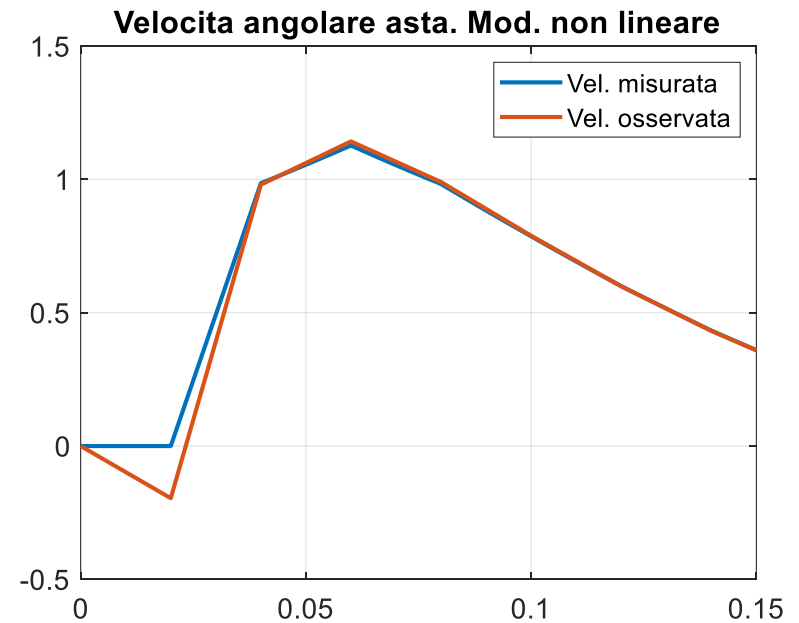
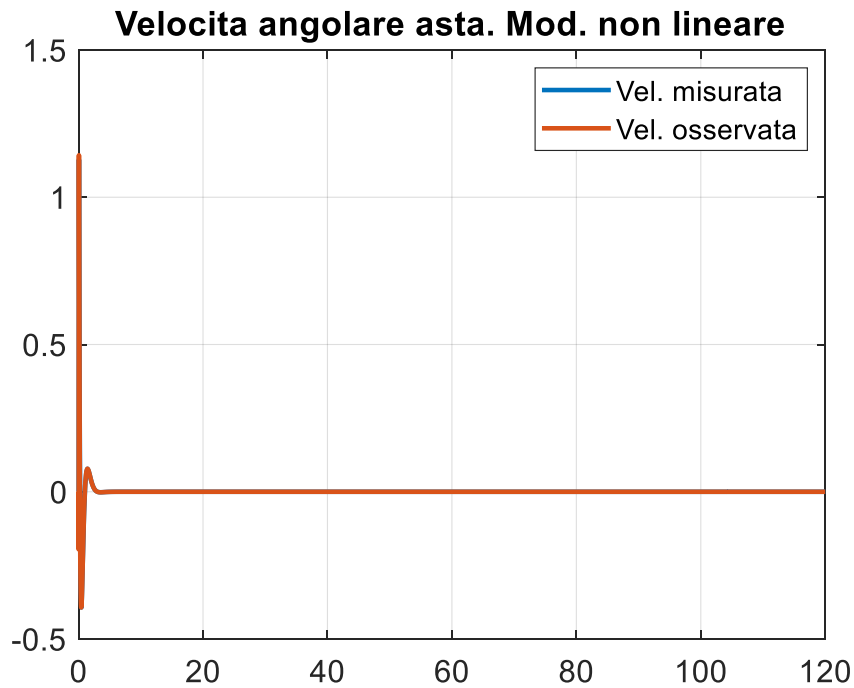
Confrontiamo la corrispondenza fra le variabili di processo e le variabili stimate dall'osservatore. Limitiamo tale analisi alle variabili non misurate del modello non lineare, iniziando dalla **velocità del carrello**.

Zoom sul transitorio



Ora analizziamo la quarta variabile di stato, la **velocità angolare dell'asta**.

Zoom sul transitorio



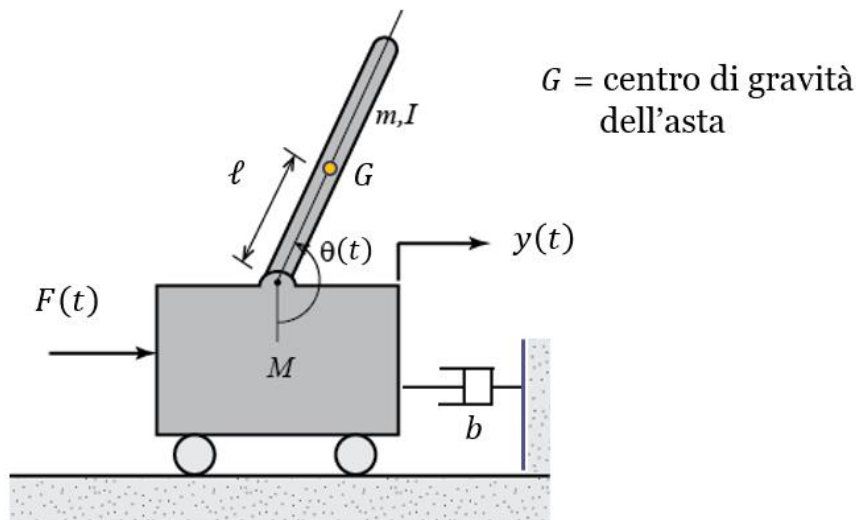
Approfondimento

Derivazione del modello matematico secondo il metodo di Eulero-Lagrange

L'approccio di Eulero-Lagrange è un metodo sistematico per la derivazione del modello matematico di sistemi meccanici complessi che coinvolgono l'interazione di più corpi rigidi (sistemi multi-body)

Si parte con il definire il vettore q delle «coordinate generalizzate» del sistema meccanico, un set di variabili che ne individua univocamente la posizione.

Per il sistema in esame, il vettore q contiene la posizione $y(t)$ del carrello e l'angolo $\theta(t)$ dell'asta rispetto alla direzione verticale



$$q = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

Si deve quindi determinare l'espressione di una funzione scalare \mathcal{L} , denominata **Lagrangiana**, pari alla differenza fra l'energia cinetica totale T e l'energia potenziale totale V . La lagrangiana risulta pertanto dipendere dal vettore q delle coordinate generalizzate e dalla sua derivata temporale \dot{q}

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

Fatto ciò, le equazioni dinamiche del sistema si determinano nella forma seguente

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_1} = Q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_2} = Q_2$$

dove Q_1 e Q_2 sono le «Forze generalizzate» associate alle due coordinate generalizzate.

L'energia cinetica $T(q, \dot{q})$ è la somma della componente associata al carrello e della componente associata all'asta.

$$T = T_{\text{carrello}} + T_{\text{asta}}$$

$$T_{\text{carrello}} = \frac{1}{2} M \dot{q}_1^2$$

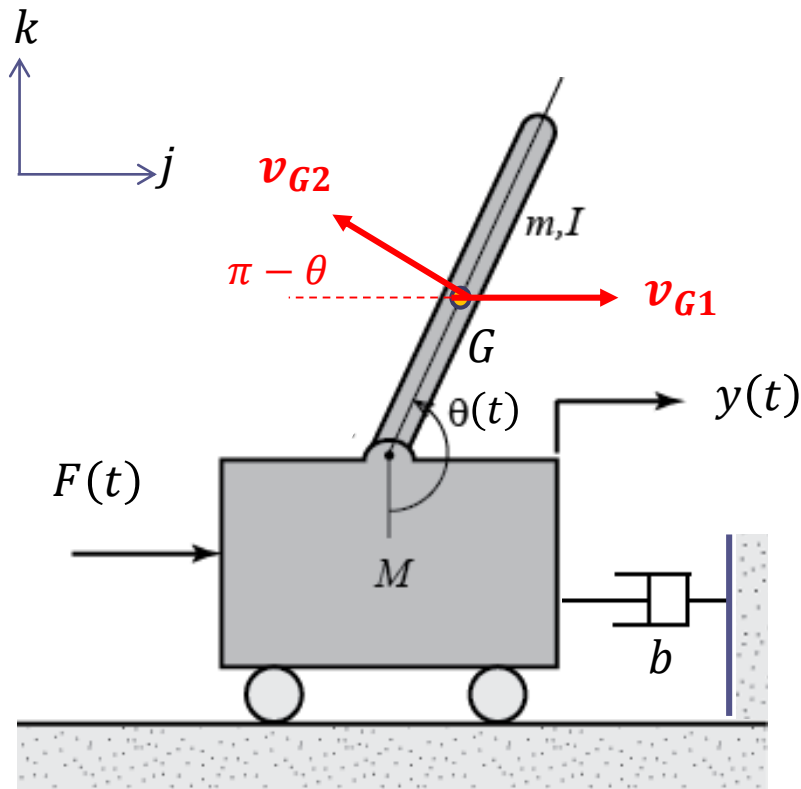
L'energia cinetica dell'asta ha una componente traslatoria ed una componente rotatoria

$$T_{\text{asta}} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{q}_2^2$$

v_G = modulo della velocità del centro di massa

I_G = momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa;

$$I_G = I = \frac{1}{12} m (2\ell)^2 = \frac{1}{3} m \ell^2 \quad \rightarrow \quad T_{\text{asta}} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{q}_2^2$$



A sua volta, il vettore velocità del centro di gravità dell'asta ha due componenti.

La prima componente v_{G1} ha modulo pari ad $\dot{y}(t)$ ed è allineata con l'asse y

La seconda componente v_{G2} ha modulo pari ad $l\dot{\theta}(t)$ ed è allineata con un asse la cui orientazione varia con l'angolo dell'asta, come mostrato in figura

Chiamando j e k i versori dell'asse orizzontale e di quello verticale (v. Figura) si avrà

$$v_{G1} = \dot{y}(t) j$$

$$v_{G2} = -l\dot{\theta}(t) \cos(\pi - \theta) j + l\dot{\theta}(t) \sin(\pi - \theta) k$$

$$= l\dot{\theta}(t) \cos(\theta) j + l\dot{\theta}(t) \sin(\theta) k$$

Operando la somma vettoriale fra le due componenti

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_{G1} + \mathbf{v}_{G2} = [\dot{y}(t) + \ell\dot{\theta}(t) \cos(\theta)]\mathbf{j} + \ell\dot{\theta}(t) \sin(\theta) \mathbf{k}$$

e valutandone il modulo al quadrato si ottiene

$$\begin{aligned} v_G^2 &= [\dot{y}(t) + \ell\dot{\theta}(t) \cos(\theta)]^2 + [\ell\dot{\theta}(t) \sin(\theta)]^2 = \dot{y}^2(t) + \ell^2 \dot{\theta}^2(t) + 2\ell\dot{y}(t)\dot{\theta}(t) \cos(\theta) \\ &= \dot{q}_1^2 + \ell^2 \dot{q}_2^2 + 2\ell \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) \end{aligned}$$

Sostituendo, ricaviamo l'energia cinetica dell'asta

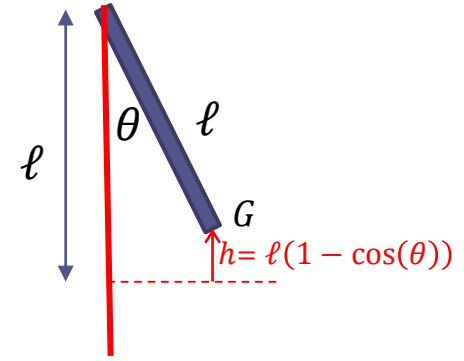
$$T_{asta} = \frac{1}{2}m[\dot{q}_1^2 + \ell^2 \dot{q}_2^2 + 2\ell \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2)] + \frac{1}{6}m\ell^2 \dot{q}_2^2$$

e di conseguenza quella complessiva del sistema

$$\begin{aligned} T &= T_{carrello} + T_{asta} = \frac{1}{2}M\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m[\dot{q}_1^2 + \ell^2 \dot{q}_2^2 + 2\ell \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2)] + \frac{1}{6}m\ell^2 \dot{q}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(M + m)\dot{q}_1^2 + \frac{2}{3}m\ell^2 \dot{q}_2^2 + m\ell \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) \end{aligned}$$

L'energia potenziale (gravitazionale) vale invece

$$V = mgh = mg\ell(1 - \cos(\theta)) = mg\ell(1 - \cos(q_2))$$



Esplicitiamo infine la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2}(M + m)\dot{q}_1^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{q}_2^2 + m\ell\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2) - mg\ell(1 - \cos(q_2))$$

e ricordiamo l'espressione delle due «equazioni di Eulero-Lagrange» sulla base delle quali si ricava il modello dinamico del sistema

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_1} = Q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_2} = Q_2$$

Nella forze generalizzate Q_1 e Q_2 debbono essere incluse le **forze non conservative** agenti sui corpi del sistema. La forza peso è una forza conservativa, così come la forza elastica. La forza di attrito viscoso, e ovviamente ogni qualunque forza/coppia esterna applicata ad un sistema di corpi rigidi sono invece non conservative

Le forze non conservative agenti sul carrello sono la forza esterna applicata e la forza di attrito

$$Q_1 = F(t) - b\dot{q}_1(t)$$

Sull'asta non agiscono invece forze non conservative

$$Q_2 = 0$$

Il sistema di equazioni di E-L è pertanto

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_1} = F(t) - b\dot{q}_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_2} = 0$$

Sviluppiamo i vari termini

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(M + m)\dot{q}_1^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{q}_2^2 + m\ell\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2) - mg\ell(1 - \cos(q_2))$$

Attraverso dei banali conti si ottiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} = (M + m)\dot{q}_1 + m\ell\dot{q}_2 \cos(q_2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{q}_2 + m\ell\dot{q}_1 \cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right\} = (M + m)\ddot{q}_1 + m\ell\ddot{q}_2 \cos(q_2) - m\ell\dot{q}_2^2 \sin(q_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right\} = \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{q}_2 + m\ell\ddot{q}_1 \cos(q_2) - m\ell\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(q_2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_2} = -m\ell\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(q_2) - mg\ell \sin(q_2)$$

Sostituendo i vari termini, otteniamo il sistema di equazioni differenziali che descrive la dinamica del sistema in esame

$$(M + m) \ddot{q}_1 + m\ell \ddot{q}_2 \cos(q_2) - m\ell \dot{q}_2^2 \sin(q_2) = F(t) - b \dot{q}_1$$

$$\frac{4}{3} m\ell^2 \ddot{q}_2 + m\ell \ddot{q}_1 \cos(q_2) - m\ell \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) + m\ell \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) + mg\ell \sin(q_2) = 0$$

$$(M + m) \ddot{q}_1 + m\ell \ddot{q}_2 \cos(q_2) - m\ell \dot{q}_2^2 \sin(q_2) + b \dot{q}_1 = F(t)$$

$$\frac{4}{3} m\ell^2 \ddot{q}_2 + m\ell \ddot{q}_1 \cos(q_2) + mg\ell \sin(q_2) = 0$$

Si può notare facilmente come le equazioni ricavate coincidano con il modello matematico fornito all'inizio

$$(M + m)\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + m\ell\ddot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) - m\ell\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t)) = F(t)$$

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta}(t) + mg\ell\sin(\theta(t)) + m\ell\ddot{y}(t)\cos(\theta(t)) = 0$$

nel momento in cui si operino le sostituzioni $q_1 = y$ ed $q_2 = \theta$ e si consideri, come precedentemente riportato, che $I = \frac{1}{3}m\ell^2$.