

# Controllo digitale

## Esercitazione 6

## Sintesi per discretizzazione

**Ing. Alessandro Pisano**  
`apisano@unica.it`

## Esercizio 1

Si consideri un processo a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{0.1}{s(s + 2)}$$

e soggetto ad una variabile disturbante  $d(t)$  che si sovrappone all'ingresso del processo. Progettare mediante **sintesi per discretizzazione** un sistema di controllo digitale tale da soddisfare le seguenti specifiche:

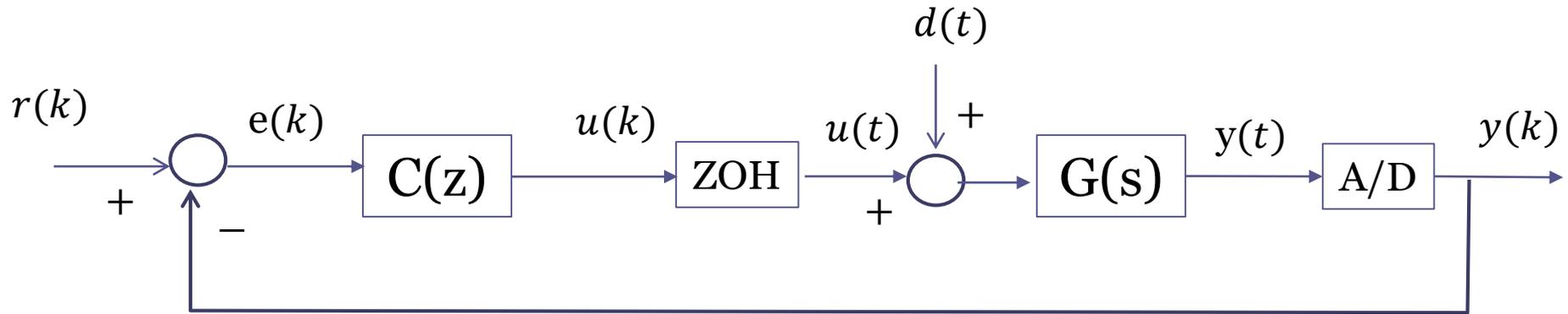
S1 In assenza di disturbo, l'errore a regime in risposta ad un set-point costante non ecceda il 2 % dell'ampiezza del set-point

S2 Un disturbo costante venga attenuato a regime in misura pari almeno al 98%

S3 Risposta al gradino a ciclo chiuso caratterizzata da una sovraelongazione percentuale non superiore al 17 %

S4 Risposta al gradino a ciclo chiuso caratterizzata da un tempo di assestamento al 2% non superiore a 2 secondi

Facciamo riferimento alla architettura standard a retroazione unitaria



Operiamo preliminarmente la scelta di un adeguato periodo di campionamento.

## Scelta del periodo di campionamento.

E' necessario preliminarmente individuare un adeguato valore per il periodo di campionamento.

Esistono vari criteri sulla base dei quali definire una soglia massima per il periodo di campionamento. Tali criteri si basano sul comportamento dinamico transitorio del sistema a ciclo chiuso, e quindi si applicano riferendosi alle specifiche sul comportamento transitorio.

Un primo criterio richiede che nell'arco del tempo di assestamento all'5% della risposta vengano acquisiti almeno 10 campioni dell'uscita  $\rightarrow T_c \leq \frac{T_{a5\%}}{10}$

Un secondo criterio prende come intervallo temporale di riferimento anziché il tempo di assestamento il periodo  $T_p$  della oscillazione smorzata della risposta e quindi procede come il primo criterio  $\rightarrow T_c \leq \frac{T_p}{10}$

Valuteremo, sulla base delle specifiche transitorie a ciclo chiuso, i valori di soglia per il periodo di campionamento corrispondenti ai due criteri soprariportati, e sceglieremo quello più restrittivo.

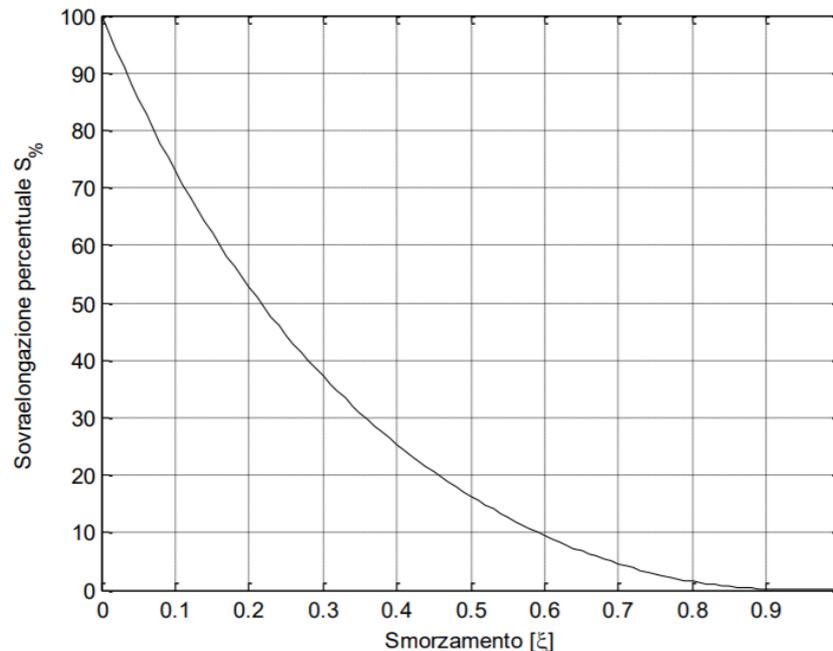
## Scelta del periodo di campionamento.

Valutiamo, sulla base delle specifiche S3 ed S4 sul transitorio, il tempo di assestamento al 5% ed il periodo della oscillazione smorzata del sistema a ciclo chiuso

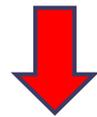
S3 Risposta al gradino a ciclo chiuso caratterizzata da una **sovraelongazione percentuale non superiore al 17%**

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

**Sovraelongazione  
percentuale vs.  
smorzamento**



$$S_{\%} \leq 17$$



$$\xi \geq 0.5$$

La specifica S3 fissa una soglia minima per lo smorzamento.

S4 Risposta al gradino a ciclo chiuso caratterizzata da un **tempo di assestamento al 2% non superiore a 2 secondi**

Affinché sia soddisfatta la specifica S3, si deve far riferimento alla seguente tabella, che riporta i tempi assestamento al 5%, 2% ed 1% di un sistema a tempo continuo avente due poli complessi coniugati.

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{3}{\xi\omega_n}$	$\frac{3.9}{\xi\omega_n}$	$\frac{4.6}{\xi\omega_n}$

Nella pratica si impiega più di frequente la seguente tabella approssimata

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{3}{\xi\omega_n}$	$\frac{4}{\xi\omega_n}$	$\frac{5}{\xi\omega_n}$

Utilizziamo la tabella approssimata

$$\frac{4}{\xi\omega_n} \leq 2s \quad \rightarrow \quad \xi\omega_n \geq 2$$

Scegliamo pertanto, come valori di riferimento per l'imposizione delle restrizioni sul periodo di campionamento, i valori

$$\xi = 0.5 \qquad \omega_n = 4 \text{ rad/s}$$

Determiniamo il tempo di assestamento al 5% ed il periodo  $T_p$  dell'oscillazione smorzata, ed i vincoli risultanti per la scelta del periodo di campionamento  $T_c$

$$T_{a5\%} = \frac{3}{\xi\omega_n} = 1.5s \quad \rightarrow \quad T_c \leq T_{cmin1} = \frac{T_{a5\%}}{10} = 0.15s$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{4\sqrt{1-0.5^2}} = 1.81s \quad \rightarrow \quad T_c \leq T_{cmin2} = \frac{T_p}{10} = 0.18s$$

Il vincolo maggiormente restrittivo per la scelta del periodo di campionamento  $T_c$  è quello risultante dal primo criterio.

Scegliamo, in modo da avere sufficiente margine:

$$T_c = 0.1s$$

Si presti attenzione al fatto che i vincoli sono stati ricavati assumendo che i poli dominanti a ciclo chiuso avranno smorzamento  $\xi = 0.5$  e pulsazione naturale  $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$

Qualora la collocazione finale dei poli a ciclo chiuso avesse dei valori di smorzamento e pulsazione naturale sensibilmente differenti, è necessario che si riverifichi a posteriori che i due criteri siano soddisfatti, e in caso contrario il valore di  $T_c$  andrebbe ridotto.

Ciò motiva ulteriormente lo scegliere  $T_c$  con un po' di margine sulle soglie, come abbiamo fatto sopra.

Script Matlab che determina i valori limite per il periodo di campionamento sulla base dei valori attesi per lo smorzamento  $\xi$  e per la pulsazione naturale  $\omega_n$



```
xi=0.5;  
omegan=4;
```

```
ta5=3/(xi*omegan);  
Tcmin1=ta5/10
```

```
Tp=2*pi/(omegan*sqrt(1-xi^2));  
Tcmin2=0.1*Tp
```

```
Tcmin=min(Tcmin1,Tcmin2)
```

```
Tcmin1 =
```

```
0.1500
```

```
Tcmin2 =
```

```
0.1814
```

```
Tcmin =
```

```
0.1500
```

Il progetto per discretizzazione prevede che il regolatore venga progettato a tempo continuo, e se ne determini in un secondo tempo la forma discretizzata utilizzando uno fra i metodi disponibili (ad es. differenze all'indietro, Tustin, invarianza della risposta al gradino, etc.)

**Il regolatore a tempo continuo va progettato con riferimento ad un processo lievemente modificato** rispetto al processo originario, per tenere conto del fatto che il regolatore sarà successivamente discretizzato.

Tale **processo modificato** (che chiamiamo  $G_1(s)$ ) si ottiene a partire dal processo originario inserendo un polo aggiuntivo avente costante di tempo pari alla metà del periodo di campionamento

$$G_1(s) = G(s) \cdot \frac{1}{\frac{T_c}{2}s+1} = \frac{0.1}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{0.05s+1}$$

$$= \frac{2}{s(s+2)(s+20)}$$

Ora passiamo alla analisi delle specifiche. Iniziamo dalle specifiche sul comportamento a regime, che ci dicono se nel regolatore debbano essere inseriti o meno dei poli nell'origine e forniscono una soglia minima per il relativo guadagno (eventualmente generalizzato)

S1 In assenza di disturbo, l'errore a regime in risposta ad un set-point costante non ecceda il 2 % dell'ampiezza del set-point

S2 Un disturbo costante venga attenuato a regime in misura pari almeno al 98%

La specifica **S1** è compatibile con un sistema di controllo di tipo zero, e di norma introdurrebbe un vincolo minimo sul guadagno del controllore. In realtà il processo contiene di per se un polo nell'origine, quindi il sistema di controllo sarà sempre almeno di tipo 1, e i sistemi di tipo 1 garantiscono l'azzeramento dell'errore a regime per un set point costante indipendentemente dal valore dei guadagni del controllore (e del processo).

Quindi la prima specifica sarà automaticamente soddisfatta da qualunque scelta si adotti per il controllore (purché, ovviamente, quest'ultimo garantisca la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo)

S2 Un disturbo costante venga attenuato a regime in misura pari almeno al 98%

La specifica **S2** è compatibile con un sistema di controllo di tipo uno in cui il polo nell'origine sia contenuto nel processo. Non sarà pertanto necessario inserire un polo nell'origine nel regolatore. L'analisi quantitativa di questa specifica condurrà ad un valore minimo per il guadagno  $\mu_C = C(0)$  del regolatore a tempo continuo che stiamo progettando.

In particolare, la specifica S2 è soddisfatta se il guadagno della funzione di trasferimento fra il disturbo e l'uscita è inferiore a 0.02.

$$W_d^y(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{0.1}{s(s+2)}}{1 + C(s)\frac{0.1}{s(s+2)}} = \frac{0.1}{s(s+2) + 0.1C(s)}$$

$$W_d^y(0) = \frac{1}{C(0)} = \frac{1}{\mu_C} \leq 0.02 \quad \Rightarrow \quad \mu_C \geq 50$$

NB Sviluppare questi conti riferendosi al processo originale  $G(s)$  o al processo modificato  $G_1(s)$  conduce al medesimo risultato.

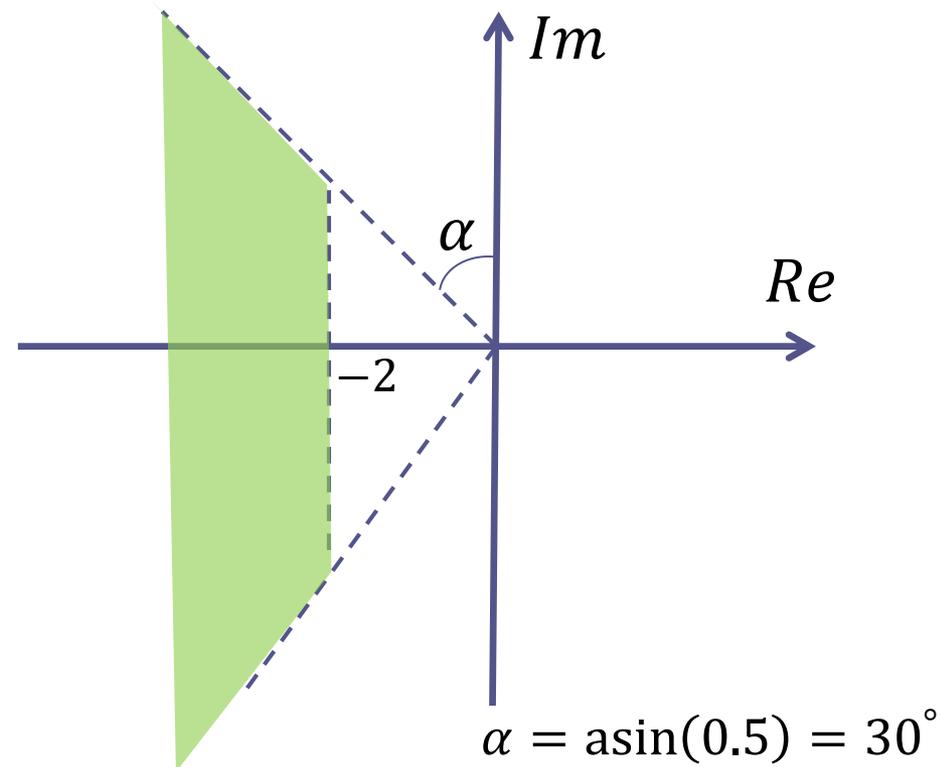
Le specifiche S1 ed S2 sul comportamento a regime non prevedono quindi che il regolatore debba contenere un polo nell'origine, e prescrivono unicamente una soglia minima  $\mu_C \geq 50$  per il relativo valore del guadagno.

Ora valutiamo, sulla base delle specifiche S3 ed S4 sul comportamento transitorio, la regione ammissibile per i poli a ciclo chiuso. Sfruttiamo la analisi già effettuate per determinare i vincoli sulla scelta del periodo di campionamento. Ricavammo come il soddisfacimento delle specifiche transitorie è garantito nel momento in cui lo smorzamento e la pulsazione naturale dei poli dominanti a ciclo chiuso siano tali che

$$\xi \geq 0.5$$

$$\xi \omega_n \geq 2$$

A tali restrizioni corrisponde una regione ammissibile per i poli a ciclo chiuso avente la forma riportata a lato



Verifichiamo se un controllore **proporzionale** con guadagno scelto in modo da soddisfare il vincolo per il soddisfacimento delle specifiche a regime (cioè con guadagno almeno pari a 50) può collocare i poli della FdT a ciclo chiuso in tale regione ammissibile.

$$C(s) = \mu_C$$

Tracciamo il luogo delle radici di  $G_1(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+20)}$ .



```
G1=tf(2,poly([0 -2 -20]))
```

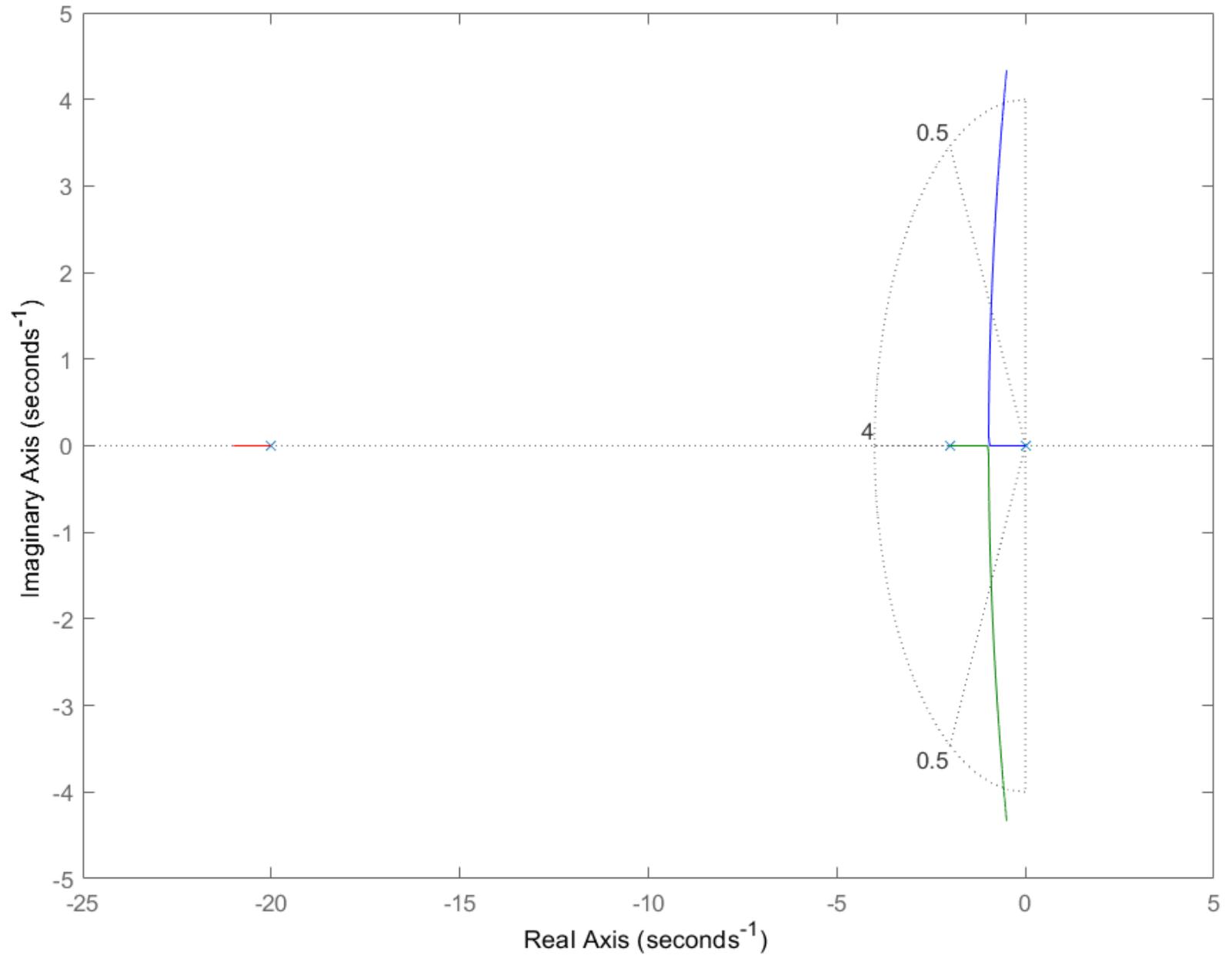
```
figure(1)
```

```
rlocus(G1,0:0.1:200)
```

```
sgrid(0.5,4)
```

Sovrapponiamo ai rami del luogo delle radici i luoghi del piano  $s$  associati al valore 0.5 per lo smorzamento ed al valore di 4 rad/s per la pulsazione naturale

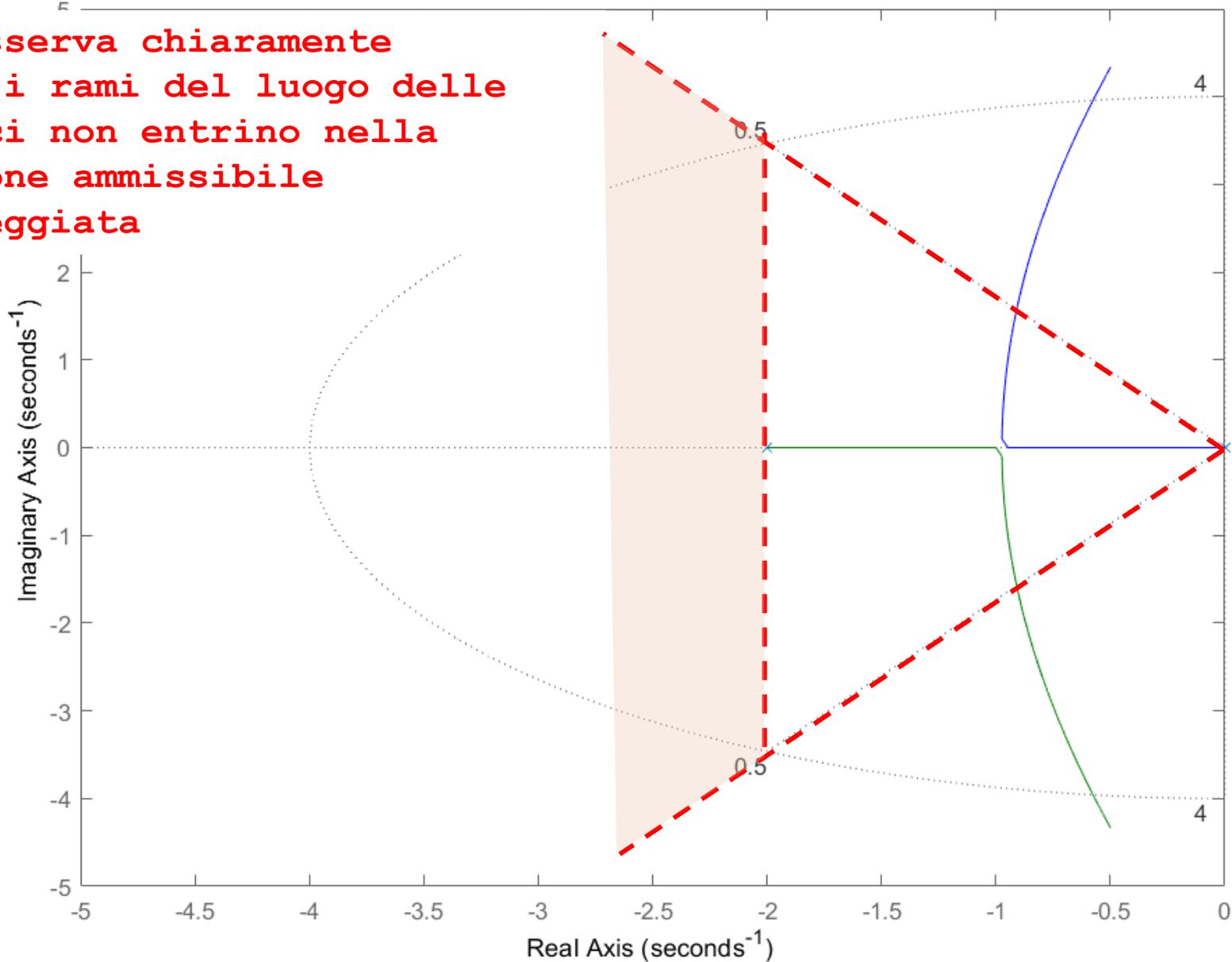
# Root Locus



ZOOM: axis([-5 0 -5 5])

Root Locus

Si osserva chiaramente  
come i rami del luogo delle  
radici non entrino nella  
regione ammissibile  
ombreggiata



Va aggiunta al regolatore una parte dinamica  $\bar{C}(s)$

$$C(s) = \mu_C \bar{C}(s) \quad \mu_C \geq 50 \quad \bar{C}(0) = 1$$

Scegliamo di introdurre nel regolatore una «coppia polo zero» in cui lo zero cancelli il polo del processo in  $s = -2$ , mentre il polo del regolatore (che indichiamo genericamente attraverso il parametro  $b$ ) sarà scelto procedendo per tentativi successivi fino ad ottenere un luogo delle radici soddisfacente

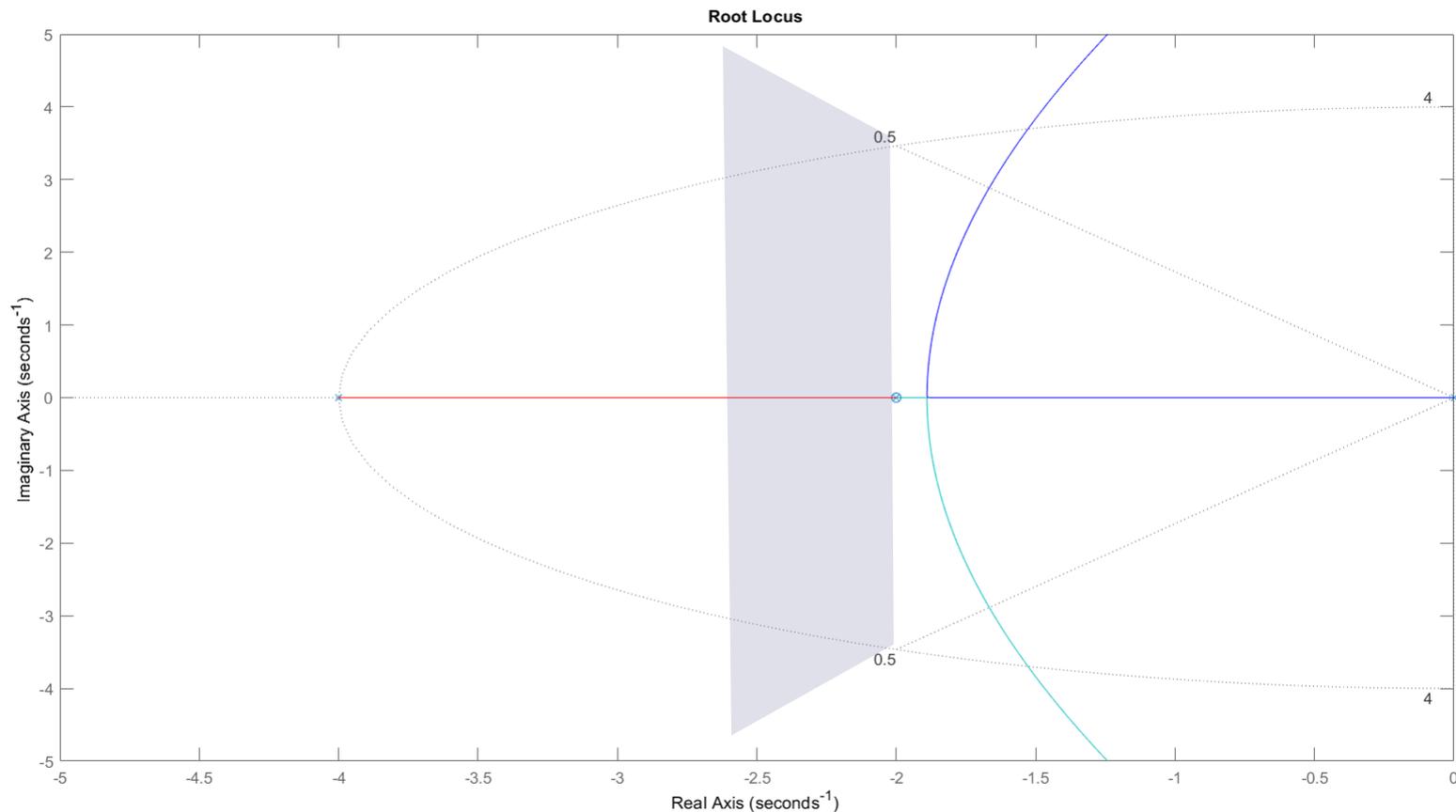
$$C(s) = \mu_C \bar{C}(s) = \mu_C \frac{b s + 2}{2 s + b} \quad \bar{C}(s) = \frac{b s + 2}{2 s + b}$$

Il coefficiente moltiplicativo  $\frac{b}{2}$  inserito in  $\bar{C}(s)$  serve a fare in modo che il guadagno del regolatore  $C(s)$  sia  $\mu_C$

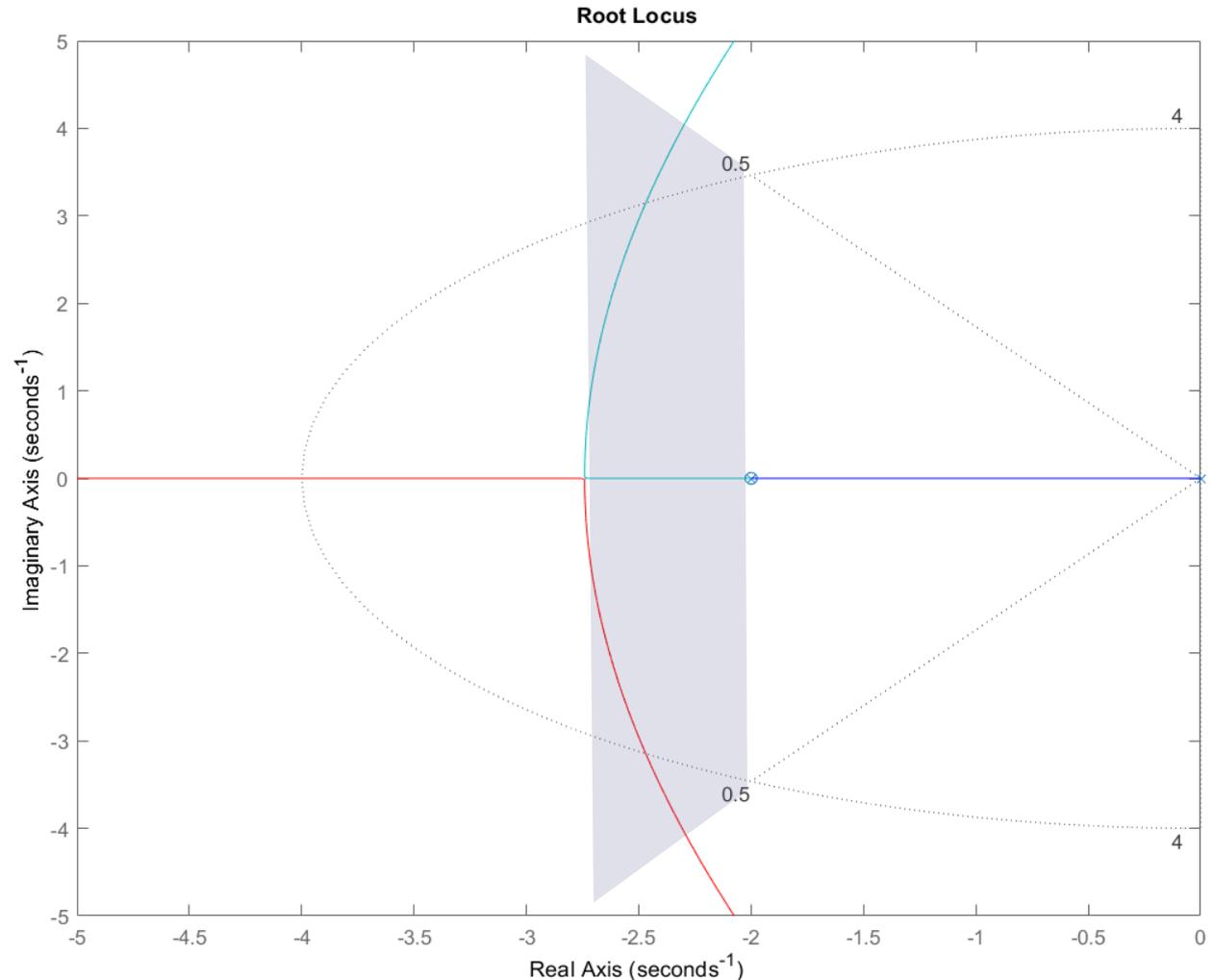
Scegliamo preliminarmente il valore  $b = 4$

```
b=4;
Cbar=b/2*tf([1 2],[1 b]);
figure(2)
rlocus(Cbar*G1,0:0.001:200)
sgrid(0.5,4)
axis([-5 0 -5 5])
```

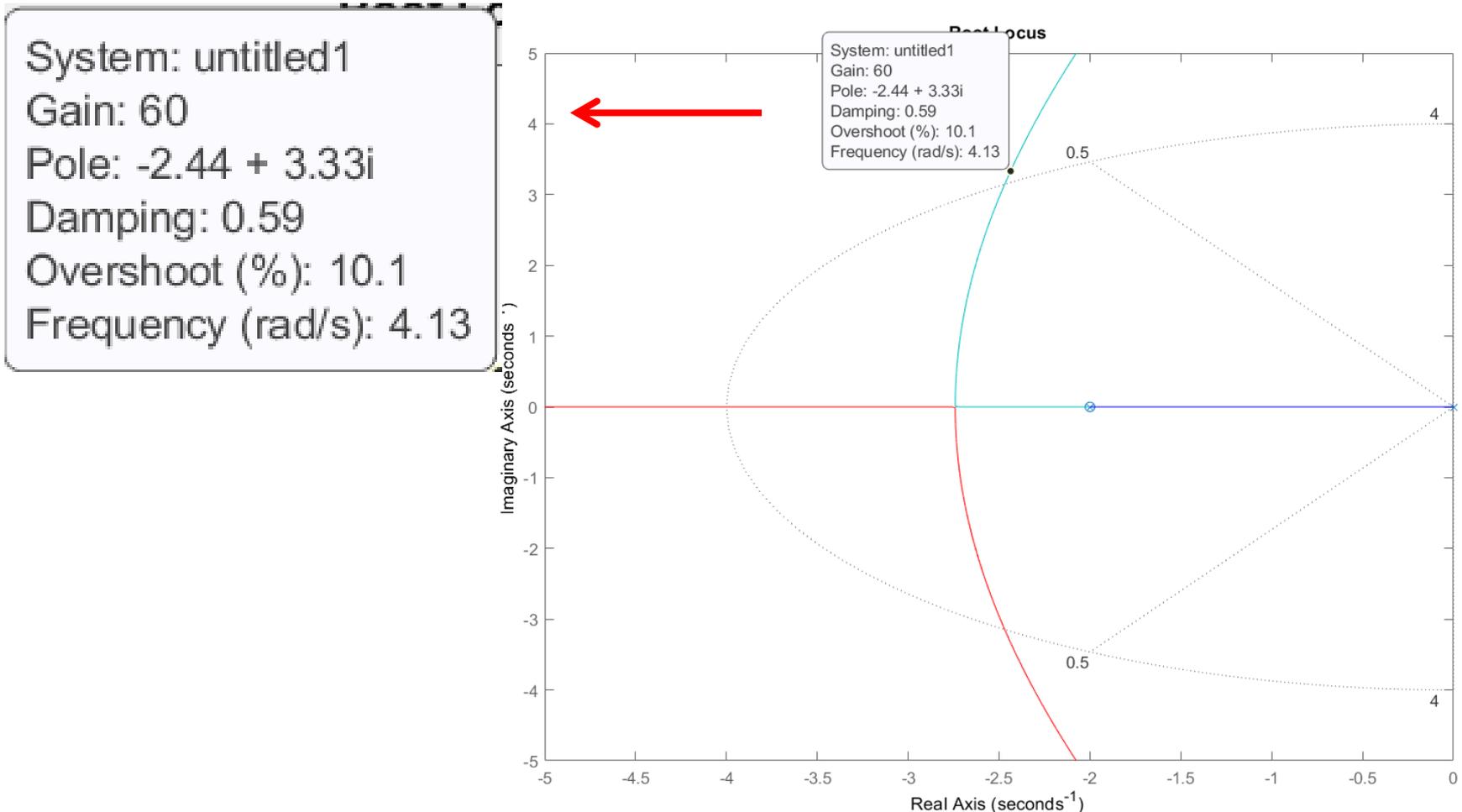
La correzione è ancora insufficiente ad attirare i rami del luogo delle radici nella regione ammissibile. Proviamo con  $b = 6$



Utilizzando  $b = 6$  riusciamo invece ad «attirare» i rami del luogo all'interno della regione ammissibile. Verifichiamo che imponendo il vincolo sul guadagno del controllore ( $\mu_C \geq 50$ ) i rami si mantengono all'interno della regione ammissibile



Scegliendo  $\mu_c = 60$  otteniamo a ciclo chiuso una coppia di poli dominanti aventi **smorzamento 0.6 e pulsazione naturale 4.13 rad/s**, posizionati pertanto all'interno della regione ammissibile.



Pertanto, un regolatore che risolve il problema di sintesi è il seguente

$$C(s) = 60 \frac{6s + 2}{2s + 6} = 180 \frac{s + 2}{s + 6}$$

Verifichiamo che in corrispondenza dei valori **effettivi** dello smorzamento e della pulsazione naturale della coppia di poli dominanti i vincoli sulla scelta del periodo di campionamento siano soddisfatti.

```
xi=0.6;
```

```
omegan=4.13;
```

```
ta5=3/(xi*omegan);
```

```
Tcmin1=ta5/10;
```

```
Tp=2*pi/(omegan*sqrt(1-xi^2));
```

```
Tcmin2=0.1*Tp;
```

```
Tcmin=min(Tcmin1,Tcmin2)
```

```
Tcmin =
```

```
0.1211
```

**OK**

Possiamo ora procedere alla discretizzazione del regolatore  $C(s)$  secondo alcuni dei metodi visti a lezione

**Differenze in avanti**

$$C_{DA}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{1}{T_c}(z-1)}$$

**Differenze all'indietro**

$$C_{DI}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{1}{T_c} \frac{z-1}{z}}$$

**Tustin**

$$C_{TU}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_c} \frac{z-1}{z+1}}$$

**Invarianza della risposta al gradino**

$$C_{IRG}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{C(s)}{s} \right) \right]_{t=kT_c} \right\}$$

## Metodo delle differenze in avanti

$$C(s) = 180 \frac{s + 2}{s + 6}$$

$$C_{DA}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{1}{T_c}(z-1)} = 180 \frac{\frac{1}{T_c}(z-1) + 2}{\frac{1}{T_c}(z-1) + 6} = 180 \frac{z-1+2T_c}{z-1+6T_c}$$

Il regolatore ha un polo in  $z = 1 - 6T_c$ , e pertanto il regolatore diventa instabile se  $6T_c > 2$

Il guadagno del regolatore discretizzato coincide con il guadagno del regolatore originario a tempo continuo

## Metodo delle differenze all'indietro

$$C(s) = 180 \frac{s + 2}{s + 6}$$

$$\begin{aligned} C_{DI}(z) &= C(s) \Big|_{s=\frac{1-z-1}{T_c z}} = 180 \frac{\frac{1}{T_c} \frac{z-1}{z} + 2}{\frac{1}{T_c} \frac{z-1}{z} + 6} \\ &= 180 \frac{z-1 + 2T_c z}{z-1 + 6T_c z} = 180 \frac{(1+2T_c)z-1}{(1+6T_c)z-1} \end{aligned}$$

Il regolatore discretizzato ha un polo in  $z = \frac{1}{1+6T_c}$ , e pertanto è sempre stabile comunque si scelga  $T_c$  (come già sapevamo, in conseguenza del fatto che il controllore  $C(s)$  di partenza è stabile)

Il guadagno del regolatore discretizzato coincide con il guadagno del regolatore  $C(s)$  a tempo continuo

## Metodo di Tustin

$$C(s) = 180 \frac{s + 2}{s + 6}$$

$$\begin{aligned}
 C_{TU}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{T_c z+1}} &= 180 \frac{\frac{2z-1}{T_c} + 2}{\frac{2z-1}{T_c} + 6} = 180 \frac{2(z-1) + 2T_c(z+1)}{2(z-1) + 6T_c(z+1)} \\
 &= 180 \frac{(2 + 2T_c)z + 2T_c - 2}{(2 + 6T_c)z + 6T_c - 2}
 \end{aligned}$$

Il regolatore discretizzato secondo il metodo di Tustin ha un polo in  $z = \frac{2-6T_c}{2+6T_c}$ , e pertanto è sempre stabile comunque si scelga  $T_c$  (come già sapevamo, in conseguenza del fatto che il controllore  $C(s)$  di partenza è stabile).

Il guadagno del regolatore discretizzato coincide con il guadagno del regolatore  $C(s)$  a tempo continuo

## Metodo della invarianza della risposta al gradino

$$C_{IRG}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{C(s)}{s} \right) \right]_{t=kT_c} \right\}$$

```

clc
Tc=0.1;
C=60*Cbar;
Circ=c2d(60*Cbar,Tc,'zoh')
[numCirc denCirc]=tfdata(Circ,'v');
poloirc=roots(denCirc);
Zeroirc=roots(numCirc)
numC=numCirc;
denC=denCirc;

```

```

Circ =

    180 z - 152.9
-----
      z - 0.5488

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.

zeroirc =

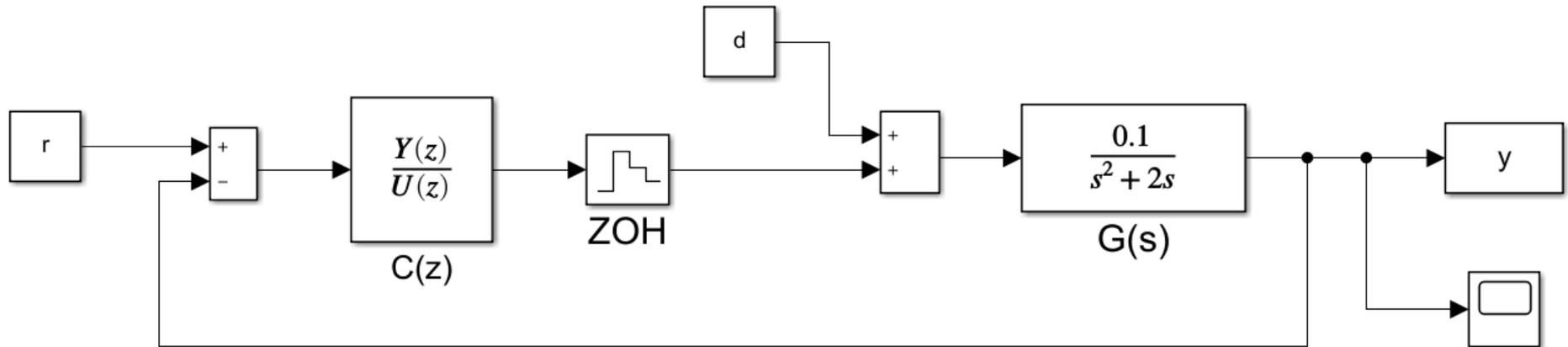
    0.8496

```

$$C_{IRG}(z) = \frac{180(z - 0.8496)}{z - 0.5488}$$

Il regolatore discretizzato secondo il metodo della invarianza della risp. al gradino è sempre stabile comunque si scelga  $T_c$  in quanto sappiamo che i poli di  $C_{IRG}(z)$  ed i poli di  $C(s)$  sono legati fra loro dalla trasformazione di campionamento

Verifichiamo mediante simulazione le prestazioni dei vari controllori digitali progettati mediante discretizzazione del controllore a tempo continuo  $C(s)$



I campi Numerator e Denominator del controllore  $C(z)$  sono parametrizzati mediante due variabili numC e denC alle quali attribuiremo un valore per mezzo dello script

Tut06\_es1.slx

Block Parameters: C(z)

Discrete Transfer Fcn

Implement a z-transform transfer function. Specify the numerator and denominator coefficients of z. The order of the denominator must be greater than or equal to the order of the numerator

Main Data Types State Attributes

Data

	Source	Value
Numerator:	Dialog	numC
Denominator:	Dialog	denC
Initial states:	Dialog	0

External reset: None

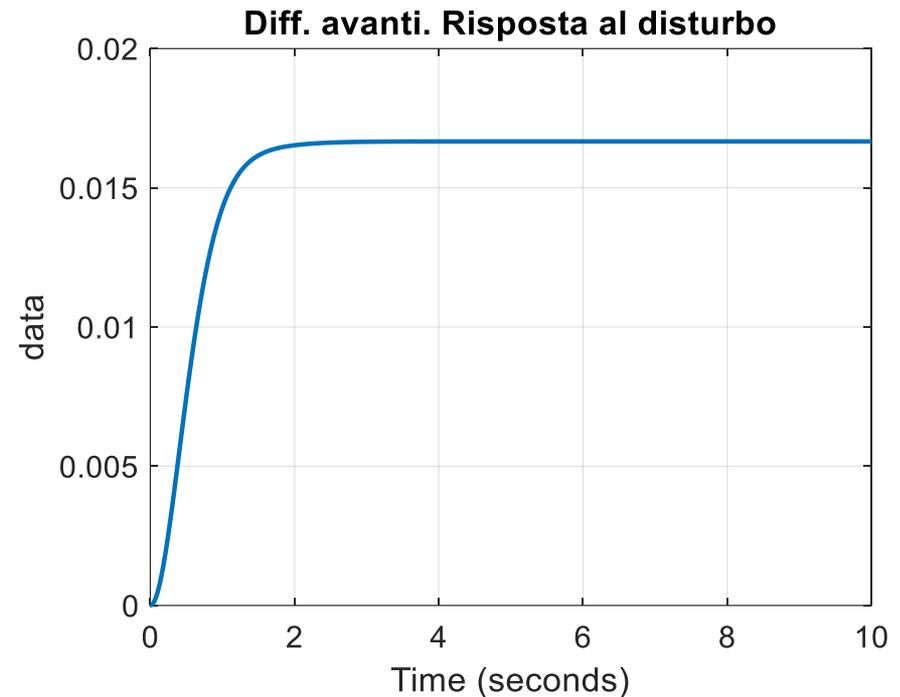
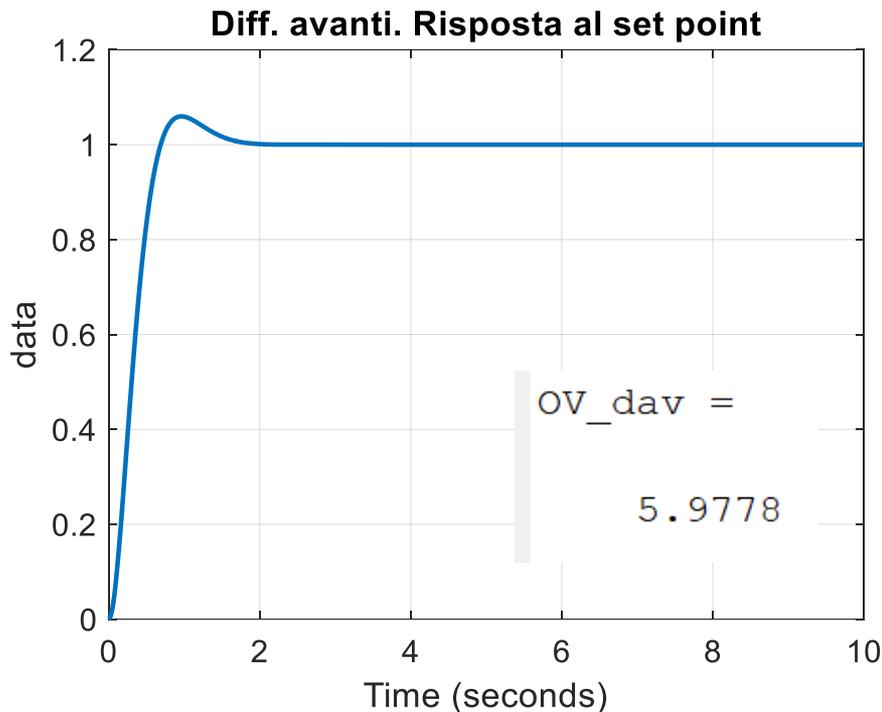
Input processing: Elements as channels (sample based)

Optimize by skipping divide by leading denominator coefficient (a0)

Sample time (-1 for inherited):

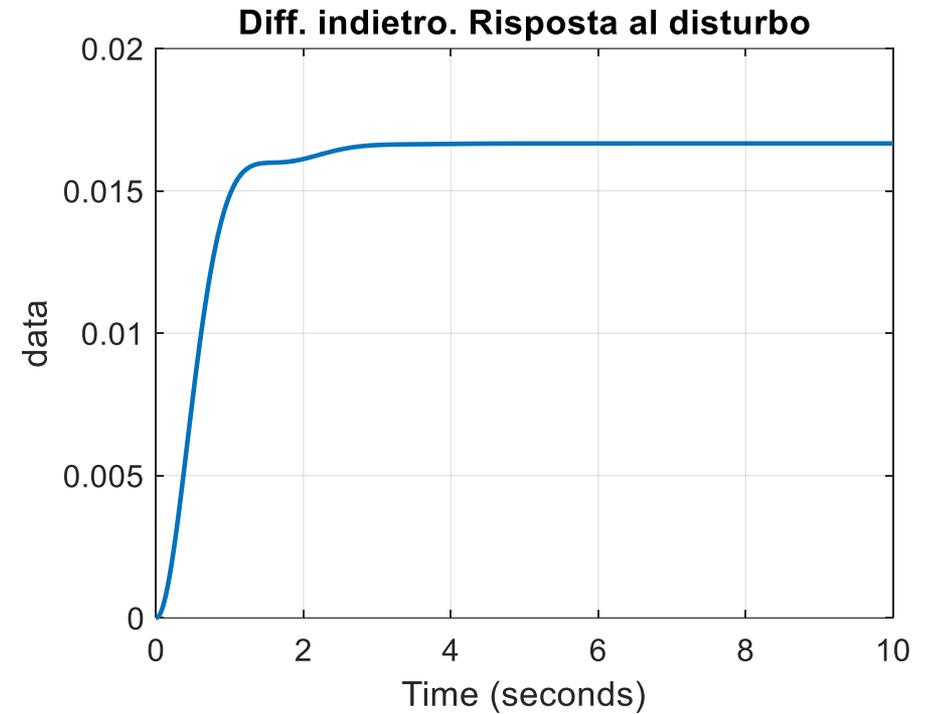
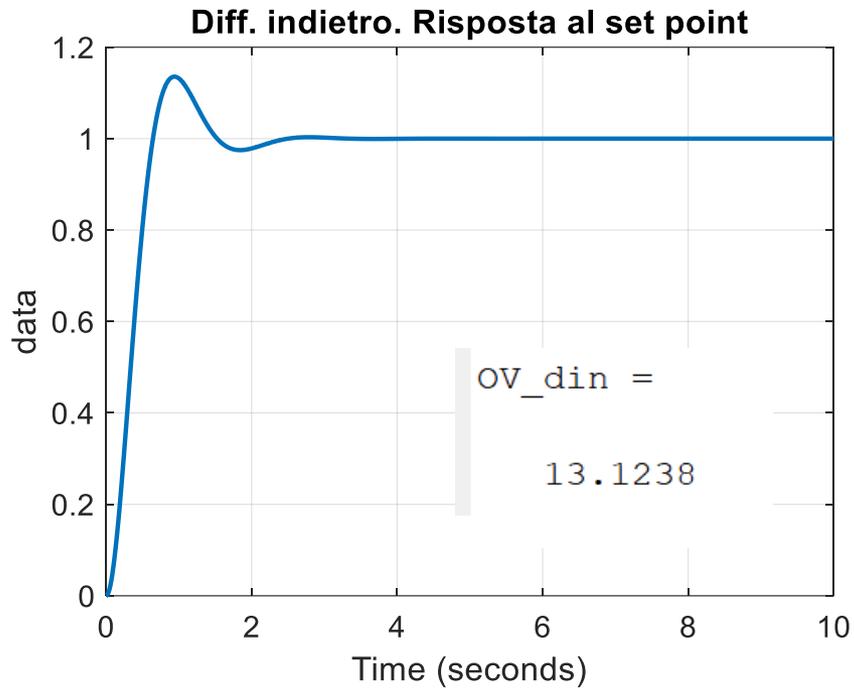
Tc

## Metodo delle differenze in avanti

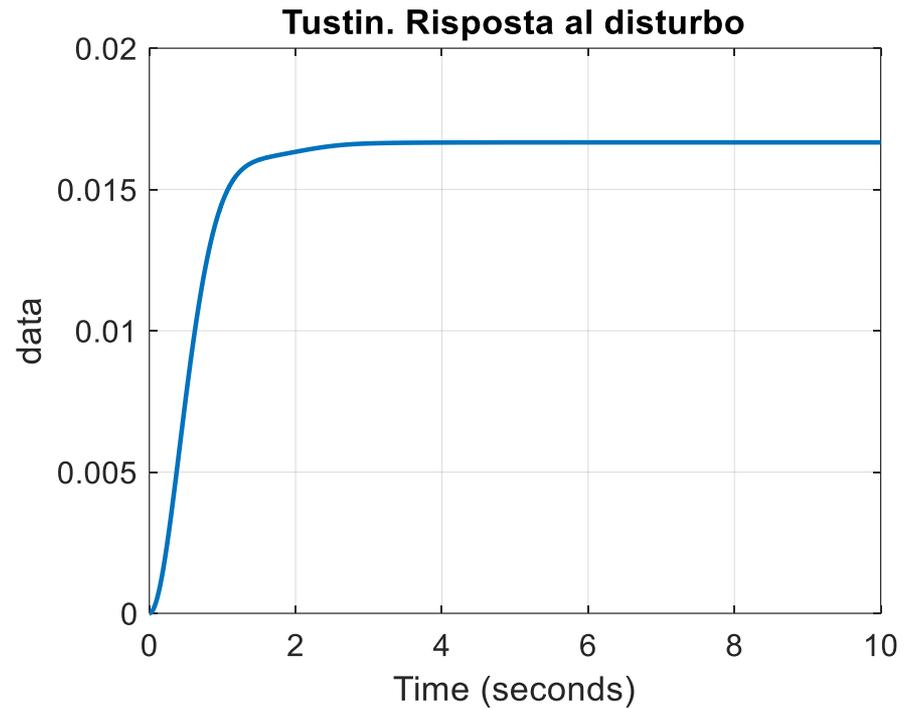
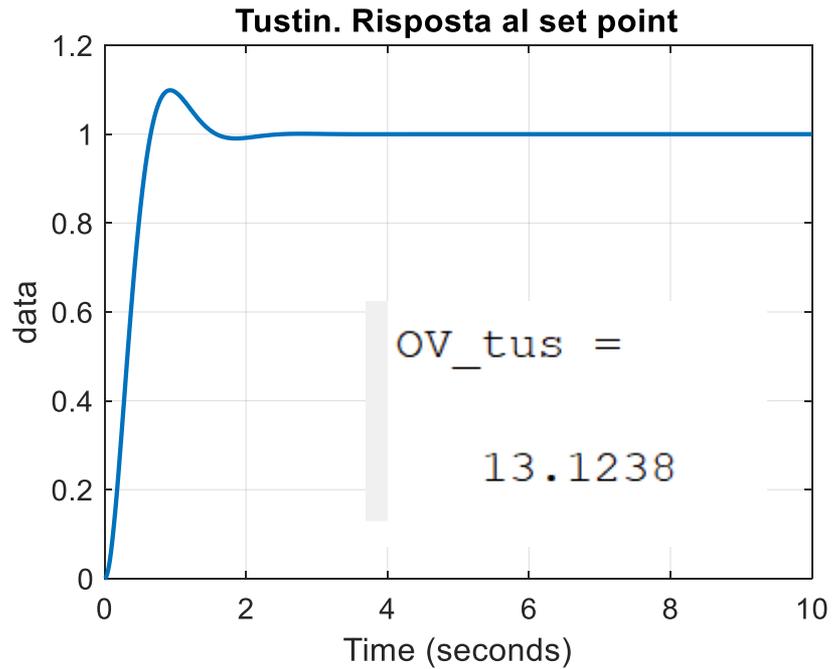


La sovralongazione percentuale ed il tempo di assestamento soddisfano le specifiche S3 ed S4. Anche il livello di attenuazione del disturbo è in accordo con la specifica S2.

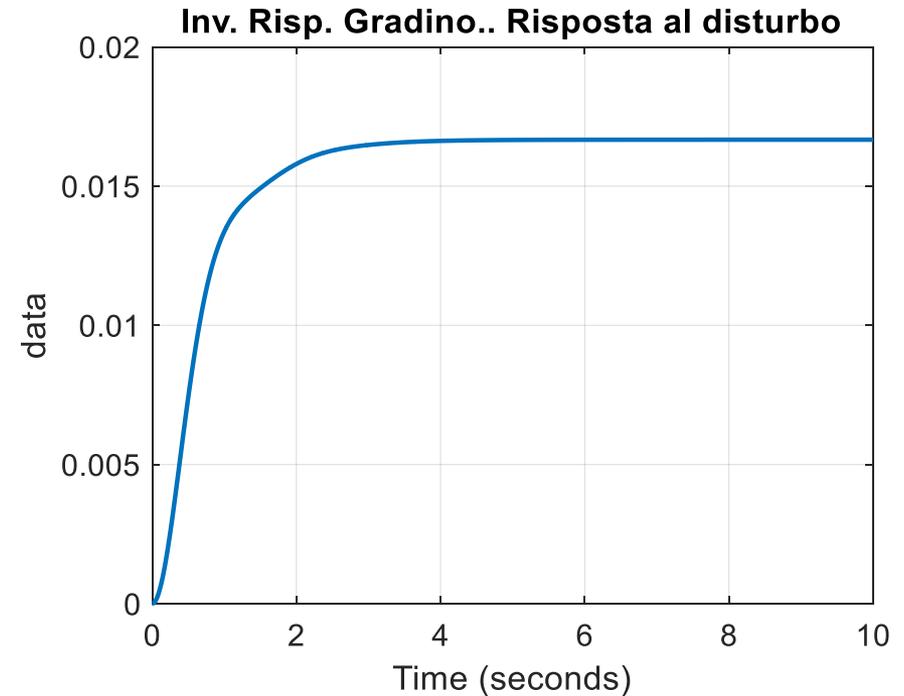
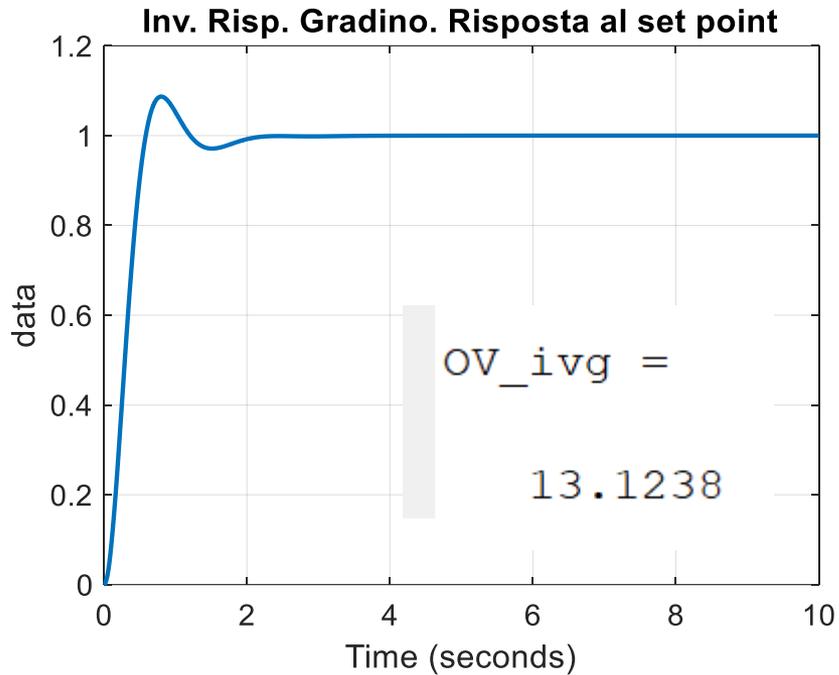
# Metodo delle differenze all'indietro



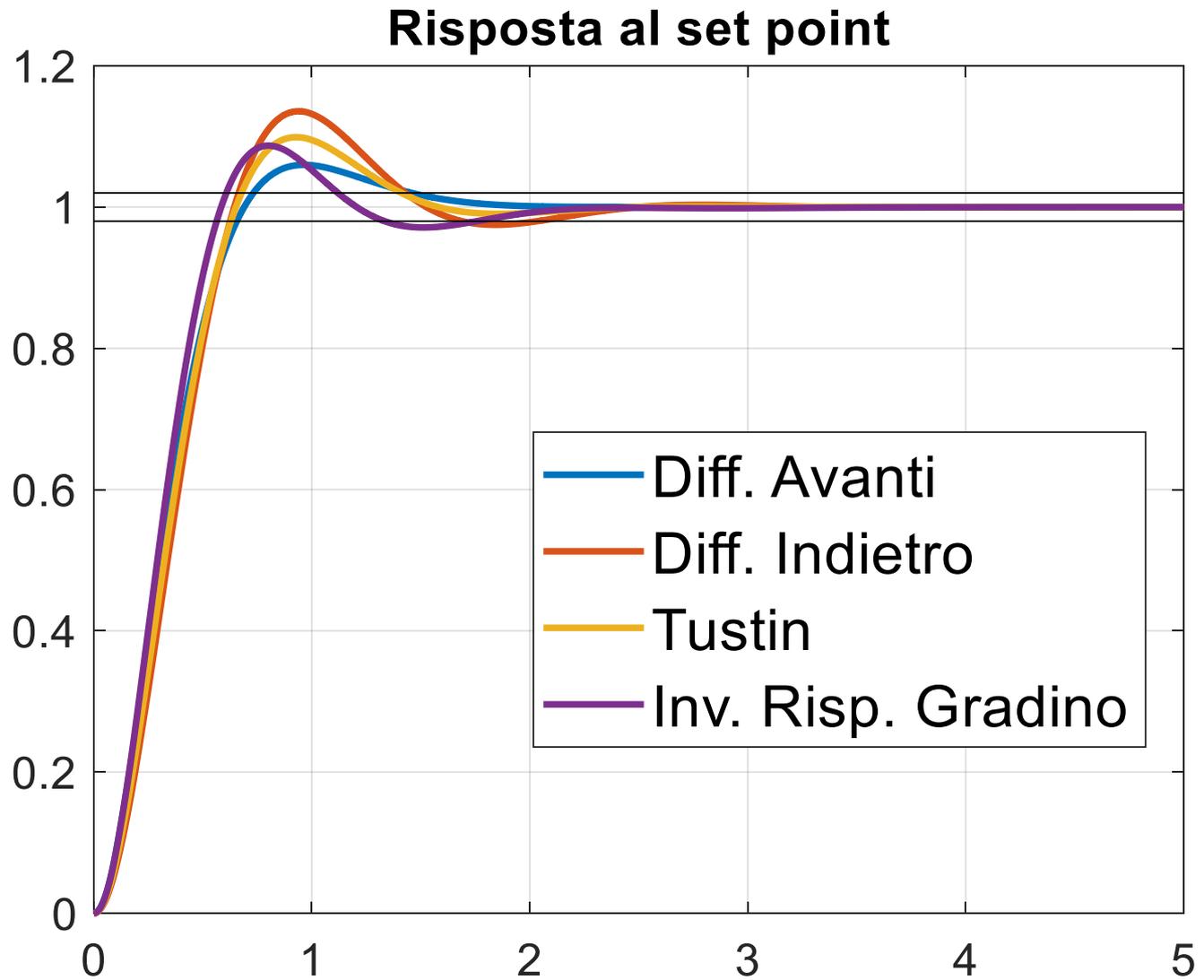
# Metodo di Tustin



# Metodo della invarianza della risposta al gradino



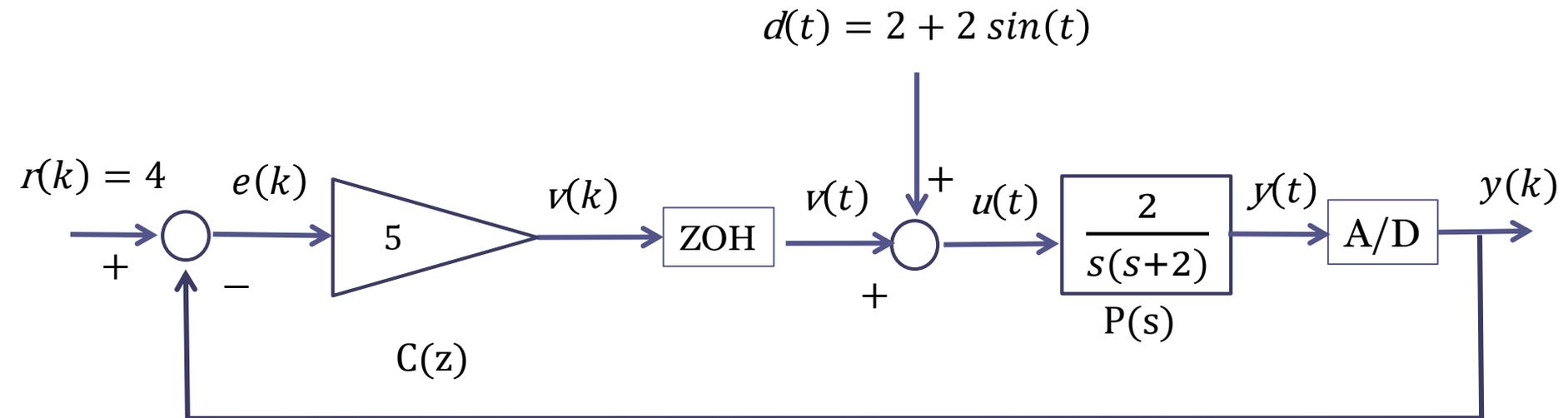
## Confronto





## Esercizio2 (anche in dispense lezione)

Analizzare l'evoluzione di regime del seguente sistema di controllo



sotto l'ipotesi in cui i convertitori A/D, D/A ed il controllore operino con un periodo di campionamento pari a  $T_c = 0.05$  s

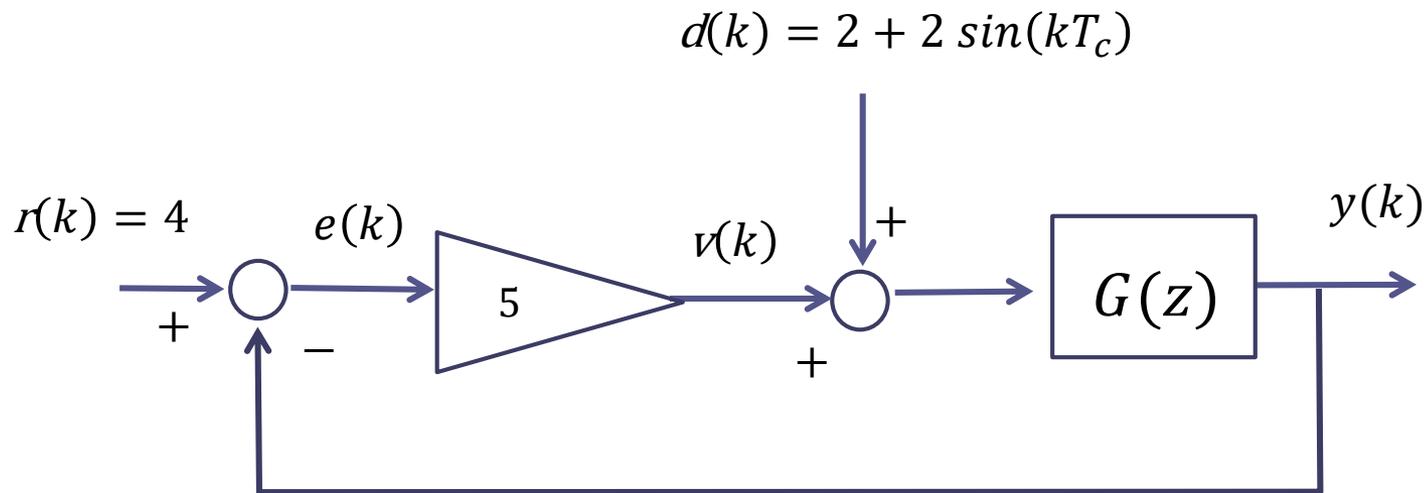
Come primo passo, costruiamo un modello equivalente del sistema di controllo mediante funzioni di trasferimento discrete.

Ricordiamo come grazie alla presenza del ricostruttore ZOH a monte del sistema, è possibile definire senza alcun problema una funzione di trasferimento discreta che mette in relazione la sequenza  $v(k)$  in uscita dal controllore con la sequenza  $y(k)$  ottenuta campionando l'uscita del processo. Ciò è reso possibile dal fatto che il segnale  $v(t)$  è un segnale costante a tratti.

La presenza del disturbo  $d(t)$ , che non è un segnale costante a tratti, rende impossibile determinare una rappresentazione a tempo discreto in grado di descrivere esattamente il comportamento dell'uscita negli istanti di campionamento.

Possiamo però ricavare un sistema discretizzato «approssimato», che sarà tanto più accurato quanto più è lenta la variazione del disturbo fra due istanti di campionamento successivi

## Sistema discretizzato **approssimato**



$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{P(s)}{s} \right) \right]_{t=kT_c} \right\}$$

$$= \frac{0.002419z + 0.002339}{z^2 - 1.9048z + 0.9048} = \frac{0.002419(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048)}$$

$P = \text{tf}(2, [1 \ 2 \ 0]);$   
 $T_c = 0.05;$   
 $G = \text{c2d}(P, T_c)$

Sistema di controllo di **tipo 1** con il polo in  $z=1$  situato nel processo  $G(z)$

Analizziamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Per il sistema di controllo in esame si ottiene

$$P_{car}(z) = z^2 - 1.9048z + 0.9048 + 5 \cdot (0.002419z + 0.002339)$$

$$= z^2 - 1.893z + 0.9165 \quad a_2 = 1 \quad a_1 = -1.893 \quad a_0 = 0.9165$$

1.  $|a_0| < a_2$   $|0.9165| < 1$  *OK*
2.  $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 > 0$   $1 - 1.893 + 0.9165 = 0.023 > 0$  *OK*
3.  $P(-1) = a_2 - a_1 + a_0 > 0$   $1 + 1.893 + 0.9165 = 3.809 > 0$  *OK*

Il polinomio caratteristico risulta essere Jury-stabile. I poli a ciclo chiuso sono

$$p_{1,2} = 0.9464 \pm 0.144j \quad |p_{1,2}| = 0.957 < 1$$

Analizziamo mediante il **Principio del Modello Interno** (abbinato al principio di sovrapposizione degli effetti) il comportamento a regime conseguente alle diverse componenti del set-point e del disturbo

### **Componente costante del set point** $r(k) = 4$

Poiché nella FdT a ciclo aperto è presente un polo in  $z = 1$ , sulla base del primo enunciato del PMI la componente costante del set point viene riprodotta esattamente a regime

$$PMI \rightarrow y(k) \rightarrow 4$$

### **Componente costante del disturbo** $d(k) = 2$

Poiché il regolatore non contiene il modello di un segnale costante, il PMI non ci è di aiuto in questa analisi.

La formula ricavata in sede di analisi per il valore di regime della risposta ad un **disturbo costante**  $d(k) = D^*$  di sistemi di tipo 1 con polo in  $z=1$  contenuto nel processo è

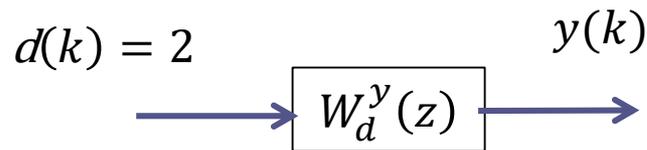
$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \frac{D^*}{\mu_C} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$D^* = 2$	Ampiezza del disturbo
$\mu_C = 5$	Guadagno del controllore

Ricaviamo il medesimo risultato senza impiegare la formula.

La Funzione di trasferimento fra il disturbo e l'uscita è

$$W_d^y(z) = \frac{0.002419(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048)} = \frac{0.002419(z + 0.9672)}{1 + 5 \frac{0.002419(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048)}} = \frac{0.002419(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048) + 5 \cdot 0.002419(z + 0.9672)}$$



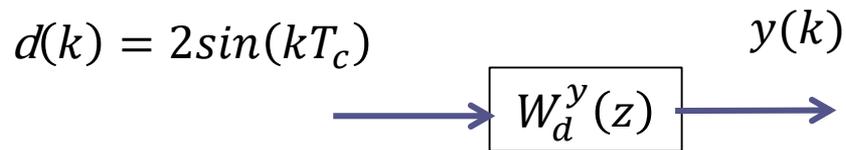
La FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita è  $W_d^y(z)$  è asintoticamente stabile a ciclo chiuso. Il valore di regime dell'uscita è pertanto pari al prodotto fra l'ampiezza del disturbo ed il guadagno  $W_d^y(1)$  della FdT disturbo-uscita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 2 \cdot W_d^y(1) = 2 \cdot \frac{1}{5} = 0.4$$

## Componente sinusoidale del disturbo $d(k) = 2\sin(kT_c)$

Poiché il regolatore non contiene il modello di un segnale sinusoidale con pulsazione  $\theta = 30$  e passo di campionamento  $T_c = 0.05$  s, il PMI non ci è di aiuto in questa analisi.

Dobbiamo invece applicare il concetto di risposta armonica, sfruttando la rappresentazione equivalente



In base a quanto visto in precedenza, l'evoluzione **di regime** della sequenza di uscita sarà

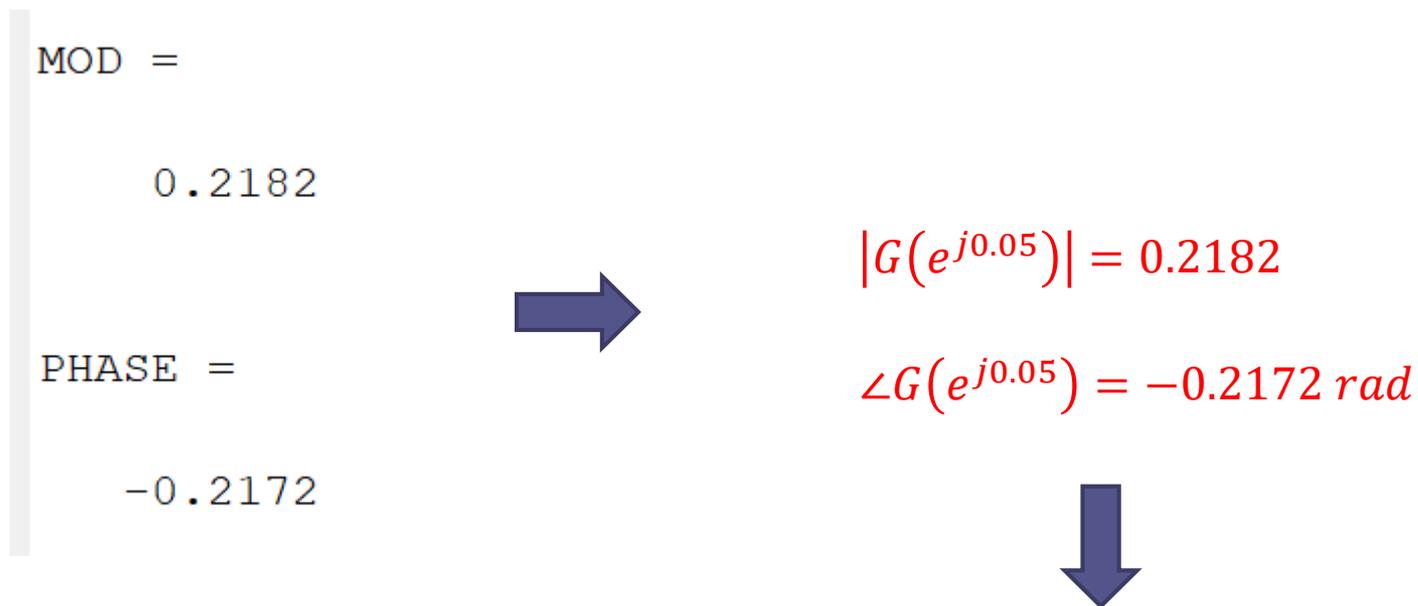
$$\begin{aligned}
 y(k) &= 2|G(e^{jT_c})| \cos(kT_c + \angle G(e^{jT_c})) \\
 &= 2|G(e^{j0.05})| \cos(k0.05 + \angle G(e^{j0.05}))
 \end{aligned}$$

```

Wdy = @(z) 0.002419*(z+0.9672)/((z-1)*(z-0.9048)+5*0.002419*(z+0.9672))
MOD=abs(Wdy(exp(j*Tc)))
PHASE=angle(Wdy(exp(j*Tc)))

```

Mediante il precedente script, calcoliamo direttamente i valori di modulo e fase della funzione di risposta armonica discreta



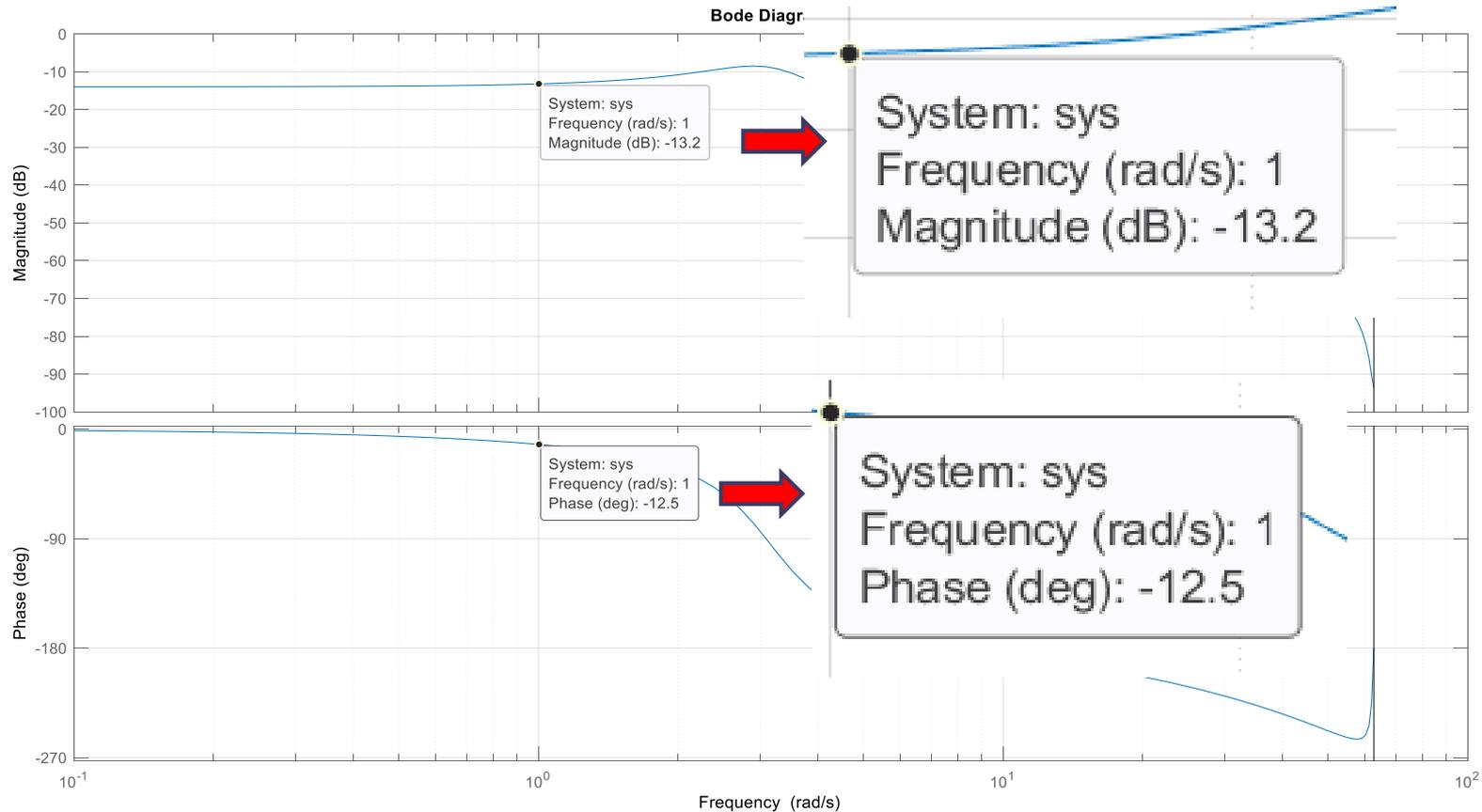
$$y(k) = 0.4364 \cos(k0.05 - 0.2172)$$

```
z=tf('z',Tc)
```

```
Wdysym = 0.002419*(z+0.9672)/((z-1)*(z-0.9048)+5*0.002419*(z+0.9672))
```

```
[numWdys denWdys]=tfdata(Wdysym,'v')
```

```
dbode(numWdys,denWdys,Tc)
```



$$10^{-\frac{13.2}{20}} = 0.218$$

$$\frac{12.5 \cdot 2\pi}{360} = 0.217 \text{ rad}$$

**NB** L'ascissa da valutare nei diagrammi di Bode è la pulsazione del segnale a tempo continuo che, campionato con periodo  $T_c$ , origina la sequenza sinusoidale in ingresso

$$d(k) = 2\sin(kT_c)$$

$$d(k) = 2\sin(\omega t)|_{t=kT_c}$$

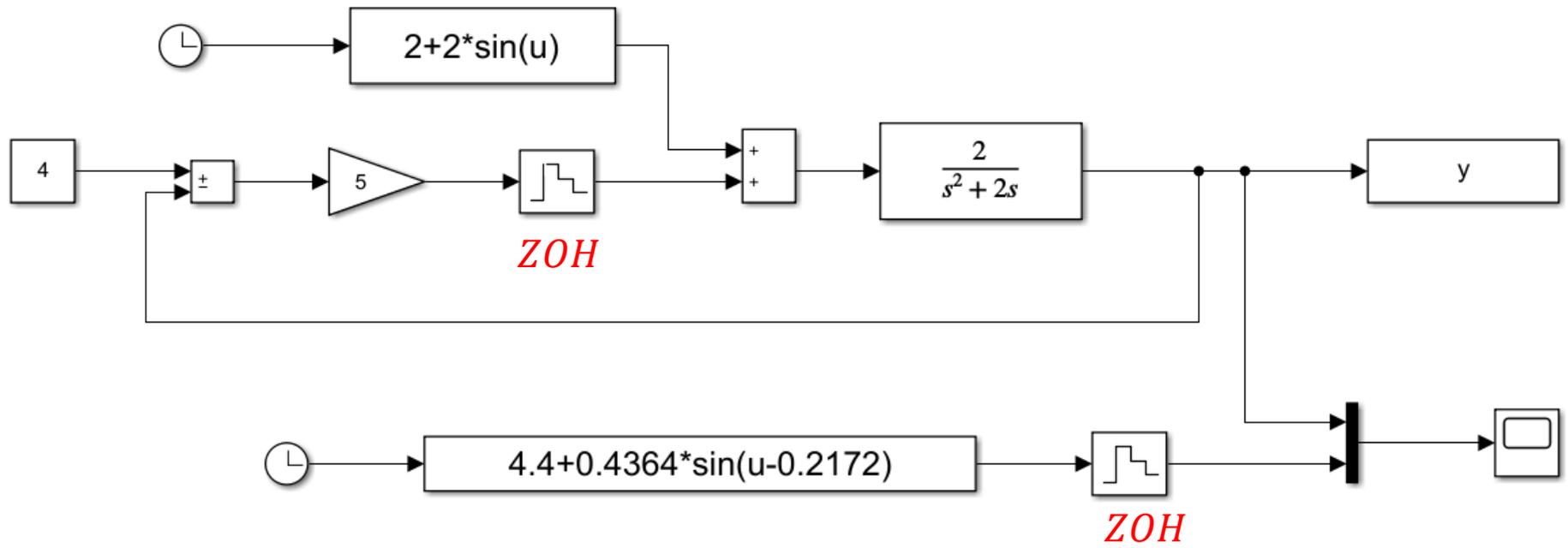
$$\omega = 1 \text{ rad/s}$$

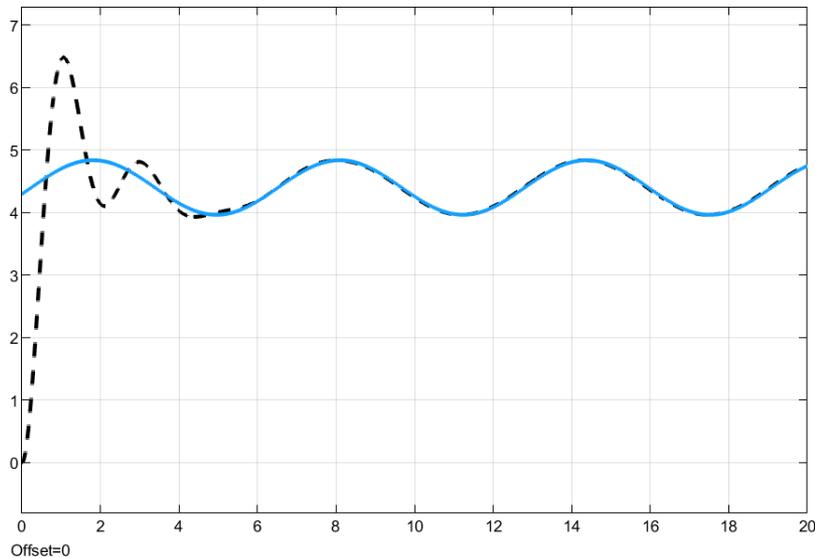
Nel diagramma di Bode a tempo discreto dobbiamo valutare modulo e fase alla pulsazione  $\omega = 1 \text{ rad/s}$

**Sommando fra loro i tre contributi alla evoluzione dell'uscita, otteniamo l'espressione complessiva della evoluzione di regime della sequenza di uscita**

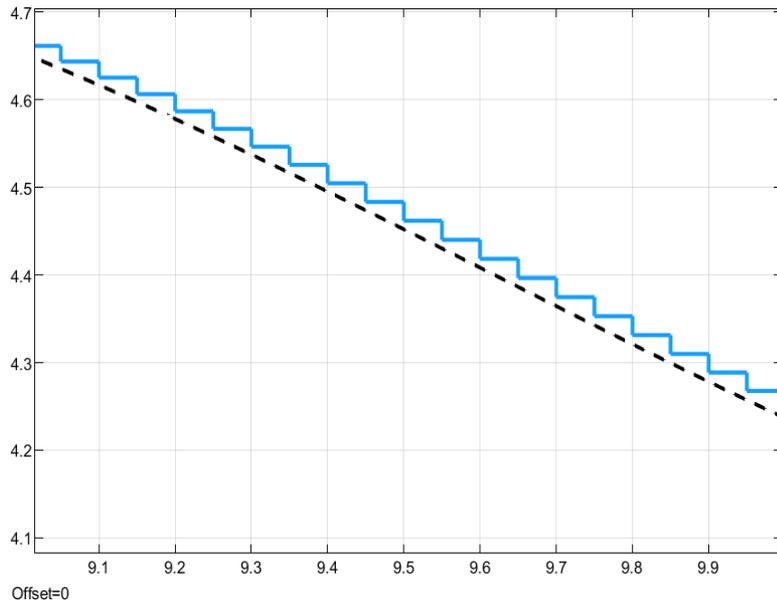
$$y(k) = 4.4 + 0.4364\cos(k0.05 - 0.2172)$$

Verifichiamo mediante Simulink i risultati ottenuti

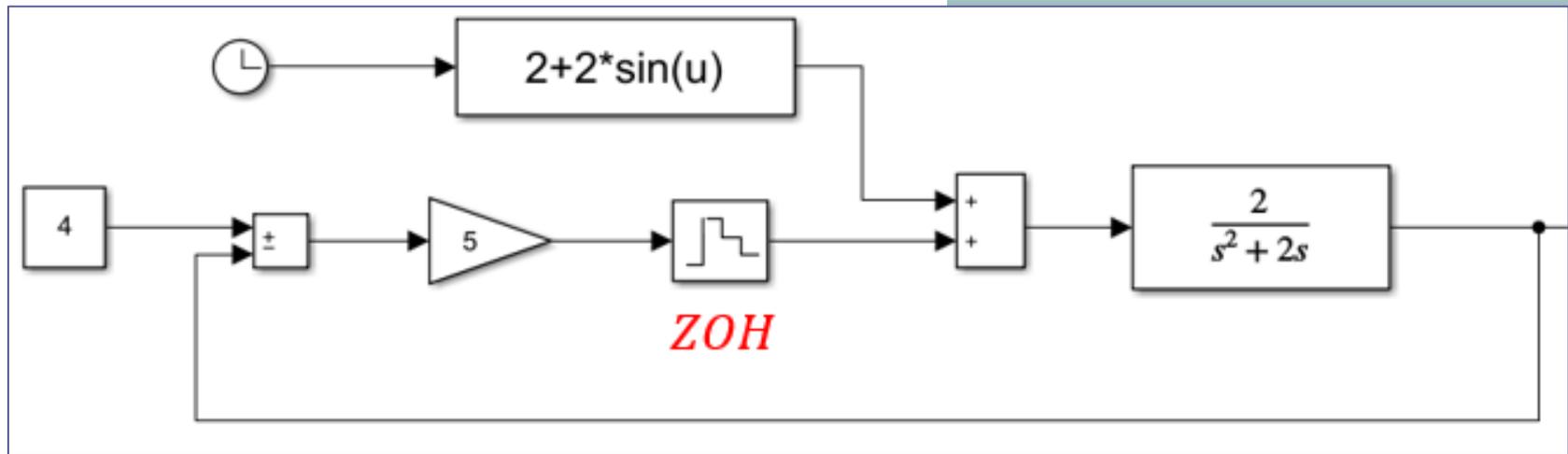




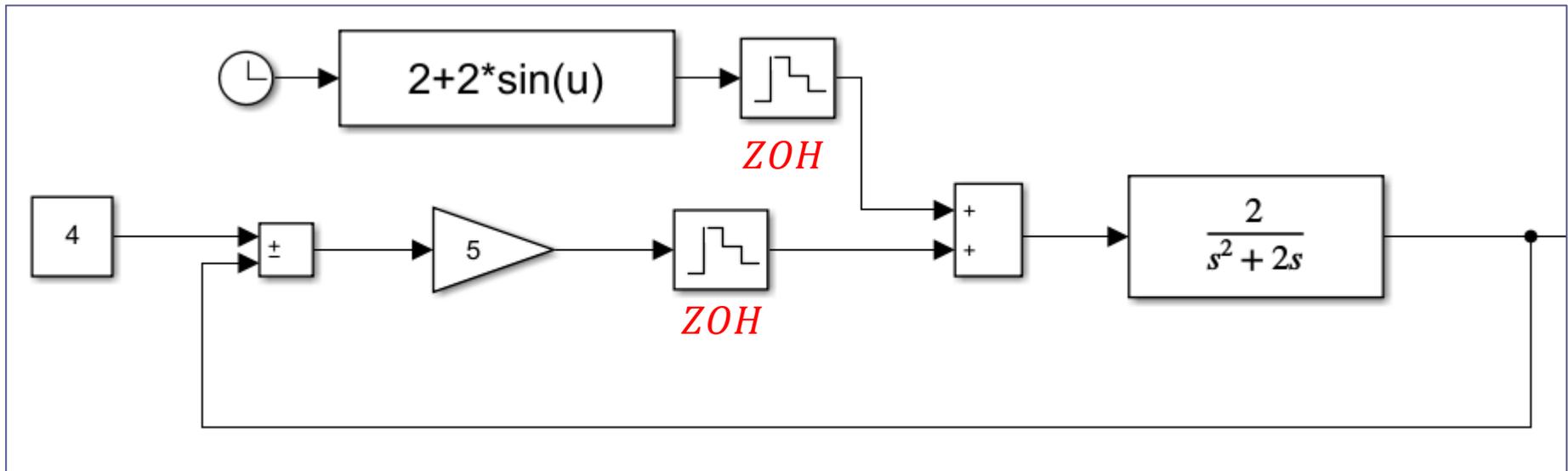
Confronto fra l'uscita del processo determinata mediante Simulink (curva tratteggiata) e la curva calcolata mediante analisi teoriche (curva continua).,



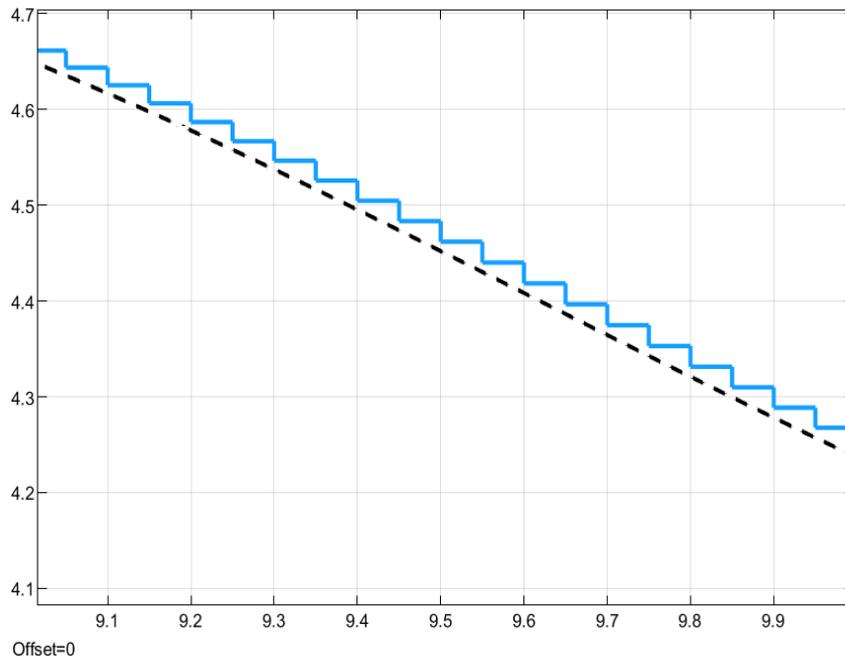
Zoom sull'intervallo temporale fra gli istanti 9 e 10



Osserviamo una lieve discrepanza fra i risultati simulativi e le predizioni teoriche, dovuta al fatto che **il segnale disturbante non è costante a tratti**. Rendiamolo tale inserendo un ulteriore blocco ZOH,



Risultati con disturbo che varia fra istanti di campionamento adiacenti (schema in alto nella slide precedente)



Risultati con disturbo costante a tratti (schema in basso nella slide precedente)

