Controllo digitale

Introduzione alla simulazione di un sistema di controllo digitale in retroazione in ambiente Matlab-Simulink

Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Impareremo a simulare il funzionamento di un sistema di controllo digitale in ambiente Matlab-Simulink.

Contestualmente, eseguiremo varie analisi sul sistema di controllo oggetto della esercitazione, per il quale analizzeremo e simuleremo diverse possibili scelte per il regolatore digitale.

Problema 1

Analizzare e simulare un sistema di controllo a retroazione unitaria in cui il processo è descritto dal legame ingresso-uscita

$$y(k) - 0.3y(k-1) - 0.4y(k-1) = u(k-2)$$

Si consideri un controllore digitale puramente proporzionale

$$\mathrm{C}(z) = k_p$$

Analizzare al variare del guadagno del controllore le caratteristiche del sistema a ciclo chiuso, e verificare mediante simulazione la correttezza delle analisi svolte.

Il processo P da controllare è descritto dalla funzione di trasferimento

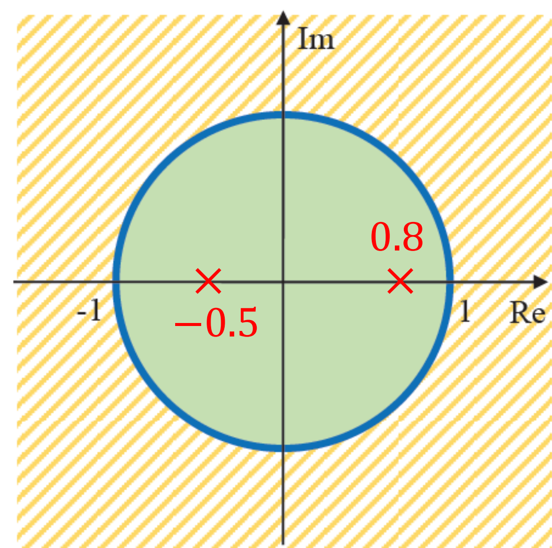
$$y(k) - 0.3y(k-1) - 0.4y(k-1) = u(k-2) \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{F_u^y(z) = \frac{1}{z^2 - 0.3z - 0.4}}}$$

Calcoliamone i poli con Matlab

```
roots([1 -0.3 -0.4])
```

```
ans =

    0.8000
   -0.5000
```

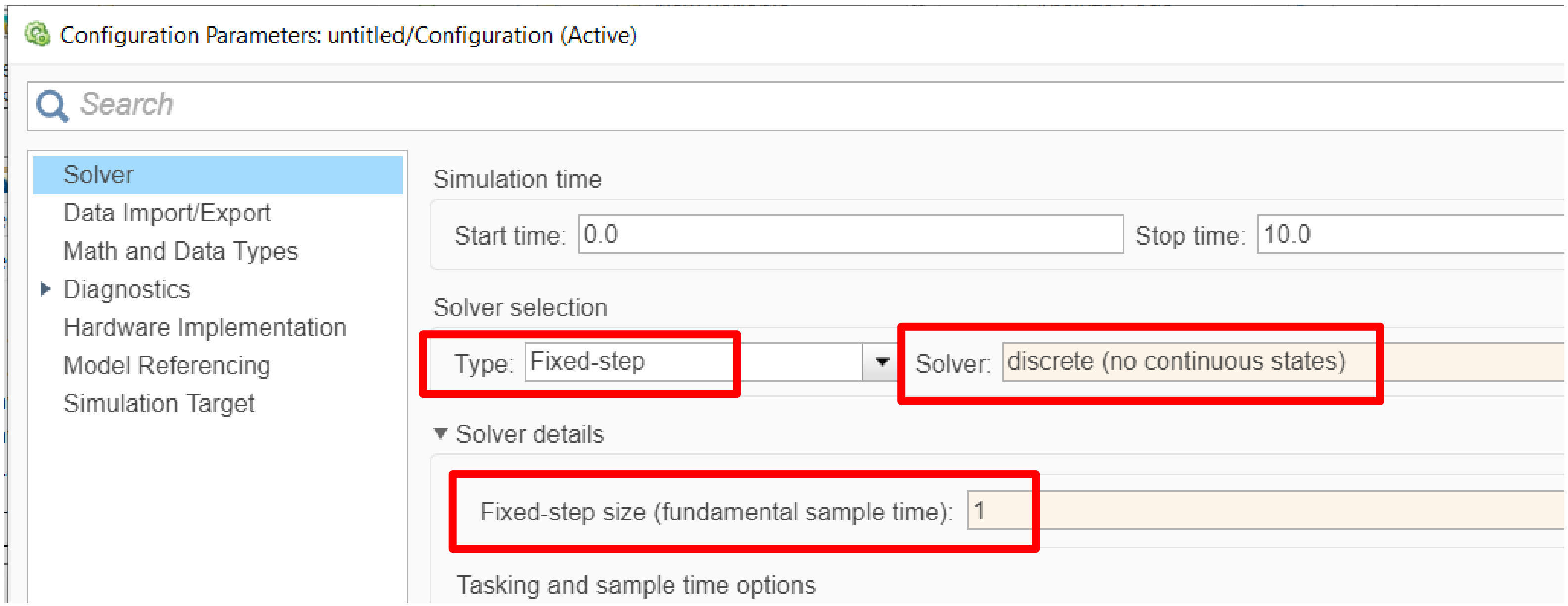
Si tratta quindi di un processo asintoticamente stabile, in quanto entrambi i poli $p_1 = 0.8$, $p_2 = -0.5$ sono interni al disco unitario.

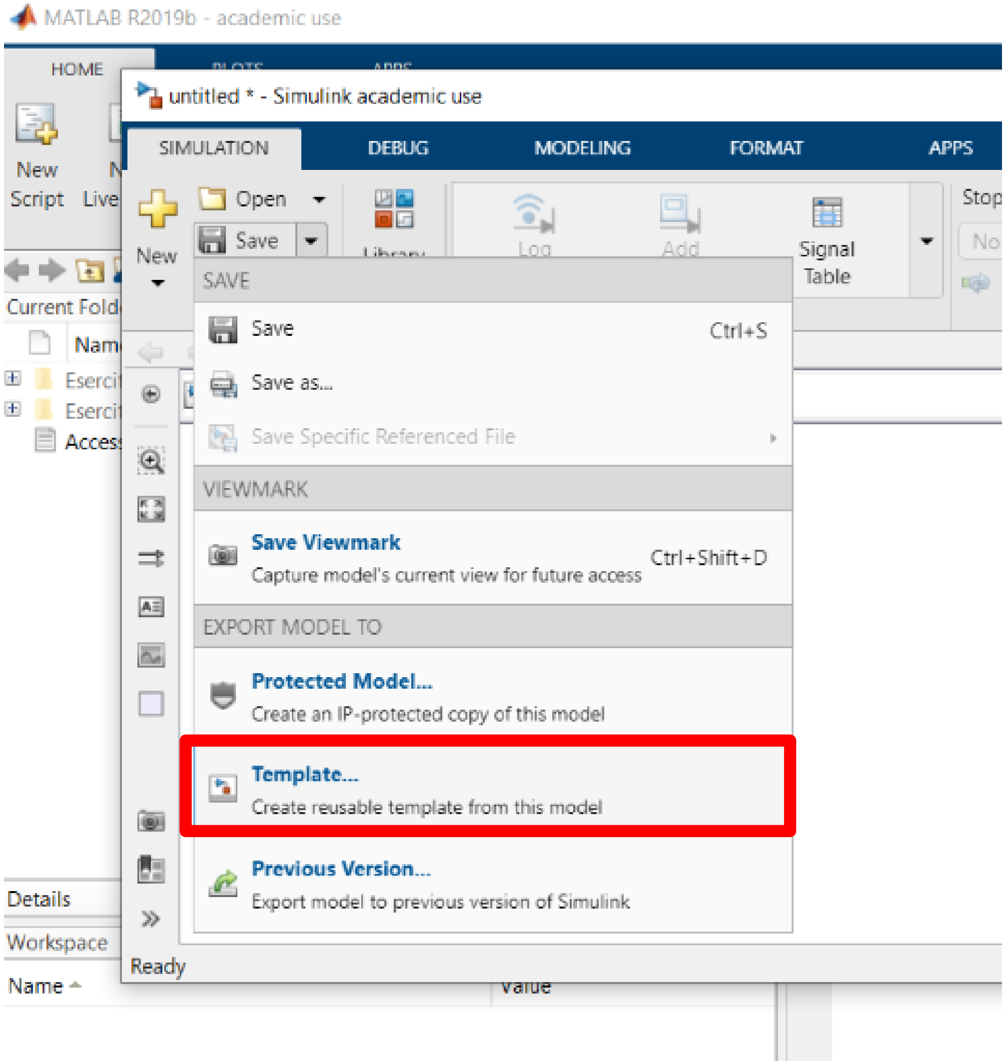


Simuliamone il comportamento a ciclo aperto con un ingresso costante unitario.

Guida passo-passo per la realizzazione del modello

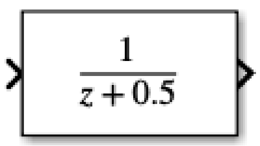
Aprire un nuovo modello, e configurare i parametri del Solver (Model Settings) come segue

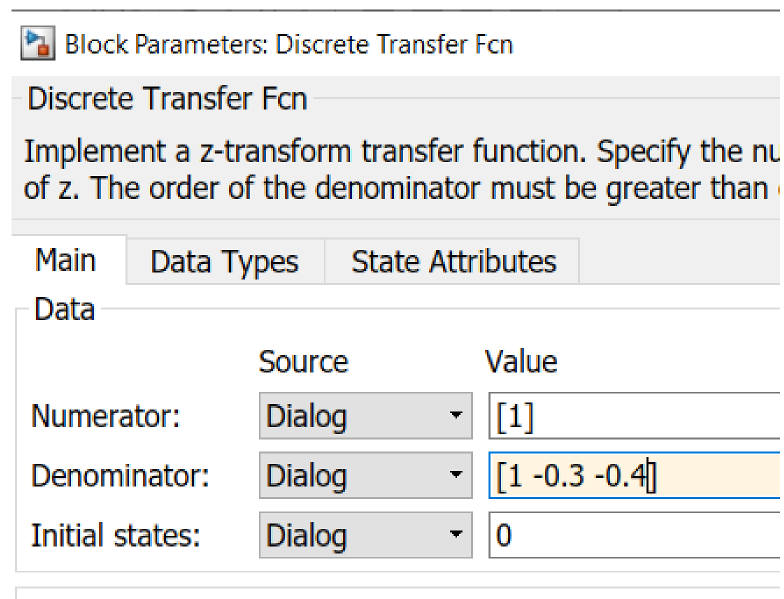




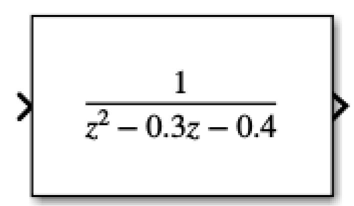
Dopo avere impostato i parametri di configurazione del solver, selezionare `Save->Template` (chiamandolo ad esmpio «Discrete Time Simulation») per poter in futuro aprire un modello in bianco gia configurato correttamente.

Importiamo dalla libreria «`Discrete`» il blocco «`Discrete Transfer Fcn`», e configuriamone i parametri `Numerator` e `Denominator` in accordo con la funzione di trasferimento $F_u^y(z) = \frac{1}{z^2 - 0.3z - 0.4}$, ed impostando condizioni iniziali dello stato pari a zero.

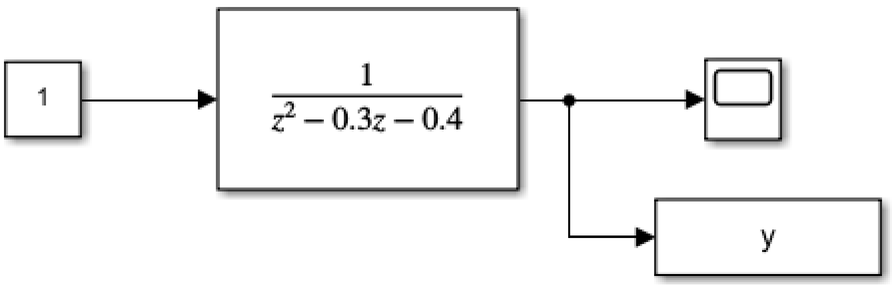




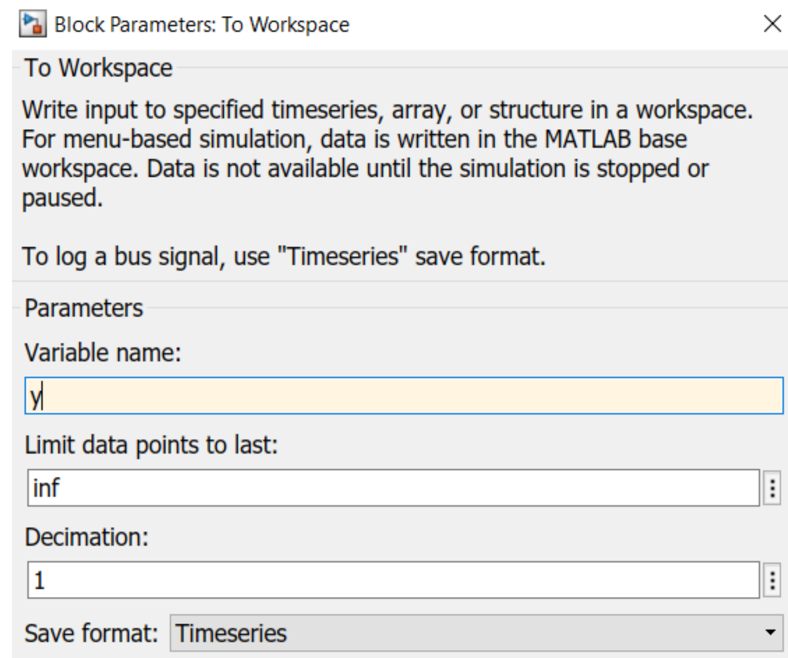
Dopo avere confermato le impostazioni del blocco, il suo aspetto cambia e mostra al suo interno la funzione di trasferimento del processo (ingrandire a sufficienza il blocco affinché ciò avvenga)



Ora colleghiamo un blocco `constant` in ingresso ed un blocco `Scope` all'uscita. Colleghiamo all'uscita anche un blocco «`To workspace`» (libreria «`Sinks`») configurandolo come mostrato in basso a destra.



`CicloAperto.slx`



Ora prima di eseguire la simulazione chiediamoci che tipo di risultato ci attendiamo.

Quale sarà il valore di regime dell'uscita $y(k)$?

Come sarà l'andamento del transitorio ?

Calcolo del valore di regime

$$Y(z) = F_u^y(z)U(z) = \frac{1}{z^2 - 0.3z - 0.4} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)(z-0.8)(z+0.5)}$$

Poiché i poli della $Y(z)$ sono tutti interni al disco unitario, eccetto un polo semplice in $z = 1$ l'ipotesi di applicabilità del teorema del valore finale è soddisfatta, e vale pertanto

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z}{(z-0.8)(z+0.5)} = 3.33 = F_u^y(1)$$

Guadagno
della FdT $F_u^y(z)$

Il risultato che abbiamo riscontrato è di validità generale:

La risposta al gradino unitario di una FdT $F(z)$ asintoticamente stabile converge al valore del guadagno, che vale $F(1)$.

Andamento transitorio

L'uscita è una combinazione lineare fra i modi del sistema ed il modo costante introdotto dall'ingresso.

$$Y(z) = R_1 \frac{z}{(z-1)} + R_2 \frac{z}{(z-0.8)} + R_3 \frac{z}{(z+0.5)}$$

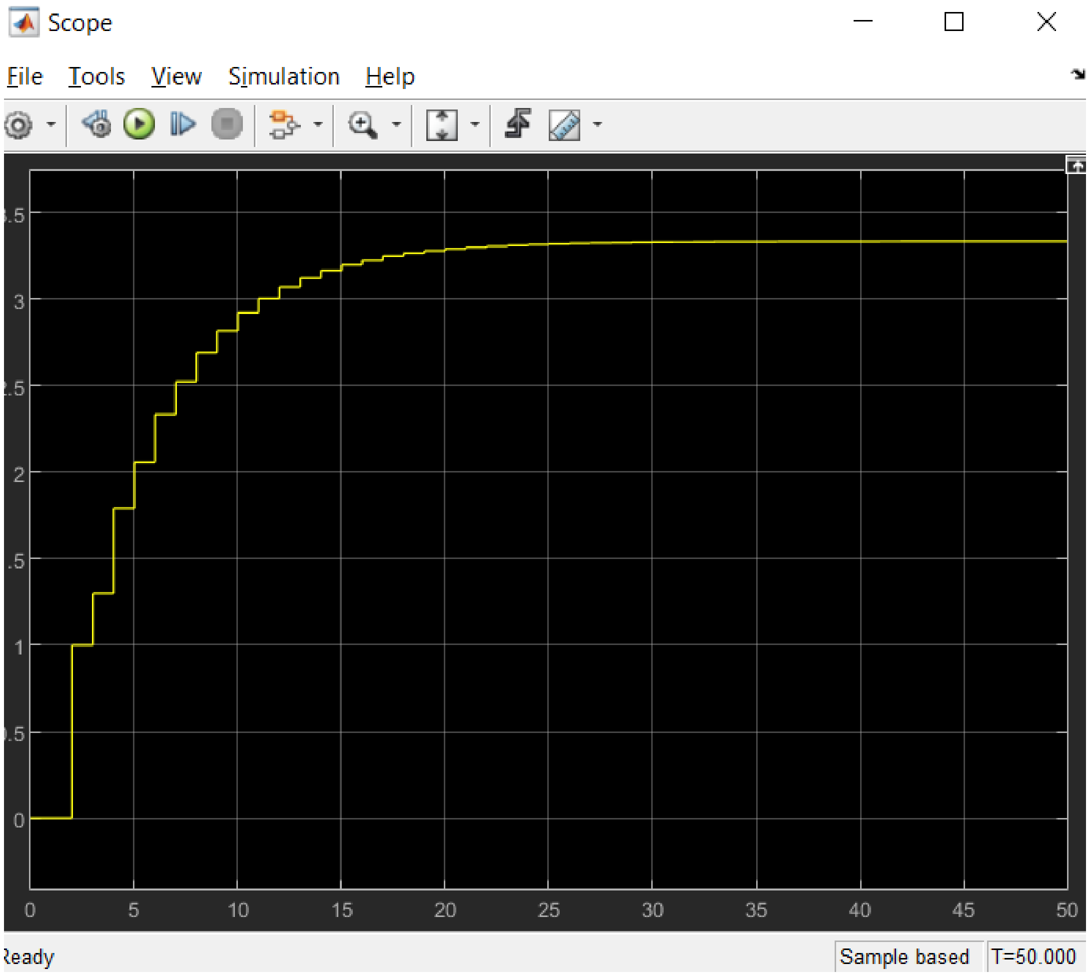
Calcolando i residui si trova $R_1 = 3.33$ $R_2 = -3.84$ $R_3 = 0.51$

$$\mathrm{y}(k) = [R_1 + R_2(0.8)^k + R_3(-0.5)^k]\delta_{-1}(k)$$

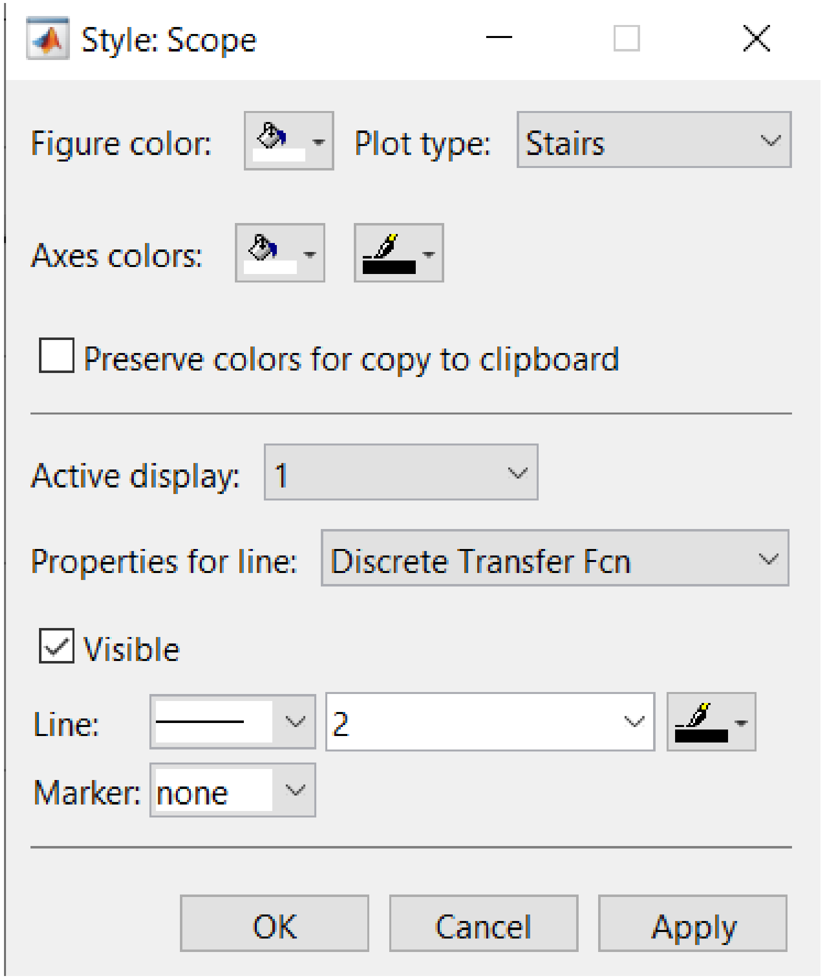
$$= [3.33 - 3.84 \cdot (0.8)^k + 0.51 \cdot (-0.5)^k]\delta_{-1}(k)$$

A rigore, dovremmo affermare che ci attendiamo una uscita affetta da oscillazioni, per effetto del modo $(-0.5)^k$ (**RINGING**)

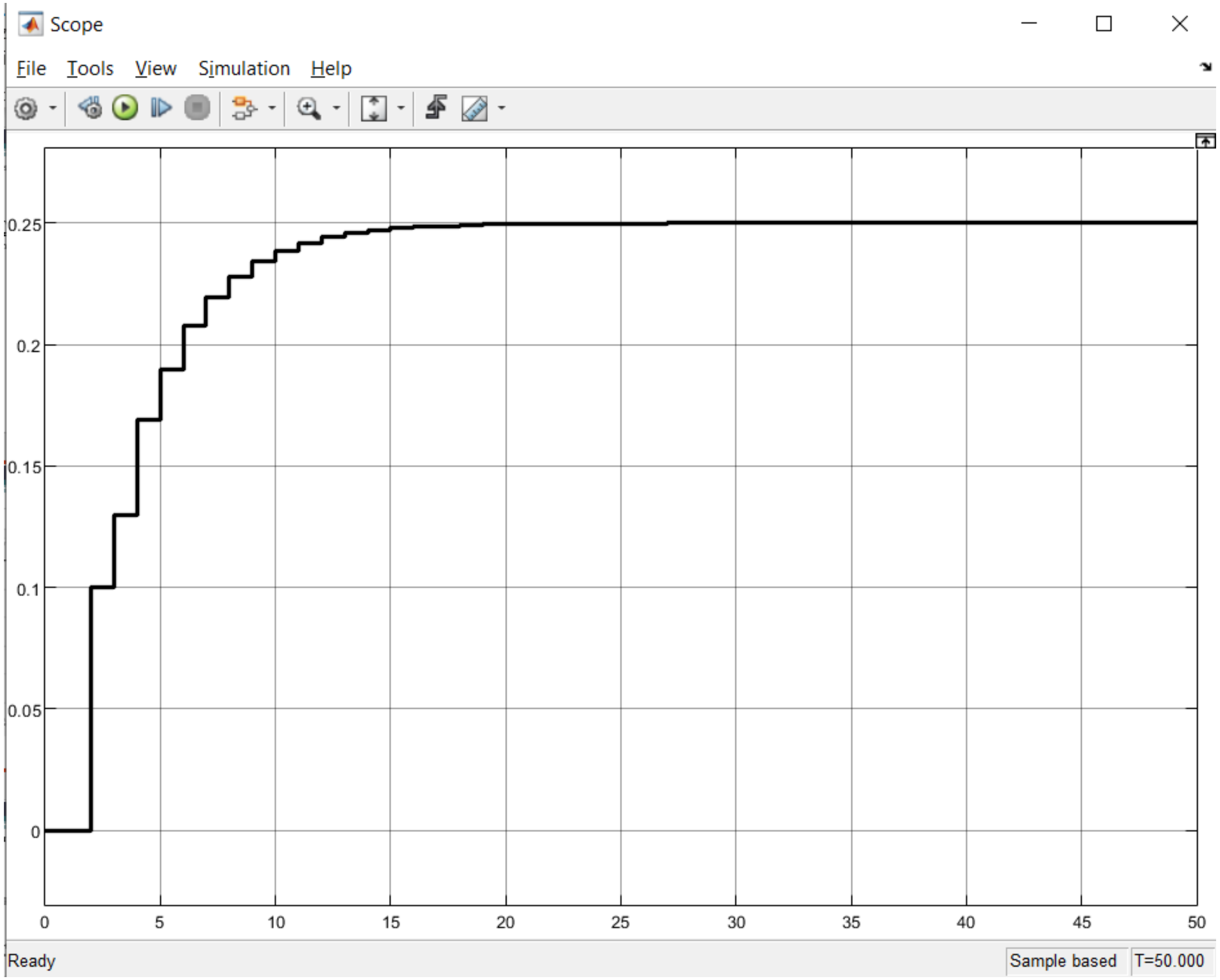
Visualizziamo l’uscita, mandando in run la simulazione (impostare nella casella `Stop Time` una durata per la simulazione di 50 passi) e cliccando successivamente sul blocco Scope



Per rendere il grafico più facilmente leggibile, andiamo nel menu `View->Style` del blocco `Scope`



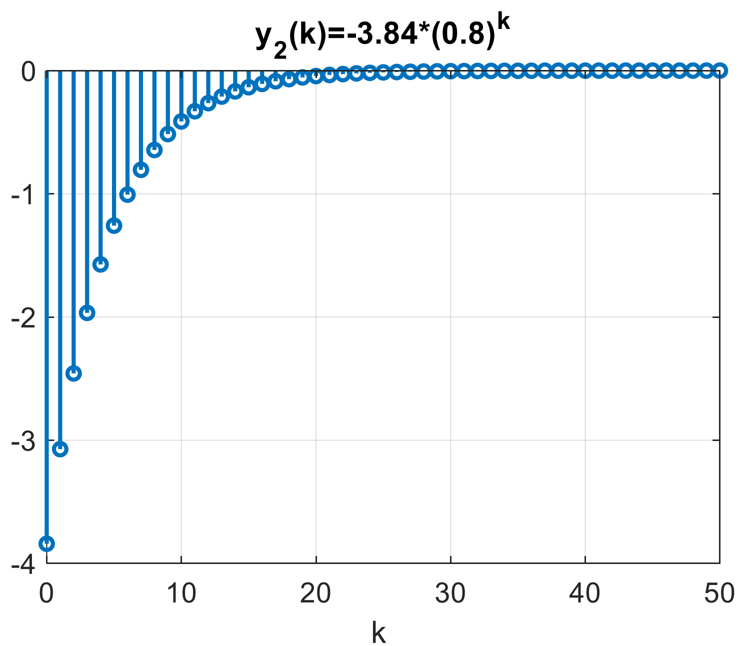
Impostiamo `Figure Color`, `Plot Type`, `Axes Colors` e `Line` come in figura, e selezioniamo `Apply`

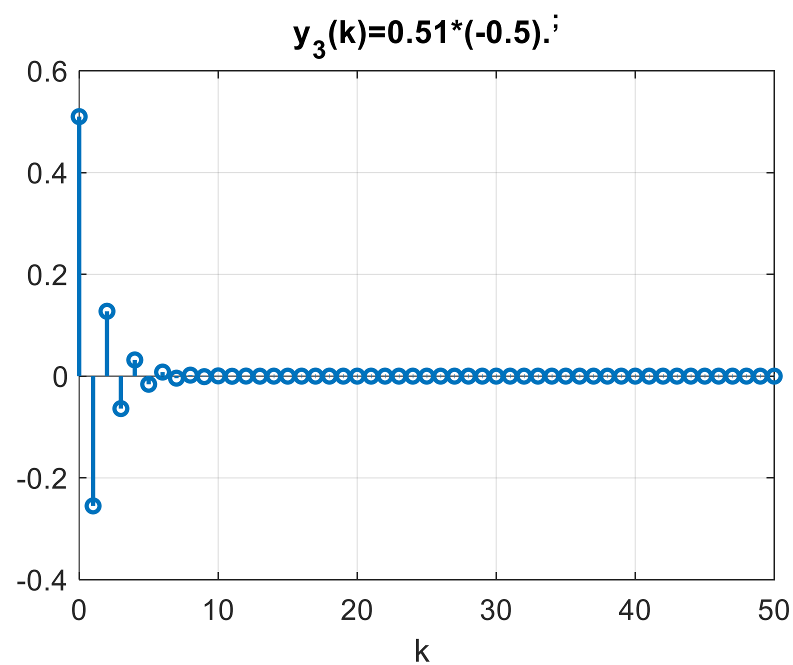

Scope
File Tools View Simulation Help
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
Ready
Sample based
T=50.000

Il comportamento oscillatorio non è visibile nel grafico.

$$y(k) = [3.33 - 3.84 \cdot (0.8)^k + 0.51 \cdot (-0.5)^k]\delta_{-1}(k)$$

Grafichiamo i modi del sistema. Notiamo come il modo oscillatorio abbia un residuo, quindi un peso relativo, minore ed in aggiunta decada molto piu rapidamente rispetto al modo aperiodico. Come risultato il comportamento oscillatorio risulta «nascosto» nell'uscita complessiva.

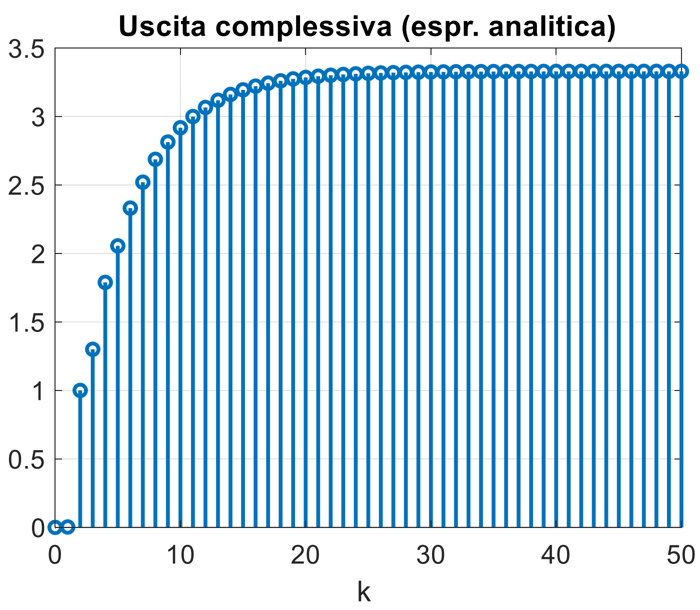


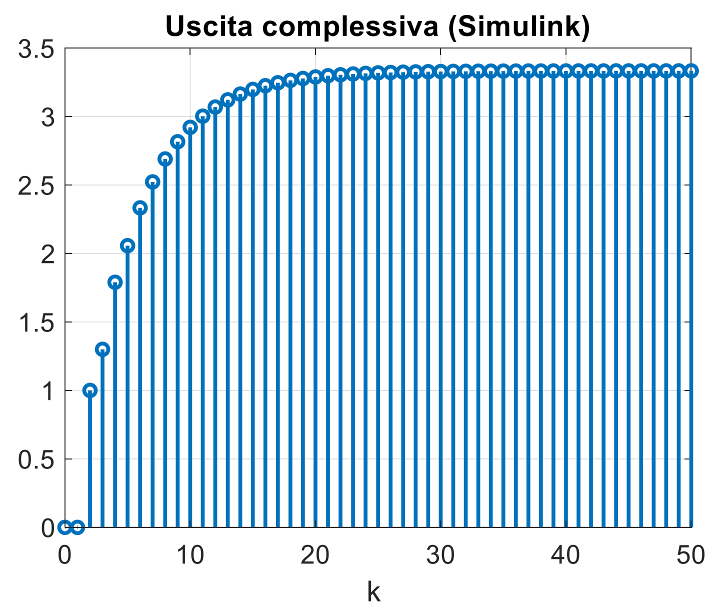


Il comportamento oscillatorio viene «occultato» dalla scala complessiva del grafico

$$y(k) = [3.33 - 3.84 \cdot (0.8)^k + 0.51 \cdot (-0.5)^k]\delta_{-1}(k)$$

Confrontiamo la risposta calcolata mediante la sua espressione analitica e quella ottenuta con il modello Simulink



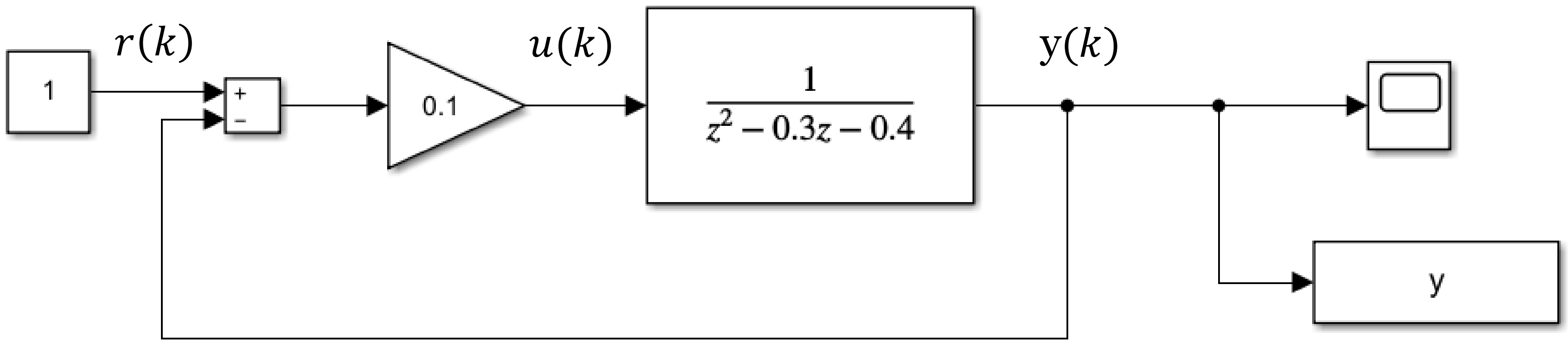


Script per realizzare i 4 grafici delle due slides precedenti

```
k=0:50;
y1=3.33;
y2=-3.84*(0.8).^k;
y3=0.51*(-0.5).^k;

figure(1)
stem(k,y2,'LineWidth',2),grid
xlabel('k ')
title('y_2(k)=-3.84*(0.8)^k')
set(gca,'FontSize',14)

figure(2)
stem(k,y3,'LineWidth',2),grid
xlabel('k ')
title('y_3(k)=0.51*(-0.5).^;')
set(gca,'FontSize',14)
```

```
figure(3)
stem(k,y1+y2+y3,'LineWidth',2),grid
xlabel('k ')
title('Uscita complessiva (espr. analitica)')
set(gca,'FontSize',14)

figure(4)
stem(y.Time,y.Data,'LineWidth',2),grid
xlabel('k ')
title('Uscita complessiva (Simulink)')
set(gca,'FontSize',14)
```

Realizziamo il sistema di controllo in retroazione, inserendo preliminarmente un guadagno del regolatore pari a 0.1.



Determinare, prima di eseguire la simulazione, il valore di regime dell'uscita.

CicloChiusoP.slx

La funzione di trasferimento a ciclo chiuso $W_r^y(z)$ fra il set point e l'uscita vale

$$W_r^y(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} = \frac{\dfrac{0.1}{z^2 - 0.3z - 0.4}}{1 + \dfrac{0.1}{z^2 - 0.3z - 0.4}} = \frac{0.1}{z^2 - 0.3z - 0.3}$$

Il legame fra il set-point e l'uscita è pertanto rappresentabile nella forma seguente

$$r(k) \longrightarrow \boxed{\frac{0.1}{z^2 - 0.3z - 0.3}} \longrightarrow y(k)$$

Calcoliamone i poli mediante il comando roots

```
roots([1 -0.3 -0.3])
```

```
ans =

    0.7179
   -0.4179
```

In corrispondenza del valore di guadagno scelto, il sistema di controllo è asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

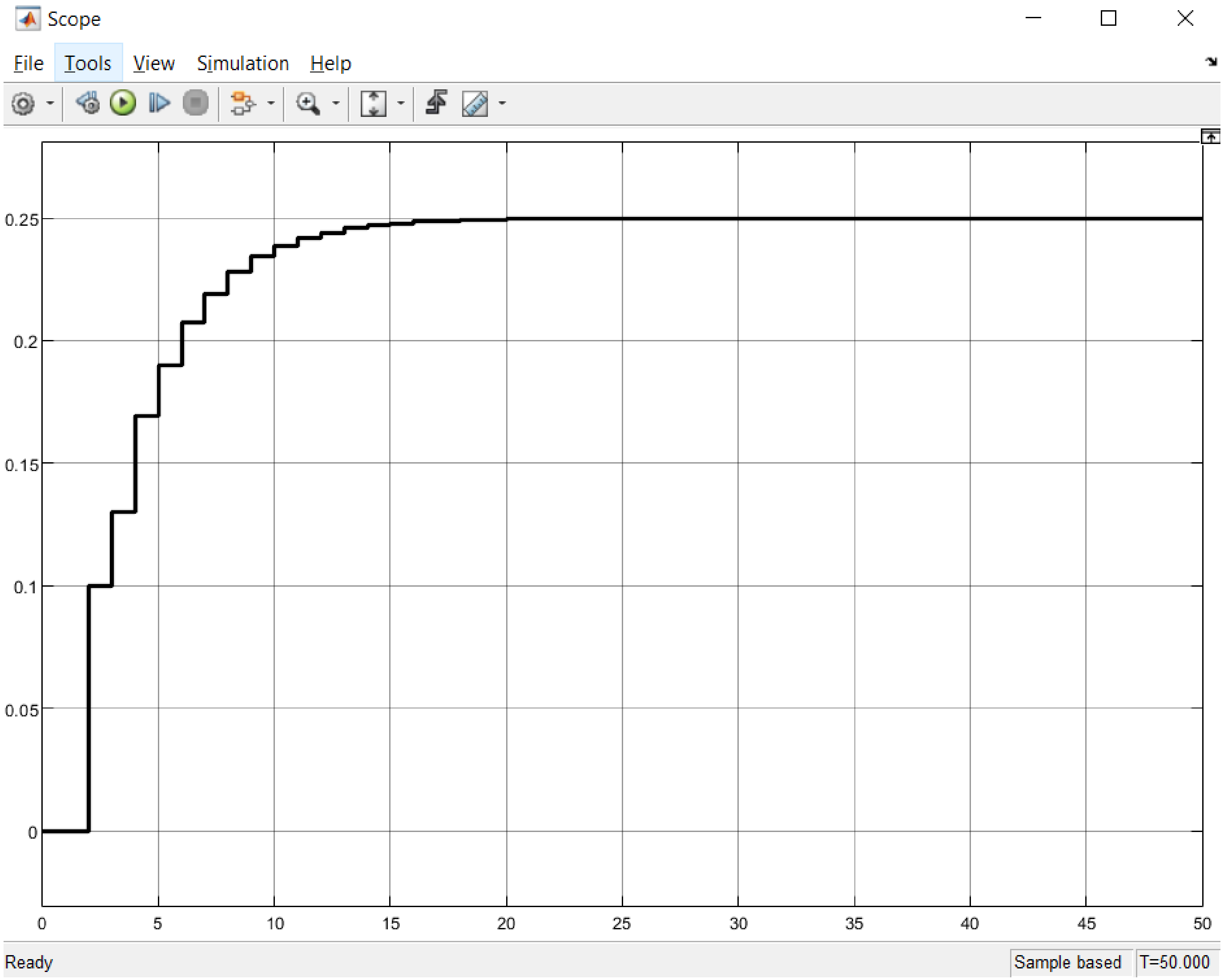
Per determinare il valore di regime della sequenza di uscita, utilizziamo la proprietà introdotta in precedenza che stabilisce come la risposta al gradino unitario di una FdT asintoticamente stabile converge al valore del guadagno della FdT

$$W_r^y(z) = \frac{0.1}{z^2 - 0.3z - 0.3} = \frac{0.1}{(z - 0.71)(z + 0.41)}$$

Il guadagno della FdT a ciclo chiuso vale $W_r^y(1) = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$

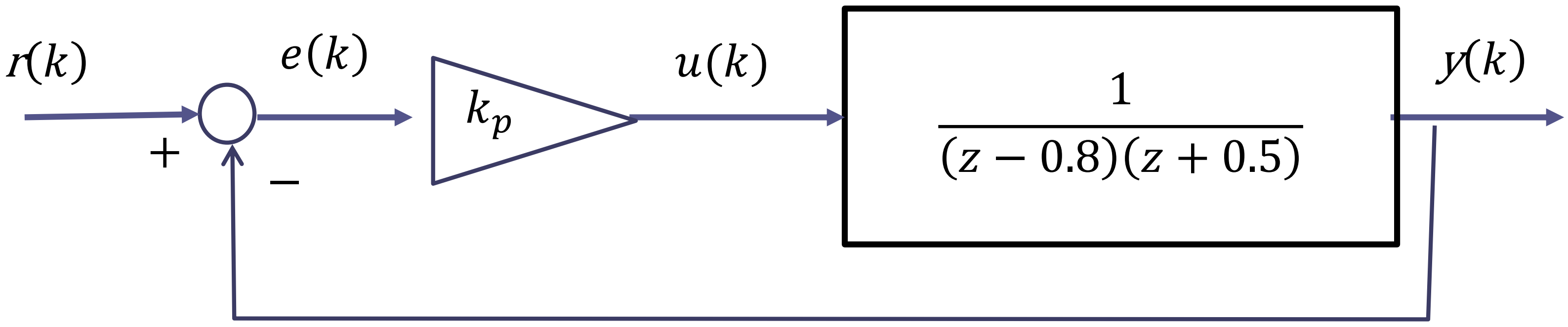
Ci attendiamo quindi che l'uscita converga al valore 0.25

Il valore di regime coincide con quello calcolato su carta



Ora desideriamo analizzare il comportamento del sistema retroazionato al variare del guadagno k_p del regolatore.

Schema a blocchi del sistema di controllo



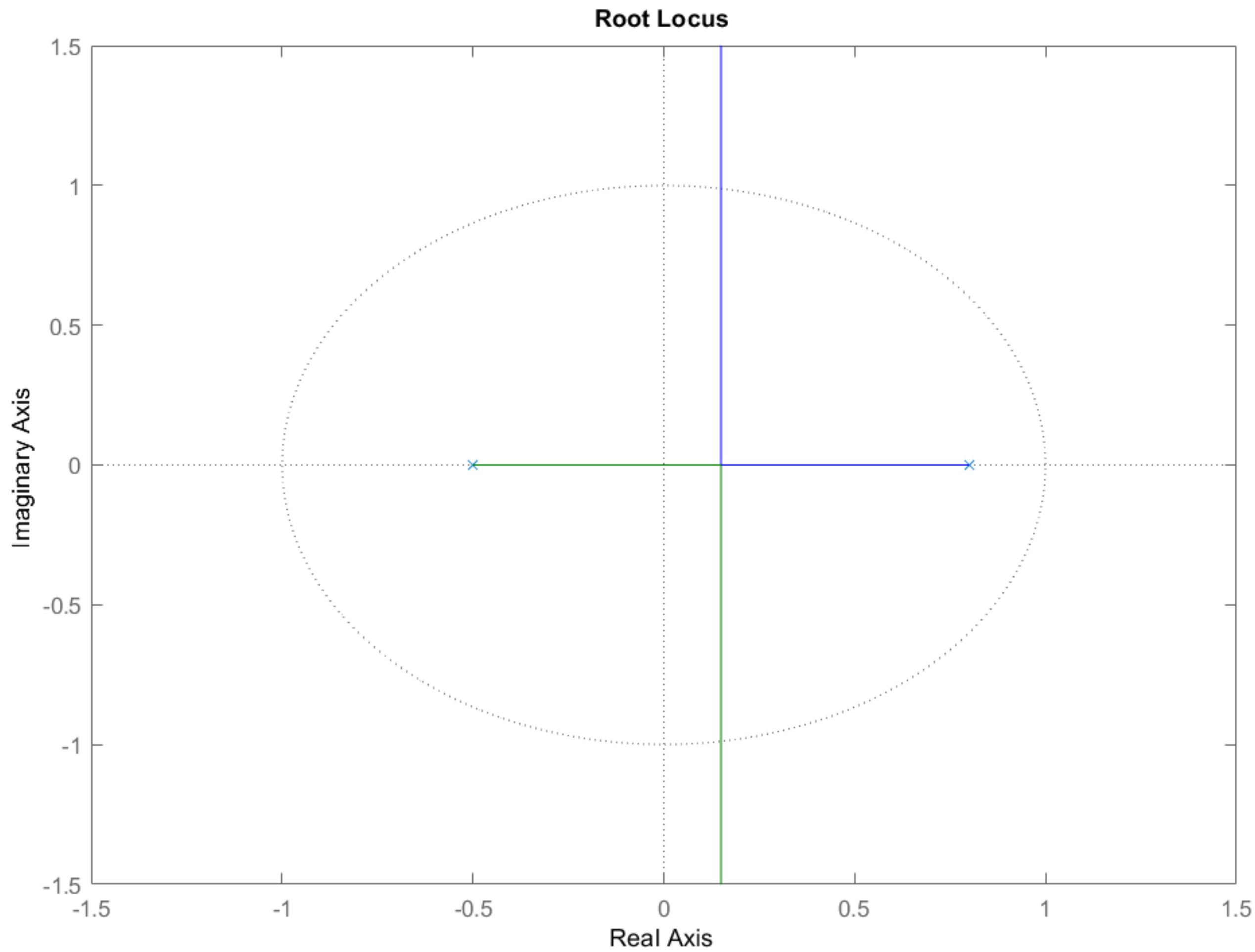
Analizziamo mediante il luogo delle radici come il guadagno k_p del controllore influenzi le posizioni dei poli della FdT a ciclo chiuso.

```
Fuy=tf(1,[1 -0.3 -0.4],-1)

rlocus(Fuy)

axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
```

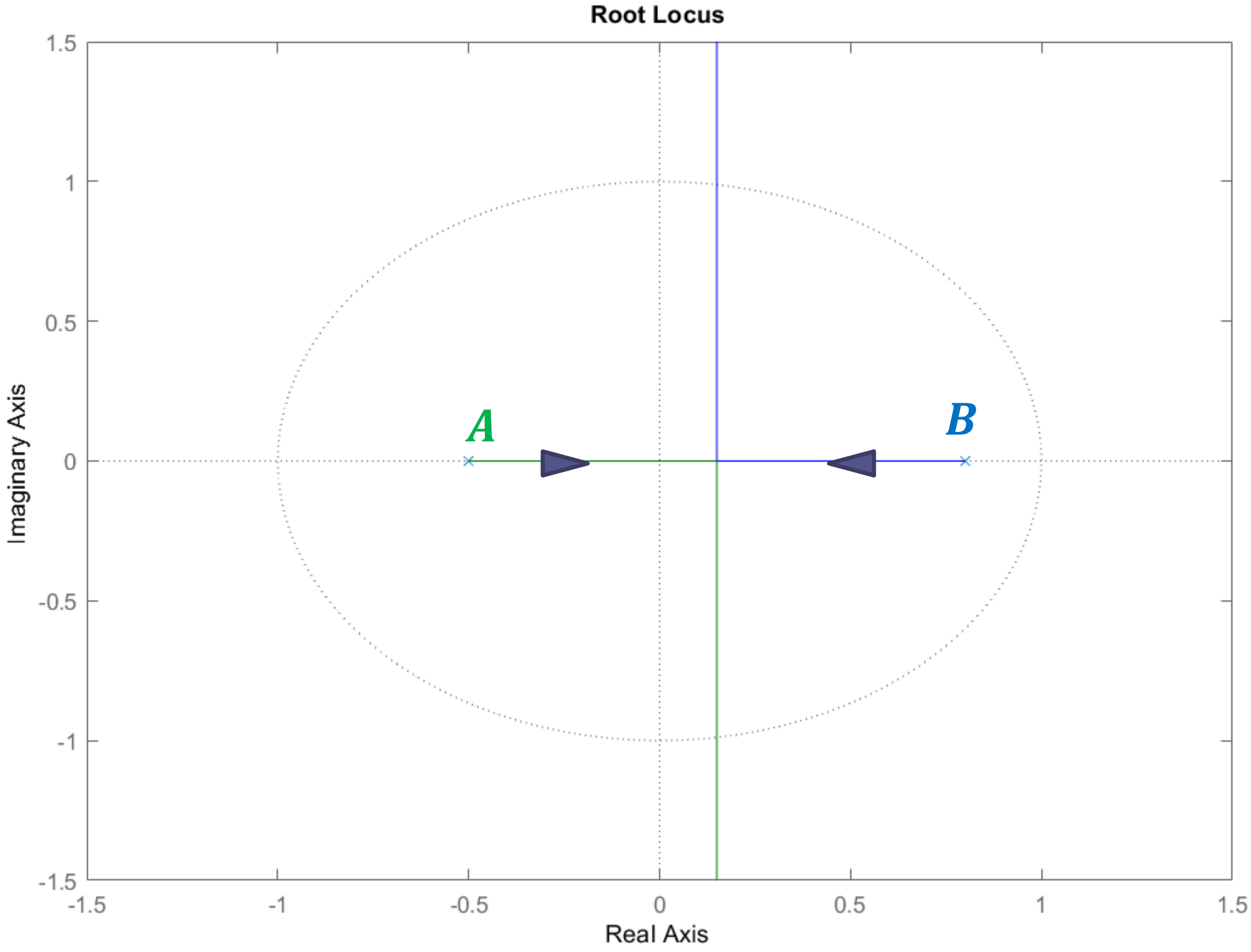
La funzione Matlab `tf` consente di definire una variabile di tipo «Transfer Function», cioè una funzione di trasferimento. Nel suo modo di impiego tradizionale, debbono essere passati come argomenti di ingresso i vettori associati al numeratore ed al denominatore della funzione di trasferimento.

Passando come terzo argomento il numero -1. la funzione `tf` definisce una funzione di trasferimento discreta.

Come risultato, tracciando il luogo delle radici viene sovrapposto ai rami del luogo il disco unitario, onde consentire analisi «orientate» ai sistemi a tempo discreto



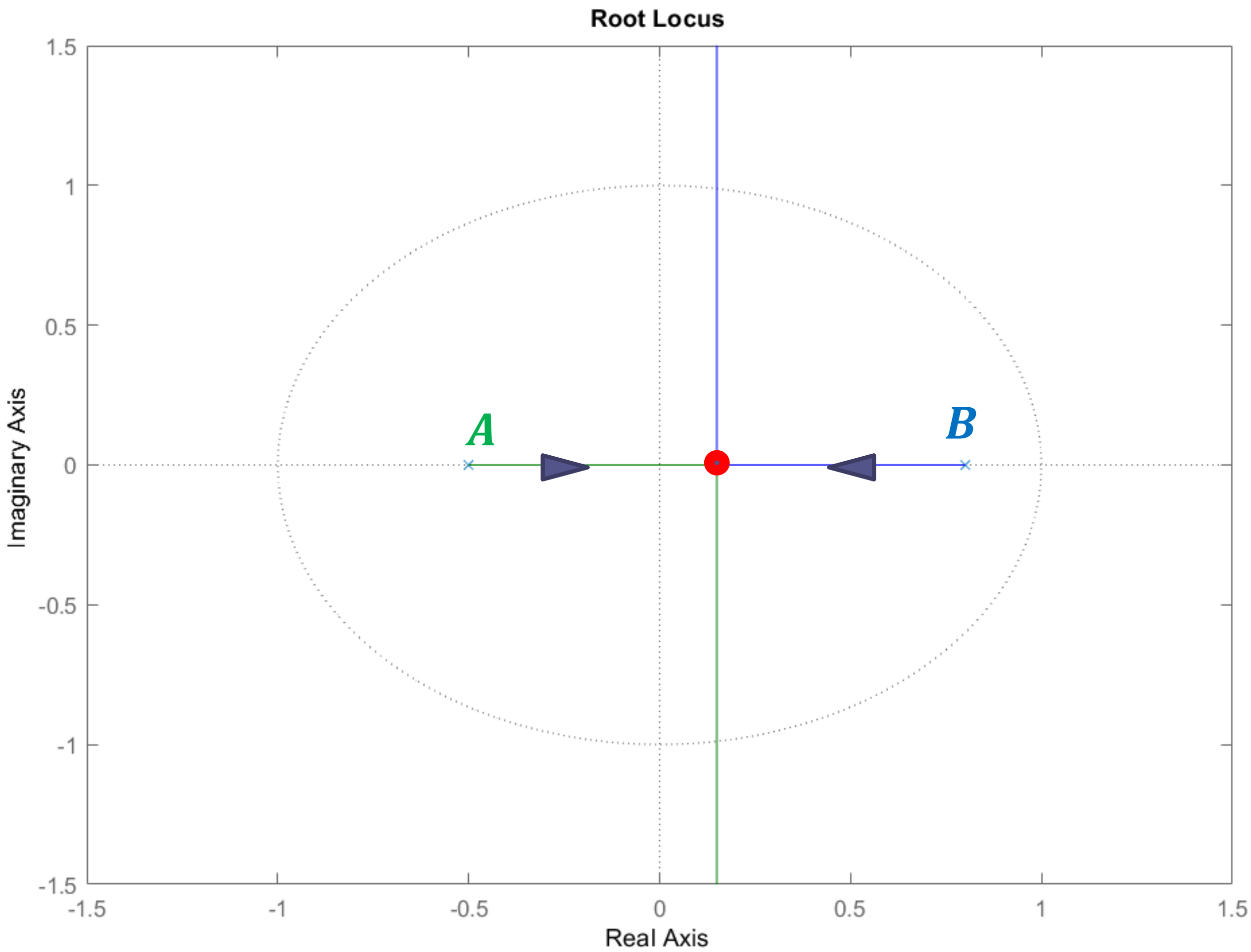
Root Locus
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
Imaginary Axis
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
Real Axis



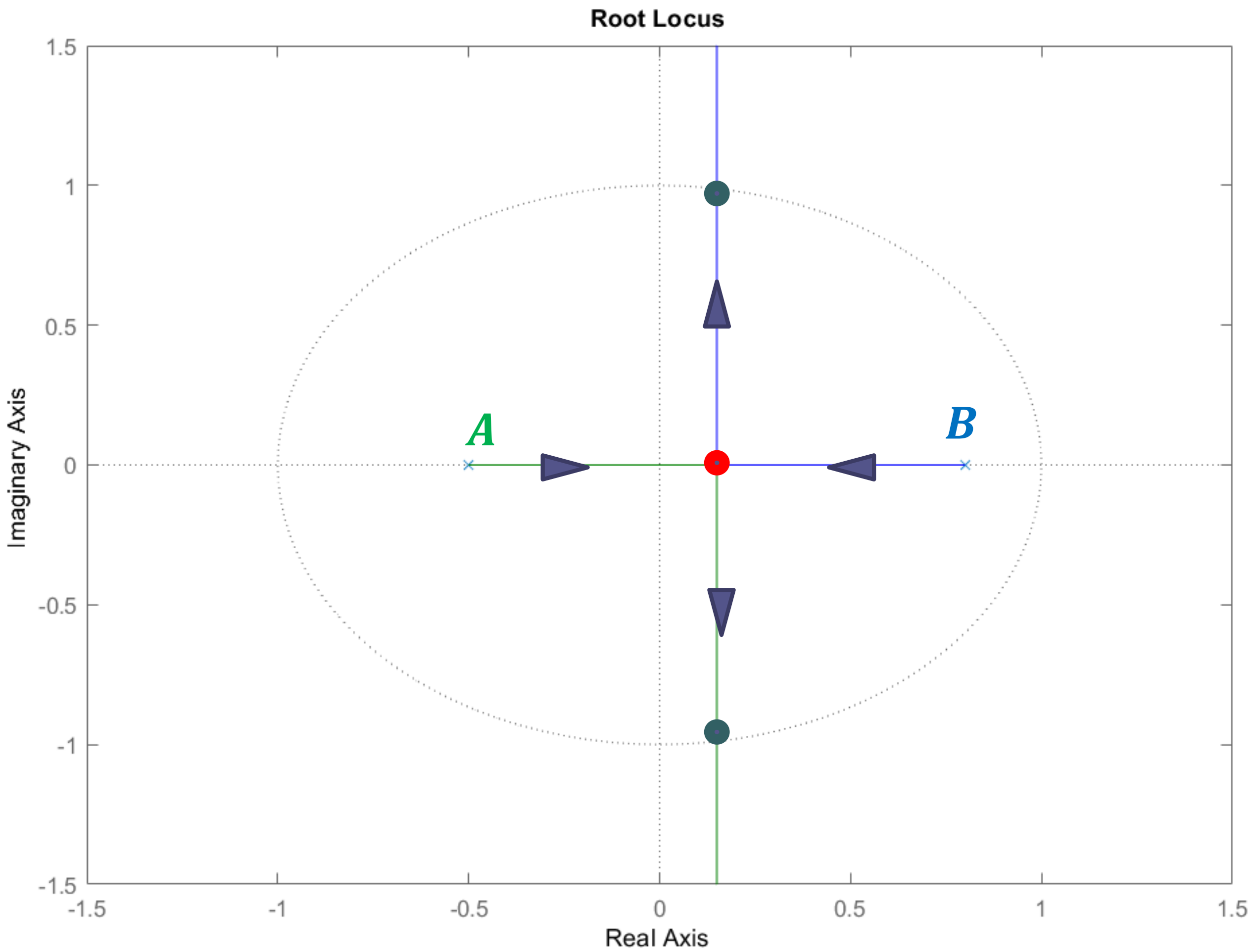
$A = -0.5$

$B = 0.8$

Punti di partenza dei due rami del luogo delle radici (sono i poli della FdT a ciclo aperto)

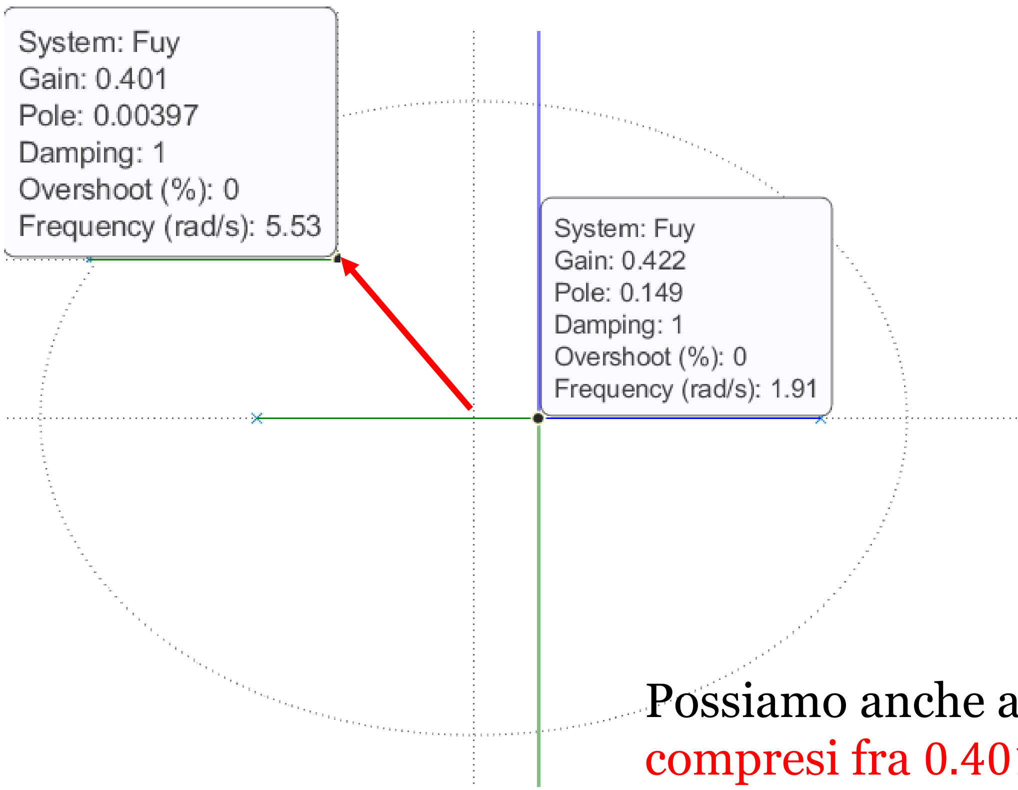


● Punto doppio (collocato a meta strada fra i punti A e B)



- Punti in cui i rami attraversano la frontiera del disco unitario, portando il sistema a ciclo chiuso in condizione di instabilità

Identifichiamo i valori del guadagno del regolatore associati ai punti caratteristici del luogo. Ciò può essere fatto cliccando con il mouse su tali punti.

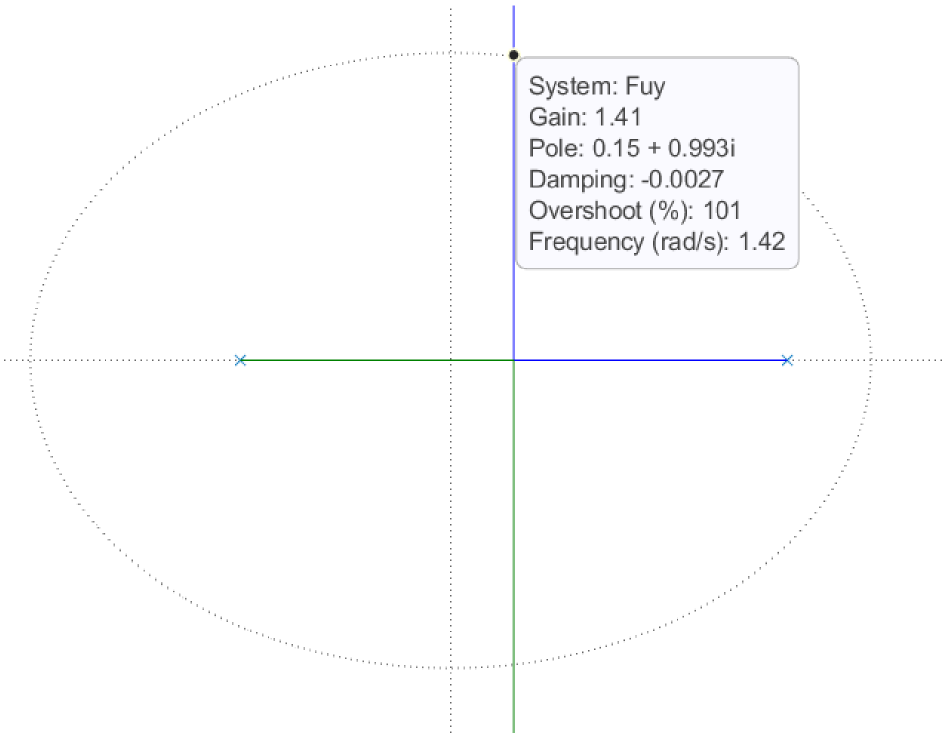


All'origine è associato un valore del guadagno k_p pari a 0.401

Al punto doppio, avente ascissa 0.149, è associato un valore del guadagno k_p pari a 0.422

Possiamo pertanto affermare che al crescere del guadagno da 0 fino a 0.422 si osserverà una progressiva velocizzazione della risposta.

Possiamo anche affermare che per valori del guadagno compresi fra 0.401 e 0.422 la risposta sarà monotona crescente (no ringing) in quanto i poli sono tutti reali positivi



Al punto di attraversamento della frontiera del disco unitario è associato un valore del guadagno pari a 1.41

Possiamo pertanto affermare che valori di guadagno superiori ad 1.41 renderanno il sistema a ciclo chiuso instabile.

Valori di guadagno compresi fra 0.422 (che è il valore associato al punto doppio) e 1.41 corrispondono a poli complessi coniugati e produrranno quindi dei comportamenti oscillatori (stabili).

Riassumiamo le conclusioni tratte, e verifichiamole mediante Simulink

$0 < k_p < 0.422$ La risposta diventa progressivamente più rapida al crescere di k_p

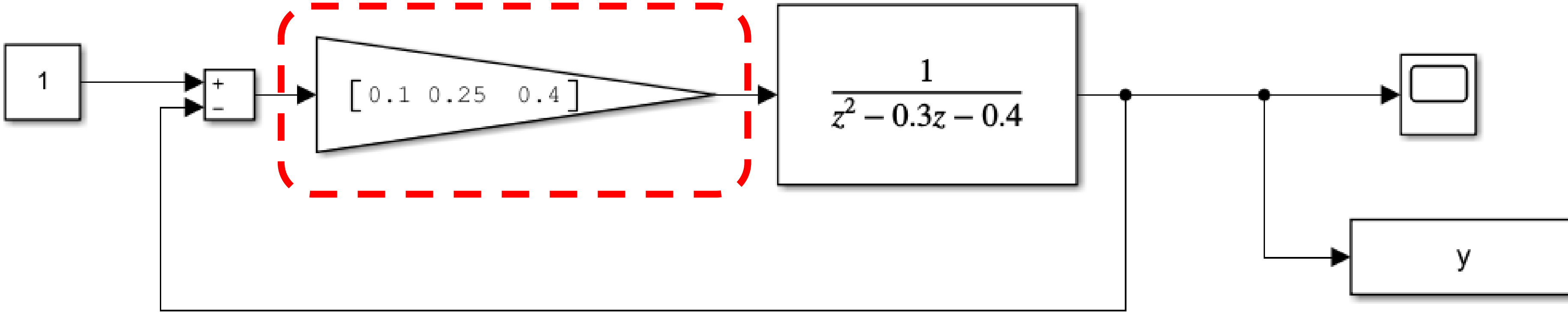
$0.401 < k_p < 0.422$ La risposta è monotona crescente.

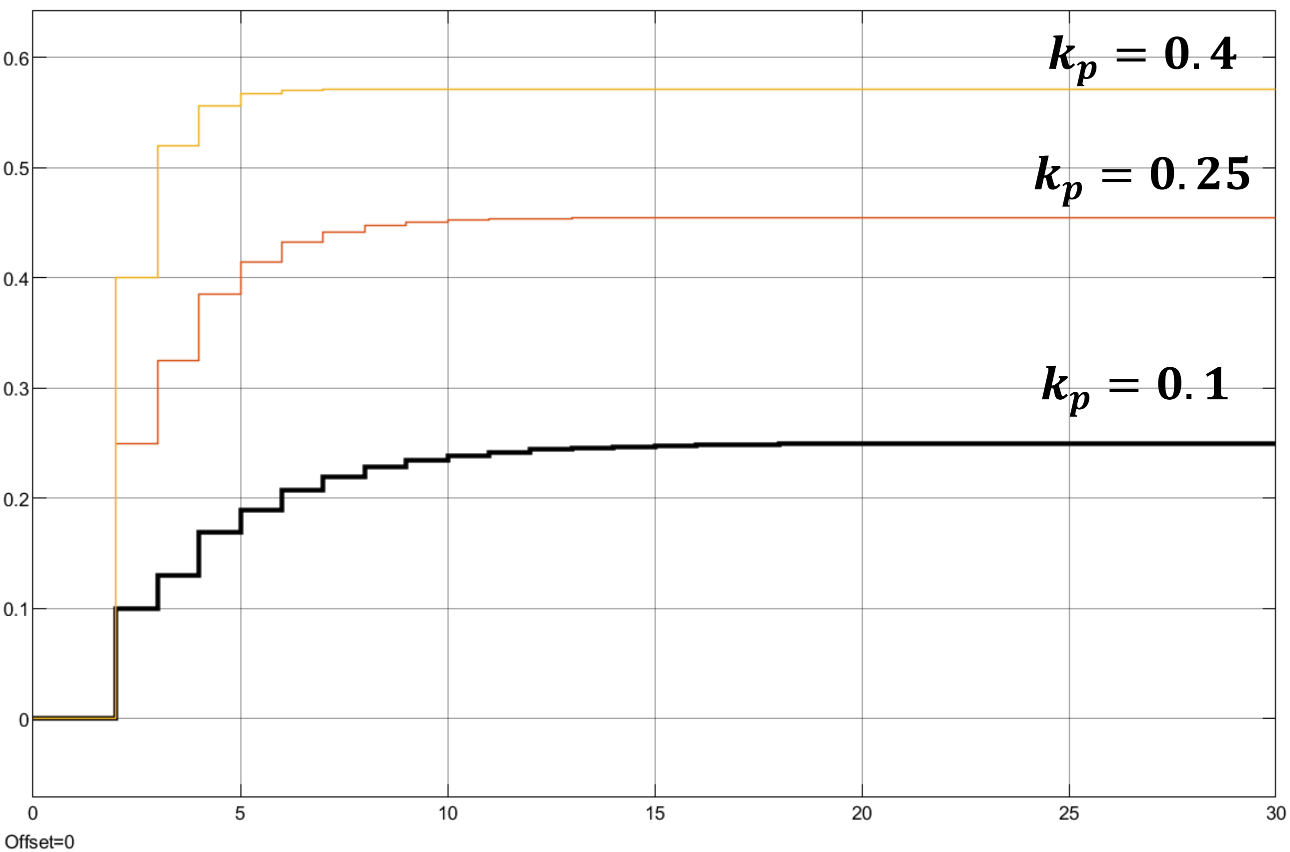
$0.422 < k_p < 1.41$ La risposta è oscillatoria.

$k_p > 1.41$ Il sistema a ciclo chiuso è instabile

Quale sarà il valore di regime della risposta a ciclo chiuso ?

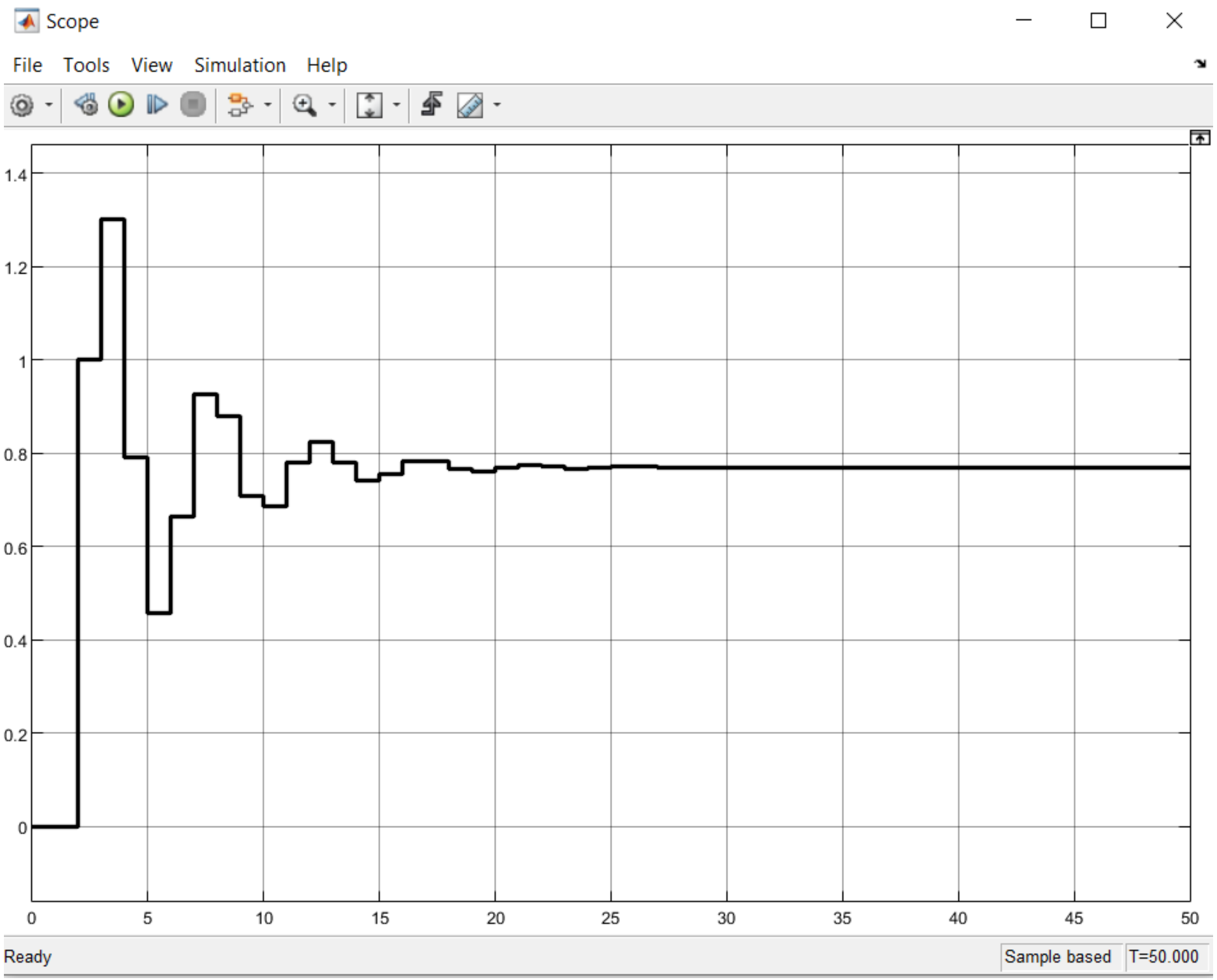
$$W_r^y(z) = \frac{\dfrac{k_p}{z^2 - 0.3z - 0.4}}{1 + \dfrac{k_p}{z^2 - 0.3z - 0.4}} = \frac{k_p}{z^2 - 0.3z - 0.4 + k_p} \qquad W_r^y(1) = \frac{k_p}{0.3 + k_p}$$



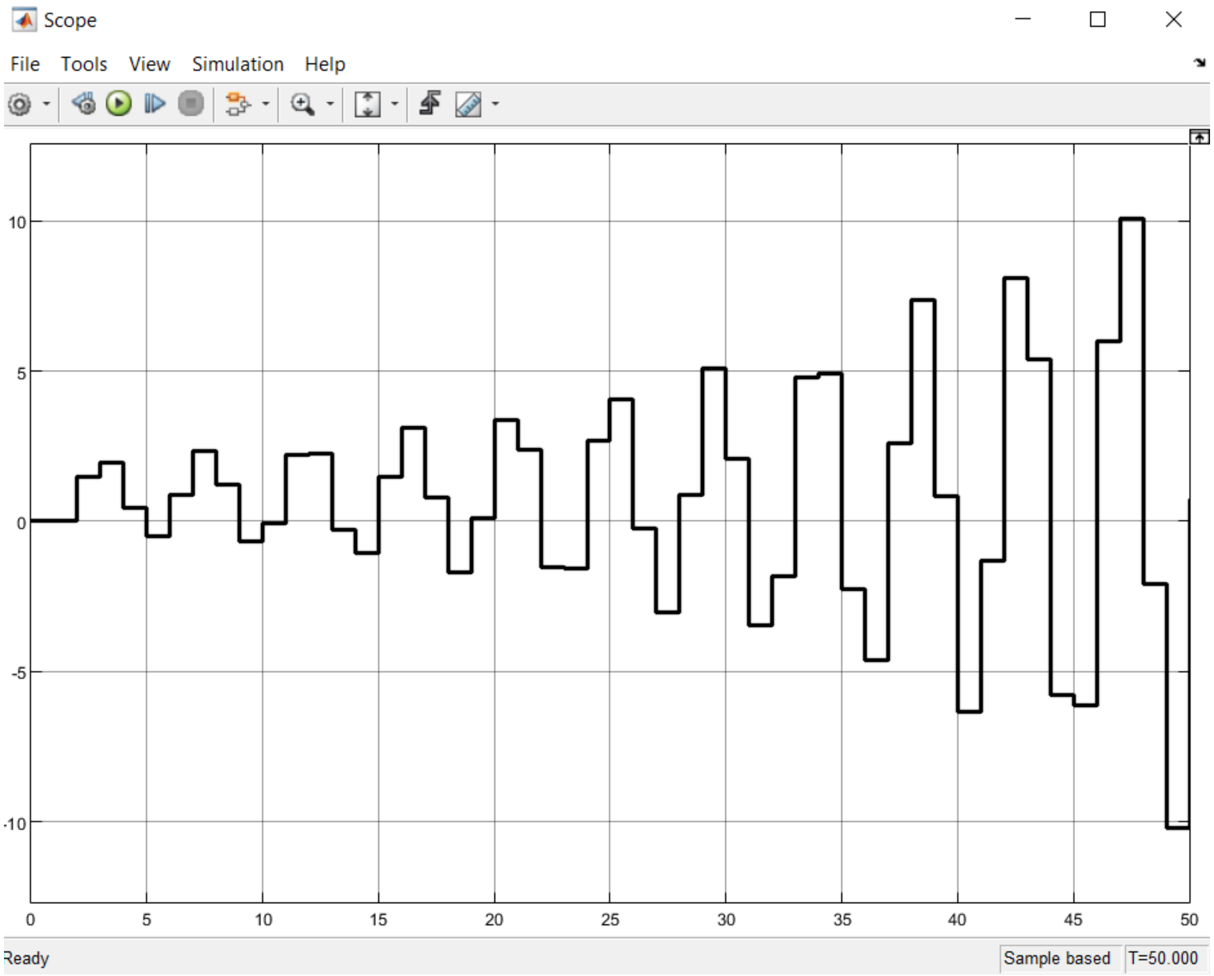


Inseriamo nel blocco gain il vettore `[0.1 0.25 0.4]` per simulare simultaneamente il sistema di controllo in corrispondenza dei tre valori distinti del guadagno del controllore, e impostiamo la durata della simulazione (`Stop Time`) a 30 passi.

$$k_p = 1$$


Scope
File Tools View Simulation Help
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
Ready
Sample based
T=50.000

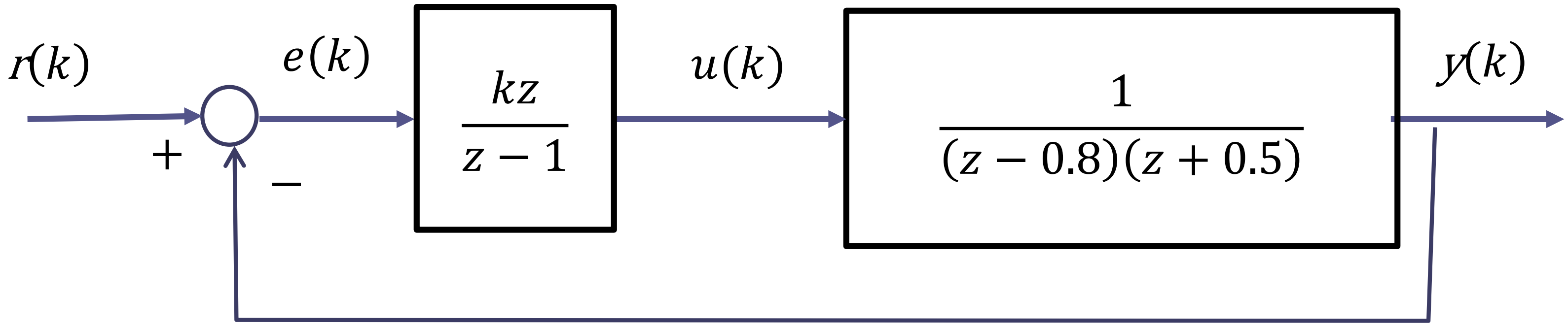
$$k_p = 1.5$$


Scope
File Tools View Simulation Help
10
5
0
-5
-10
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
Ready
Sample based
T=50.000

Si ripetano le medesime analisi teoriche e simulative impiegando un regolatore integrale

$$\mathrm{C}(z) = k\,\frac{z}{z-1}$$

Schema a blocchi del sistema di controllo



Come varia il comportamento transitorio e a regime della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k ?

La funzione di trasferimento a ciclo chiuso $W_r^y(z)$ fra il set point e l'uscita vale

$$W_r^y(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} = \frac{\dfrac{kz}{z-1} \cdot \dfrac{1}{z^2 - 0.3z - 0.4}}{1 + \dfrac{kz}{z-1} \cdot \dfrac{1}{z^2 - 0.3z - 0.4}}$$

$$= \frac{kz}{(z-1)(z^2 - 0.3z - 0.4) + kz} = \frac{kz}{z^3 - 1.3z^2 + (k - 0.1)0.3z + 0.4}$$

Il legame fra il set-point e l'uscita è pertanto rappresentabile nella forma seguente

$$r(k) \longrightarrow \boxed{\frac{kz}{z^3 - 1.3z^2 + (k - 0.1)0.3z + 0.4}} \longrightarrow y(k)$$

Per determinare il valore di regime della risposta a ciclo chiuso ad un set-point a gradino unitario, utilizziamo la proprietà introdotta in precedenza che stabilisce come la risposta al gradino unitario di una FdT asintoticamente stabile converge al valore del guadagno della FdT

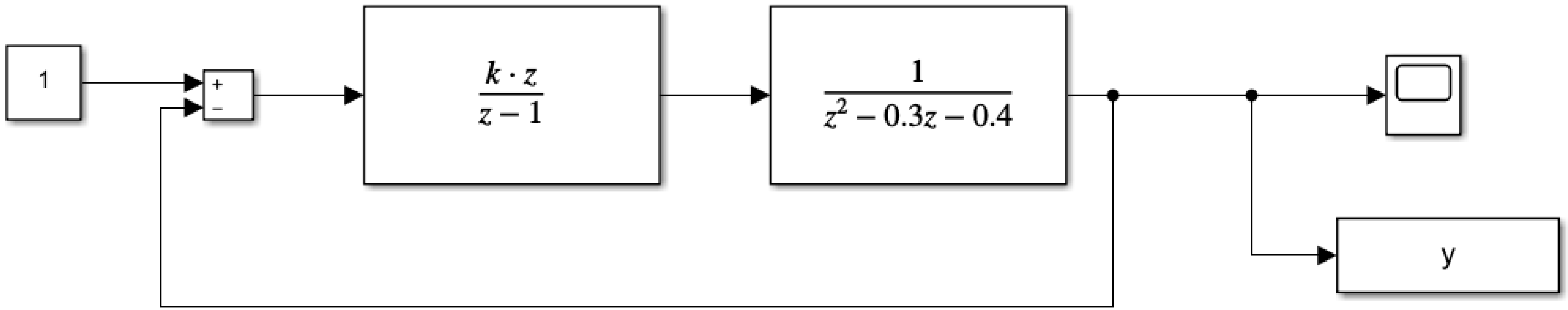
$$W_r^y(z) = \frac{kz}{z^3 - 1.3z^2 + (k - 0.1)0.3z + 0.4}$$

Il guadagno della FdT a ciclo chiuso vale $W_r^y(1) = 1$

Ci attendiamo quindi che in corrispondenza di un set-point a gradino unitario l'uscita converga al valore 1, quindi al valore del set-point.

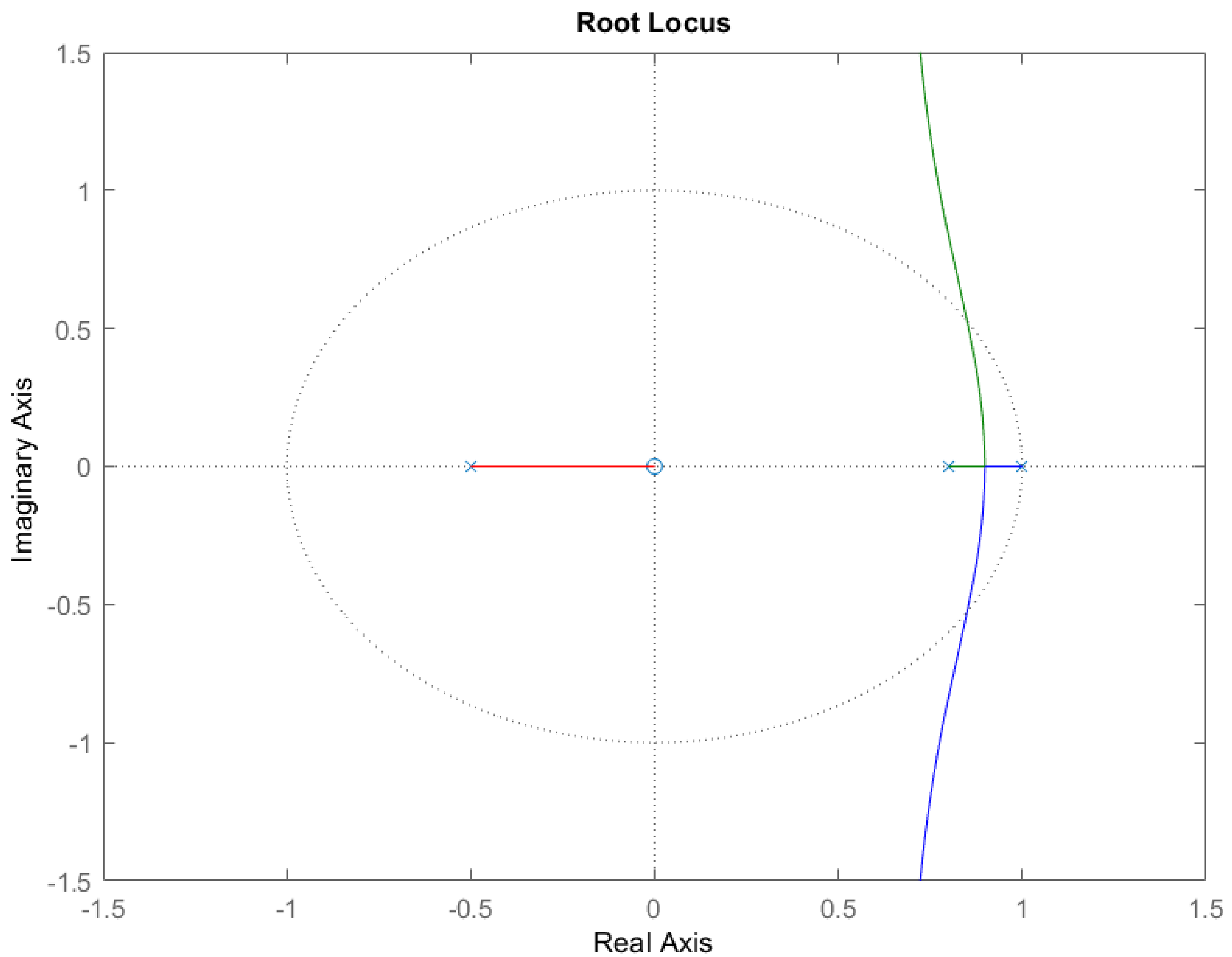
Questa proprietà varrà unicamente per quell'insieme di valori del guadagno k (se ve ne sono) tali che il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile

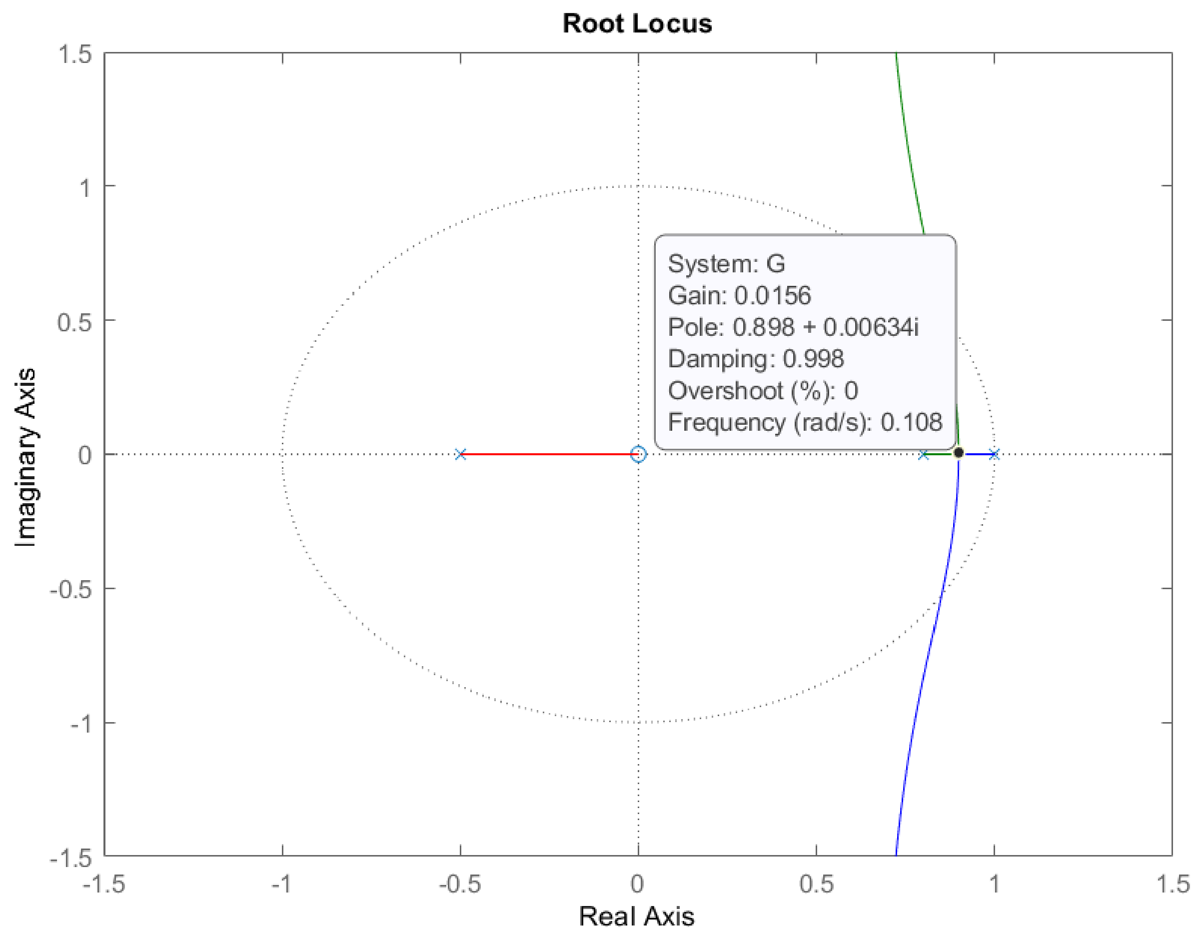
Realizziamo in Simulink il sistema di controllo in retroazione.



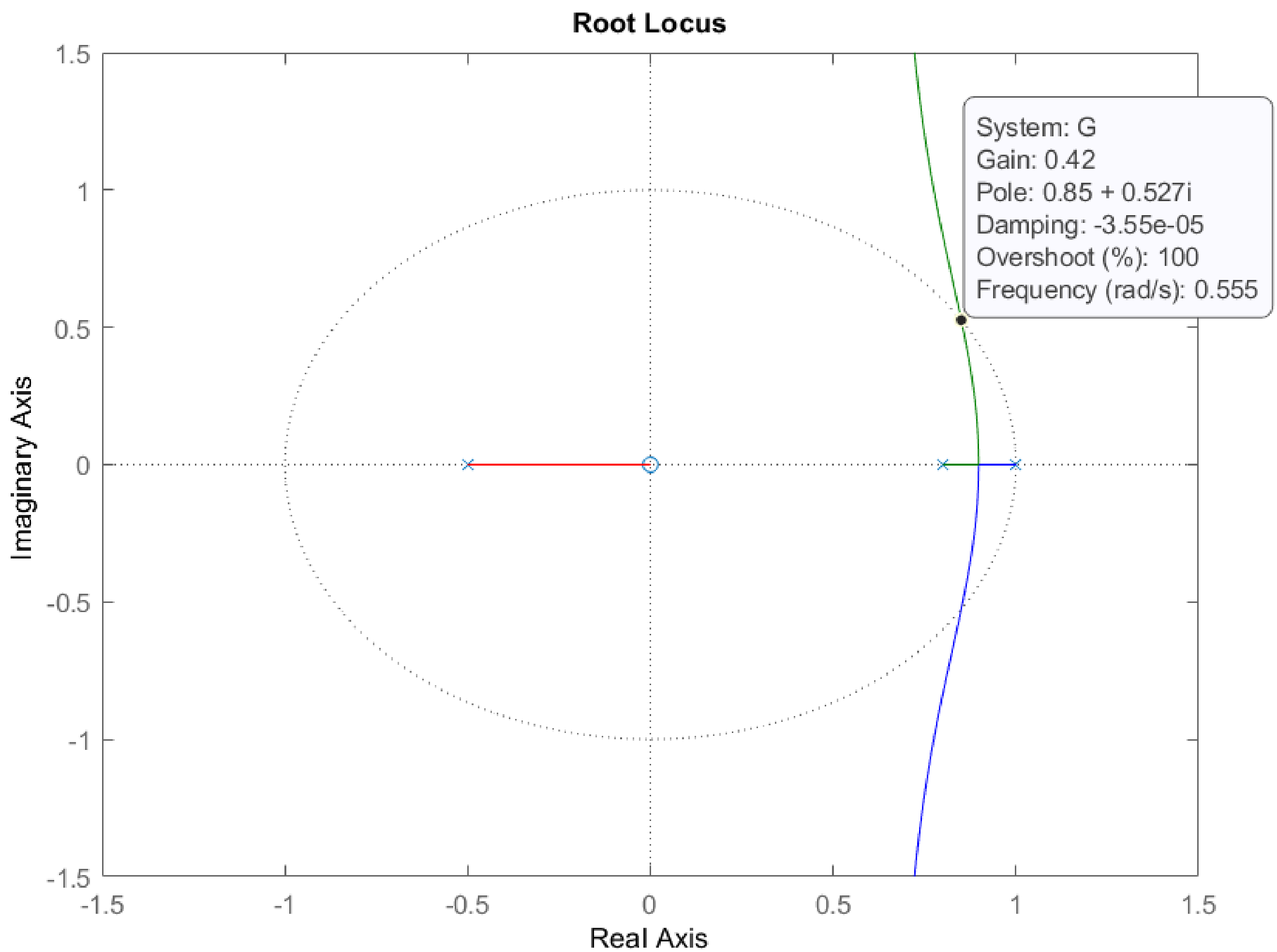
Utilizziamo per il guadagno k del regolatore una variabile scalare, alla quale, prima di poter avviare la simulazione, dovrà essere attribuito un valore numerico nel workspace di Matlab

`CicloChiusoI.slx`


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5



Al punto doppio, avente ascissa circa pari a 0.9, è associato un valore del guadagno k_p pari a 0.015



Al punto di attraversamento della frontiera del disco unitario, è associato un valore del guadagno k_p pari a circa 0.42

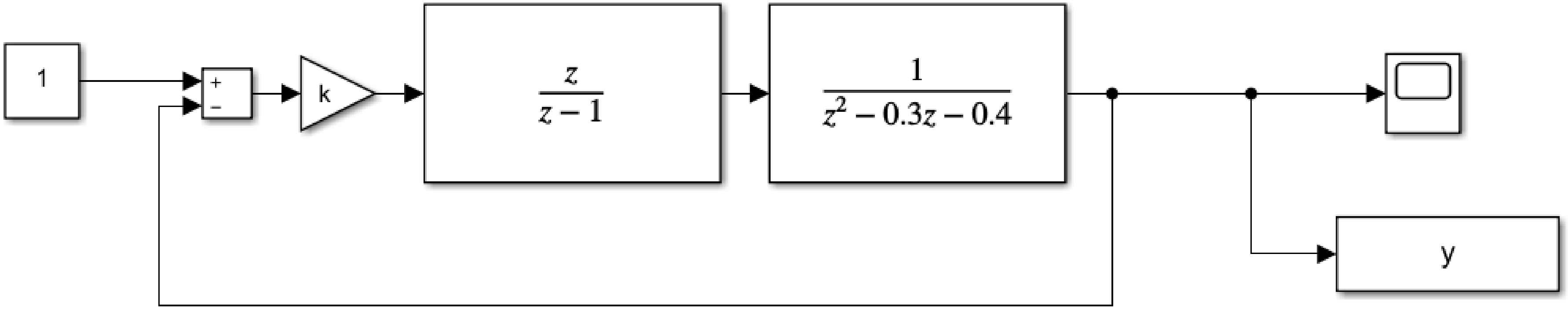
Analisi

$0 < k < 0.015$ La risposta diventa progressivamente più rapida al crescere di k_p e le oscillazioni introdotte dal ringing (introdotto dal polo reale negativo) dovrebbero essere pressoché invisibili nella risposta complessiva in quanto il modo dominante è aperiodico e si estingue molto piu lentamente del modo oscillatorio causato dal polo reale negativo

$0.015 < k < 0.42$ La risposta è oscillatoria per effetto della comparsa di una coppia di poli complessi coniugati

$k > 0.42$ Il sistema a ciclo chiuso è instabile

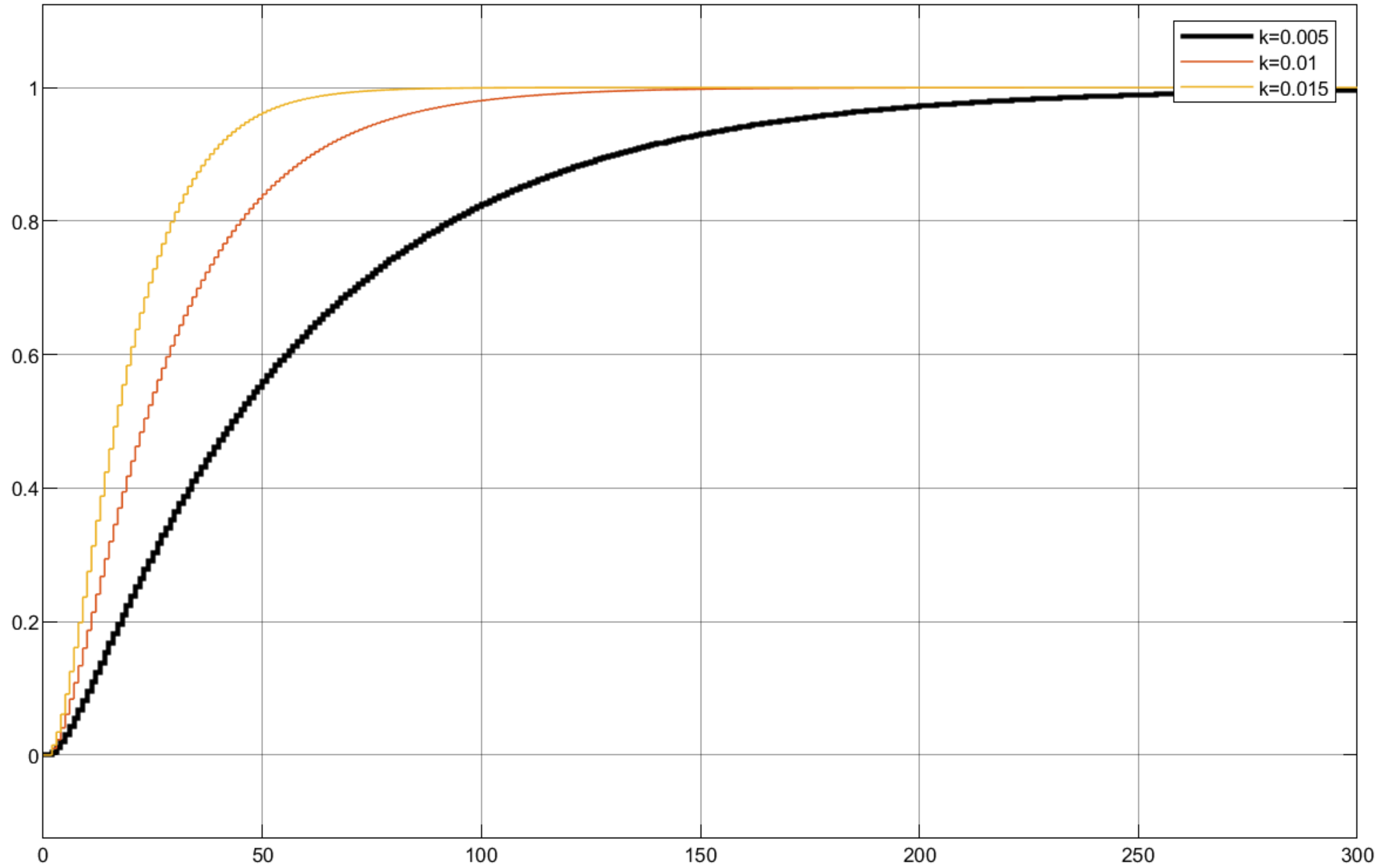
Per poter simulare simultaneamente il sistema di controllo in corrispondenza di diversi valori del guadagno, si decomponga il controllore nella cascata fra il guadagno k e la FdT $\frac{z}{z-1}$



e si definisca, nel workspace di Matlab, il vettore

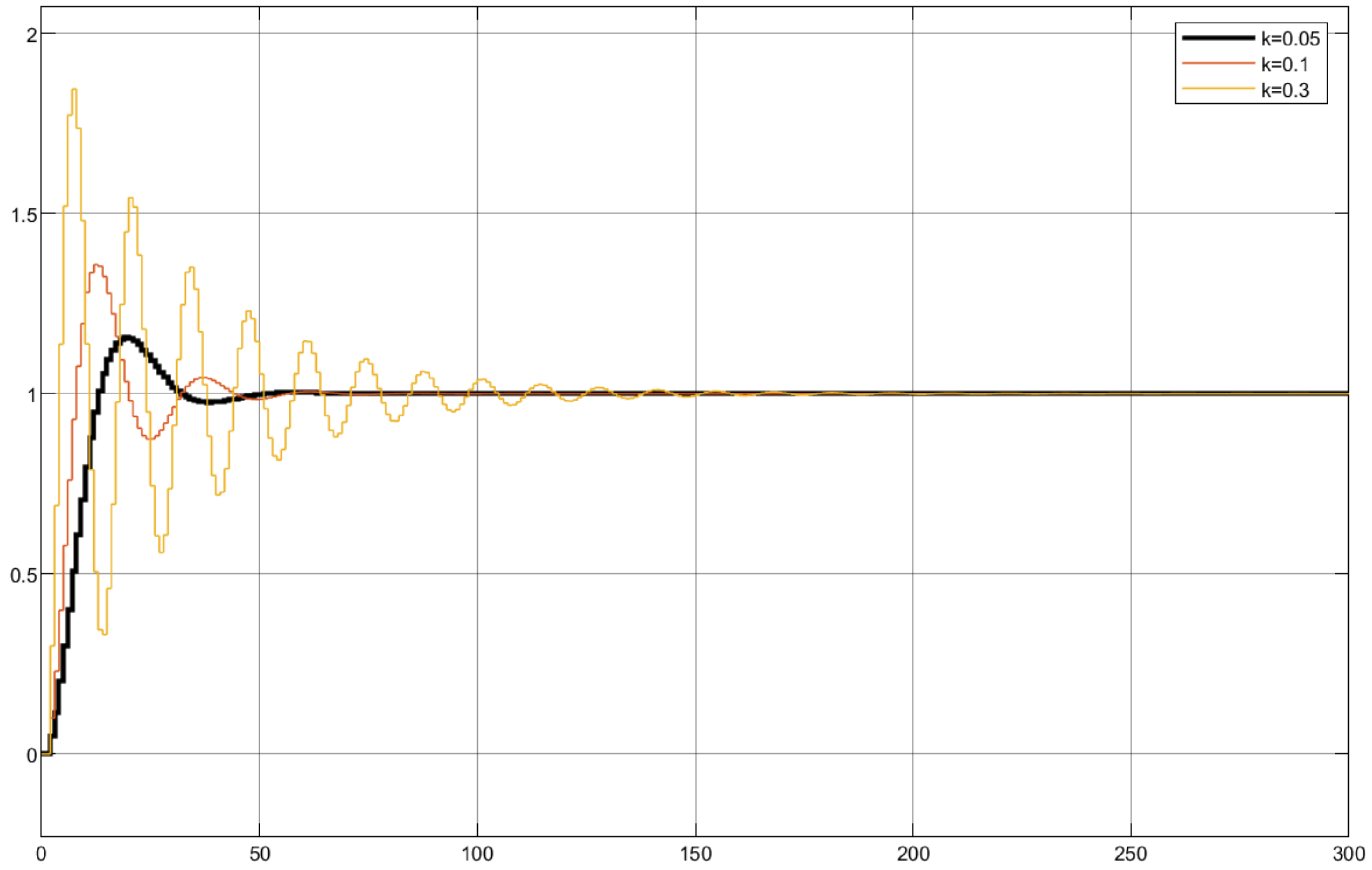
```
k=[0.005   0.01   0.015]
```

k=[0.005   0.01   0.015]

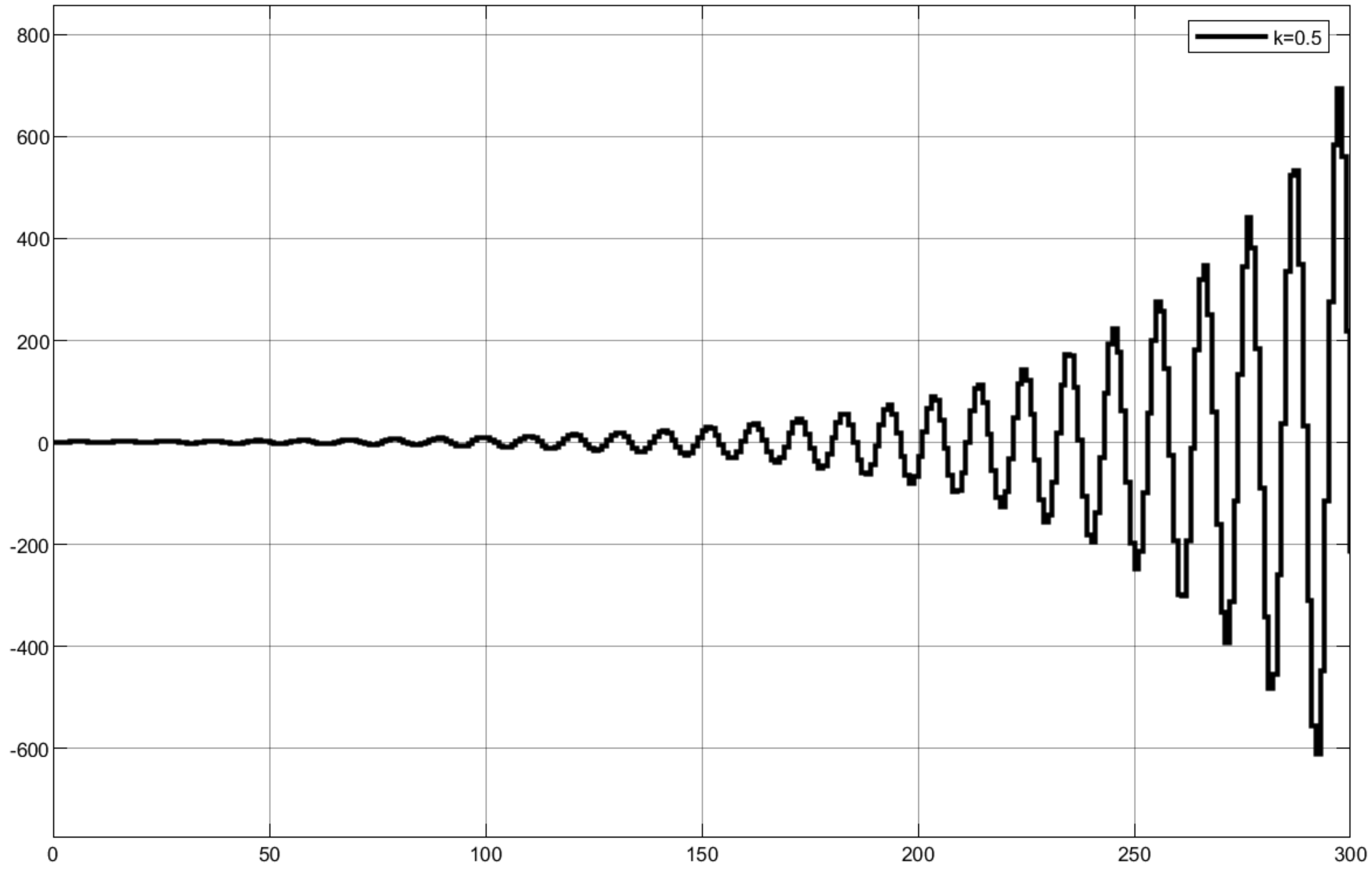


Come atteso, la risposta diventa progressivamente più rapida al crescere di k nell'intevallo $0 < k < 0.015$

k=[0.05 0.1 0.3]



Come atteso, nel range $0.015 < k < 0.42$ la risposta presenta oscillazioni dovute alla presenza di due poli complessi coniugati k=0.5



Come atteso, nel range $k > 0.42$ il sistema a ciclo chiuso risulta essere instabile e la risposta pertanto diverge

Si svolgano analoghe analisi teoriche e simulative impiegando un regolatore proporzionale/integrale

$$\mathrm{C}(z) = k_p + k_i \frac{z}{z-1}$$

La FdT del regolatore PI viene sviluppata come segue

$$\mathrm{C}(z) = \frac{(k_p+k_i)z-k_p}{z-1} = \left(k_p + k_i\right) \frac{z-\frac{k_p}{k_p+k_i}}{z-1}$$

A differenza dal regolatore integrale, che introduceva uno zero nell'origine, il regolatore PI introduce uno zero collocato in un punto arbitrario del semiasse reale positivo

Si ragioni, impiegando il Luogo delle Radici, sulle modalità più opportune per posizionare lo zero in modo da ottenere una risposta a ciclo chiuso dalle caratteristiche migliori possibili.

Suggerimento: la sintesi mediante Luogo delle Radici viene spesso riferita come «Sintesi per cancellazione»