Controllo digitale

Analisi e simulazione di sistemi a tempo discreto

Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Dalla esercitazione 2019 n.2

(https://www.alessandro-giua.it/UNICA/CD/)

Esercizio 4. Si consideri un sistema descritto dalla sequente equazione alle differenze:

$$4y(k+2) - y(k) = u(k).$$

(a) Si determini la funzione di trasferimento di tale sistema.

(b) Si determini, mediante z-trasformata, la risposta forzata per un segnale di ingresso $u(k) = k\delta_{-1}(k)$.

(c) Si discuta se tale risposta possa scomporsi in un termine transitorio e un termine di regime.

(d) Si determini una rappresentazione in variabili di stato per tale sistema.

Esercizio 6. È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema tempo-discreto lineare e stazionario automono

$$\begin{cases} x(k+1) & = & A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) & = & C\,x(k) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini mediante z-trasformata l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita a partire dallo stato iniziale $x(0) = [1 \ \ 2]^T$.

(b) Si determini mediante z-trasformata l'evoluzione forzata dello stato e dell'uscita per un segnale di ingresso $u(k) = (-1)^k$.

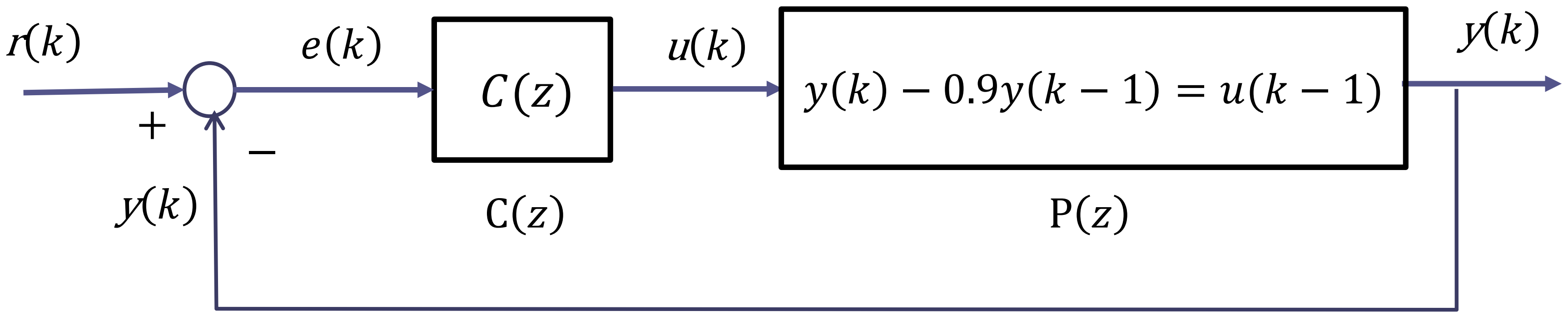
(c) Si determini un modello ingresso-uscita per tale sistema.

Problema 1

Si consideri un sistema a tempo discreto descritto dal legame ingresso-uscita

$$y(k) - 0.9y(k-1) = u(k-1)$$

ed il sistema di controllo a retroazione unitaria



Quesito 1. Si progetti, se possibile, un controllore digitale C(z) in grado di garantire per il sistema a ciclo chiuso un legame istantaneo fra l'uscita ed il riferimento del tipo

$y(k) = \gamma\, r(k-1)$ dove γ è una costante qualunque

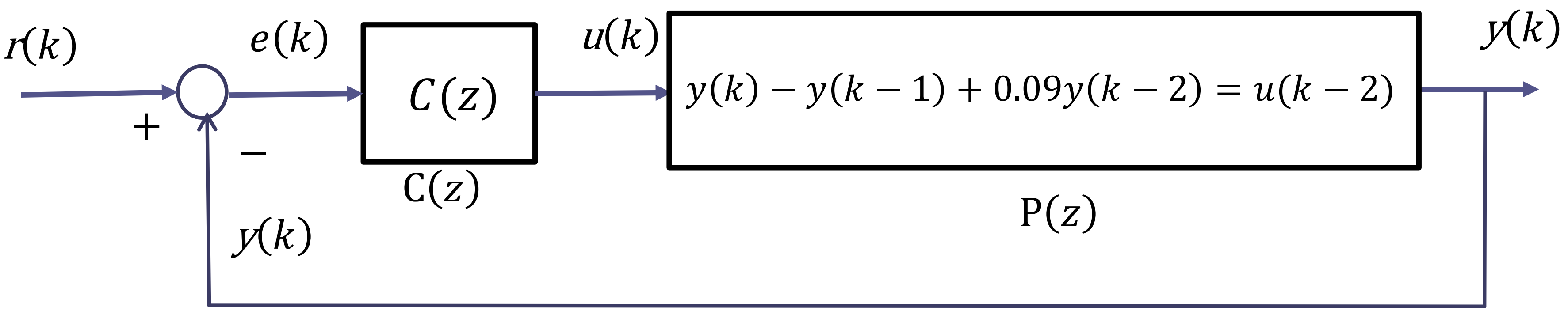
Quesito 2. Si progetti, se possibile, un controllore digitale C(z) in grado di garantire per il sistema a ciclo chiuso il legame istantaneo $y(k) = r(k-1)$

Problema 2

Si consideri un sistema a tempo discreto descritto dal legame ingresso-uscita

$$y(k) - y(k-1) + 0.09y(k-2) = u(k-2)$$

ed il sistema di controllo a retroazione unitaria



Si progetti, se possibile, un controllore digitale $\mathrm{C}(z)$ in grado di garantire per il sistema a ciclo chiuso uno fra i seguente legami fra il riferimento $r(k)$ e l'uscita $y(k)$:

$$y(k) = r(k-1) \qquad\qquad y(k) = r(k-2)$$

Esercizio 4. Si consideri un sistema descritto dalla sequente equazione alle differenze:

$$4y(k+2) - y(k) = u(k).$$

(a) Si determini la funzione di trasferimento di tale sistema.

(b) Si determini, mediante z-trasformata, la risposta forzata per un segnale di ingresso $u(k) = k\delta_{-1}(k)$.

(c) Si discuta se tale risposta possa scomporsi in un termine transitorio e un termine di regime.

(d) Si determini una rappresentazione in variabili di stato per tale sistema.

(a) Si determini la funzione di trasferimento di tale sistema.

$$4y(k+2) - 3y(k) = u(k)$$

Forma std. in avanti di una equazione alle differenze

$$a_n\, y(k+n) + \ldots + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = b_m\, u(k+m) + \ldots + b_1\, u(k+1) + b_0\, u(k)$$

Il modello ingresso-uscita oggetto di questo esercizio è caratterizzato dai parametri

$$n = 2 \qquad m = 0$$

$$a_2 = 4 \qquad a_1 = 0 \qquad a_0 = -3 \qquad b_0 = 1$$

La funzione di trasferimento del sistema è pertanto

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0} = \frac{1}{4z^2 - 3}$$

La FdT $W(z)$ non ha zeri ed i suoi poli p_1, p_2 sono le radici del polinomio caratteristico $4z^2 - 3$

$$p_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866 \qquad\qquad p_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.866$$

(b) Si determini, mediante z-trasformata, la risposta forzata per un segnale di ingresso $\boldsymbol{u(k) = k\delta_{-1}(k)}$

Sulla base della definizione di funzione di trasferimento, la trasformata Z della risposta forzata si determina facendo il prodotto fra la FdT del sistema e la trasformata Z della sequenza di ingresso

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \qquad\qquad \mathrm{Y}(z) = W(z)U(z)$$

Il segnale di ingresso $u(k) = k\delta_{-1}(k)$ ha trasformata Z

$$U(z) = \mathbb{Z}\{k\delta_{-1}(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Si ha pertanto

$$\mathrm{Y}(z) = W(z)U(z) = \frac{1}{4z^2-3} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{z^2-\frac{3}{4}} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{\frac{1}{4}z}{(z-0.866)(z+0.866)(z-1)^2}$$

Determiniamone la trasformata inversa eseguendo la decomposizione in fratti semplici di $\mathrm{Y}(z)/z$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{4}\frac{1}{(z-0.866)(z+0.866)(z-1)^2} = \frac{A}{(z-0.866)} + \frac{B}{(z+0.866)} + \frac{C}{(z-1)} + \frac{D}{(z-1)^2}$$

$$A = \left[(z-0.866)\frac{Y(z)}{z}\right]_{z=0.866} = \left[\frac{1}{4}\frac{1}{(z+0.866)(z-1)^2}\right]_{z=0.866} = 8.0386$$

$$B=\left[(z+0.866)\frac{Y(z)}{z}\right]_{z=-0.866}=\left[\frac{1}{4}\frac{1}{(z-0.866)(z-1)^2}\right]_{z=-0.866}=-0.0415$$

$$D=\left[(z-1)^2\frac{Y(z)}{z}\right]_{z=1}=\left[\frac{1}{4}\frac{1}{(z-0.866)(z+0.866)}\right]_{z=1}=0.9998$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-0.866)(z+0.866)(z-1)^2}=\frac{8.0386}{(z-0.866)}-\frac{0.0415}{(z+0.866)}+\frac{C}{(z-1)}+\frac{0.9998}{(z-1)^2}$$

Per determinare il residuo C mancante è possibile, come alternativa alla applicazione della formula standard

$$C=\left[\frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2\frac{Y(z)}{z}\right\}\right]_{z=1}=\left[\frac{-8z}{(4z^2-3)^2}\right]_{z=1}=-8$$

Valutare in $z = 0$ i membri sinistro e destro della seguente espressione

$$\frac{1}{4}\frac{1}{(z-0.866)(z+0.866)(z-1)^2} = \frac{8.0386}{(z-0.866)} - \frac{0.0415}{(z+0.866)} + \frac{C}{(z-1)} + \frac{0.9998}{(z-1)^2}$$

$$\Big\downarrow \; z = 0$$

$$-\frac{1}{3} = -9.2824 - 0.0479 - C + 0.9998 \quad \Rightarrow \quad C = -7.99$$

Si ottiene pertanto

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{8.0386}{(z-0.866)} - \frac{0.0415}{(z+0.866)} - \frac{8}{(z-1)} + \frac{0.9998}{(z-1)^2}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\boxed{Y(z) = \frac{8.0386z}{(z-0.866)} - \frac{0.0415z}{(z+0.866)} - \frac{8z}{(z-1)} + \frac{0.9998z}{(z-1)^2}}$$

$$8\,\delta_{-1}(k) \qquad 0.9998\,k\,\delta_{-1}(k)$$

$$Y(z) = \boxed{\frac{8.0386z}{(z-0.866)}} - \boxed{\frac{0.0415z}{(z+0.866)}} - \boxed{\frac{8z}{(z-1)}} + \boxed{\frac{0.9998z}{(z-1)^2}}$$

$$8.0386 \cdot (0.866)^k\,\delta_{-1}(k) \qquad 0.0415 \cdot (-0.866)^k\,\delta_{-1}(k)$$

Procedendo, mediante l'impiego delle Tabelle delle trasformate Z notevoli, alla antitrasformazione della Y(z), si ottiene la seguente espressione complessiva per l'evoluzione temporale della risposta forzata

$$y(k) = [8.0386 \cdot (0.866)^k - 0.0415 \cdot (-0.866)^k - 8 + 0.9998\,k] \cdot\ \delta_{-1}(k)$$

(c) Si discuta se tale risposta possa scomporsi in un termine transitorio e un termine di regime.

$$y(k) = [8.0386 \cdot (0.866)^k - 0.0415 \cdot (-0.866)^k - 8 + 0.9998\, k] \cdot \delta_{-1}(k)$$

La risposta forzata è la somma di 4 termini. I primi due sono associati ai modi stabili del sistema, mentre le terza e la quarta componente della risposta sono associate ai modi associati all'ingresso, uno dei quali (il modo costante) è al limite di stabilità, mentre l'altro (il modo a rampa) è instabile.

Pertanto, il termine transitorio della risposta è costituito dai primi due termini

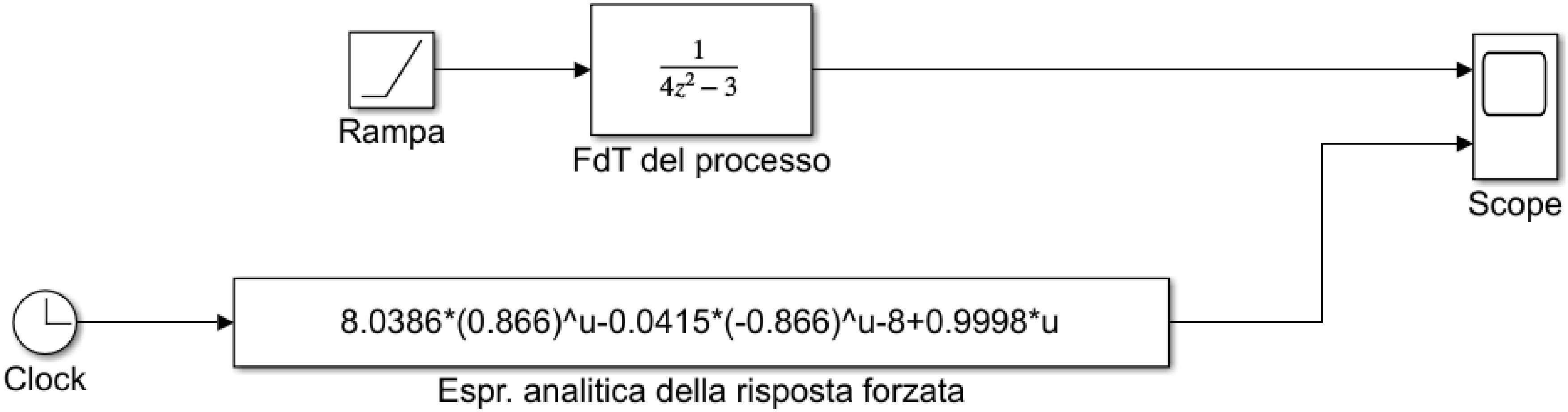
$$y_{trans}(k) = [8.0386 \cdot (0.866)^k - 0.0415 \cdot (-0.866)^k] \cdot \delta_{-1}(k)$$

Pertanto, il termine di regime della risposta è costituito dagli ultimi due termini

$$y_{regime}(k) = [-8 + 0.9998\, k] \cdot \delta_{-1}(k)$$

Realizziamo un modello Simulink per verificare la correttezza delle analisi svolte.

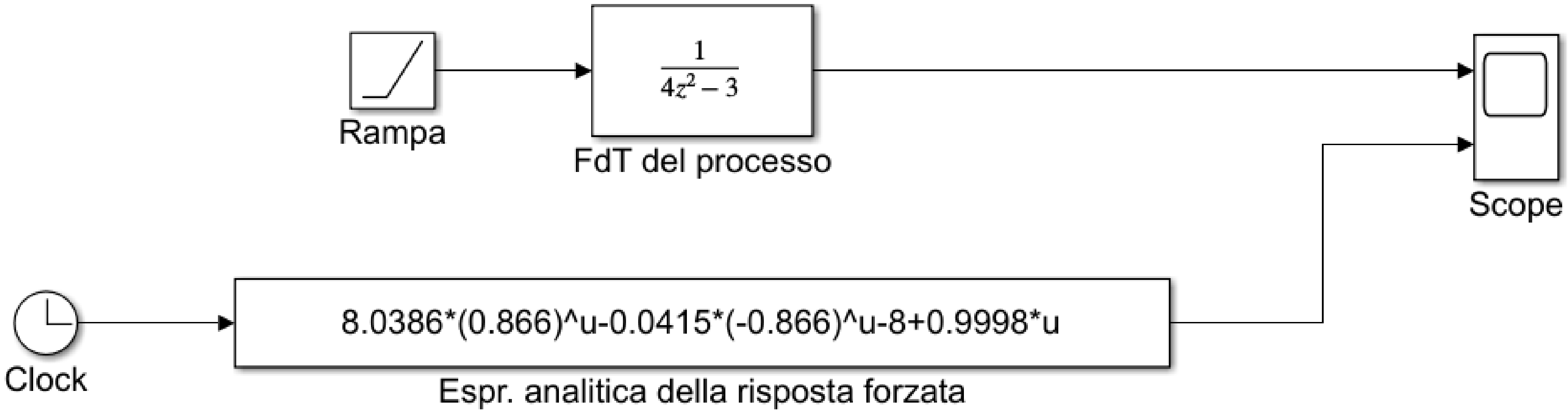
$$y(k) = [8.0386 \cdot (0.866)^k - 0.0415 \cdot (-0.866)^k - 8 + 0.9998\, k] \cdot \delta_{-1}(k)$$



File01.slx

Blocco «Ramp» (libreria «Sources»)

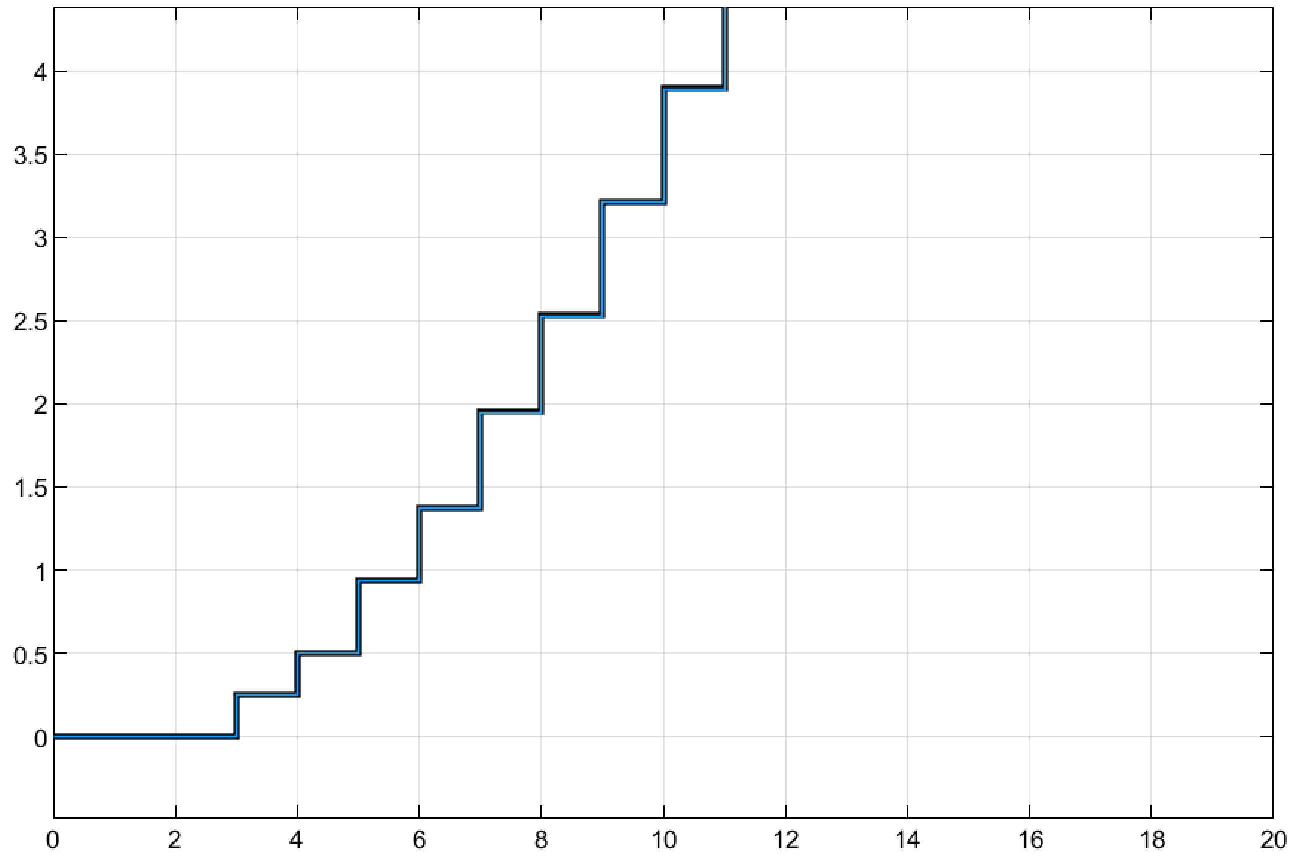
Blocco «Discrete Transfer Fcn» (libreria «Discrete»)



Blocco «Clock» (libreria «Sources»)

Blocco «Fcn» (libreria «User-Defined Functions»)

IL seguente grafico mostra l'uscita del blocco Simulink «Discrete Transfer Fcn» (rinominato «FdT del processo») e la curva costruita sulla base della espressione analitica della risposta forzata. Tali curve sono come ci si attendeva perfettamente sovrapposte.



(d) Si determini una rappresentazione in variabili di stato per tale sistema.

$$4y(k+2) - 3\mathrm{y}(k) = u(k) \xrightarrow{\text{Forma esplicita}} y(k+2) = \frac{3}{4}y(k) + \frac{1}{4}u(k)$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$ vettore di stato

Equazioni di stato

$$x_1(k+1) = y(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = y(k+2) = \frac{3}{4}y(k) + \frac{1}{4}u(k) = \frac{3}{4}x_1(k) + \frac{1}{4}u(k)$$

Trasformazione in uscita

$$y(k) = x_1(k)$$

Equazioni di stato

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = \frac{3}{4}x_1(k) + \frac{1}{4}u(k)$$

Trasformazione in uscita

$$y(k) = x_1(k)$$

Modello in forma matriciale

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} u(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \underbrace{[1 \quad 0]}_{\boldsymbol{C}} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0] \qquad D = 0$$

Verifichiamo che alla realizzazione individuata corrisponde la funzione di trasferimento che avevamo determinato in precedenza

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1}B$$

Calcoliamo la matrice $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}}$

$$z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -\frac{3}{4} & z \end{bmatrix} \Rightarrow (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}} = \frac{1}{z^2 - \frac{3}{4}} \begin{bmatrix} z & 1 \\ \frac{3}{4} & z \end{bmatrix} =$$

Inversa di una matrice 2x2:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{det(M)} adj\,(M^T) = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Sostituiamo nella formula $G(z) = C(zI - A)^{-1}B$ la matrice C, la matrice $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}}$, e la matrice B dell'esempio

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{z^2 - \frac{3}{4}} \begin{bmatrix} z & 1 \\ \frac{3}{4} & z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B = \frac{1}{z^2 - \frac{3}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 1 \\ \frac{3}{4} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{z^2 - \frac{3}{4}} \begin{bmatrix} z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{4}}{z^2 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{4z^2 - 3}$$

Esercizio 6. È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema tempo-discreto lineare e stazionario automono

$$\begin{cases} x(k+1) &= A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= C\,x(k) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini mediante z-trasformata l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita a partire dallo stato iniziale $x(0) = [1 \;\; 2]^T$.

(b) Si determini mediante z-trasformata l'evoluzione forzata dello stato e dell'uscita per un segnale di ingresso $u(k) = (-1)^k$.

(c) Si determini un modello ingresso-uscita per tale sistema.

(a) Si determini mediante z-trasformata l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita a partire dallo stato iniziale $x(0) = [1 \;\; 2]^T$

L'**evoluzione libera dello stato** ha espressione

$$\boldsymbol{X}_\ell(z) = \begin{bmatrix} x_{1,\ell}(k) \\ x_{2,\ell}(k) \end{bmatrix} = z(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) \qquad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad x(0) = [1 \;\; 2]^T$$

Calcoliamo la matrice $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$

$$z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} z - 0.5 & 0 \\ 0 & z - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{(z - 0.5)(z - 2)} \begin{bmatrix} z - 2 & 0 \\ 0 & z - 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_\ell(z) = \begin{bmatrix} x_{1,\ell}(k) \\ x_{2,\ell}(k) \end{bmatrix} = z(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) = \frac{z}{(z - 0.5)(z - 2)} \begin{bmatrix} z - 2 & 0 \\ 0 & z - 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{z}{(z - 0.5)(z - 2)} \begin{bmatrix} z - 2 \\ 2(z - 0.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{z}{(z - 0.5)} \\ \dfrac{2z}{(z - 2)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{1,\ell}(k) \\ x_{2,\ell}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.5)^k \\ 2 \cdot (2)^k \end{bmatrix} \delta_{-1}(k)$$

L'**evoluzione libera dell'uscita** si determina sulla base della trasformazione in uscita

$$y_\ell(k) = Cx_\ell(k)(k) \qquad C = [1 \quad 2] \qquad x_\ell(k) = \begin{bmatrix} x_{1,\ell}(k) \\ x_{2,\ell}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.5)^k \\ 2 \cdot (2)^k \end{bmatrix} \delta_{-1}(k)$$

$$y_\ell(k) = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_{1,\ell}(k) \\ x_{2,\ell}(k) \end{bmatrix} = x_{1,\ell}(k) + 2x_{2,\ell}(k) = (0.5)^k \delta_{-1}(k) + 4 \cdot (2)^k \ \delta_{-1}(k)$$

(b) Si determini mediante Z-trasformata l'evoluzione forzata dello stato e dell'uscita per un segnale di ingresso $\boldsymbol{u(k) = (-1)^k \delta_{-1}(k)}$.

Iniziamo con **l'evoluzione forzata dello stato**

$$X_f(z) = \begin{bmatrix} X_{1,f}(z) \\ X_{2,f}(z) \end{bmatrix} = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(z) \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad U(z) = \frac{z}{z+1}$$

La matrice $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ è stata determinata in precedenza, da cui ricaviamo

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z-0.5)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(z-2)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X_f}(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z-0.5)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(z-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{(z+1)} = \frac{z}{(z+1)} \begin{bmatrix} \frac{2}{(z-0.5)} \\ \frac{1}{(z-2)} \end{bmatrix}$$

$$X_{1,f}(z) = \frac{2z}{(z-0.5)(z+1)} \qquad X_{2,f}(z) = \frac{z}{(z-2)(z+1)}$$

Usiamo Matlab per determinare la decomposizione in fratti semplici di $X_{1,f}(z)/z$ ed $X_{2,f}(z)/z$, e quindi antitrasformare

$$\frac{X_{1,f}(z)}{z} = \frac{2}{(z-0.5)(z+1)}$$

```
num=2;
den=poly([0.5 -1]);
[r p k]=residue(num,den)
```

```
r =

   -1.3333
    1.3333


p =

   -1.0000
    0.5000


k =

     []
```

$$\frac{X_{1,f}(z)}{z} = -\frac{1.333}{(z+1)} + \frac{1.333}{(z-0.5)} \Rightarrow X_{1,f}(z) = -1.333\frac{z}{(z+1)} + 1.333\frac{z}{(z-0.5)}$$

$$\Rightarrow x_{1,f}(k) = [-1.333 \cdot (-1)^k + 1.333 \cdot (0.5)^k]\, \delta_{-1}(k)$$

$$\frac{X_{2,f}(z)}{z} = \frac{z}{(z-2)(z+1)}$$

```
num=1;
den=poly([2 -1]);
[r p k]=residue(num,den)
```

```
r =

    0.3333
   -0.3333


p =

     2
    -1


k =

     []
```

$$\frac{X_{2,f}(z)}{z} = \frac{0.3333}{(z-2)} - \frac{0.3333}{(z+1)} \Rightarrow X_{2,f}(z) = 0.3333\frac{z}{(z-2)} - 0.3333\frac{z}{(z+1)}$$

$$\Rightarrow x_{2,f}(k) = [0.3333 \cdot (2)^k - 0.3333 \cdot (-1)^k]\,\delta_{-1}(k)$$

Evoluzione forzata dell'uscita

Come già fatto per l'evoluzione libera, valutiamo la componente forzata dell'uscita sulla base della evoluzione forzata dello stato, alla luce della trasformazione in uscita

$$y_{\boldsymbol{f}}(k) = C\, x_{\boldsymbol{f}}(k) \qquad\qquad C = [1 \quad 2]$$

$$x_{\boldsymbol{f}}(k) = \begin{bmatrix} x_{1,f}(k) \\ x_{2,f}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.333 \cdot (-1)^k + 1.333 \cdot (0.5)^k \\ 0.3333 \cdot (2)^k - 0.3333 \ \cdot (-1)^k \end{bmatrix} \delta_{-1}(k)$$

$$y_{\boldsymbol{f}}(k) = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} -1.333 \cdot (-1)^k + 1.333 \cdot (0.5)^k \\ 0.3333 \cdot (2)^k - 0.3333 \ \cdot (-1)^k \end{bmatrix} \delta_{-1}(k)$$

Sviluppando i conti si ottiene:

$$y_{\boldsymbol{f}}(k) = [-2 \cdot (-1)^k + 1.333 \cdot (0.5)^k + 0.6666 \cdot (2)^k]\ \delta_{-1}(k)$$

Qualora non sia stata preliminarmente determinata la componente forzata dello stato, l' evoluzione forzata dell'uscita è calcolabile in via diretta ricavando la funzione di trasferimento del sistema, moltiplicandola per la trasformata Z dell'ingresso $\left(U(z) = \frac{z}{z+1}\right)$, ed in ultimo antitrasformando

Calcoliamo la Funzione di trasferimento $G(z) = \frac{Y_f(z)}{U(z)} = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$

La matrice $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ è stata determinata in precedenza $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z-0.5)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(z-2)} \end{bmatrix}$

$$G(z) = \frac{Y_f(z)}{U(z)} = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} \frac{1}{(z-0.5)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(z-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(z-0.5)} & \frac{2}{(z-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{(z-0.5)} + \frac{2}{(z-2)} = \frac{4z-5}{(z-0.5)(z-2)}$$

$$Y_f(z) = \frac{4z-5}{(z-0.5)(z-2)} \frac{z}{z+1} = \frac{z(4z-5)}{(z-0.5)(z-2)(z+1)}$$

Calcolo della risposta forzata dell'uscita mediante il Symbolic Math Toolbox di Matlab

```
syms z k
Yfz = (4*z^2-5*z)/((z-0.5)*(z+1)*(z-2));
yfk =iztrans(Yfz,k)
```

```
yfk =

(2*2^k)/3 - 2*(-1)^k + (4*(1/2)^k)/3
```

⇕

$$y_f(k) = [-2 \cdot (-1)^k + 1.333 \cdot (0.5)^k + 0.6666 \cdot (2)^k]\, \delta_{-1}(k)$$

(c) Si determini un modello ingresso-uscita per tale sistema

Concludiamo l'esercizio ricavando a partire dalla funzione di trasferimento l'equazione alle differenze che per il sistema in esame mette in relazione l'uscita con l'ingresso.

$$G(z) = \frac{4z-5}{(z-0.5)(z-2)} = \frac{4z-5}{z^2-2.5z+1}$$

$$\Downarrow$$

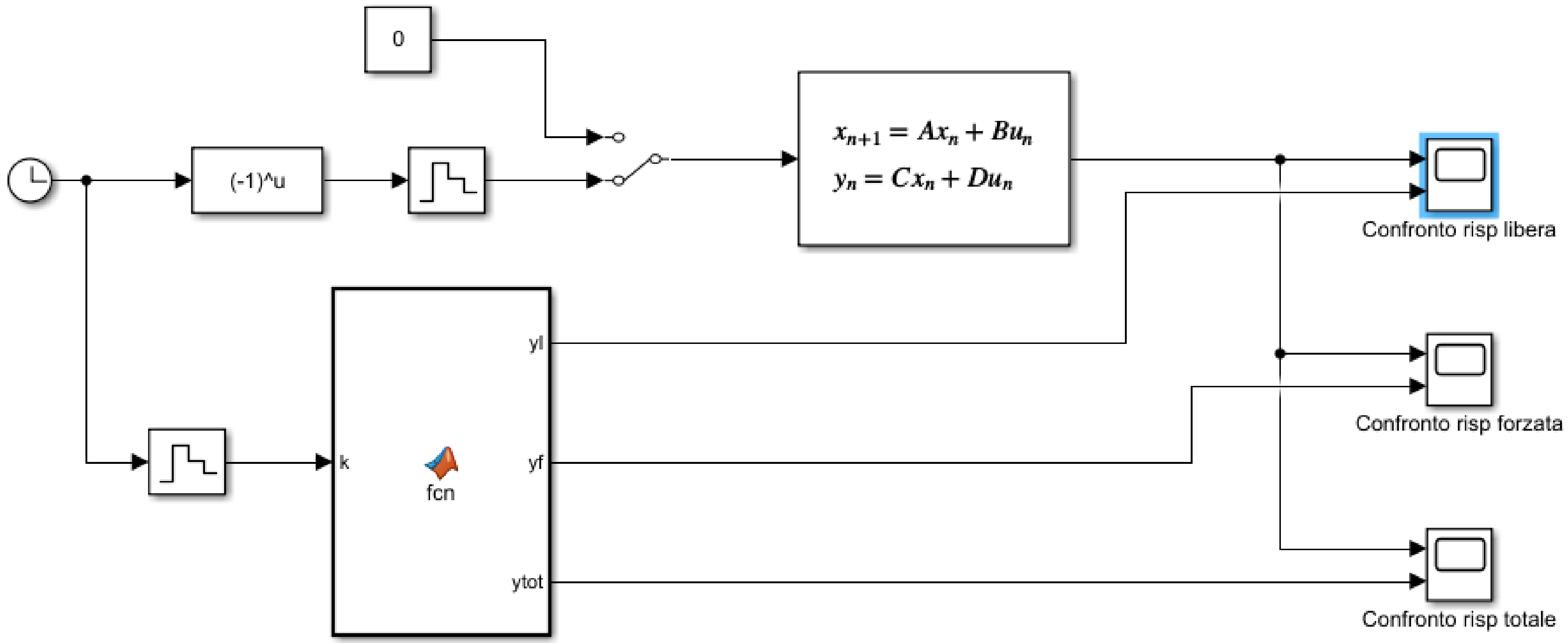
$$y(k) - 2.5y(k-2) + y(k-2) = 4u(k-1) - 5u(k-2)$$

Se avessimo avuto.

La EaD sarebbe stata:

$$\boldsymbol{G(z)} = \frac{z^2-2z}{z^2-2.5z+1} \quad \Leftrightarrow \quad y(k) - 2.5y(k-2) + y(k-2) = 4u(k) - 2u(k-1)$$

Confrontare mediante Simulink le evoluzioni libera e forzata dell'uscita con le espressioni analitiche calcolate

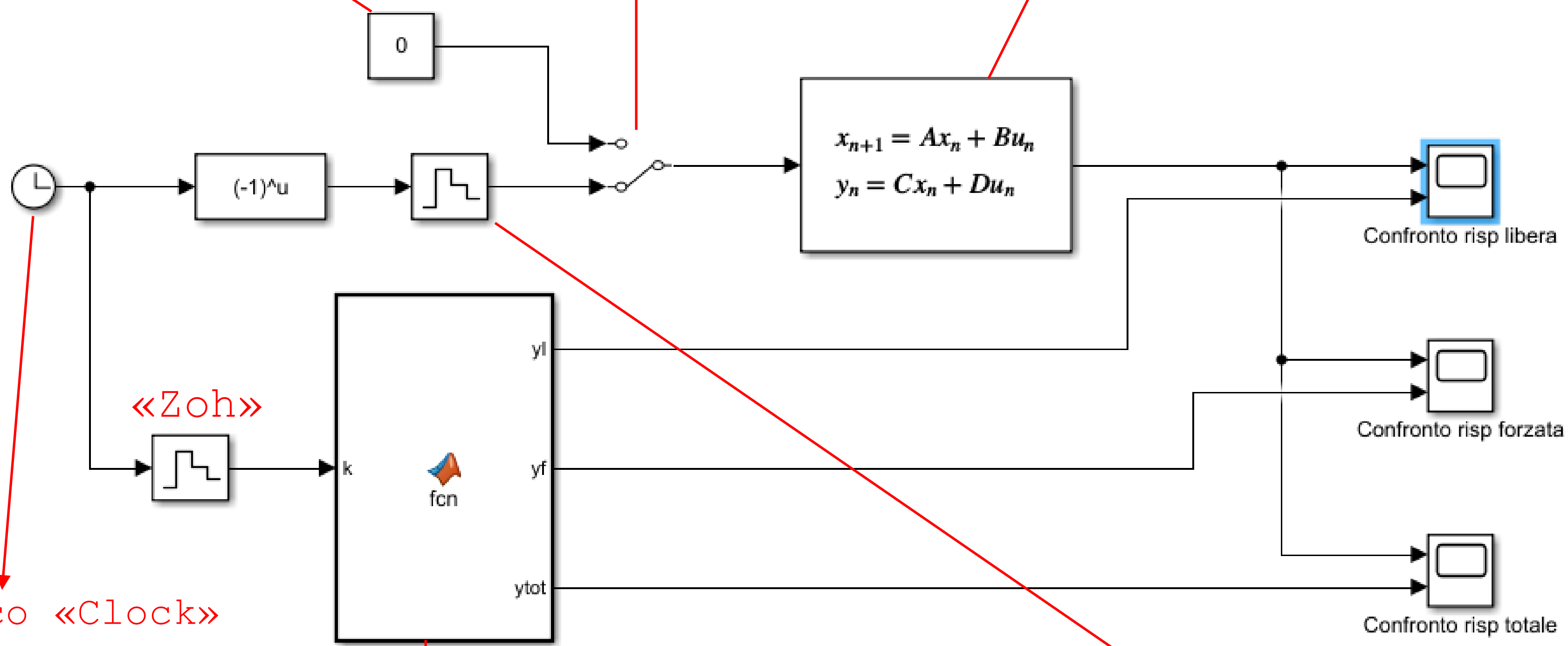


File02.slx

Blocco «Constant» (libreria «Sources»)

Blocco «Manual Switch» (libreria «Signal Routing»)

Blocco «Discrete State Space» (libreria «Discrete»)

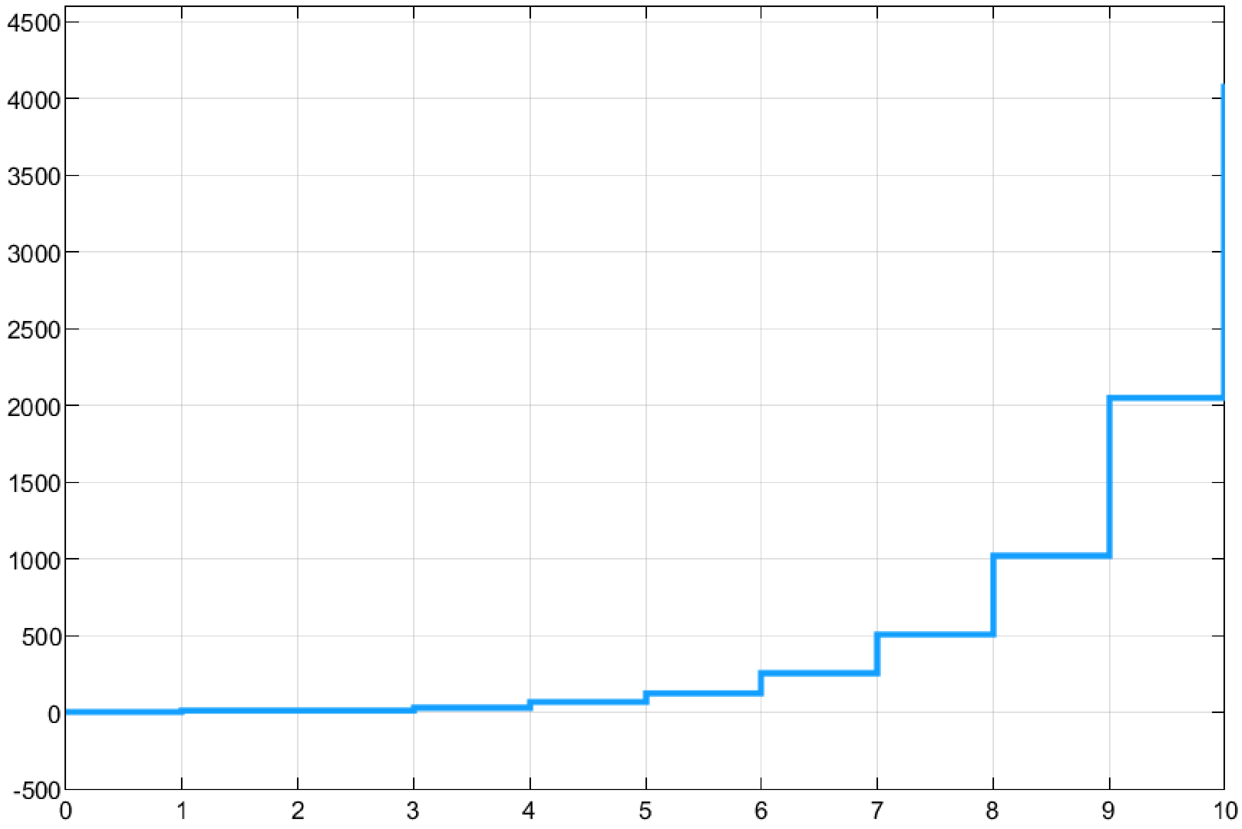


Blocco «Clock» (libreria «Sources»)

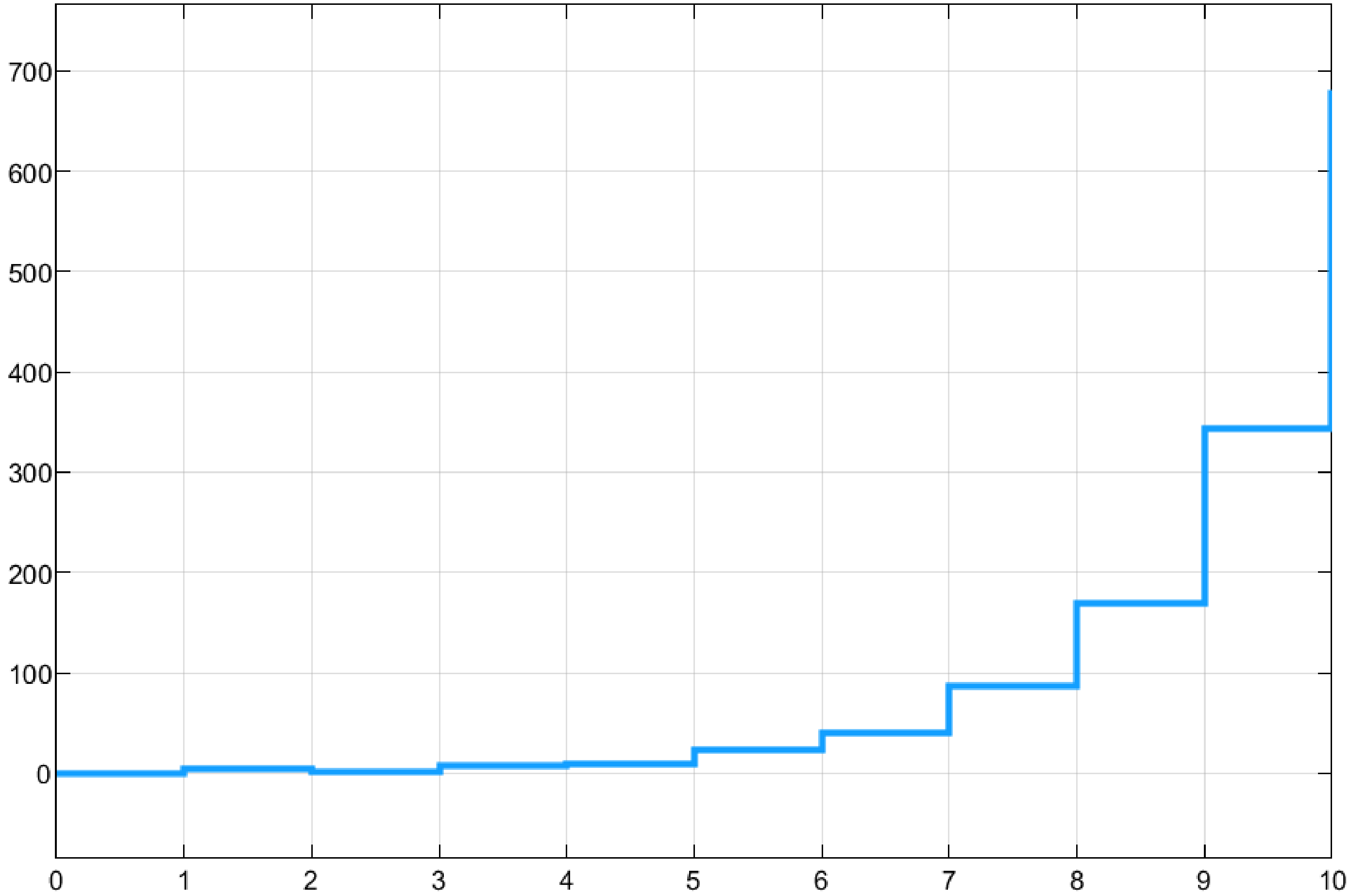
Blocco «Matlab Function» (libreria «user-defined functions»)

Blocco «Zoh» (libreria «Discrete»)

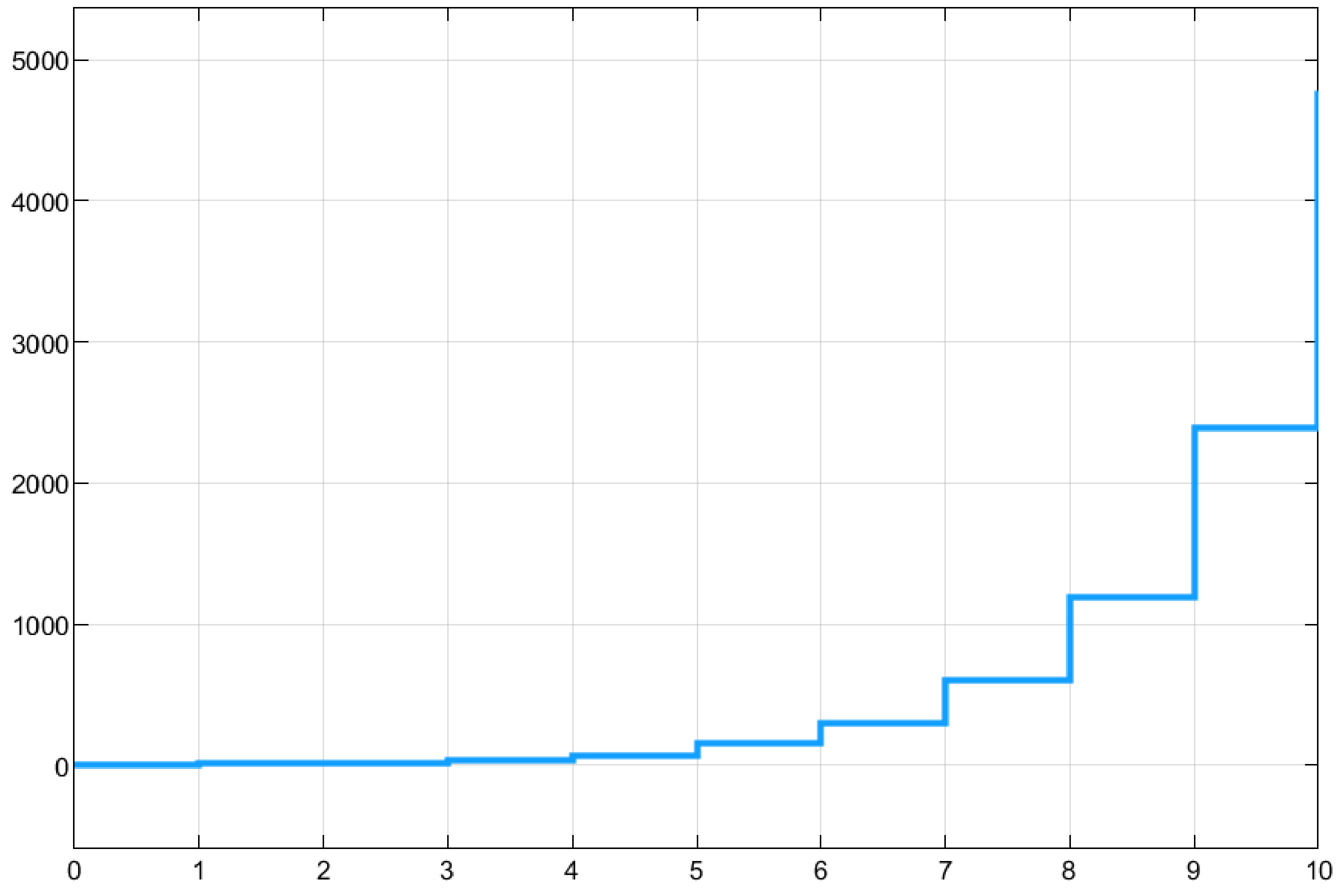
Evoluzione libera



Evoluzione forzata



Evoluzione complessiva

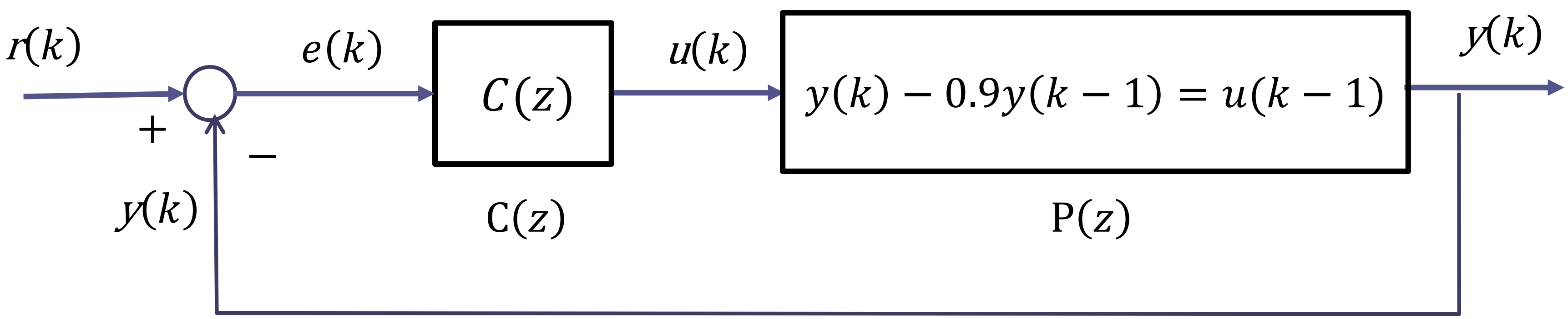


Problema 1

Si consideri un sistema a tempo discreto descritto dal legame ingresso-uscita

$$y(k) - 0.9y(k-1) = u(k-1)$$

ed il sistema di controllo a retroazione unitaria



Quesito 1. Si progetti, se possibile, un controllore digitale C(z) in grado di garantire per il sistema a ciclo chiuso un legame istantaneo fra l'uscita ed il riferimento del tipo

$$y(k) = \gamma\, r(k-1) \qquad \text{dove } \gamma \text{ è una costante qualunque}$$

Quesito 2. Si progetti, se possibile, un controllore digitale C(z) in grado di garantire per il sistema a ciclo chiuso il legame istantaneo $y(k) = r(k-1)$

Traccia soluzione del problema 1

Il processo ha FdT: $$P(z) = \frac{1}{z-0.9}$$

Quesito 1.

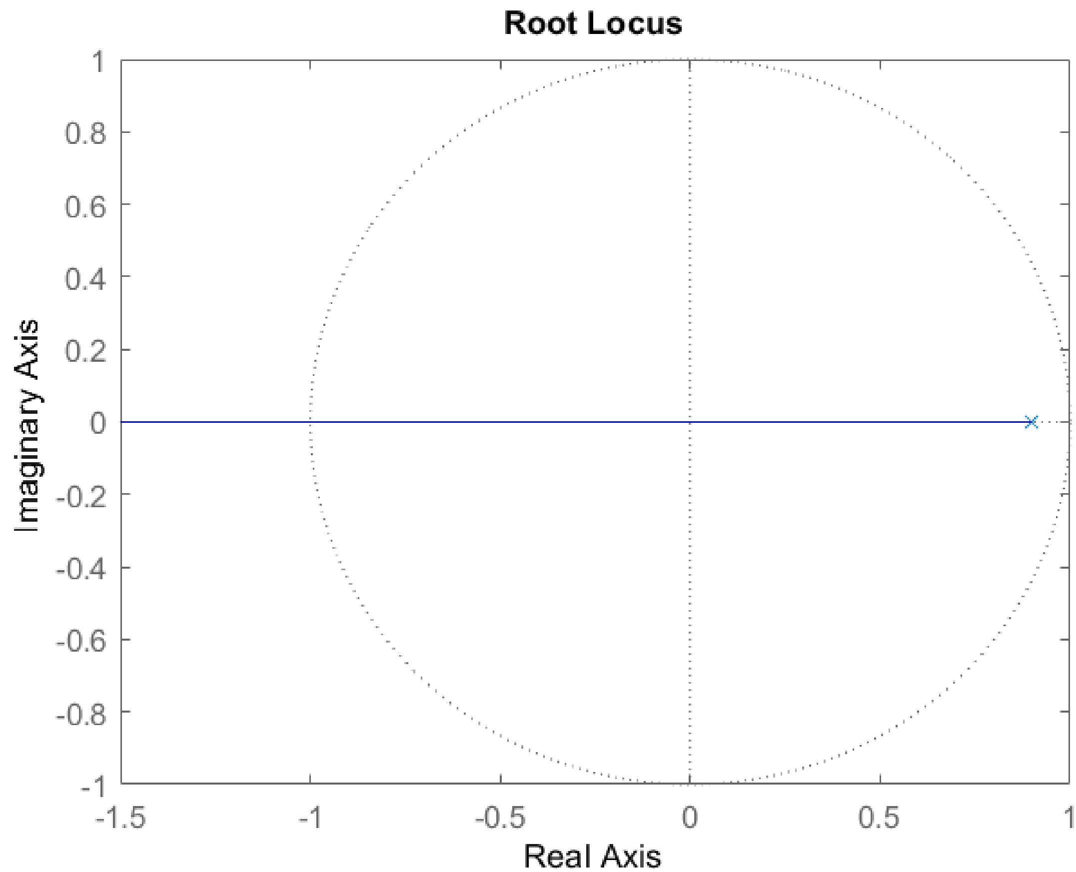
La relazione $y(k) = \gamma\, r(k-1)$ implica che la FdT «desiderata» per il sistema a ciclo chiuso è

$$W^{des}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\gamma}{z}$$

Dobbiamo pertanto chiederci se è possibile fare in modo che la FdT a ciclo chiuso possieda un polo in z=0.

Ipotizziamo di impiegare il più semplice regolatore possibile, un regolatore proporzionale $\mathrm{C}(z) = k$

Il luogo delle radici



Ci rivela come una particolare scelta per il guadagno del controllore posizioni effettivamente il polo del sistema a ciclo chiuso nell'origine.
Determiniamo tale valore.

$$C(z) = k \qquad\qquad P(z) = \frac{1}{z - 0.9}$$

$$W_r^y(z) = \frac{C(\mathrm{z})P(\mathrm{z})}{1 + C(z)P(z)} = \frac{\dfrac{k}{z - 0.9}}{1 + \dfrac{k}{z - 0.9}} = \frac{k}{z - 0.9 + k}$$

L'espressione della FdT a ciclo chiuso rivela come il valore cercato di k sia pari a 0.9

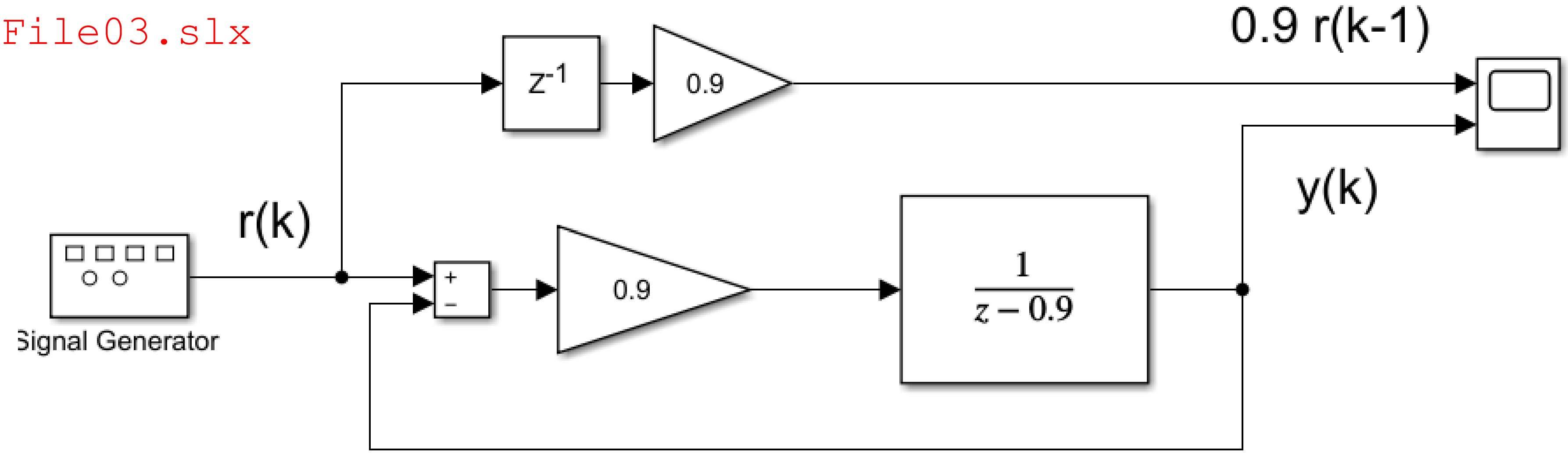
In corrispondenza di tale valore di k, la FdT a ciclo chiuso è difatti, come desiderato

$$W_r^y(z) = \frac{0.9}{z}$$

Al quale corrispondenza il seguente legame fra l'uscita ed il riferimento

$$y(k) = 0.9\, r(k - 1)$$

File03.slx



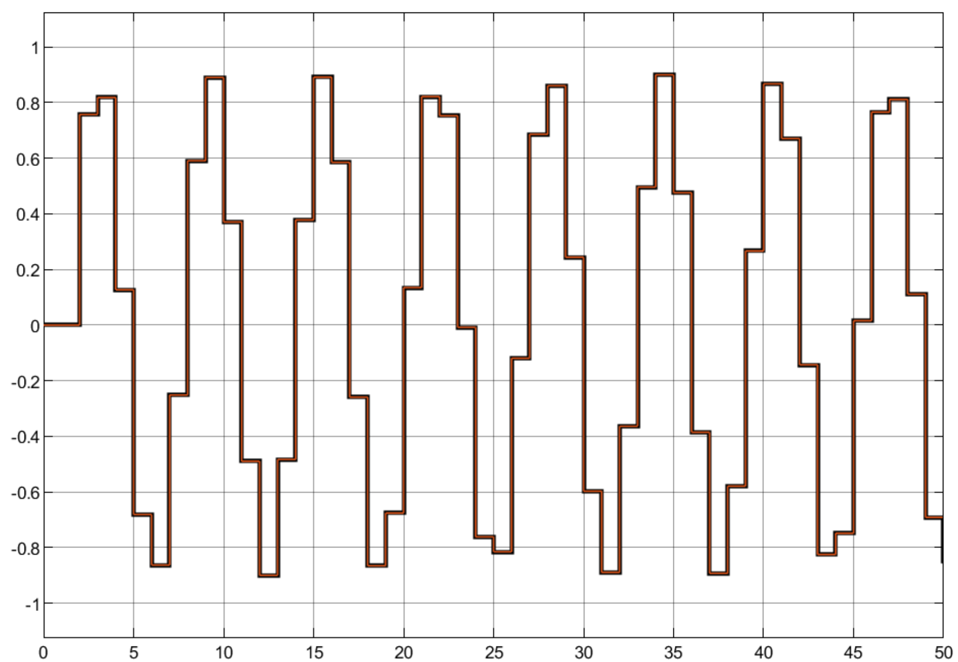


Grafico che mostra sovrapposte la sequenza d'uscita y(k) e la sequenza di riferimento ritardata di un passo e moltiplicata per 0.9

Quesito 2.

La relazione $y(k) = r(k-1)$ implica che la FdT «desiderata» per il sistema a ciclo chiuso è

$$W^{des}(z) = \frac{1}{z}$$

Con un regolatore proporzionale non si riesce ad ottenerla.

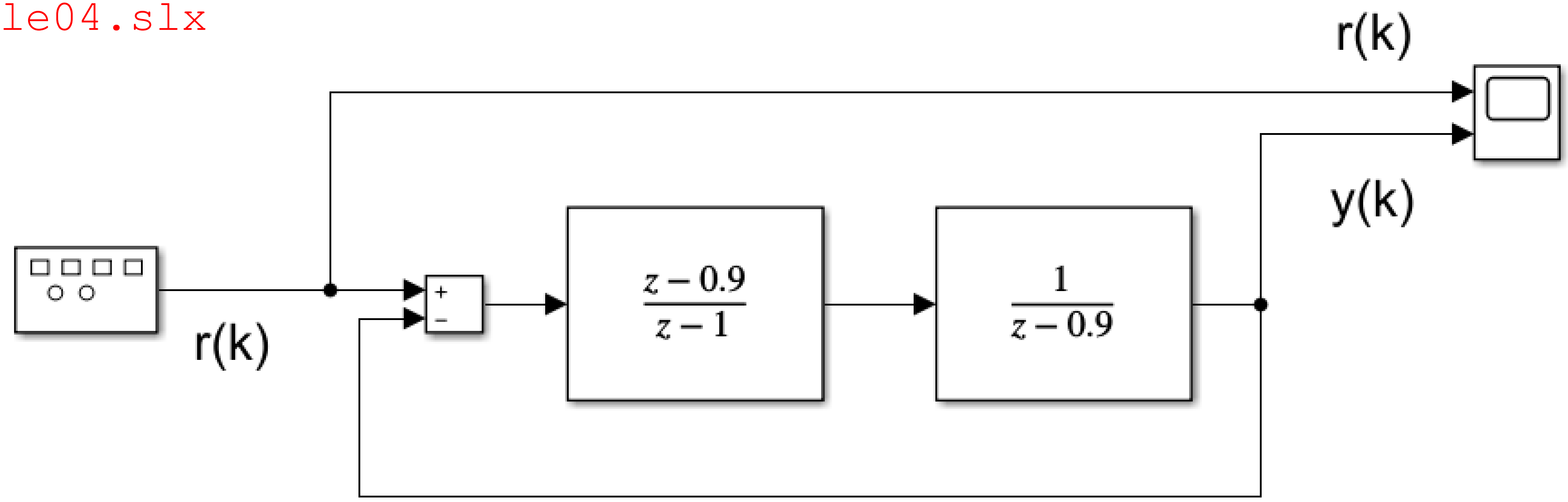
Partendo dalla relazione

$$W_r^y(z) = \frac{C(\mathrm{z})P(\mathrm{z})}{1 + C(z)P(z)}$$

Chiediamoci se esiste un regolatore C(z) tale che

$$W_r^y(z) = \frac{C(\mathrm{z})P(\mathrm{z})}{1 + C(z)P(z)} = W^{des}(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{C(\mathrm{z})\frac{1}{z-0.9}}{1 + C(z)\frac{1}{z-0.9}} = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(\mathrm{z}) = \frac{z-0.9}{z-1}}$$

File04.slx



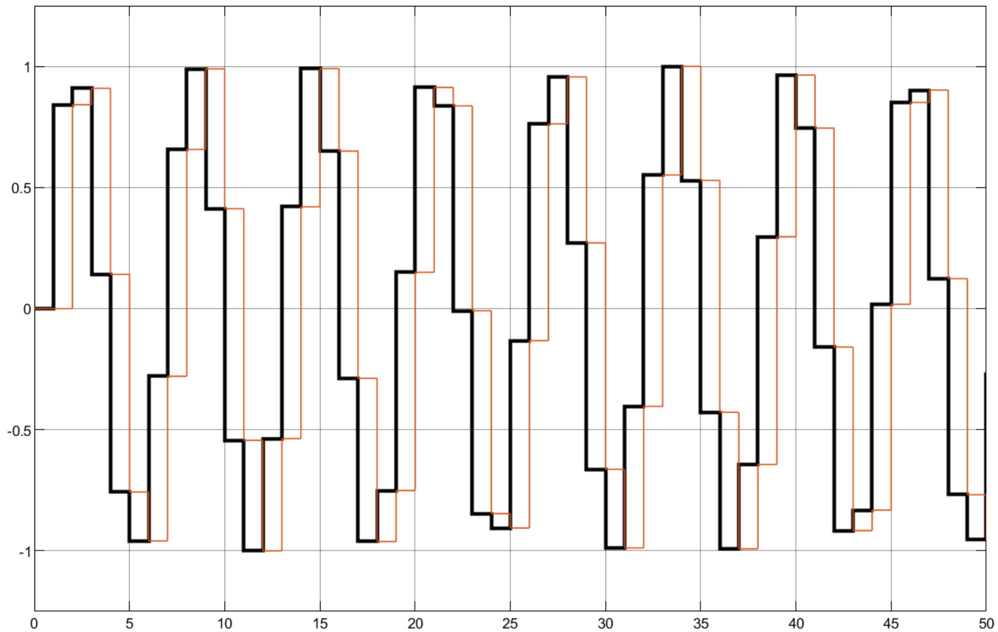


Grafico che mostra sovrapposte la sequenza d'uscita y(k) (in rosso) e la sequenza di riferimento r(k) (in nero).

Si noti come le due sequenze coincidano a meno di un ritardo di un passo di campionamento, come atteso sulla base della relazione a ciclo chiuso $y(k) = r(k-1)$ imposta dal controllore scelto

Commenti

Abbiamo realizzato un sistema di controllo tale che qualunque sia il set-point, l'uscita lo replica esattamente con un ritardo finito (in questo caso di un passo di campionamento)

Comportamenti di questo tipo (che implicano, ad esempio, la convergenza in tempo finito dell'uscita verso il set point costante) non sono ottenibili da sistemi di controllo lineare a tempo continuo, nei quali la convergenza verso il set point, quando si verifica, è sempre di natura asintotica

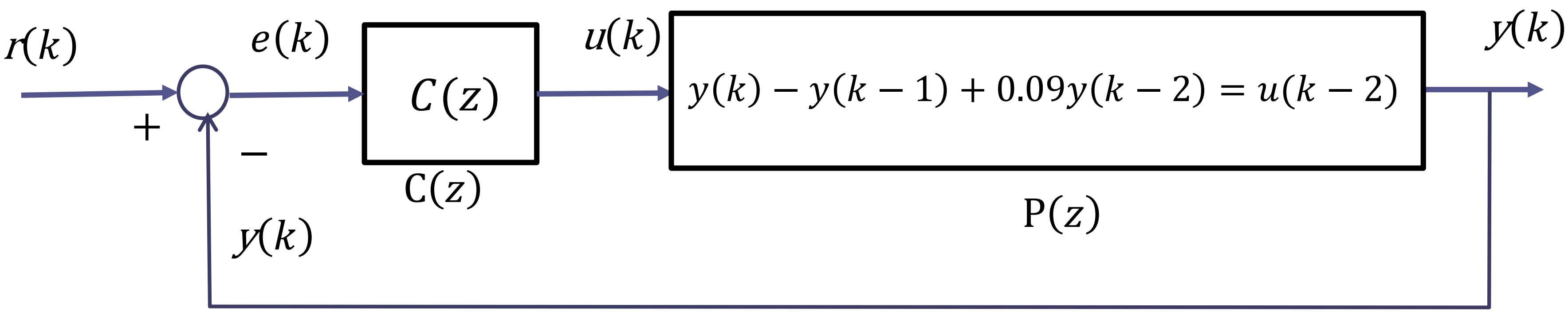
Va però sottolineato come l'ottenimento di comportamenti del genere richiede la perfetta conoscenza del modello matematico del sistema da controllare, cosa che nella pratica è molto problematica.

Problema 2

Si consideri un sistema a tempo discreto descritto dal legame ingresso-uscita

$$y(k) - y(k-1) + 0.09y(k-2) = u(k-2)$$

ed il sistema di controllo a retroazione unitaria



Si progetti, se possibile, un controllore digitale $\mathrm{C}(z)$ in grado di garantire per il sistema a ciclo chiuso uno fra i seguente legami fra il riferimento $r(k)$ e l'uscita $y(k)$:

$$y(k) = r(k-1) \qquad\qquad y(k) = r(k-2)$$

Procedere estendendo e particolarizzando al caso in esame i ragionamenti sviluppati per risolvere il secondo quesito del precedente esercizio.