Controllo digitale

Trasformata Z

Determinazione della trasformata inversa

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Antitrasformata Z

Consideriamo la Z-trasformata X(z) di una sequenza causale (cioè con elementi nulli per $k \leq 0$) espressa nella forma seguente in funzione di potenze positive o negative di z

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{b_m z^{-(n-m)} + b_{m-1} z^{-(n-m+1)} + \ldots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n}}$$

Il fatto che stiamo assumendo la sequenza $x(k)$ causale implica che si abbia $n \geq m$.

In generale se la sequenza ha il primo elemento $x(0)$ diverso da zero si ha $n = m$.

Se $n > m$ ciò implica che vi sono un certo numero di elementi di inizio sequenza nulli.

In particolare, se $n > m$ si ha che:

$$x(0) = x(1) = x(2) = \cdots = x(n - m - 1) = 0$$

ed

$$x(n - m) = b_m$$

Esistono diversi metodi per anti trasformare una Z-trasformata $X(z)$, cioè determinare la sequenza $x(k)$ la cui Z trasformata è $X(z)$

Lunga divisione

Scomposizione in fratti semplici

Metodo computazionale

Lunga divisione (divisioni successive)
E' un metodo numerico, che consente di determinare un numero arbitrario di campioni della sequenza $x(k)$ ma non la loro espressione analitica

Scomposizione in fratti semplici (metodo di Heaviside)
E' un metodo analitico, che si basa essenzialmente nella decomposizione della $X(z)$ nella somma di termini più semplici dei quali, mediante tabelle, è nota in forma analitica la anti-trasformata.

Metodo computazionale
E' un metodo numerico, basato sul concetto di Funzione di Trasferimento discreta e sulle relative proprietà. Lo introdurremo pertanto un pò più avanti.

Metodo della lunga divisione (divisioni successive)

Questo metodo si basa sulla riscrittura della $X(z)$ sotto forma di serie di potenze in z^{-1} eseguendo la divisione fra i polinomi a numeratore e denominatore di $X(z)$ con il metodo tabellare di Euclide (che ora richiameremo)

$$X(z) = A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \ldots + A_k z^{-k} + \ldots$$

Una volta effettuata tale riscrittura, se ricordiamo la definizione di Z trasformata unilatera

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \ldots + x(k) z^{-k} + \ldots$$

si avrà che i coefficienti A_0 , A_1, A_2 dello sviluppo ottenuto coincideranno con gli elementi della sequenza numerica $x(k)$

$$x(k) = A_k \qquad\qquad k = 0,1,2, \ldots.$$

Richiamiamo il metodo tabellare di Euclide attraverso degli esempi

Esempio

Si determini la sequenza $x(k)$ la cui Z-trasformata è

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

In realtà, come riportato in tabella, sappiamo già come la sequenza $\mathrm{x}(k)$ sia la sequenza esponenziale $a^k \delta_{-1}(k)$

La procedura può essere indifferentemente applicata alle due forme equivalenti della $X(z)$, come rapporto di polinomi in z o in z^{-1}

Iniziamo dalla applicazione della procedura di divisione polinomiale al rapporto di polinomi in z^{-1}

Il punto di partenza è scrivere i due polinomi all'interno di una struttura come quella seguente

Polinomio a numeratore

Polinomio a denominatore

$$\boxed{1} \qquad \begin{array}{|l} \boxed{1 - az^{-1}} \\ \hline \text{RISULTATO DELLA DIVISIONE} \end{array}$$

Ora dividiamo fra di loro i primi elementi dei due polinomi (entrambi unitari), e scriviamo il risultato sotto il polinomio a denominatore nello spazio «risultato della divisione»

$$1 \qquad \begin{array}{|l} 1 - az^{-1} \\ \hline \boxed{1} \end{array}$$

Rapporto fra i primi elementi dei 2 polinomi. Coincide con A_0

Il termine che abbiamo appena inserito risulta essere il termine costante A_0 dello sviluppo che stiamo calcolando.

Il primo campione della sequenza $x(k)$ è pertanto unitario: $x(0) = A_0 = 1$

Ora si moltiplichi il termine appena determinato per il polinomio a denominatore, e si riporti il risultato (cambiato di segno) in una riga successiva subito sotto il polinomio a numeratore, allineando verticalmente i termini con le stesse potenze di z

1	$1 - az^{-1}$
$-1 + az^{-1}$	1

Ora si faccia la somma fra il polinomio nella prima riga (il polinomio a numeratore della $X(z)$) ed il polinomio $-1 + az^{-1}$ appena riportato sotto di esso. I termini costanti si compensano l'un l'altro (ovviamente) e si ottiene il polinomio az^{-1}

1	$1 - az^{-1}$
$-1 + az^{-1}$	1
$\backslash\backslash \quad az^{-1}$	

Il termine az^{-1} appena determinato mi consente di affermare che:

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + \frac{az^{-1}}{1-az^{-1}}$$

Ora andiamo avanti considerando il primo elemento del polinomio az^{-1} appena ricavato, e dividendolo, esattamente come fatto prima, per il primo elemento del polinomio $1-az^{-1}$ a denominatore

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-az^{-1} \\ \hline -1+az^{-1} & 1 + az^{-1} \\ \hline // \quad az^{-1} & \end{array}$$

Il termine che abbiamo appena inserito risulta essere il termine di grado -1, $A_1 z^{-1}$, dello sviluppo che stiamo calcolando.

Il secondo campione $x(1)$ della sequenza $\mathrm{x}(k)$ è pertanto pari ad a: $x(1) = A_1 = a$

Ora si moltiplichi il termine az^{-1} appena determinato per il polinomio a denominatore, e si riporti il risultato (cambiato di segno) sulla sinistra in una riga ancora successiva, allineando verticalmente i termini con le stesse potenze di z

$$
\begin{array}{ll|l}
 & 1 & 1-az^{-1} \\
\cline{3-3}
 & -1+az^{-1} & 1 \quad +az^{-1} \\
\cline{1-2}
\backslash\backslash & az^{-1} & \\
 & \color{red}{-az^{-1}+a^2z^{-2}} &
\end{array}
$$

Facciamo la somma fra i polinomi az^{-1} ed il polinomio $-az^{-1}+a^2z^{-2}$ appena scritto

$$
\begin{array}{ll|l}
 & 1 & 1-az^{-1} \\
\cline{3-3}
 & -1+az^{-1} & 1 \quad +az^{-1} \\
\cline{1-2}
\backslash\backslash & az^{-1} & \\
 & -az^{-1}+a^2z^{-2} & \\
\cline{2-2}
\backslash\backslash & \color{red}{+a^2z^{-2}} &
\end{array}
$$

Il termine a^2z^{-2}appena determinato mi consente di affermare che:

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + \frac{a^2z^{-2}}{1-az^{-1}}$$

La procedura si itera:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-az^{-1} \\ \hline
-1+az^{-1} & \underbrace{1 \quad +az^{-1} \quad +a^2z^{-2} \quad +a^3z^{-3} \quad +a^4z^{-4}+\dots}_{\text{RISULTATO DELLA DIVISIONE}} \\
\hline
// \quad az^{-1} & \\
\quad -az^{-1}+a^2z^{-2} & \\
\hline
\quad // \quad +a^2z^{-2} & \\
\quad\quad -a^2z^{-2}+a^3z^{-3} & \\
\hline
\quad\quad // \quad +a^3z^{-3} & \\
\quad\quad\quad -a^3z^{-3}+a^4z^{-4} & \\
\hline
\quad\quad\quad // \quad +a^4z^{-4} &
\end{array}$$

$A_0 = 1 \qquad x(0) = 1$

$A_1 = a \qquad x(1) = a$

$A_2 = a^2 \qquad x(2) = a^2$

$A_3 = a^3 \qquad x(3) = a^3$

$A_4 = a^4 \qquad x(4) = a^4$

....

Il procedimento può essere applicato in maniera analoga, ovviamente con i medesimi risultati, anche nel caso in cui i polinomi a numeratore e denominatore sono espressi come potenze di z anzichè come potenze di z^{-1}

$$
\begin{array}{l|l}
\mathrm{z} & \mathrm{z}-a \\
\cline{2-2}
-\mathrm{z}+a & 1 \quad +az^{-1} \quad +a^2z^{-2} \quad +a^3z^{-3} \quad +a^4z^{-4}+\ldots \\
\hline
\backslash\backslash \quad a & \\
\quad -a+a^2z^{-1} & \\
\hline
\backslash\backslash \quad +a^2z^{-1} & \\
\quad -a^2z^{-1}+a^3z^{-2} & \\
\hline
\backslash\backslash \quad +a^3z^{-2} & \\
\quad -a^3z^{-2}+a^4z^{-3} & \\
\hline
\backslash\backslash \quad +a^4z^{-3} &
\end{array}
$$

$A_0 = 1 \qquad x(0) = 1$

$A_1 = a \qquad x(1) = a$

$A_2 = a^2 \qquad x(2) = a^2$

$A_3 = a^3 \qquad x(3) = a^3$

$A_4 = a^4 \qquad x(4) = a^4$

Esempio Si determini la sequenza $x(k)$ la cui Z-trasformata è

$$X(z) = \frac{6}{2 - 5z^{-1} + 4z^{-2} - z^{-3}}$$

$$
\begin{array}{l|l}
6 & 2 - 5z^{-1} + 4z^{-2} - z^{-3} \\ \cline{2-2}
-6 + 15z^{-1} - 12z^{-2} + 3z^{-3} & 3 + 7.5z^{-1} + 12.75z^{-2} + 18.375z^{-3} + \cdots \\ \cline{1-1}
// \quad +15z^{-1} - 12z^{-2} + 3z^{-3} & \\
-15z^{-1} + 37.5z^{-2} - 30z^{-3} + 7.5z^{-4} & \\ \cline{1-1}
// \quad +25.5z^{-2} - 27z^{-3} + 7.5z^{-4} & \\
-25.5z^{-2} + 63.75z^{-3} - 51z^{-4} + 12.75z^{-5} & \\ \cline{1-1}
// \quad 36.75z^{-3} - 43.5z^{-4} + 12.75z^{-5} &
\end{array}
$$

RISULTATO DELLA DIVISIONE

$A_0 = 3 \qquad x(0) = 3$

$A_1 = 7.5 \qquad x(1) = 7.5$

$A_2 = 12.75 \qquad x(2) = 12.75$

$A_3 = 18.375 \qquad x(3) = 18.375$

....

Scomposizione in fratti semplici (metodo di Heaviside)

E' un metodo analitico, che si basa essenzialmente nella decomposizione della X(z) nella somma di termini più semplici dei quali, mediante tabelle, è nota in forma analitica la anti-trasformata.

Partiamo dalla forma seguente della X(z) (si noti che è sempre possibile fare in modo che il polinomio a denominatore abbia coefficiente del termine di grado più elevato pari ad 1) e ricordiamo come stiamo considerando Z trasformate di sequenze causali, e pertanto vale $n \geq m$

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0} =$$

Risulta conveniente, per motivi che saranno chiari a breve, operare una decomposizione in fratti semplici della funzione $\frac{X(z)}{z}$ anziché della funzione originaria $X(z)$. Chiamiamo $\mathrm{G}(\mathrm{z}) = \frac{X(z)}{z}$ tale funzione modificata.

$$G(\mathrm{z}) = \frac{X(z)}{z} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z(z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)}$$

Siano $p_1, p_2, \ldots, p_n$ le radici del polinomio $z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$

Trattiamo preliminarmente il caso in cui tutte le radici $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (che sono i poli della Z-trasformata $X(z)$) siano semplici, abbiano cioè molteplicità unitaria.

Sviluppo in fratti semplici nel caso in cui i poli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ siano semplici.

Se $G(\mathrm{z})$ ha uno zero nell'origine (cioè se $b_0 = 0$) allora si ricerca uno sviluppo in fratti semplici di $G(\mathrm{z})$ nella forma

$$G(\mathrm{z}) = \frac{X(z)}{z} = \frac{R_1}{z-p_1} + \frac{R_2}{z-p_2} + \ldots + \frac{R_n}{z-p_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{z-p_i}$$

Nel caso generale in cui $G(\mathrm{z})$ non possieda uno zero nell'origine (cioè se $b_0 \neq 0$) allora si ricerca uno sviluppo in fratti semplici di $G(\mathrm{z})$ nella forma estesa

$$G(\mathrm{z}) = \frac{X(z)}{z} = \frac{R_0}{z} + \frac{R_1}{z-p_1} + \frac{R_2}{z-p_2} + \ldots + \frac{R_n}{z-p_n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{R_i}{z-p_i} \qquad p_0 = 0$$

Dovrebbe ora apparire chiaro il motivo per cui si sia scelto di operare la decomposizione in fratti semplici della funzione $\frac{X(z)}{z}$ anziché della funzione originaria $X(z)$.

Esplicitando la funzione $X(z)$ sulla base della decomposizione proposta

$$X(z) = zG(\mathrm{z}) = R_0 + \frac{R_1 z}{z-p_1} + \frac{R_2 z}{z-p_2} + \ldots + \frac{R_n z}{z-p_n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{R_i z}{z-p_i} \qquad p_0 = 0$$

si nota infatti come essa contenga una aliquota costante R_0 (assente nel caso, peraltro piuttosto frequente nella pratica, in cui $b_0 = 0$) ed una combinazione lineare fra termini del tipo $\frac{z}{z-p_i}$.

Tali termini possono essere tutti facilmente anti-trasformati utilizzando le tabelle delle Z-trasformate notevoli.

Ciò appare forse meno ovvio nel caso in cui fra i poli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vi siano dei poli complessi coniugati, ma in realtà la procedura è perfettamente applicabile anche in tal caso, come sarà chiarito a breve mediante esempi.

I coefficienti R_i $(i = 0,1, \dots, n)$ si determinano mediante la formula

$$R_i = \lim_{z \to p_i} (z - p_i) \frac{X(z)}{z}$$

$$i = 0,1, \dots, n$$

$$p_0 = 0$$

Si noti che il coefficiente R_0 sia da determinarsi unicamente nel caso in cui $b_0 \neq 0$

N.B. I residui R_i ed R_{i+1} associati ad una coppia (p_i, p_{i+1}) di poli complessi coniugati sono anch'essi complessi coniugati. Pertanto, non è necessario calcolarli entrambi.

Esempio Determinare la funzione $x(k)$ la cui Z trasformata è la seguente

$$X(z) = \frac{z^2 - 0.5z}{(z^2-1)(z-2)} = \frac{z^2 - 0.5z}{(z+1)(z-1)(z-2)}$$

I poli $p_1 = -1, p_2 = 1, p_3 = 2$ della $X(z)$ sono tutti reali e semplici, e la $X(z)$ possiede uno zero nell'origine.

In conseguenza di ciò, ricerchiamo per $\frac{X(z)}{z}$ uno sviluppo in fratti semplici nella forma:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z-0.5}{(z+1)(z-1)(z-2)} = \frac{R_1}{z+1} + \frac{R_2}{z-1} + \frac{R_3}{z-2}$$

I coefficienti (denominati «Residui») R_1, R_2, R_3 si calcolano mediante le relazioni:

$$R_1 = \lim_{z\to p_1}(z-p_1)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to -1}\frac{z-0.5}{(z-1)(z-2)} = \frac{(-3/2)}{(-2)(-3)} = -\frac{1}{4}$$

$$R_2 = \lim_{z\to p_2}(z-p_2)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to 1}\frac{z-0.5}{(z+1)(z-2)} = \frac{(1/2)}{(2)(-1)} = -\frac{1}{4}$$

$$R_3 = \lim_{z\to p_3}(z-p_3)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to 2}\frac{z-0.5}{(z+1)(z-1)} = \frac{(3/2)}{(3)(1)} = \frac{1}{2}$$

Si osservi come sia possibile determinare i residui R_1, R_2, R_3 anche prescindendo dalle formule sopraripportate. Con semplici passaggi algebrici difatti si ottiene

$$\frac{z-0.5}{(z+1)(z-1)(z-2)} = \frac{R_1}{z+1} + \frac{R_2}{z-1} + \frac{R_3}{z-2} = \frac{(R_1+R_2+R_3)z^2-(3R_1+R_2)z+2R_1-2R_2-R_3}{(z+1)(z-1)(z-2)}$$

Imponendo l'uguaglianza $z-0.5 = (R_1+R_2+R_3)z^2-(3R_1+R_2)z+2R_1-2R_2-R_3$

si ottengono, ovviamente, gli stessi risultati.

Sulla base dello sviluppo in fratti semplici ottenuto, la X(z) risulta espressa come segue

$$X(z) = \frac{R_1 z}{z+1} + \frac{R_2 z}{z-1} + \frac{R_3 z}{z-2} = -\frac{1}{4}\boxed{\frac{z}{z+1}} - \frac{1}{4}\boxed{\frac{z}{z-1}} + \frac{1}{2}\boxed{\frac{z}{z-2}}$$

$$(-1)^k \delta_{-1}(k) \qquad \delta_{-1}(k) \qquad (2)^k \delta_{-1}(k)$$

Ispezionando la tabella delle Z-trasformate notevoli si individuano immediatamente le antitrasformate dei vari termini dello sviluppo.

La sequenza $\mathrm{x}(k)$ ha pertanto la seguente espressione analitica

$$\begin{aligned} x(k) &= -\frac{1}{4}(-1)^k \delta_{-1}(k) - \frac{1}{4}\delta_{-1}(k) + \frac{1}{2}(2)^k \delta_{-1}(k) \\ &= \left[-\frac{1}{4}(-1)^k - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(2)^k\right] \delta_{-1}(k) \\ &= -\frac{1}{4}\left[(-1)^k + 1 - 2\,(2)^k\right] \delta_{-1}(k) \end{aligned}$$

Calcolo della soluzione con Matlab

```
num = [1 -0.5];
den = poly([-1 1 2]);
[r,p,k] = residue(num,den)
```

Numeratore di $X(z)\,/z$

Denominatore di $X(z)\,/z$

```
r =

    0.5000
   -0.2500
   -0.2500
```

Residui

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{0.5}{z-2} + \frac{-0.25}{z+1} + \frac{-0.25}{z-1}$$

```
p =

    2.0000
   -1.0000
    1.0000
```

Poli

```
k =

     []
```

Eventuale termine costante

Esempio Determinare la funzione $x(k)$ la cui Z trasformata è la seguente

$$X(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)}$$

I poli $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ della $X(z)$ sono tutti semplici, e la $X(z)$ non possiede uno zero nell'origine.

In conseguenza di ciò, ricerchiamo per $\frac{X(z)}{z}$ uno sviluppo in fratti semplici nella forma:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{R_0}{z} + \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z-2}$$

I Residui R_0, R_1, R_2 si calcolano mediante le relazioni:

$$R_0 = \lim_{z \to p_0} (z - p_0)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z \to 0} z\frac{X(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2}$$

$$R_1 = \lim_{z \to p_1} (z - p_1)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z \to 1} (z-1)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z \to 1} \frac{z+1}{z\,(z-2)} = -2$$

$$R_2 = \lim_{z \to p_2} (z - p_2)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z \to 2} (z-2)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z \to 2} \frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{3}{2}$$

Sulla base dello sviluppo in fratti semplici ottenuto, la X(z) risulta espressa come segue

$$X(z) = R_0 + \frac{R_1 z}{z-1} + \frac{R_2 z}{z-2} = \frac{1}{2} - 2\frac{z}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{z}{z-2}$$

Ispezionando la tabella delle Z-trasformate notevoli, la sequenza $x(k)$ ha pertanto la seguente espressione analitica

$$\begin{aligned} x(k) &= \frac{1}{2}\delta(k) - 2\delta_{-1}(k) + \frac{3}{2}(2)^k\delta_{-1}(k) \\ &= \frac{1}{2}\delta(k) + \left[-2 + \frac{3}{2}(2)^k\right]\delta_{-1}(k) \end{aligned}$$

MATLAB

```
num = [1 1];
den = poly([1 2 0]);
[r,p,k] = residue(num,den)
```

```
r =

    1.5000
   -2.0000
    0.5000


p =

     2
     1
     0


k =

     []
```

Ora sviluppiamo un esempio che coinvolge la presenza, fra i poli della X(z), di poli complessi coniugati.

In tale scenario, come si è detto, nello sviluppo in fratti semplici i residui associati ai termini che corrispondono ai poli complessi coniugati sono anche essi complessi coniugati.

Esempio Determinare la funzione $x(k)$ la cui Z trasformata è la seguente

$$X(z) = \frac{z(z+1)}{z^3 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}}$$

```
>> roots([1 -0.5 0 .25])

ans =

   0.5000 + 0.5000i
   0.5000 - 0.5000i
  -0.5000 + 0.0000i
```

Poli della $X(z)$:

$$p_1 = -0.5$$
$$p_2 = 0.5 + 0.5\,\mathrm{j} = 0.707e^{0.785j}$$
$$p_3 = 0.5 - 0.5\,\mathrm{j} = 0.707e^{-0.785j}$$

Avendo determinato i poli, possiamo fattorizzare il denominatore di X(z) in maniera più conveniente associando ai poli complessi coniugati il corrispondente termine trinomio:

$$X(z) = \frac{z(z+1)}{(z+0.5)(z-0.5-0.5j)\,(z-0.5+0.5j)} = \frac{z(z+1)}{(z+0.5)(z^2-z+0.5)}$$

Il fattore $z^2 - z + 0.5$ viene ottenuto sviluppando il prodotto

$$(z-0.5-0.5j)\,(z-0.5+0.5j)$$

In generale, infatti

$$(z-\alpha-j\omega)\,(z-\alpha+j\omega) = (z-\alpha)^2 + \omega^2 = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \omega^2$$

Da particolarizzarsi per $\alpha = \omega = 0.5$

I poli della $X(z)$ sono tutti semplici, e la $X(z)$ possiede uno zero nell'origine.
In conseguenza di ciò, ricerchiamo per $\frac{X(z)}{z}$ uno sviluppo in fratti semplici nella forma:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{(z+1)}{(z+0.5)(z-0.5-0.5j)\,(z-0.5+0.5j)} = \frac{(z+1)}{(z+0.5)(z^2-z+0.5)}$$

$$= \frac{R_1}{z+0.5} + \frac{R_2}{z-0.5+0.5j} + \frac{R_3}{z-0.5-0.5j}$$

I Residui R_1, R_2, R_3 si calcolano mediante le relazioni:

$$R_1 = \lim_{z\to p_1}(z-p_1)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to -0.5}(z+0.5)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to -0.5}\frac{(z+1)}{(z^2-z+0.5)} = \frac{(1/2)}{(5/4)} = \frac{2}{5}$$

$$R_2 = \lim_{z\to p_2}(z-p_2)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to 0.5+0.5\,\mathrm{j}}(z-0.5-0.5j)\frac{X(z)}{z}$$

$$= \lim_{z\to 0.5+0.5\,\mathrm{j}}\frac{(z+1)}{(z+0.5)\,(z-0.5+0.5j)} = \frac{(0.5+0.5\,\mathrm{j}+1)}{(0.5+0.5\,\mathrm{j}+0.5)\,(0.5+0.5\,\mathrm{j}-0.5+0.5j)}$$

$$= \frac{(1.5+0.5\,\mathrm{j})}{(1+0.5\,\mathrm{j})j} = \frac{(1.5+0.5\,\mathrm{j})}{-0.5+j}$$

MATLAB

```
>> (1.5+0.5i)/(-0.5+i)

ans =

  -0.2000 - 1.4000i
```

$$R_2 = \frac{(1.5+0.5\,\mathrm{j})}{-0.5+j} = -0.2 - 1.4j = 1.41e^{-j1.71}$$

Per costruzione, il residuo R_3 è il complesso coniugato di R_2.
Verifichiamolo comunque facendo i conti

$$R_3 = \lim_{z\to p_3}(z-p_3)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to 0.5-0.5\,\mathrm{j}}(z-0.5+0.5j)\frac{X(z)}{z}$$

$$= \lim_{z\to 0.5-0.5\,\mathrm{j}} \frac{(z+1)}{(z+0.5)\,(z-0.5-0.5j)} = \frac{(0.5-0.5\,\mathrm{j}+1)}{(0.5-0.5\,\mathrm{j}+0.5)\,(0.5-0.5\,\mathrm{j}-0.5-0.5j)}$$

$$= \frac{(1.5-0.5\,\mathrm{j})}{(1-0.5\,\mathrm{j})(-j)} = \frac{(1.5-0.5\,\mathrm{j})}{-0.5-j} = -0.2+1.4\mathrm{j}$$

Abbiamo ottenuto la seguente decomposizione in fratti semplici

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2/5}{z+0.5} + \frac{-0.2-1.4j}{z-0.5+0.5j} + \frac{-0.2+1.4j}{z-0.5-0.5j}$$

Esplicitiamo $X(z)$

$$X(z) = \frac{2/5z}{z+0.5} + \frac{(-0.2-1.4j)z}{z-0.5+0.5j} + \frac{(-0.2+1.4j)z}{z-0.5-0.5j}$$

Il primo termine non ci da problemi, il secondo ed il terzo li riscriviamo rappresentando i numeri complessi in forma polare, in modo da poter sfruttare la relazione, estratta dalle Tabelle:

$$Z\left(r|\rho|^k cos(\theta k + \beta)\delta_{-1}(k)\right) = \frac{0.5re^{j\beta}z}{z-|\rho|e^{j\theta}} + \frac{0.5re^{-j\beta}z}{z-|\rho|e^{-j\theta}}$$

Calcolando modulo e fase dei numeri complessi coniugati $-0.2 \pm 1.4j$ (i due residui) e $0.5 \pm 0.5j$ (la coppia di poli) si puo riscrivere la X(z) come segue

$$X(z) = \frac{2}{5}\boxed{\frac{z}{z+0.5}} + \frac{1.41e^{-j1.71}z}{z-0.707e^{0.785j}} + \frac{1.41e^{j1.71}z}{z-0.707e^{-0.785j}}$$

$$(-0.5)^k\delta_{-1}(k)$$

$$Z\left(r|\rho|^k cos(\theta k+\beta)\delta_{-1}(k)\right) = \frac{0.5re^{j\beta}z}{z-|\rho|e^{j\theta}} + \frac{0.5re^{-j\beta}z}{z-|\rho|e^{-j\theta}}$$

$$|\rho| = 0.707 \qquad \theta = 0.785$$

$$0.5r = 1.41 \qquad r = 2.82 \qquad \beta = 1.71$$

La funzione ricercata è pertanto

$$x(k) = \frac{2}{5}(-0.5)^k\delta_{-1}(k) + 2.82(0.707)^k cos(0.785k+1.71)\delta_{-1}(k)$$

Sviluppo in fratti semplici nel caso in cui siano presenti poli con molteplicità superiore ad uno

Supponiamo che la funzione $X(z)$ abbia un polo p_1 con molteplicità ν, mentre i restanti poli $p_{2,}\ p_3, \ldots, p_{n-\nu}$ sono distinti.

In tale situazione, andremo a ricercare una decomposizione in fratti semplici di forma differente rispetto a quanto fatto in precedenza.

Se $\frac{X(z)}{z}$ ha uno zero nell'origine (cioè se $b_0 = 0$) allora si ricerca uno sviluppo in fratti semplici di $G(\mathrm{z})$ nella forma

$$G(\mathrm{z}) = \frac{X(z)}{z} = \frac{R_{1,1}}{z-p_1} + \frac{R_{1,2}}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{R_{1,\nu}}{(z-p_1)^\nu} + \frac{R_2}{z-p_2} + \frac{R_3}{z-p_3} + \ldots + \frac{R_{n-\nu}}{z-p_{n-\nu}}$$

Nel caso più generale in cui $G(\mathrm{z})$ non possieda uno zero nell'origine (cioè se $b_0 \neq 0$) allora si ricerca uno sviluppo in fratti semplici di $G(\mathrm{z})$ nella forma estesa

$$G(\mathrm{z}) = \frac{X(z)}{z} = \frac{R_0}{z} + \frac{R_{1,1}}{z-p_1} + \frac{R_{1,2}}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{R_{1,\nu}}{(z-p_1)^\nu} + \frac{R_2}{z-p_2} + \frac{R_3}{z-p_3} + \ldots + \frac{R_{n-\nu}}{z-p_{n-\nu}}$$

I residui $R_0, R_{2,}\ R_3, \ldots, R_{n-\nu}$ associati a poli «semplici» si determinano mediante la formula già adottata in precedenza

$$i = 0,2,3, \ldots n - \nu$$

$$R_i = \lim_{z \to p_i} (z - p_i) \frac{X(z)}{z}$$

$$p_0 = 0$$

I residui $R_{1,1}, R_{1,2,}\ R_{1,3}, \ldots, R_{1,\nu}$ associati a al polo p_i avente molteplicità $\nu > 1$ si determinano invece secondo relazioni modificate riportate nella slide successiva

Formule di calcolo per i residui associati al polo p_i avente molteplicità $\nu > 1$

$$R_{1,1} = \frac{1}{(\nu-1)!} \lim_{z \to p_1} \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}} \left[(z-p_1)^{\nu} \frac{X(z)}{z} \right]$$

$$R_{1,2} = \frac{1}{(\nu-2)!} \lim_{z \to p_1} \frac{d^{\nu-2}}{dz^{\nu-2}} \left[(z-p_1)^{\nu} \frac{X(z)}{z} \right]$$

$$\vdots$$

$$R_{1,\nu-2} = \frac{1}{(2)!} \lim_{z \to p_1} \frac{d^{2}}{dz^{2}} \left[(z-p_1)^{\nu} \frac{X(z)}{z} \right]$$

$$R_{1,\nu-1} = \lim_{z \to p_1} \frac{d}{dz} \left[(z-p_1)^{\nu} \frac{X(z)}{z} \right]$$

$$R_{1,\nu} = \lim_{z \to p_1} (z-p_1)^{\nu} \frac{X(z)}{z}$$

Procedendo verso i residui $R_{1,h}$ associati ai termini di grado progressivamente inferiore, la funzione $(z-p_1)^{\nu}\frac{X(z)}{z}$ viene successivamente derivata rispetto a z prima di calcolarne il valore in $z = p_1$. In aggiunta a ciò, compare un guadagno premoltiplicativo $\frac{1}{(\nu-h)!}$

Il residuo $R_{1,\nu}$ associato al termine $\frac{R_{1,\nu}}{(z-p_1)^{\nu}}$ di grado piu elevato si calcola con una formula che, valutata per $\nu = 1$, diventa la formula «standard» che si adotta per il caso del polo semplice.

Formule di calcolo per i residui associati al polo p_i avente molteplicità $\nu > 1$

$$R_{1,1} = \frac{1}{(\nu-1)!}\lim_{z\to p_1}\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\left[(z-p_1)^{\nu}\frac{X(z)}{z}\right]$$

$$R_{1,2} = \frac{1}{(\nu-2)!}\lim_{z\to p_1}\frac{d^{\nu-2}}{dz^{\nu-2}}\left[(z-p_1)^{\nu}\frac{X(z)}{z}\right]$$

$$\vdots$$

$$R_{1,\nu-2} = \frac{1}{(2)!}\lim_{z\to p_1}\frac{d^{2}}{dz^{2}}\left[(z-p_1)^{\nu}\frac{X(z)}{z}\right]$$

$$R_{1,\nu-1} = \lim_{z\to p_1}\frac{d}{dz}\left[(z-p_1)^{\nu}\frac{X(z)}{z}\right]$$

$$R_{1,\nu} = \lim_{z\to p_1}(z-p_1)^{\nu}\frac{X(z)}{z}$$

Formula generale

$$\boxed{R_{1,j} = \frac{1}{(\nu-j)!}\lim_{z\to p_1}\frac{d^{\nu-j}}{dz^{\nu-j}}\left[(z-p_1)^{\nu}\frac{X(z)}{z}\right]} \qquad j = 1,2,\dots,\nu$$

Supponiamo, nel caso piu generale possibile, che la funzione $X(z)$ abbia r poli distinti $p_1, p_2, \dots, p_r$ (non nulli) aventi rispettivamente molteplicità $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$.
Chiaramente, poiché i poli di $X(z)$ sono in tutto pari ad n, si avrà che la somma fra tutte le molteplicità ν_i deve essere pari ad n: $\sum_{i=1}^{r} \nu_i = n$

Scomposizione in fratti semplici

$$G(\mathrm{z}) = \frac{X(z)}{z} = \frac{R_0}{z} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{R_{i,j}}{(z - p_i)^j}$$

Calcolo dei residui

$$R_0 = \lim_{z \to 0} X(z)$$

$$R_{i,j} = \frac{1}{(\nu_i - j)!} \lim_{z \to p_i} \frac{d^{\nu_i - j}}{dz^{\nu_i - j}} \left[(z - p_i)^{\nu_i} \frac{X(z)}{z} \right]$$

Esempio Determinare la funzione $x(k)$ la cui Z-trasformata è la seguente

$$X(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}$$

Convertiamo in potenze positive di z

$$X(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + 2z + 1} = \frac{z^2 + 1}{(z + 1)^2}$$

$X(z)$ ha un polo doppio $p_1 = -1$ di molteplicità $\nu = 2$

In aggiunta, $X(z)$ non ha zeri nell'origine.
Ricerchiamo pertanto per $X(z)$/z una decomposizione in fratti semplici nella forma seguente:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2 + 1}{z(z + 1)^2} = \frac{R_0}{z} + \frac{R_{1,1}}{z - p_1} + \frac{R_{1,2}}{(z - p_1)^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2+1}{z(z+1)^2} = \frac{R_0}{z} + \frac{R_{1,1}}{z+1} + \frac{R_{1,2}}{(z+1)^2}$$

Calcoliamo i residui:

$$R_0 = \lim_{z\to 0} z\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{(z+1)^2} = 1$$

$$R_{1,1} = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{X(z)}{z}\right] = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2+1}{z}\right] = \lim_{z\to -1}\left[\frac{z^2-1}{z^2}\right] = 0$$

$$R_{1,2} = \lim_{z\to -1}(z+1)^2\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to -1}\frac{z^2+1}{z} = -2$$

$$X(z) = 1 - \frac{2z}{(z+1)^2}$$

$$x(k) = \delta(k) - 2\,\frac{k^{(1)}}{1!}(-1)^{k-1}\delta_{-1}(k) = \delta(k) + 2\,k(-1)^k\delta_{-1}(k)$$

Il calcolo dei residui può anche essere impostato in maniera piu «agile»

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2+1}{z(z+1)^2} = \frac{R_0}{z} + \frac{R_{1,1}}{z+1} + \frac{R_{1,2}}{(z+1)^2}$$

Si intuisce facilmente come per determinare R_0 sia sufficiente moltiplicare per z tutti i termini di questa uguaglianza

$$\frac{z^2+1}{(z+1)^2} = R_0 + \frac{R_{1,1}z}{z+1} + \frac{R_{1,2}z}{(z+1)^2}$$

e poi determinare il limite per z tendente a zero di tutti i termini

$$\frac{z^2+1}{(z+1)^2} = R_0 + \frac{R_{1,1}z}{z+1} + \frac{R_{1,2}z}{(z+1)^2} \Longrightarrow 1 = R_0$$

Questa procedura è esattamente quella suggerita nella formula standard per il calcolo di R_0, che viene normalmente formulata in termine di limite ma che possiamo esprimere in modo analogo come $R_0 = \left[z\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0}$

Si ha quindi:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2+1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{z} + \frac{R_{1,1}}{z+1} + \frac{R_{1,2}}{(z+1)^2}$$

Per determinare $R_{1,2}$ procediamo nello stesso modo, cioè moltiplichiamo per $(z+1)^2$ tutti i termini dell'uguaglianza:

$$\frac{z^2+1}{z} = \frac{(z+1)^2}{z} + R_{1,1}(z+1) + R_{1,2}$$

E poi facciamo il limite per $z \to -1$ di tutti i termini

$$\frac{z^2+1}{z} = \frac{(z+1)^2}{z} + R_{1,1}(z+1) + R_{1,2} \quad \Longrightarrow \quad -2 = R_{1,2}$$

Ancora, questa procedura è esattamente quella «standard» $R_{1,2} = \left[(z+1)^2\frac{X(z)}{z}\right]_{z=-1}$

Si ha quindi:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2 + 1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{z} + \frac{R_{1,1}}{z+1} - \frac{2}{(z+1)^2}$$

La determinazione di $R_{1,1}$ che richiede l'impiego di una formula «complicata» che prevede il calcolo di derivate può essere fatta in maniera molto più semplice valutando la precedente relazione in corrispondenza di un arbitrario valore di z diverso dai poli di $\frac{X(z)}{z}$, ed imponendo l'uguaglianza. Scegliamo ad esempio $z = 1$

$$\frac{1}{2} = 1 + \frac{R_{1,1}}{2} - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{R_{1,1}}{2} \quad \Rightarrow \quad R_{1,1} = 0$$

Calcolo della antitrasformata mediante il Symbolic Math Toolbox di Matlab

```
syms z k
F = (z^2+1)/(z^2+2*z+1);
f_k=iztrans(F,k);
f_k=simplify(iztrans(F,k))
```

```
f_k =

2*(-1)^k*k + kroneckerDelta(k, 0)
```

L'ultima istruzione del codice sostituisce e sovrascrive la penultima. L'uso della funzione `simplify()` serve ad ottenere una soluzione senza termini ridondanti.

kroneckerDelta(a, b) = $\delta(a-b)$ $\Rightarrow$ kroneckerDelta(k, 0) = $\delta(k)$

Calcolo della trasformata Z mediante il Symbolic Math Toolbox di Matlab

Svolgiamo il calcolo inverso, determinando per via simbolica la Z trasformata della sequenza $\delta(k) + 2\,k(-1)^k\delta_{-1}(k)$

```
clc
syms k
f = kroneckerDelta(k, 0) + 2*k*(-1)^k;
F_z=ztrans(f)
```

```
F_z =

1 - (2*z)/(z + 1)^2
```

Esempio Determinare la funzione $x(k)$ la cui Z-trasformata è la seguente

$$X(z) = \frac{z(2z^2 - 11z + 12)}{(z-1)(z-2)^3}$$

$$x(k) = \left[-3 + 3 \cdot (2)^k - \frac{1}{2}k(2)^k - \frac{1}{4}k(k-1)(2)^k\right]\delta_{-1}(k)$$

Sviluppiamo i conti $X(z) = \dfrac{z(2z^2 - 11z + 12)}{(z-1)(z-2)^3}$

Sviluppo di Heaviside

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 - 11z + 12}{(z-1)(z-2)^3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2} + \frac{D}{(z-2)^3}$$

Calcolo dei residui con le formule standard (riformulate senza l'operatore di limite)

$$A = \left[(z-1)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = \left[\frac{2z^2 - 11z + 12}{(z-2)^3}\right]_{z=1} = -3$$

$$D = \left[(z-2)^3\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2} = \left[\frac{2z^2 - 11z + 12}{(z-1)}\right]_{z=2} = -2$$

$$C = \left[\frac{d}{dz}\left\{(z-2)^3\frac{X(z)}{z}\right\}\right]_{z=2} = \left[\frac{d}{dz}\left\{\frac{2z^2 - 11z + 12}{(z-1)}\right\}\right]_{z=2} = \left[\frac{2z^2 - 4z - 1}{(z-1)^2}\right]_{z=2} = -1$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z-2)^3\frac{X(z)}{z}\right\}\right]_{z=2} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left\{\frac{2z^2 - 11z + 12}{(z-1)}\right\}\right]_{z=2} = \frac{1}{2}\left[\frac{6}{(z-1)^3}\right]_{z=2} = 3$$

Calcoliamo i residui per altra via

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 - 11z + 12}{(z-1)(z-2)^3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2} + \frac{D}{(z-2)^3}$$

Si intuisce facilmente come per determinare A sia sufficiente moltiplicare per $z - 1$ tutti i termini di questa uguaglianza

$$(z-1)\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 - 11z + 12}{(z-2)^3} = A + \frac{B(z-1)}{z-2} + \frac{C(z-1)}{(z-2)^2} + \frac{D(z-1)}{(z-2)^3}$$

e poi valutare in $z = 1$ tutti i termini espliciti

$$-3 = A$$

$$A = \left[(z-1)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = -3$$

Procediamo analogamente per determinare D, moltiplicando per $(z-2)^3$tutti i termini della uguaglianza

$$(z-2)^3\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2-11z+12}{(z-1)} = \frac{A(z-2)^3}{z-1} + B(z-2)^2 + C(z-2) + D$$

e poi valutare in z=2 tutti i termini espliciti

$$-2 = D$$

$$D = \left[(z-2)^3\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2} = -2$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2-11z+12}{(z-1)(z-2)^3} = -\frac{3}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2} - \frac{2}{(z-2)^3}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z^2-11z+12}{(z-1)(z-2)^3}=-\frac{3}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{(z-2)^2}-\frac{2}{(z-2)^3}$$

Per determinare B, possiamo moltiplicare tutti i termini della uguaglianza per z

$$\frac{2z^3-11z^2+12z}{(z-1)(z-2)^3}=-\frac{3z}{z-1}+\frac{Bz}{z-2}+\frac{Cz}{(z-2)^2}-\frac{2z}{(z-2)^3}$$

e far tendere tutti i termini per z → ∞

$$0=-3+B \qquad B=3$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z^2-11z+12}{(z-1)(z-2)^3}=-\frac{3}{z-1}+\frac{3}{z-2}+\frac{C}{(z-2)^2}-\frac{2}{(z-2)^3}$$

Per determinare C possiamo valutare tutti i termini della uguaglianza per un valore arbitrario di z, ad esempio $z=0$

$$\frac{3}{2}=3-\frac{3}{2}+\frac{C}{4}+\frac{1}{4} \qquad C=-1$$

Si ottiene

$$\frac{X(z)}{z} = -\frac{3}{z-1} + \frac{3}{z-2} - \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{2}{(z-2)^3}$$

Esplicitiamo la $X(z)$

$$X(z) = -\frac{3z}{z-1} + \frac{3z}{z-2} - \frac{z}{(z-2)^2} - \frac{2z}{(z-2)^3}$$

Ed antitrasformiamo con l'impiego della tabella delle trasformate Z notevoli

$$x(k) = \left[-3 + 3 \cdot (2)^k - \frac{1}{2}k(2)^k - \frac{1}{4}k(k-1)(2)^k\right]\delta_{-1}(k)$$