Controllo digitale

Esercitazione 4
Sintesi mediante Luogo delle radici
(sintesi per cancellazione)

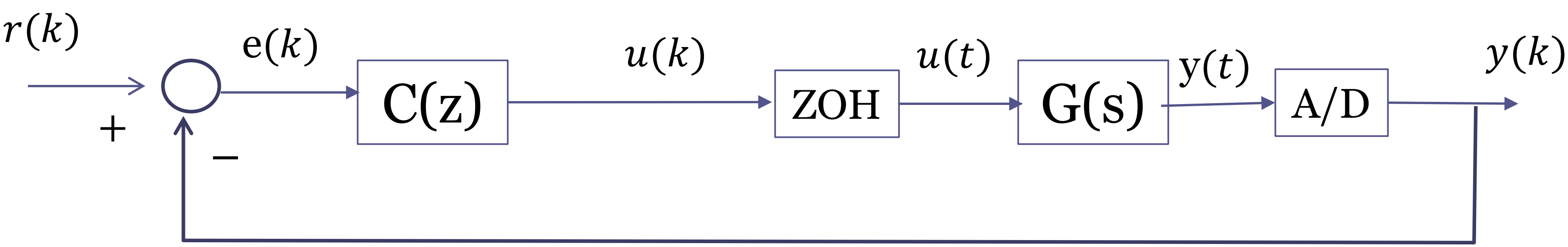
Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Esercizio

Si consideri un sistema a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{0.1}{s(s+0.1)}$$

ed il sistema di controllo digitale a retroazione unitaria



Ipotizzando un periodo di campionamento $T_c = 1\ s$, progettare un controllore digitale tale da soddisfare le seguenti specifiche

S1 Valore di regime dell'uscita per un set-point costante pari al valore del set-point

S2 Risposta al gradino a ciclo chiuso caratterizzata da una sovraelongazione percentuale non superiore al 17%

S3 Risposta al gradino a ciclo chiuso caratterizzata da un tempo di assestamento al 5% non superiore a 6 secondi

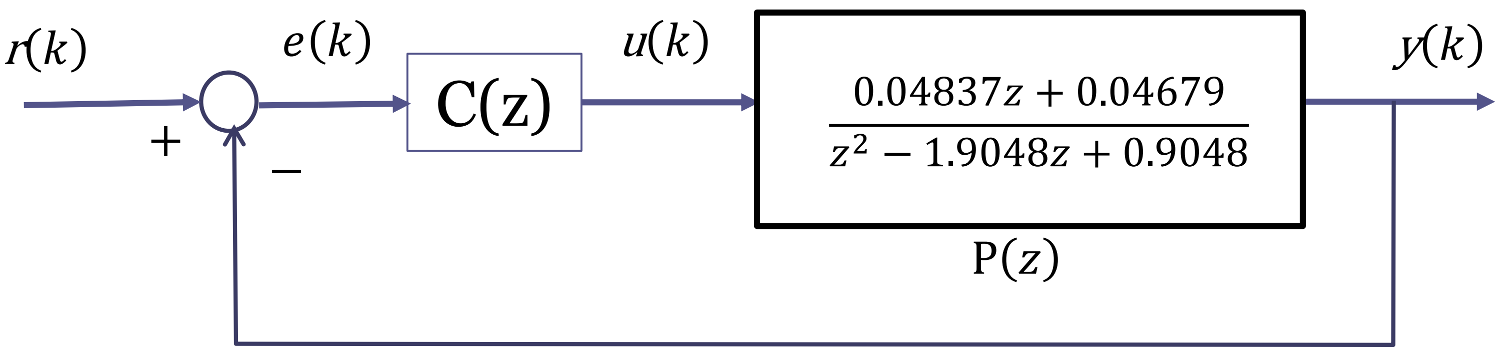
Calcoliamo la FdT fra $u(k)$ e $y(k)$ utilizzando Matlab.

$$P(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right]_{t=kT_c}\right\}$$

```
clear all,clc
numG=0.1;
denG=poly([0 -0.1]);
G=tf(numG,denG)
Tc=1;
P=c2d(G,Tc)
```

```
P =

  0.04837 z + 0.04679
 ----------------------
 z^2 - 1.905 z + 0.9048

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Sistema equivalente



I poli p_1^z e p_2^z della P(z) sono determinabili a partire dai poli p_1^s e p_2^s della G(s) (che valgono $p_1^s = 0$ e $p_2^s = -0.1$) secondo la formula

$$p_1^z = e^{T_c p_1^s} = 1$$

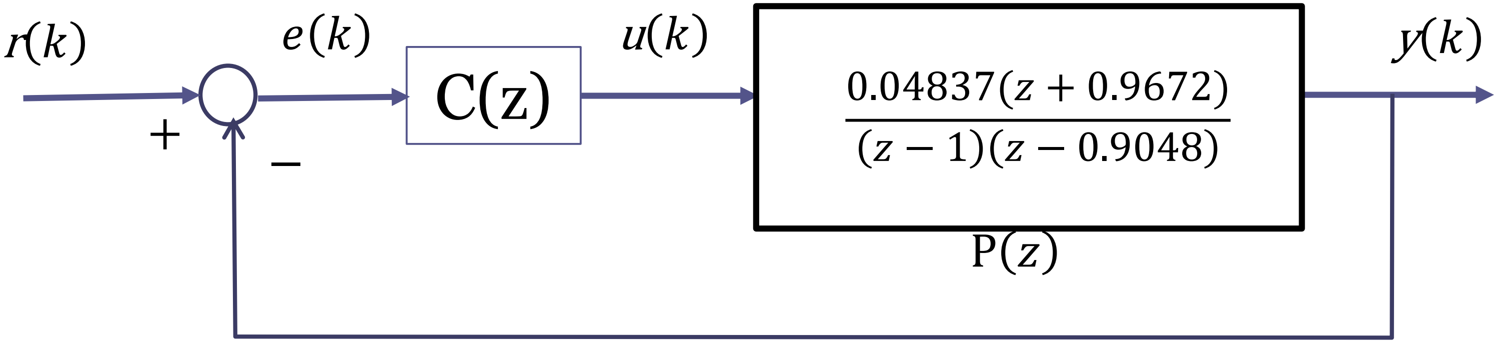
$$p_2^z = e^{T_c p_2^s} = e^{-0.1} = 0.9048$$

```
[numP denP]=tfdata(P,'v')
poliP=roots(denP)
zeriP=roots(numP)
```

```
poliP =

    1.0000
    0.9048


zeriP =

   -0.9672
```

Questo codice, per mezzo della funzione `tfdata`, «estrae» da una variabile Matlab di tipo Transfer Function i vettori associati ai polinomi a numeratore e denominatore, e ci permette quindi, con la funzione roots, di determinare gli zeri ed i poli della P(z)

Riscriviamo pertanto in forma differente la FdT P(z) del processo a tempo discreto da controllare



Grazie alle presenza nella FdT a ciclo aperto di un polo in $z = 1$ il sistema di controllo è almeno di tipo 1. Non è pertanto necessario per soddisfare la specifica S1 inserire dei poli in $z = 1$ nel controllore. La specifica S1 risulterà soddisfatta da qualunque controllore che garantisca la stabilità asintotica a ciclo chiuso del sistema di controllo.

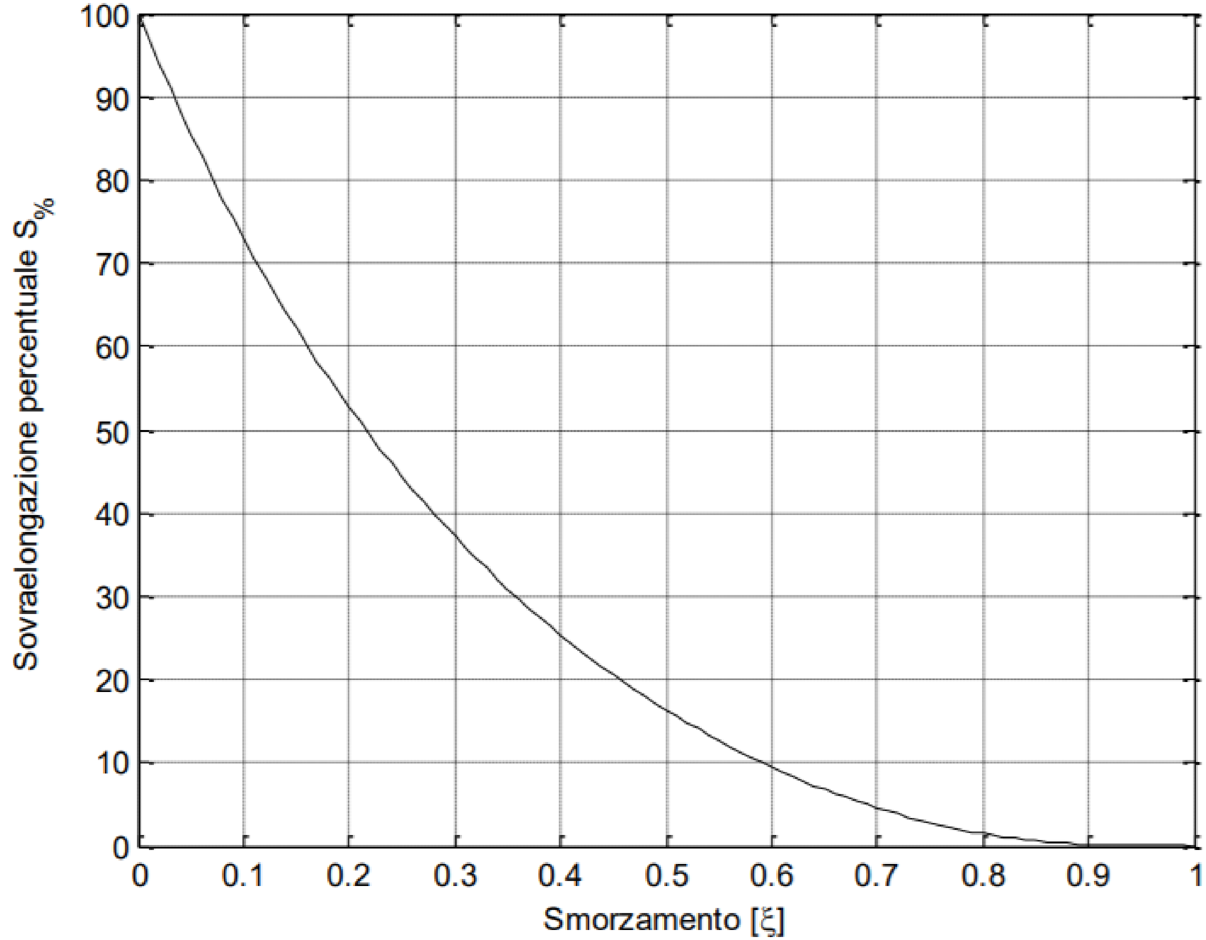
Un regolatore proporzionale è pertanto «compatibile» con la specifica S1. Indaghiamo quindi se un regolatore proporzionale sia in grado di soddisfare anche le altre due specifiche.

Dobbiamo preliminarmente chiederci:

in quale regione del piano devono essere collocati i poli di $W_r^y(z)$ affinché siano soddisfatte le specifiche S2 ed S3 ?

Sovraelongazione percentuale vs. smorzamento

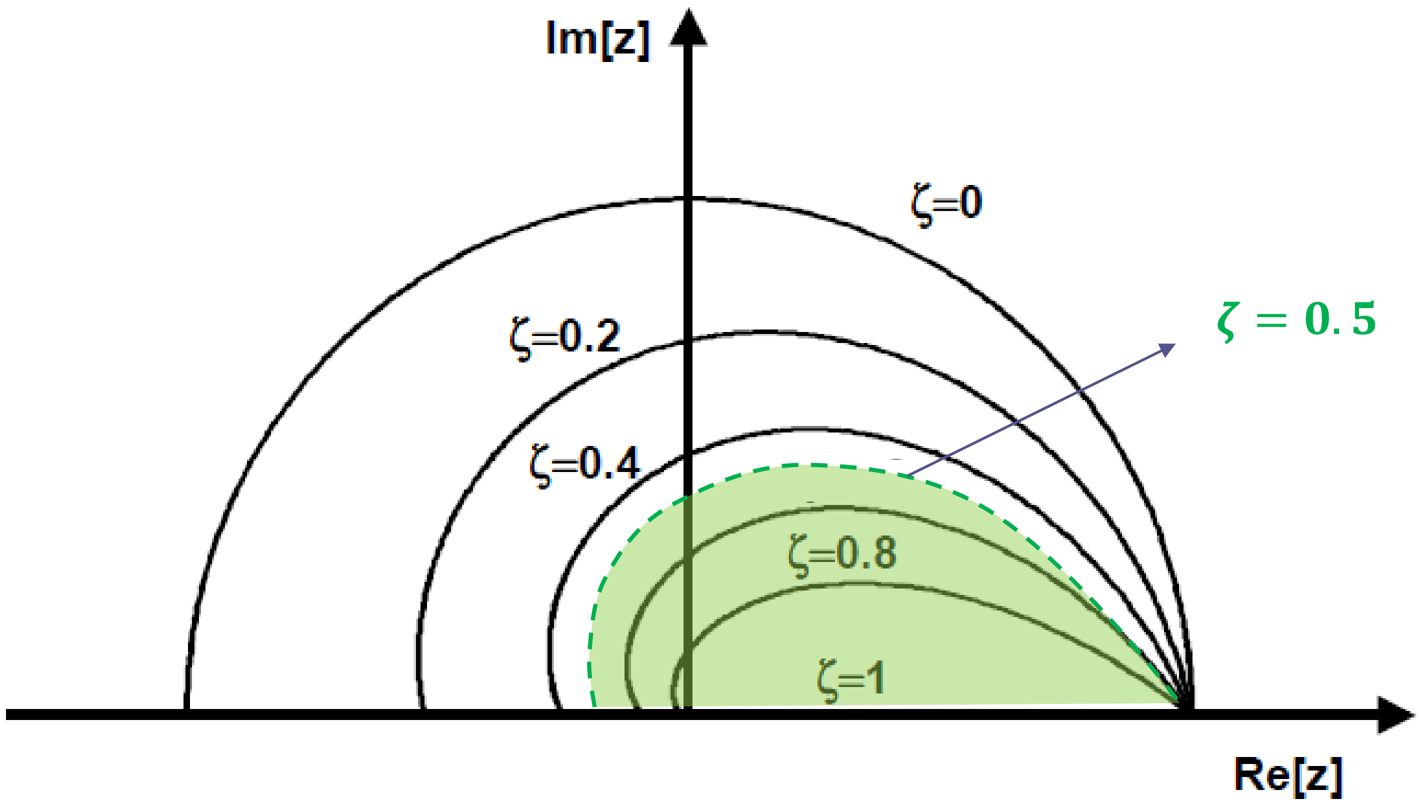
$$S_{\%} = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



$S_{\%} \leq 17$

$\xi \geq 0.5$

Affinché sia soddisfatta la specifica S2, si deve fare in modo che i poli del sistema a ciclo chiuso siano contenuti nella regione delimitata dalla cardioide associata al valore di smorzamento 0.5, evidenziata nella figura seguente (alla quale va aggiunta la regione speculare del semipiano inferiore)

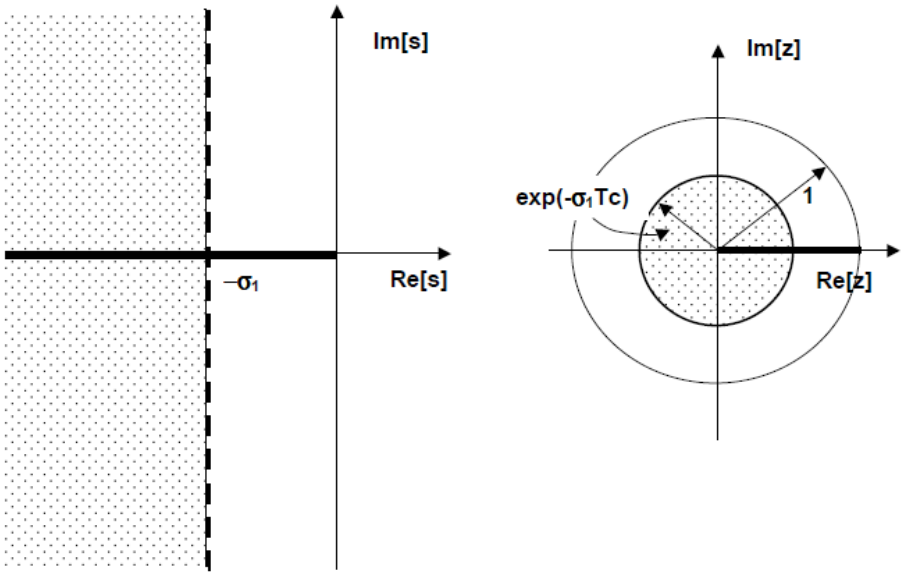


Affinché sia soddisfatta la specifica S3, si deve far riferimento alla seguente tabella, che riporta i tempi assestamento al 5%, 2% ed 1% di un sistema a tempo continuo avente due poli complessi coniugati.

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s)=\dfrac{\mu\omega_n^2}{\left(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2\right)}$	$\dfrac{3}{\xi\omega_n}$	$\dfrac{3.9}{\xi\omega_n}$	$\dfrac{4.6}{\xi\omega_n}$

Nella pratica si impiega più di frequente la seguente tabella approssimata

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s)=\dfrac{\mu\omega_n^2}{\left(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2\right)}$	$\dfrac{3}{\xi\omega_n}$	$\dfrac{4}{\xi\omega_n}$	$\dfrac{5}{\xi\omega_n}$



$$Re(s) \leq -\sigma_1$$

$$\Updownarrow$$

$$|z| \leq e^{-\sigma_1 T_c}$$

Facciamo i conti con i dati della specifica S3 dell'esercizio:

$$\frac{3}{\xi\omega_n} \leq 6s \Rightarrow \xi\omega_n \geq 0.5 \Rightarrow -\xi\omega_n \leq -0.5 \Rightarrow \sigma_1 = 0.5$$

$$\Rightarrow e^{-\sigma_1 T_c} = e^{-0.5} = 0.606$$

I poli a ciclo chiuso del sistema discretizzato dovranno giacere all'interno della circonferenza centrata nell'origine di raggio 0.606

Possono risultare utili in contesti differenti le seguenti formule riferite ad sistema avente poli reali negativi. Sono da impiegarsi quando i poli dominanti a ciclo chiuso sono reali negativi

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s)=\dfrac{\mu}{(\tau s+1)^2}$	5τ	6τ	7τ
$F(s)=\dfrac{\mu}{(\tau s+1)}$	3τ	4τ	5τ

Abbiamo determinato la regione del piano z nella quale dovranno ricadere i poli della FdT a ciclo chiuso, che è l'intersezione fra la cardioide associata al valore dello smorzamento pari a $\xi \geq 0.5$ (si noti che tale regione dipende anche dal periodo di campionamento) e la circonferenza di raggio 0.606.

Verifichiamo se un controllore proporzionale con il guadagno scelto in modo opportuna può confinare i poli della FdT a ciclo chiuso in tale regione ammissibile.

Tracciamo il luogo delle radici, ed analizziamolo

Creare la seguente funzione Matlab, chiamata «`plotcircle.m`»

```
function out = plotcircle(R)
% PLOTCIRCLE Funzione che sovrappone al luogo delle radici
% di un sistema a tempo discreto la circonferenza
% centrata nell'origine di raggio R assegnato,
% associata ad una restrizione sul tempo di
% assestamento.
% Sintassi: plotcircle(R), con R=raggio.

teta=0:0.01:2*pi;
x=R*cos(teta);
y=R*sin(teta);
hold on
plot(x,y,'r')
hold off
end
```

Creare la seguente funzione Matlab, chiamata «plotcardioide.m»

```
function out = plotcardioide(xi,Tc)
%PLOTCARDIOIDE Funzione che sovrappone al luogo delle radici
% di un sistema a tempo discreto
%la cardioide associata ad un valore prefissato dello smorzamento.
%Sintassi: plotcardioide(xi,Tc), con xi=smorzamento, Tc=periodo di
%campionamento

omegan=linspace(0,pi/(Tc*sqrt(1-xi^2)),1000);
M=exp(-xi*omegan*Tc);
teta=sqrt(1-xi.^2)*omegan*Tc;
cardx=M.*cos(teta);
cardy=M.*sin(teta);
hold on
plot(cardx,cardy)
plot(cardx,-cardy)
hold off
end
```

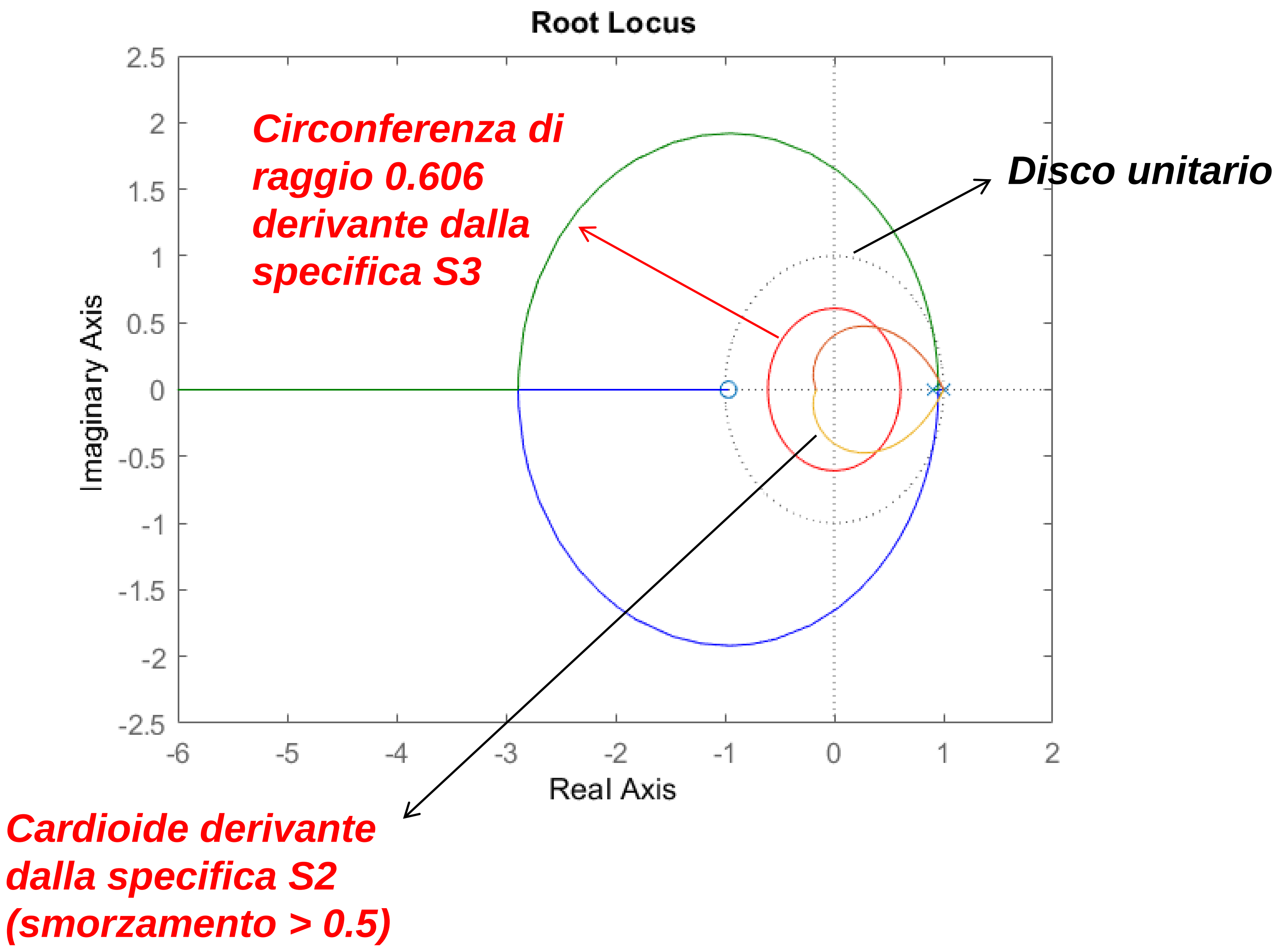
```
%% LUOGO DELLE RADICI CON REGOLATORE PROPORZIONALE
rlocus(P)
```

```
plotcircle(0.606)
```

Tracciamento della circonferenza di raggio $e^{-\sigma_1 T_c} = 0.606$

```
plotcardioide(0.5,Tc)
```

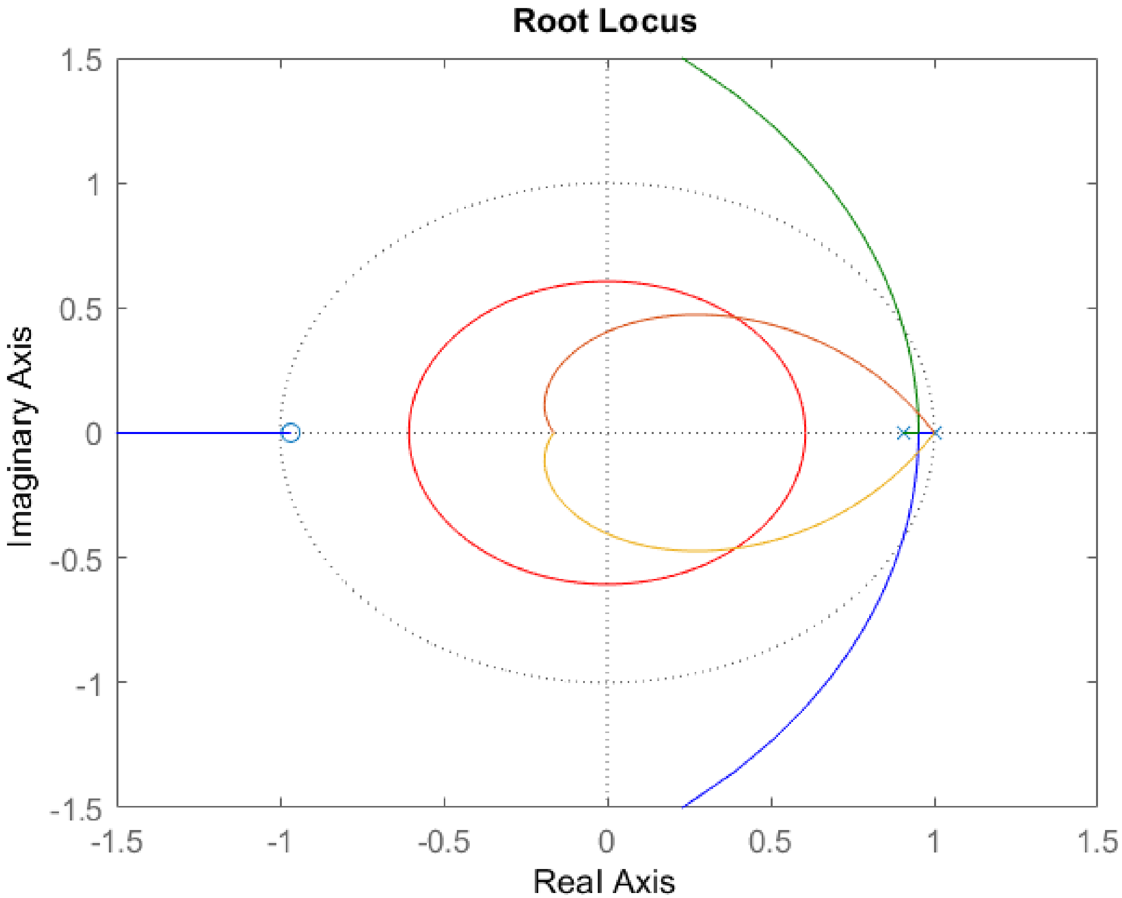
Tracciamento della cardioide associata al valore di smorzamento $\xi = 0.5$



Root Locus
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
Imaginary Axis
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
Real Axis
Circonferenza di raggio 0.606 derivante dalla specifica S3
Disco unitario
Cardioide derivante dalla specifica S2 (smorzamento > 0.5)

Facciamo uno zoom sulla regione di interesse.

```
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
```



Appare chiaro come i rami del luogo delle radici non convergano mai all'interno della regione ammissibile. Con un regolatore proporzionale si può soddisfare la specifica sulla sovraelongazione ma non quella sul tempo di assestamento

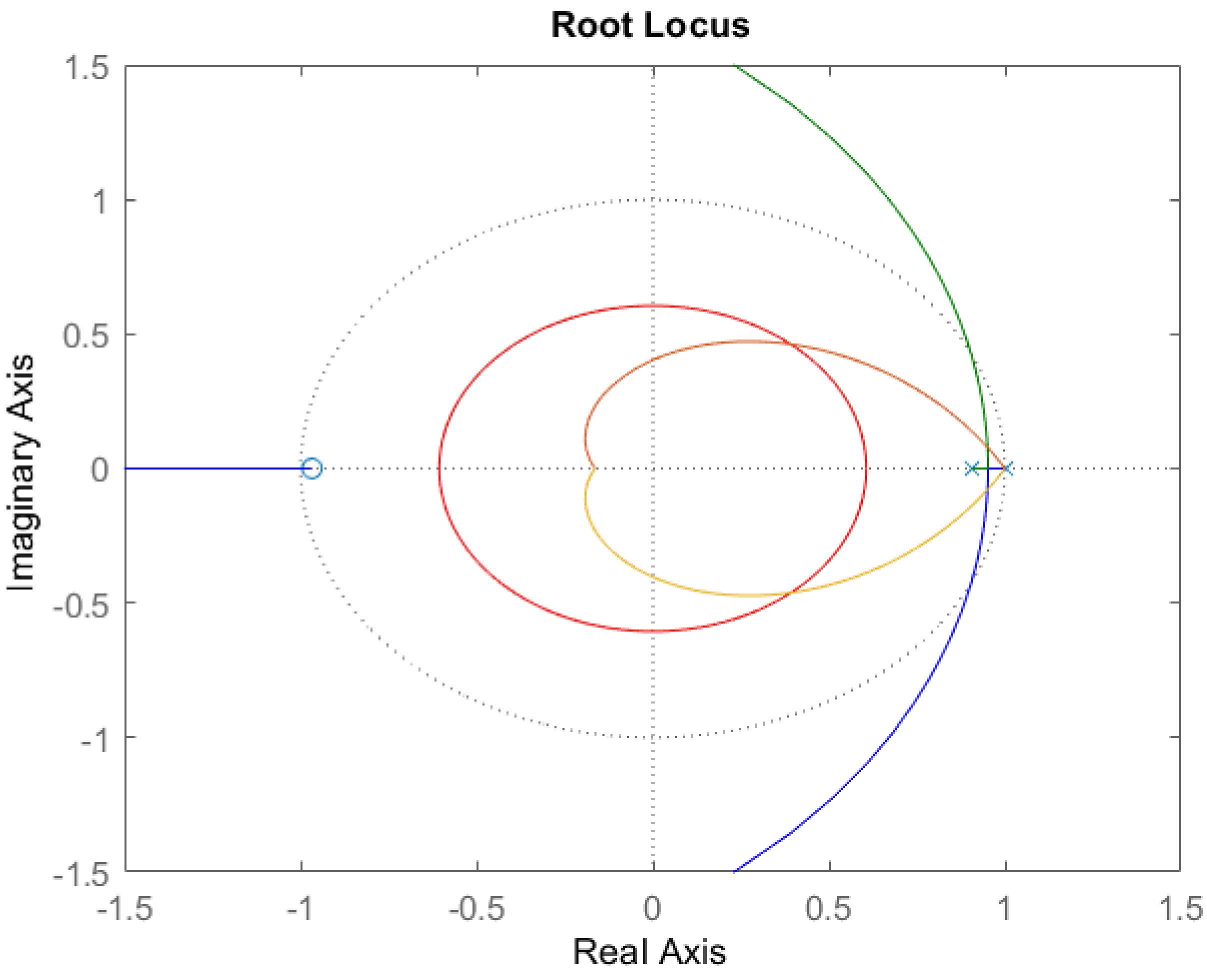
Come potremmo modificare la struttura del regolatore ?

Nella sintesi mediante Luogo delle radici, una scelta frequente è quella di introdurre nel regolatore una o più «coppie polo zero»

$$C(z) = k\frac{z-a}{z-b}$$

in cui lo zero $z = a$ viene utilizzato per cancellare dalla FdT a ciclo aperto un polo del processo che rende il luogo delle radici non soddisfacente, mentre il polo in $z = b$ «sostituisce» nella FdT a ciclo aperto il polo appena cancellato, e lo colloca in una posizione che renda il luogo delle radici compatibile con le specifiche del problema.

N.B. Se $b = 1$ ed $a > 0$, il regolatore $C(z)$ soprariportato risulta essere un regolatore P.I. (proporzionale integrale) digitale Nel presente esercizio lo parametrizzeremo in modo differente (b non sarà posto pari ad 1)



Se il polo del processo in z = 0.9048 venisse «spostato piu a sinistra» sicuramente le cose migliorerebbero. Si potrebbe avere un punto doppio (che attualmente si trova all'incirca in 0.95) collocato più a sinistra e tale da ricadere all'interno della regione ammissibile.

Scegliamo pertanto un regolatore nella forma

$$C(z) = k\frac{z - 0.9048}{z - b}$$

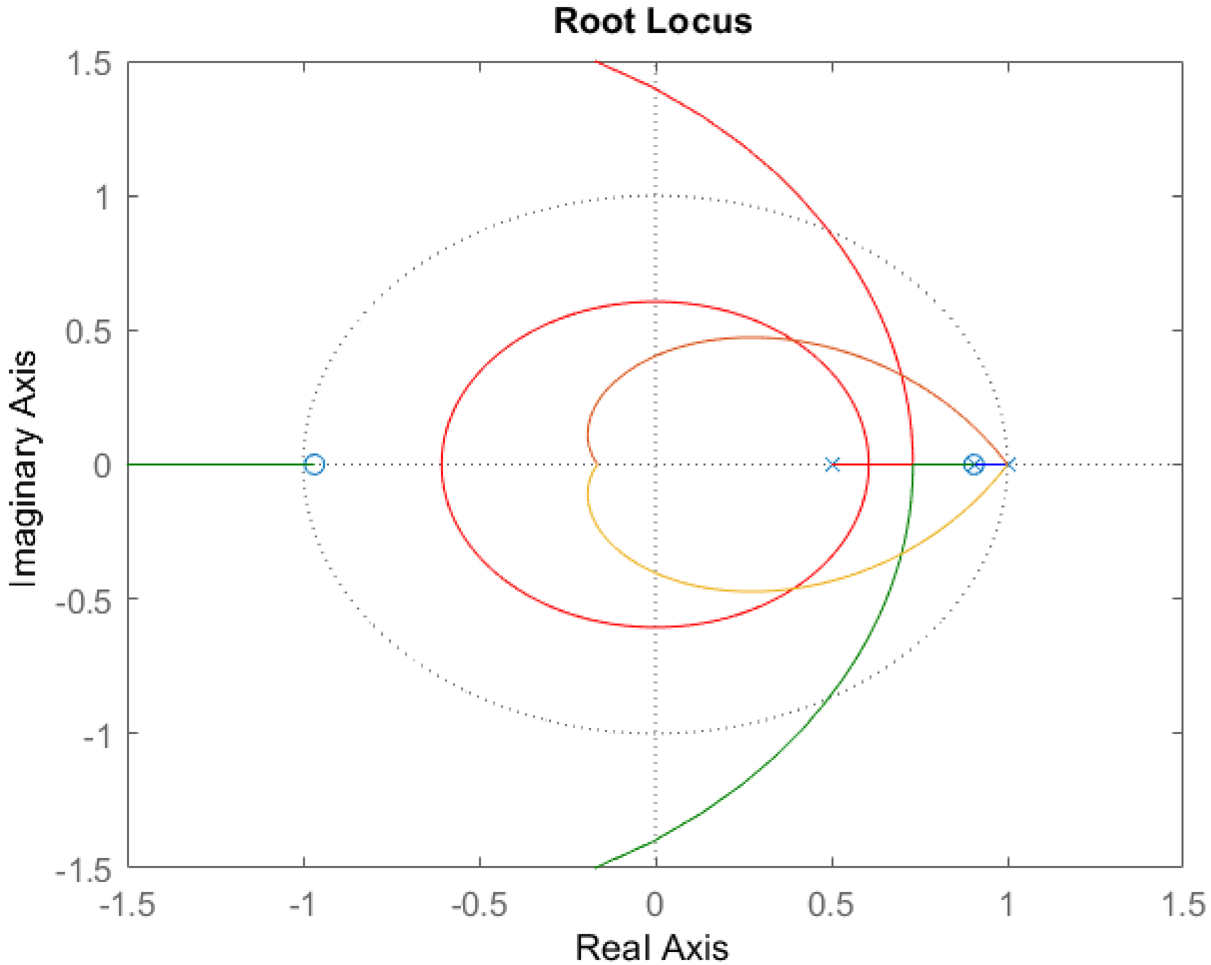
e procediamo per tentativi con la determinazione del parametro b che «rimpiazzerà» nella FdT a ciclo aperto il polo precedentemente collocato in $z = 0.9048$ che viene cancellato dallo zero del regolatore

Proviamo con $b = 0.5$

$$C(z) = k\frac{z - 0.9048}{z - 0.5}$$

```
%% LUOGO DELLE RADICI CON REGOLATORE C=k(z-0.9048)/(z-0.5)

C=tf([1 -0.9048],[1 -0.5],-1)
rlocus(C*P)
plotcardioide(0.5)
plotcircle(0.606)
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
```

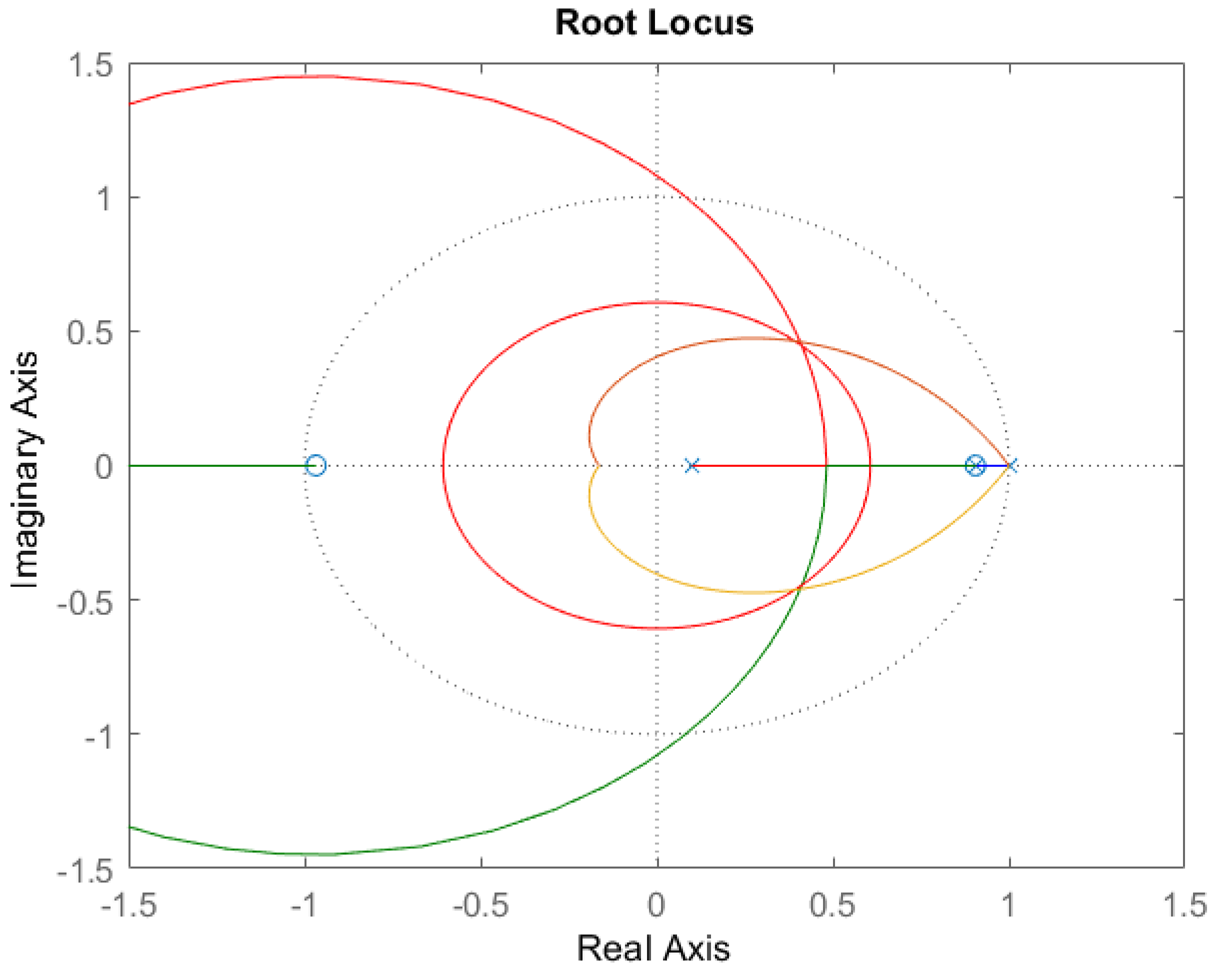
$$C(z) = k\frac{z - 0.9048}{z - 0.5}$$



Le cose vanno meglio, ma ancora non basta. Il polo del regolatore va collocato ancora più a sinistra. Proviamo in 0.1

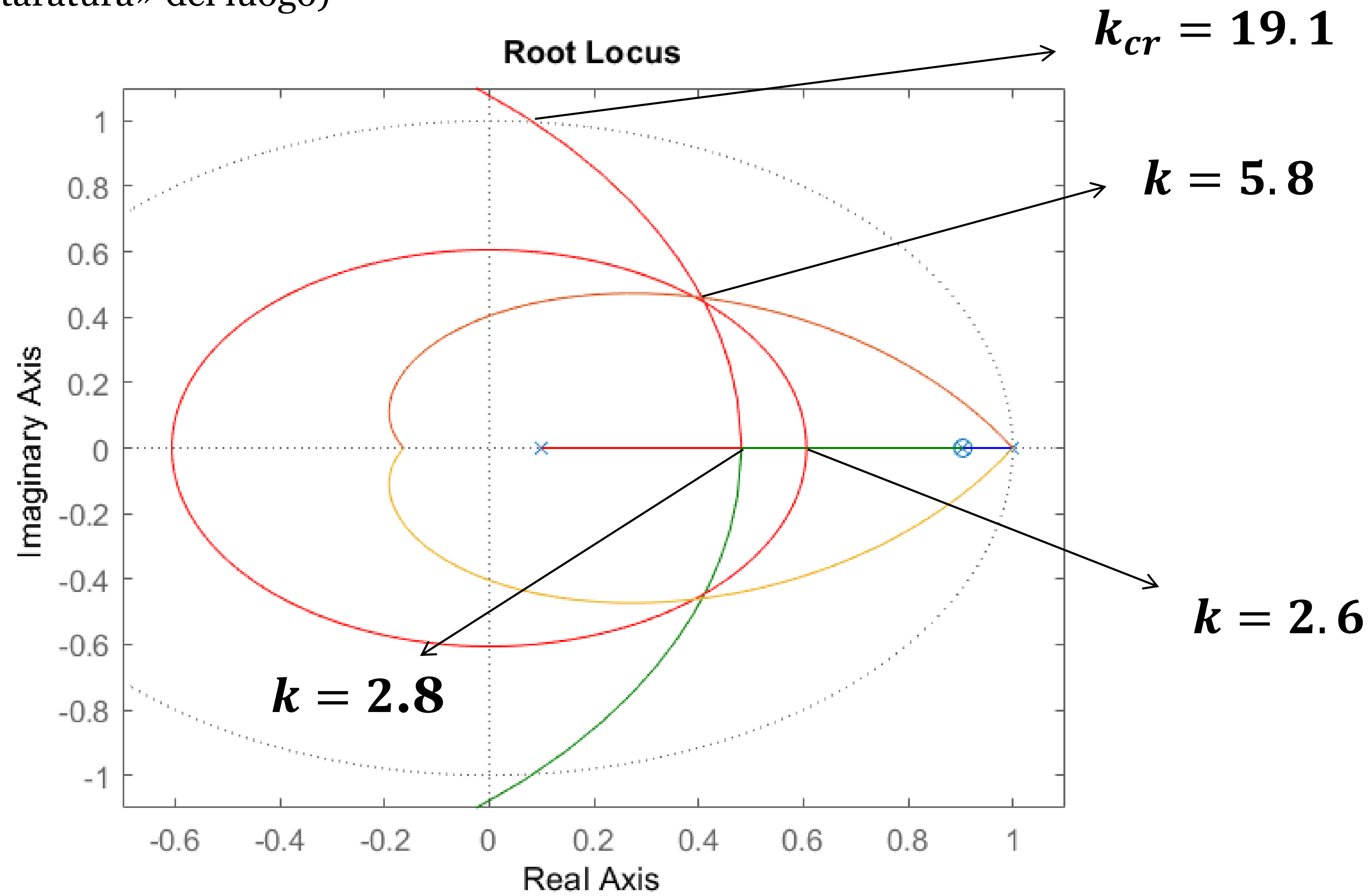
```
%% LUOGO DELLE RADICI CON REGOLATORE C=k(z-0.9048)/(z-0.1)

C=tf([1 -0.9048],[1 -0.1],-1)
rlocus(C*P)
plotcardioide(0.5)
plotcircle(0.606)
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
```

$$C(z) = k\,\frac{z - 0.9048}{z - 0.1}$$



Abbiamo ottenuto il nostro scopo. Ora i rami del luogo delle radici entrano nella regione ammissibile, e si può determinare un intervallo di valori del guadagno k tale da garantire che entrambi i poli a ciclo chiuso si trovano nella regione ammissibile

Individuiamo nel luogo delle radici i valori di guadagno associati ai punti caratteristici (ciò potrebbe essere fatto su carta eseguendo la procedura di «taratura» del luogo)



Una possibile soluzione dell'esercizio è pertanto costituita dal regolatore

$$C(z) = k\frac{z - 0.9048}{z - 0.1} \qquad 2.6 \leq k \leq 5.8$$

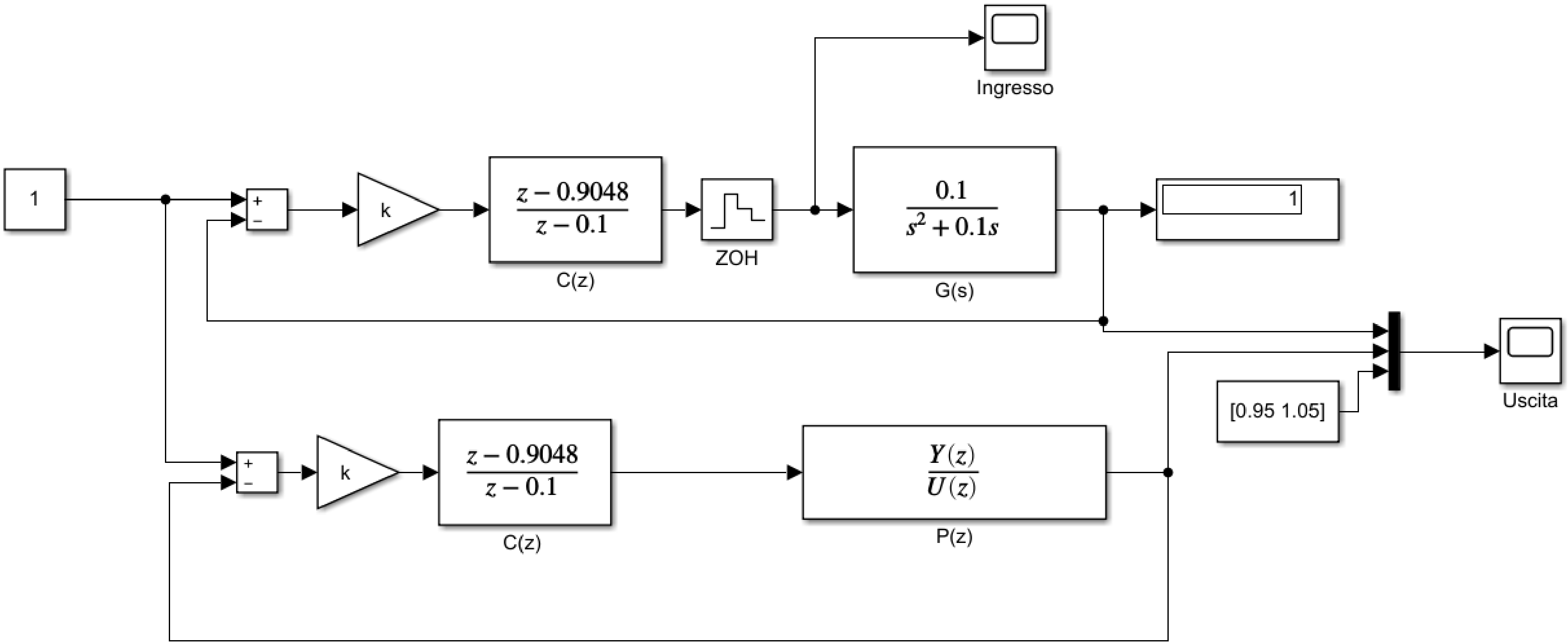
Quale scelta per il guadagno appare maggiormente conveniente ?

La taratura $k = 2.8$ è il massimo valore di guadagno tale da garantire una risposta a ciclo chiuso esente da oscillazioni e sovraelongazione.

La taratura $k = 5.8$ offre, rispetto alla taratura $k = 2.8$, un migliore grado di soppressione dei disturbi. Per contro, la risposta diventa oscillatoria, pur nel soddisfacimento delle specifiche del problema.

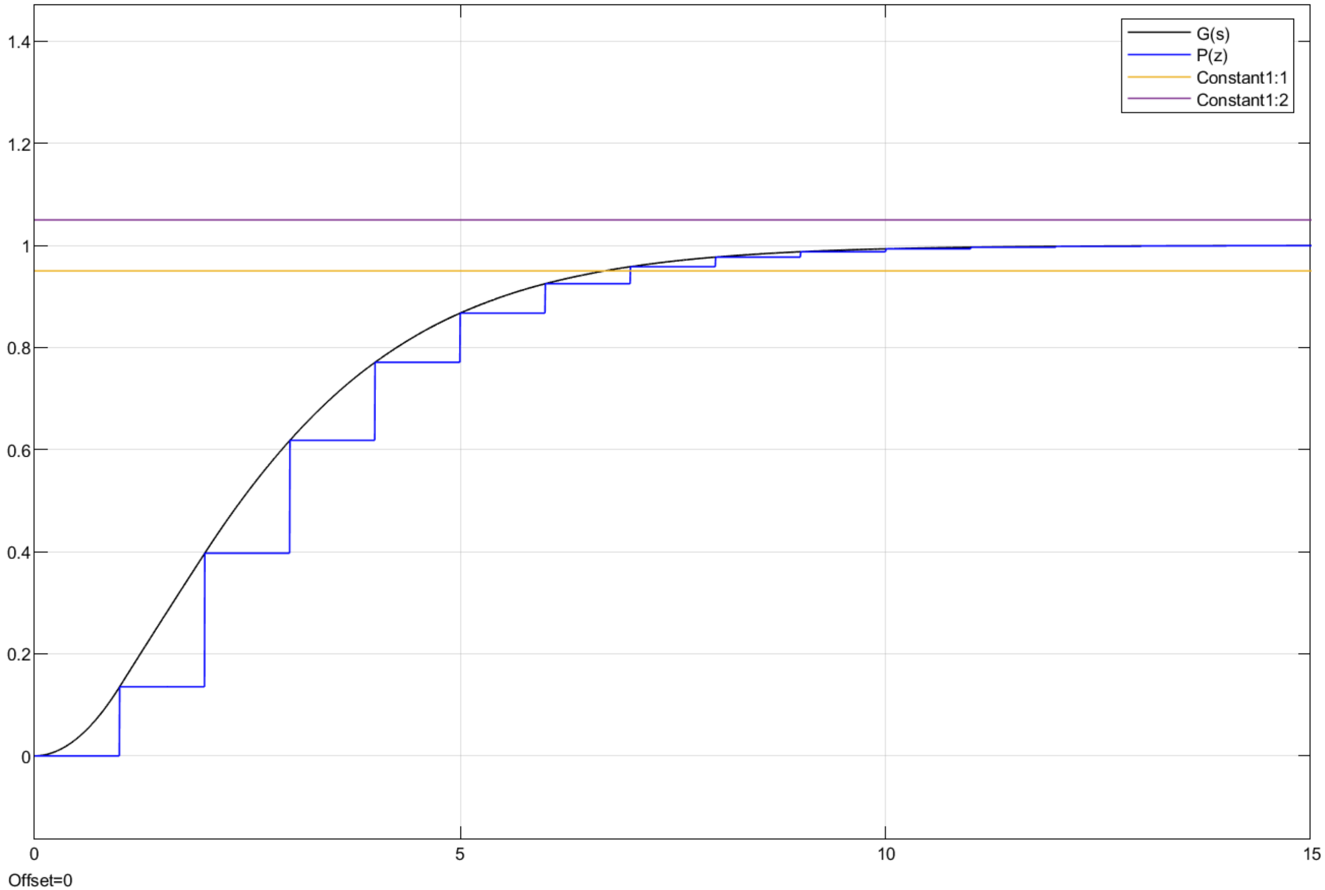
Si tenga presente che i valori di guadagno individuati nella slide precedente sono approssimativi, ed i valori «veri» possono essere leggermente differenti.

Simuliamo il sistema di controllo nelle due varianti seguenti: uno schema che contiene il processo a tempo continuo preceduto dallo ZOH, ed uno schema completamente realizzato mediante funzioni di trasferimento a tempo discreto.



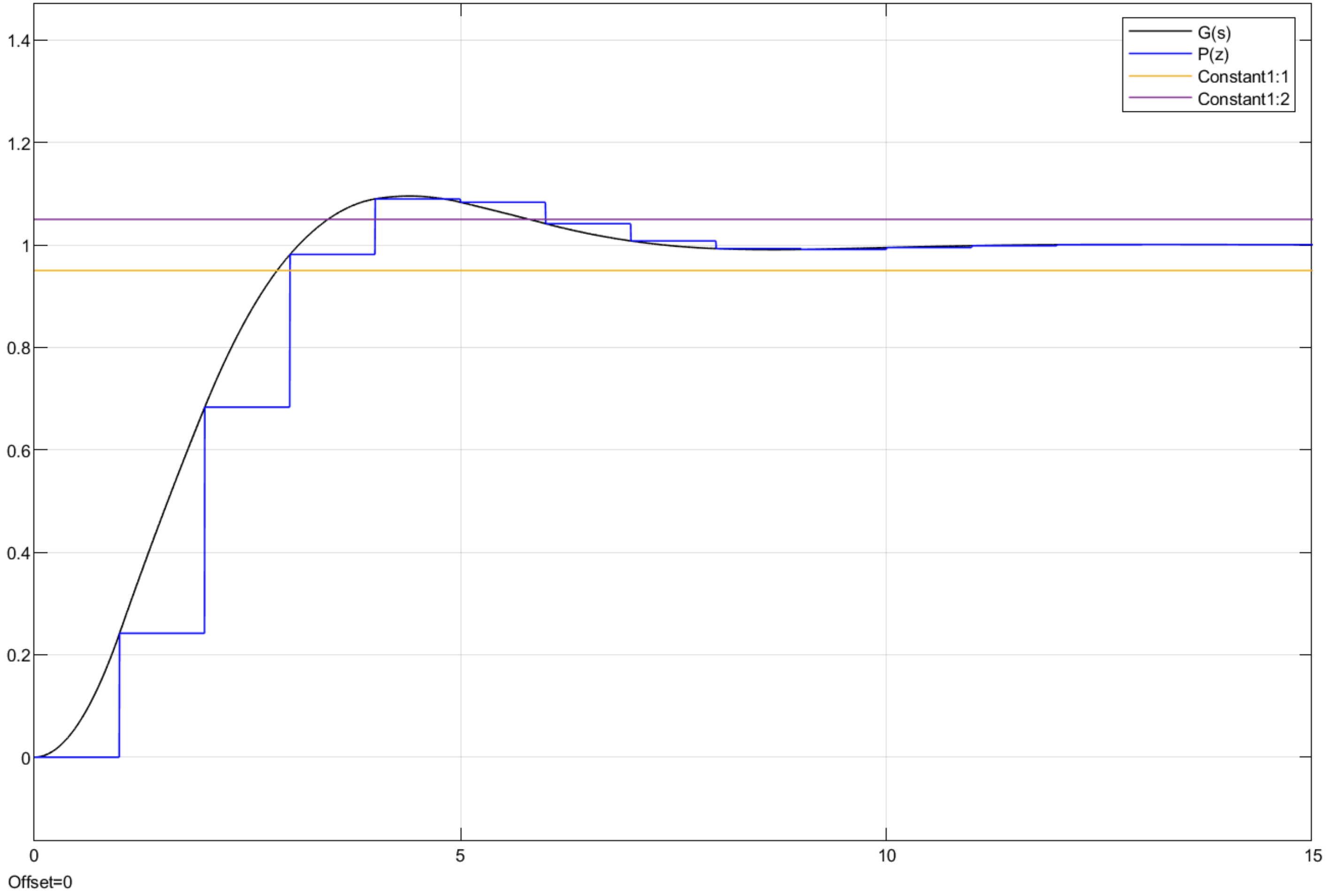
Es04_SintesiLdR.slx

$k = 2.8$ (punto doppio, poli reali)



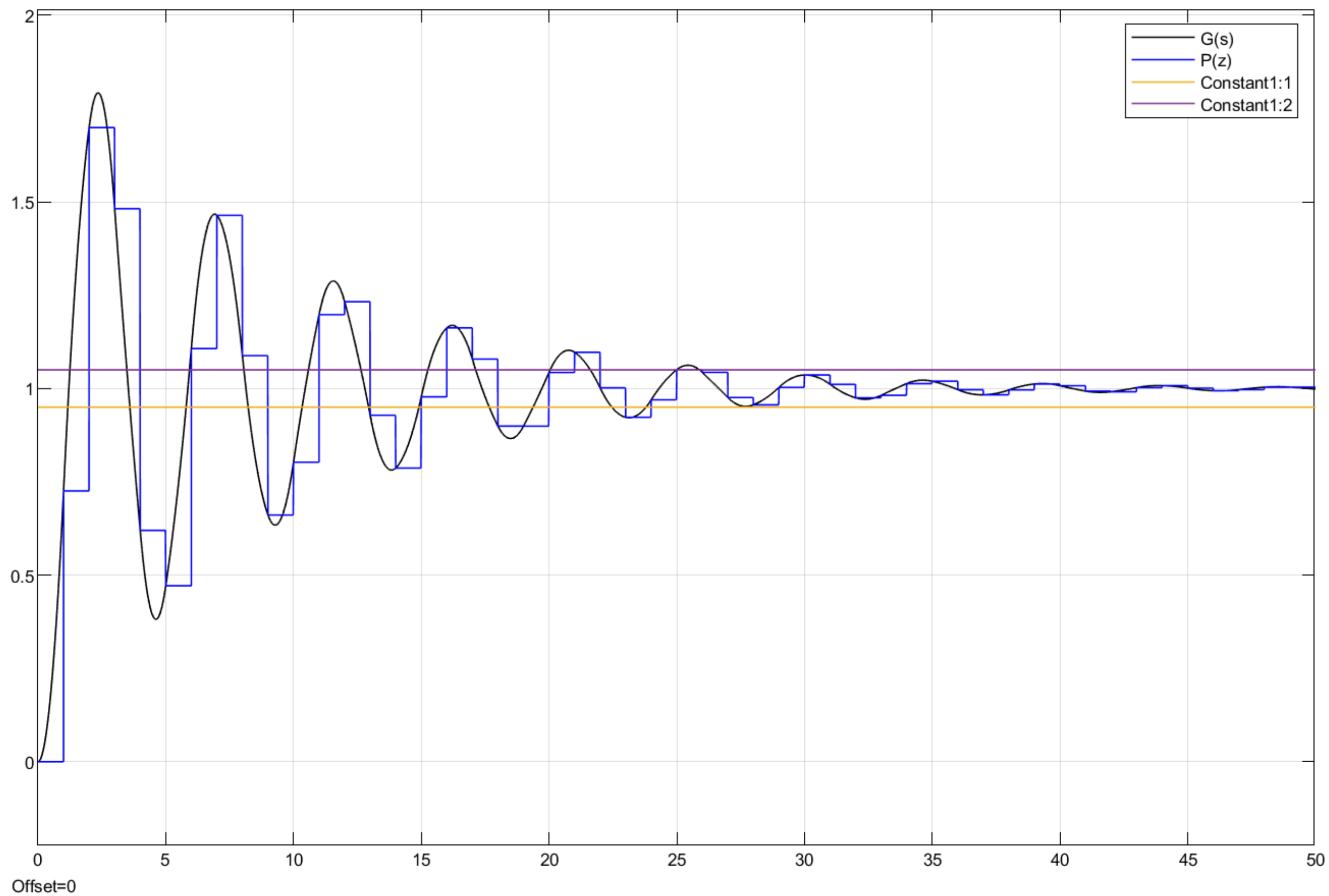
Come atteso, la curva è monotona crescente in quanto i poli a ciclo chiuso sono reali positivi (e coincidenti). Il tempo di assestamento è lievemente fuori specifica. Come mai ?

$\boldsymbol{k} = \mathbf{5}$ (poli complessi coniugati nella regione ammissibile)



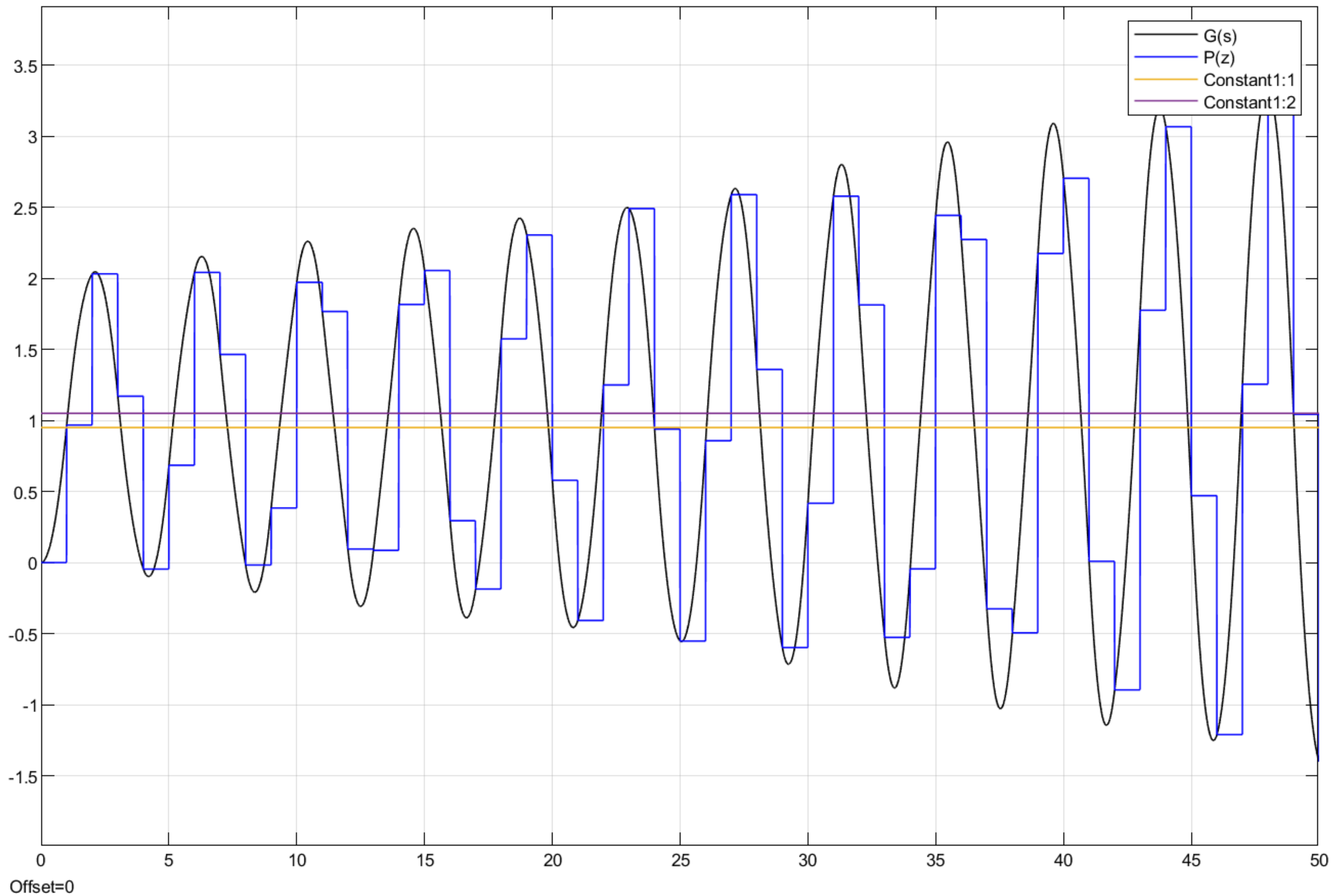
Come atteso, la curva è caratterizzata da oscillazioni in quanto i poli a ciclo chiuso sono complessi coniugati, e da una sovraelongazione secondo specifica S2. Anche il tempo di assestamento ora soddisfa la specifica S3.

$\boldsymbol{k = 15}$ (poli complessi coniugati al di fuori dalla regione ammissibile)



Il sistema di controllo è asintoticamente stabile a ciclo chiuso ma sia la sovraelongazione che il tempo di assestamento violano abbondantemente le rispettive specifiche.

$\boldsymbol{k = 20}$ (poli complessi coniugati al di fuori del disco unitario)

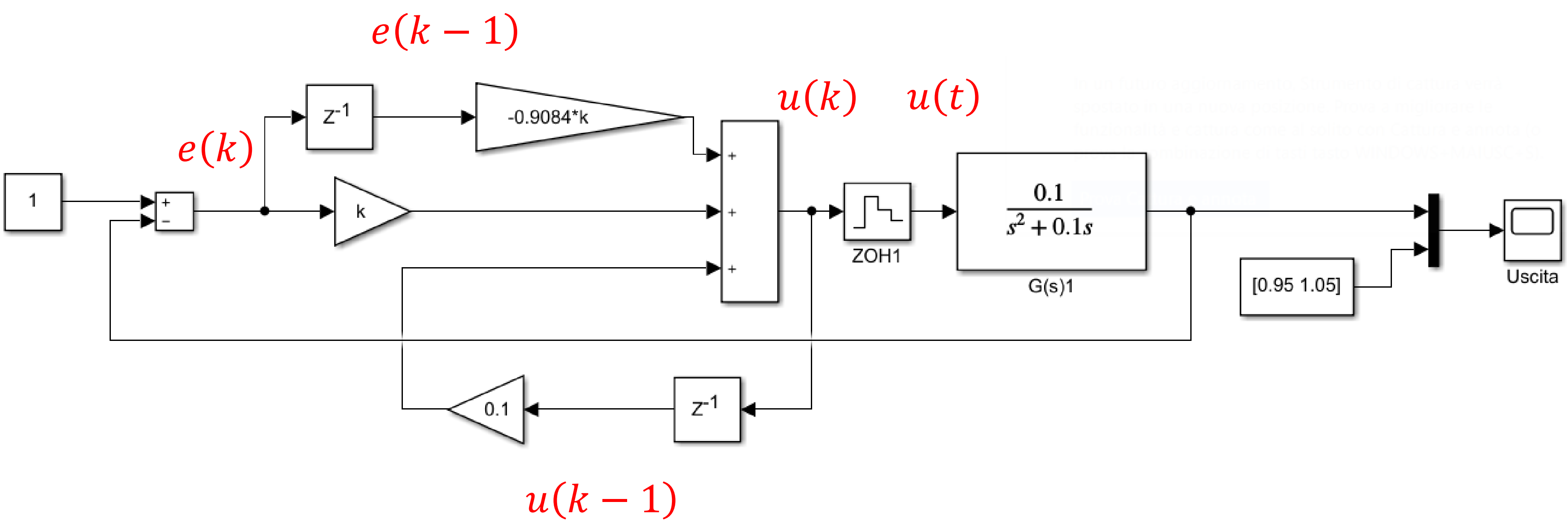


Il sistema di controllo è diventato instabile a ciclo chiuso.

Ora realizziamo il regolatore mediante una equazione alle differenze

$$C(z) = k\frac{z - 0.9048}{z - 0.1} \iff u(k) = 0.1u(k-1) + ke(k) - 0.9084\, k\, e(k-1)$$

Il seguente modello Simulink implementa il regolatore per mezzo della equazione alle differenze ad esso associato



Pseudo-codice di controllo

Every T_c seconds do

Acquisisci $\mathrm{y}(k)$ da linea di input

Calcola $\mathrm{e}(k) = r(k) - y(k)$

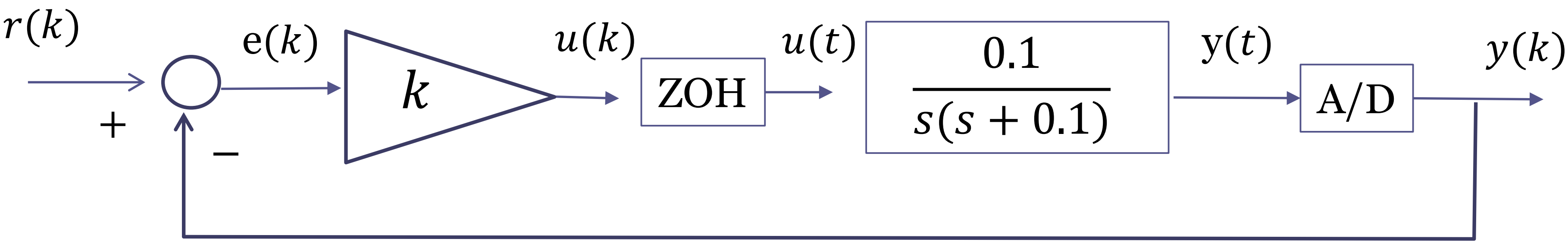
Calcola $u(k) = 0.1u(k-1) + ke(k) - 0.9084\,k\,e(k-1)$

$$\left.\begin{array}{l} u(k-1) \coloneqq u(k) \\ \\ e(k-1) \coloneqq e(k) \end{array}\right\} \text{Registro a scorrimento}$$

Scrivi $u(k)$ su linea di output

Quesito 2

Con riferimento al medesimo sistema di controllo digitale a retroazione unitaria dell'esempio precedente

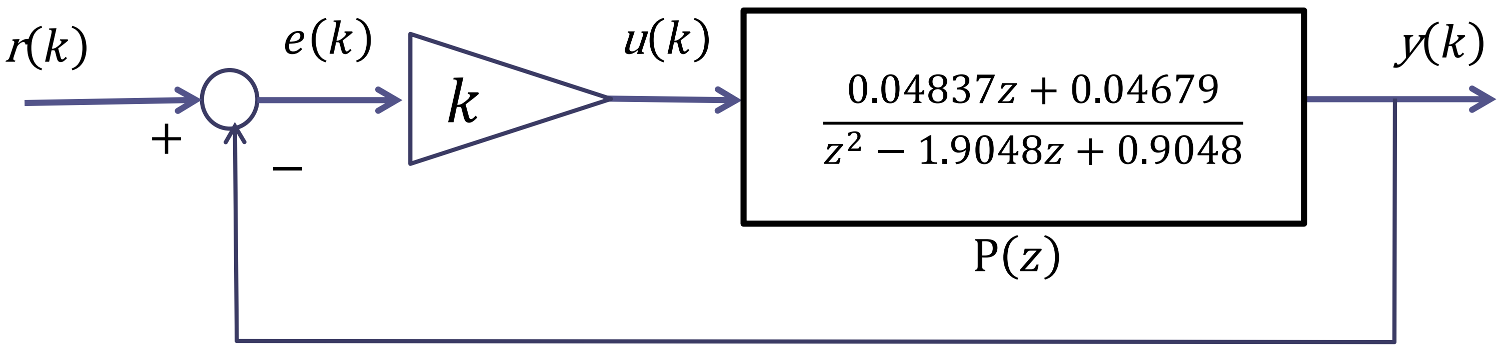


Determinare mediante il Criterio di Jury i valori del guadagno critico (oltre il quale il sistema a ciclo chiuso diventa instabile) corrispondenti ai due valori distinti del periodo di campionamento:

$$T_c = 1\ s$$

$$T_c = 0.1\ s$$

Nel caso in cui $\boldsymbol{T_c = 1\ s}$, abbiamo gia determinato la funzione di trasferimento a tempo discreto ed il relativo schema equivalente



Il polinomio caratteristico della FdT a ciclo chiuso è la somma fra il numeratore ed il denominatore della FdT a ciclo aperto

$$P_{car}(z) = z^2 - 1.9048z + 0.9048 + k(0.04837z + 0.04679)$$

$$= z^2 + (0.04837k - 1.9048)z + 0.9048 + 0.04679k$$

Un polinomio di grado 2 $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ $a_2 > 0$

è Jury-stabile se e solo se

1. $|a_0| < a_2$
2. $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 > 0$
3. $P(-1) = a_2 - a_1 + a_0 > 0$

$$P_{car}(z) = z^2 + (0.04837k - 1.9048)z + 0.9048 + 0.04679k$$

$$a_0 = 0.9048 + 0.04679k$$

$$a_1 = 0.04837k - 1.9048$$

$$a_2 = 1$$

Prima condizione

$$|a_0| < a_2 \Rightarrow |0.9048 + 0.04679k| < 1 \Rightarrow k < \frac{1 - 0.9048}{0.04679} = 2.03$$

Seconda condizione

$$a_2 + a_1 + a_0 > 0 \Rightarrow 1 + 0.04837k - 1.9048 + 0.9048 + 0.04679k > 0$$

$$\Rightarrow 0.0952k > 0 \Rightarrow k > 0$$

Terza condizione

$$a_2 - a_1 + a_0 > 0 \Rightarrow 1 - 0.04837k + 1.9048 + 0.9048 + 0.04679k > 0$$

$$\Rightarrow 3.8096 - 0.0016k > 0 \Rightarrow k < 2381$$

Si ottiene pertanto:

$$\boxed{\mathbf{0 < k < 2.03}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{k_{cr} = 2.03}}$$

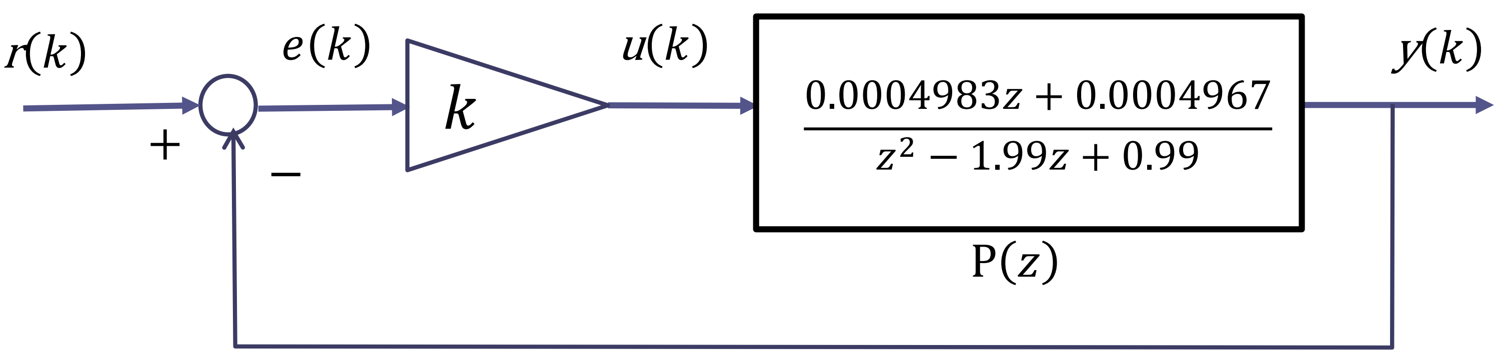
$\boxed{T_c = 0.1\ s}$

Calcoliamo la FdT fra $u(k)$ e $y(k)$ utilizzando Matlab.

```
clear all,clc
numG=0.1;
denG=poly([0 -0.1]);
G=tf(numG,denG)
Tc=0.1;
P=c2d(G,Tc)
```

```
P =

  0.0004983 z + 0.0004967
  -----------------------
    z^2 - 1.99 z + 0.99

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Sistema equivalente



$$P_{car}(z) = z^2 - 1.99z + 0.99 + k(0.0004983z + 0.0004967)$$

$$= z^2 + (0.0004983k - 1.99)z + 0.99 + 0.0004967k$$

$a_2 = 1$ $\quad$ $a_1 = 0.0004983k - 1.99$ $\quad$ $a_0 = 0.99 + 0.0004967k$

Prima condizione

$$|a_0| < a_2 \Rightarrow |0.99 + 0.0004967k| < 1 \Rightarrow k < \frac{1 - 0.99}{0.0004967} = 20.13$$

Seconda condizione

$$a_2 + a_1 + a_0 > 0 \Rightarrow 1 + 0.0004983k - 1.99 + 0.99 + 0.0004967k > 0$$

$$\Rightarrow 0.00095k > 0 \Rightarrow k > 0$$

Terza condizione

$$a_2 - a_1 + a_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 0.0004983k + 1.99 + 0.99 + 0.0004967k > 0$$

$$\Rightarrow \quad 3.98 - 0.0000016k > 0 \quad \Rightarrow \quad k > 2487500$$

Si ottiene pertanto:

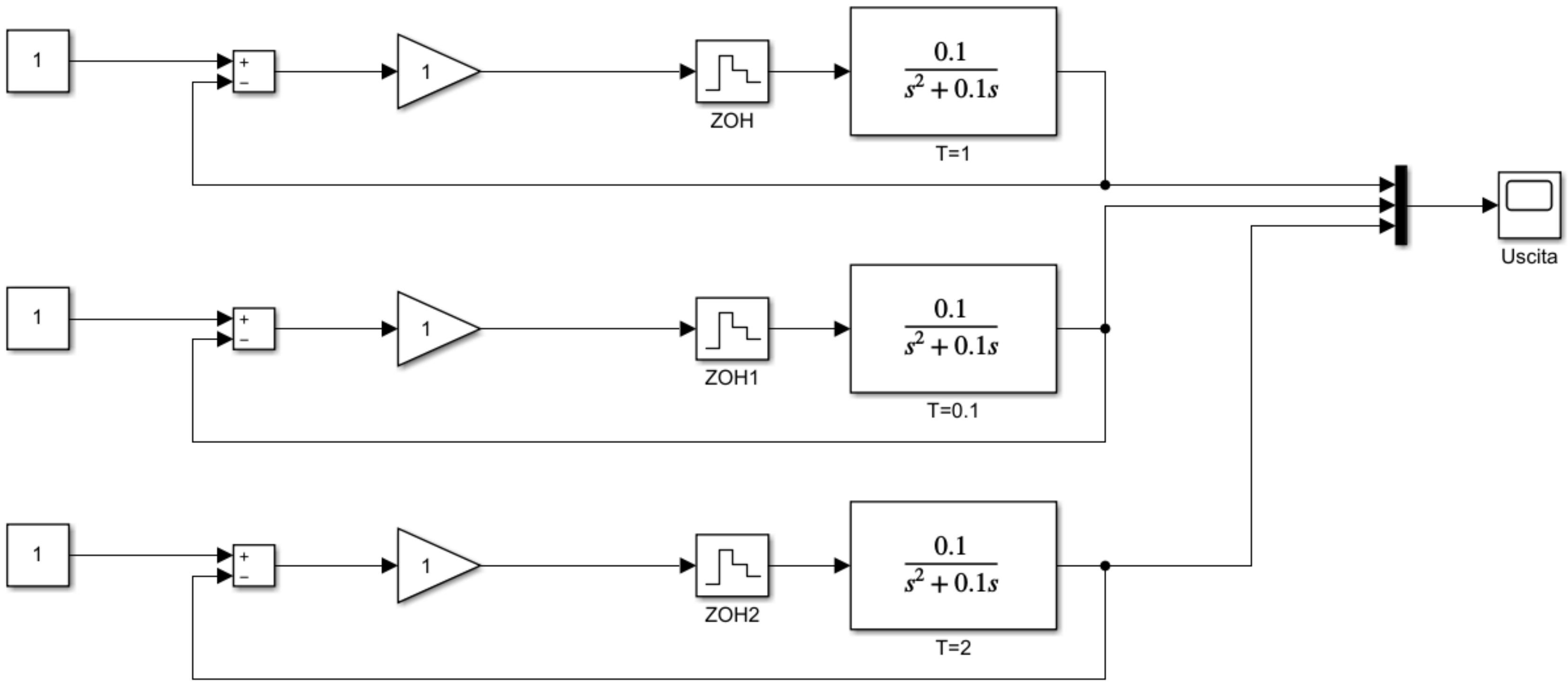
$$\boxed{\mathbf{0 < \boldsymbol{k} < 20.13}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{k_{cr}} = \mathbf{20.13}}$$

Con un periodo di campionamento 10 volte più piccolo abbiamo ottenuto un guadagno critico k_{cr} approssimativamente 10 volte maggiore. Ciò è sicuramente positivo, in quanto avere la possibilità di impiegare dei valori di guadagno maggiori comporta l'ottenimento di migliori proprietà di precisione a regime e reiezione dei disturbi.

Confrontiamo il medesimo sistema di controllo (un regolatore proporzionale con guadagno unitario) in corrispondenza di diversi periodi di campionamento:

$\boldsymbol{T_c = 0.1\ s}$ $\boldsymbol{T_c = 1\ s}$ $\boldsymbol{T_c = 2\ s}$

(inserire i diversi valori di T_c nei tre blocchi ZOH)



Es04_Quesito2.slx

Si osservi il consistente deterioramento delle prestazioni all'aumentare del periodo di campionamento: