Controllo digitale

Trasformata Z.

Definizione, trasformate notevoli e proprietà.

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Panoramica

Introdurremo ora un operatore, la trasformata Z, che grazie alle sue proprietà ci consentirà (fra le altre cose) di risolvere facilmente i problemi fino a qui lasciati in sospeso (nella fattispecie, la determinazione della risposta forzata di sistemi a tempo discreto espressi in forma ingresso-uscita o in forma variabili di stato)

Tale operatore ci consentirà anche di sviluppare numerosi altri risultati e concetti che saranno impiegati diffusamente nel seguito, primo fra tutti la Funzione di trasferimento di sistemi a tempo discreto.

Come apparirà chiaro da subito, la trasformata Z gioca, per i sistemi a tempo discreto, lo stesso ruolo che la trasformata di Laplace gioca per i sistemi a tempo continuo.

La trasformata Z (unilatera)

La trasformata Z è un operatore che associa ad una funzione $f(k)$ di variabile discreta (o, equivalentemente, ad una sequenza numerica) una funzione $\mathrm{F}(z)$ di variabile complessa definita come segue

$$F(z) = Z\big(f(k)\big) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

La trasformata Z è una serie di potenze nella variabile (complessa) z^{-1}

La trasformata Z si declina anche in una forma differente (bilatera) in cui l'indice inferiore della sommatoria vale $-\infty$

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

La trasformata Z unilatera ha però proprietà che la rendono maggiormente conveniente per lo studio dei sistemi dinamici a tempo discreto. Si noti che le espressioni della Z trasformata unilatera e bilatera coincidono per segnali causali, cioè segnali $f(k)$ identicamente nulli per $k < 0$.

La serie converge per valori di z in modulo maggiori di un numero detto raggio di convergenza R, che si determina caso per caso in funzione della particolare sequenza

L’esistenza di un dominio di convergenza finito riveste in ogni caso un ruolo marginale per quanto concerne l’applicazione di tale strumento alla teoria di sistemi, e pertanto non ci occuperemo di tale aspetto.

Le Z trasformate assumono la forma di rapporti fra polinomi.

A sequenze $f(k)$ causali (cioè, nulle per $k < 0$) corrispondono Z-trasformate in cui il grado del polinomio a denominatore è maggiore, o al più uguale, al grado del polinomio a numeratore. Tutte le sequenze il cui termine generico è espresso nella forma $f(k)\delta_{-1}(k)$ sono causali.

Le radici del numeratore e del denominatore di una Z-trasformata F(z) vengono detti, rispettivamente, zeri e poli della Z trasformata.

Trasformate notevoli

Calcoliamo la trasformata Z di alcune funzioni elementari

Si impiegherà più volte il seguente risultato (somma di una serie geometrica)

$$\sum_{i=0}^{\infty} a x^k = \frac{a}{1-x}; \qquad |x| < 1, \quad a \in \Re$$

Impulso Discreto

L'impulso discreto (detto anche delta di Kronecker) è un segnale a tempo discreto definito da:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 \ se \ k = 0 \\ 0 \ se \ k \neq 0 \end{cases}.$$

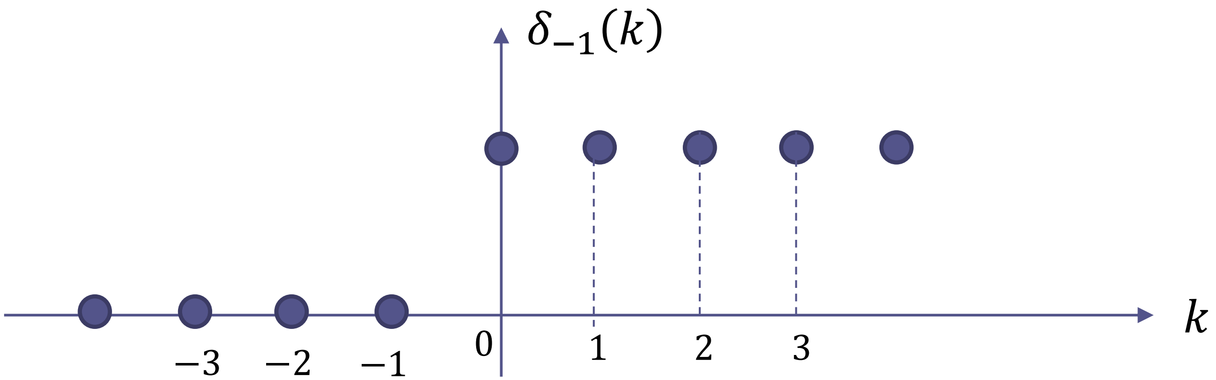
La sua trasformata Z si ricava in modo agevole dalla definizione:

$$\Delta(z) = \mathcal{Z}(\delta(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = 1$$

Gradino Unitario

La sequenza «gradino unitario» viene definito come:

$$\delta_{-1}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & se\, k < 0 \\ 1 & se\, k \geq 0 \end{cases}$$



$$\Delta_{-1}(z) = \mathcal{Z}(\delta_{-1}(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Sequenza esponenziale

La sequenza esponenziale viene definita come

$$x(k) = a^k \delta_{-1}(k) = \begin{cases} a^k & se\ k = 1, 2, \cdots \\ 0 & se\ k < 0 \end{cases} \qquad a \in \Re$$

$$\mathcal{Z}(a^k \delta_{-1}(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Sequenza rampa

La sequenza rampa viene definita come

$$x(k) = k\delta_{-1}(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Z}\big(k\delta_{-1}(k)\big) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Lo dimostriamo piu avanti

Sequenza sinusoidale

La sequenza sinusoidale viene definita come

$$x(k) = sin(\theta k)\delta_{-1}(k) = \begin{cases} sin(\theta k) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

La sua Z-trasformata è:

$$Z\{sin(\theta k)\delta_{-1}(k)\} = \frac{z^{-1}\, sin(\theta)}{1 + 2z^{-1}\, cos(\theta) + z^{-2}} = \frac{z\, sin(\theta)}{z^2 + 2z\, cos(\theta) + 1}$$

Dimostrazione:

Per determinare in forma chiusa la Z trasformata della sequenza sinusoidale riscriviamo il termine sinusoidale in forma esponenziale complessa usando le formule di Eulero

$$sin(\theta k) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}\right) \qquad cos(\theta k) = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta k} + e^{-j\theta k}\right)$$

Riscriviamo pertanto la sequenza sinusoidale nella forma

$$x(k) = sin(\theta k)\delta_{-1}(k) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}\right)\delta_{-1}(k)$$

E sviluppiamo i conti

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{j\theta k}}{2j} - \frac{e^{-j\theta k}}{2j}\right)z^{-k} = \frac{1}{2j}\sum_{k=0}^{\infty} e^{j\theta k}z^{-k} - \frac{1}{2j}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\theta k}z^{-k} =$$

$$= \frac{1}{2j}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{j\theta}z^{-1}\right)^k - \frac{1}{2j}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-j\theta}z^{-1}\right)^k = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1 - e^{j\theta}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\theta}z^{-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z - e^{j\theta}} - \frac{z}{z - e^{-j\theta}}\right] = \frac{z}{2j}\frac{z - e^{-j\theta} - z + e^{j\theta}}{(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})} = \frac{z}{2j}\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})}$$

$$= z\,\frac{\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}}{z^2 - z(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) + 1} = \frac{z\,sin(\theta)}{z^2 - 2z\,cos(\theta) + 1}$$

Sequenza cosinusoidale

La sequenza cosinusoidale viene definita come

$$x(k) = cos(\theta k)\delta_{-1}(k) = \begin{cases} cos(\theta k) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

La sua Z-trasformata (determinabile mediante un procedimento analogo a quello impiegato per la sequenza sinusoidale) è:

$$Z\{cos(\theta k)\delta_{-1}(k)\} = \frac{1 - z^{-1} cos(\theta)}{1 - 2z^{-1} cos(\theta) + z^{-2}} = \frac{z(z - cos(\theta))}{z^2 - 2z\, cos(\theta) + 1}$$

Polinomio fattoriale

Definizione:

$$k^{(0)} = 1 \qquad k^{(1)} = k \qquad k^{(2)} = k(k-1) \qquad k^{(3)} = k(k-1)(k-2)$$

$$k^{(h)} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-h+1), \qquad h = 1,2,\ldots$$

La Z-trasformata del polinomio fattoriale assume una forma particolarmente compatta

$$\mathrm{Z}\left\{\frac{k^{(h)}}{h!}\delta_{-1}(k)\right\} = \frac{z}{(z-1)^{h+1}} = \frac{z^{-h}}{(1-z^{-1})^{h+1}}$$

Polinomio fattoriale esponenziale:

$$\mathrm{Z}\left\{\frac{k^{(h)}}{h!}a^{k-h}\delta_{-1}(k)\right\} = \frac{z}{(z-a)^{h+1}} = \frac{z^{-h}}{(1-az^{-1})^{h+1}}$$

Proprietà e teoremi

Moltiplicazione per una costante

Dato un segnale $x(k)$ la cui trasformata $\mathcal{Z}$ vale $X(Z)$, se tale segnale viene moltiplicato per una costante a la sua trasformata vale:

$$\mathcal{Z}(ax[k]) = a\mathcal{Z}(x[k]) = a\,X(z)$$

Linearità

Sia $x(k) = a_1 x_1[k] + a_2 x_2[k]$ *la sua trasformata* $\mathcal{Z}$ *vale:*

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}\,[x(k)] &= \mathcal{Z}(a_1 x_1[k] + a_2 x_2[k]) \\ &= a_1\,X_1(z) + a_2\,X_2(z) \end{aligned}$$

Z-trasformata della sequenza cosinusoidale sfasata

La sequenza cosinusoidale sfasata viene definita come

$$x(k) = cos(\theta k + \beta)\delta_{-1}(k) = \begin{cases} cos(\theta k + \beta) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Applicando la formula di addizione $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)$ si mostra facilmente come tale sequenza risulti essere una combinazione lineare fra la sequenza sinusoidale e la sequenza cosinusoidale

$$cos(\theta k + \beta)\delta_{-1}(k) = cos(\beta)cos(\theta k)\delta_{-1}(k) - sin(\beta)sin(\theta k)\, \delta_{-1}(k)$$

Applicando la proprietà di linearità della Z trasformata è pertanto possibile determinarne la trasformata eseguendo una combinazione lineare, con i medesimi coefficienti, fra la Z-trasformata delle sequenze sinusoidale e cosinusoidale

$$Z\{cos(\theta k + \beta)\delta_{-1}(k)\} = cos(\beta)\frac{z(z - cos(\theta))}{z^2 - 2z\, cos(\theta) + 1} - sin(\beta)\frac{z\, sin(\theta)}{z^2 - 2z\, cos(\theta) + 1}$$

$$= \frac{z(z\, cos(\beta) - cos(\theta - \beta))}{z^2 - 2z\, cos(\theta) + 1}$$

NB nel ricavare la precedente relazione si è impiegata la formula di sottrazione $cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sin(\alpha)sin(\beta)$

Presentiamo la trasformata Z della sequenza cosinusoidale sfasata in una ulteriore forma equivalente, che risulta in taluni casi maggiormente utile rispetto alla forma precedente nell'ambito dello svolgimento della operazione di antitrasformazione

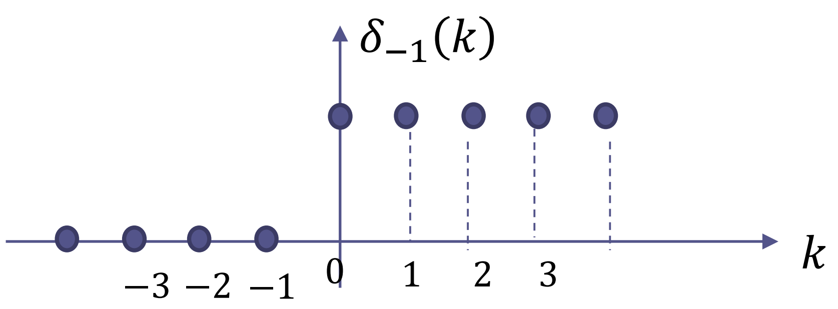
$$Z\{cos(\theta k+\beta)\delta_{-1}(k)\}=\frac{0.5e^{j\beta}z}{z-e^{j\theta}}+\frac{0.5e^{-j\beta}z}{z-e^{-j\theta}}$$

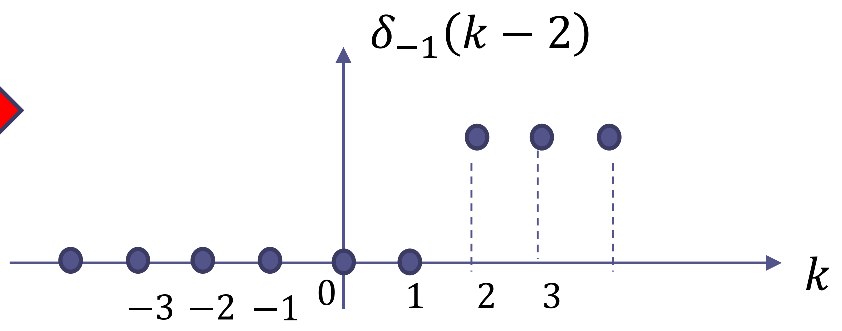
Trasformata Z di una sequenza ritardata (scorrimento a destra)

Data una sequenza $x(k)$, identicamente nulla per $k < 0$, si consideri un intero $m > 0$ e la sequenza definita come

$$y(k) = x(k - m)$$

Ciò corrisponde ad uno «scorrimento verso destra» di m istanti temporali del grafico della sequenza. Ad esempio, considerando la sequenza a gradino unitario ed $m = 2$:





Si dimostra che

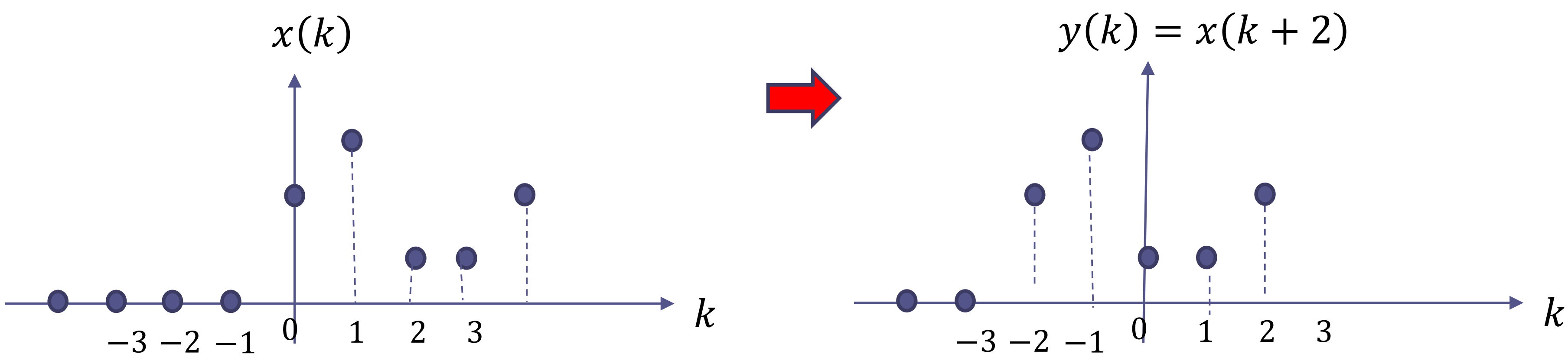
$$\boxed{Y(z) = Z(x(k-m)) = z^{-m}X(z)}$$

Se la sequenza $x(k)$ non è identicamente nulla per $k < 0$:

$$Y(z) = z^{-m}X(z) + \sum_{i=0}^{m-1} x(i-m)z^{-i}$$

Trasformata Z di una sequenza anticipata (scorrimento a sinistra)

Esempio



Si dimostra che

$$Y(z) = Z\big(x(k+m)\big) = z^m X(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x(i) z^{m-i}$$

Esplicitiamo le formule appena viste per la Z trasformata di sequenze anticipate o ritardate per diversi valori del coefficiente m di anticipo o ritardo

Ritardo:

$$Z(x(k-1)) = z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$Z\big(x(k-2)\big) = z^{-2}X(z) + x(-1)z^{-1} + x(-2)$$

$$Z\big(x(k-3)\big) = z^{-3}X(z) + x(-1)z^{-2} + x(-2)z^{-1} + x(-3)$$

Anticipo:

$$Z\big(x(k+1)\big) = z^{1}X(z) - x(0)z$$

$$Z\big(x(k+2)\big) = z^{2}X(z) - x(0)\,z^{2} - x(1)\mathrm{z}$$

$$Z\big(x(k+3)\big) = z^{3}X(z) - x(0)\,z^{3} - x(1)z^{2} - x(2)\mathrm{z}$$

Teorema del valore finale

Data una sequenza $x(k)$, se esiste finito il $\lim_{k\to\infty} x(k)$ allora

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{Z\to 1}(1-z^{-1})X(z) = \lim_{Z\to 1}(z-1)X(z)}$$

Questo risultato sarà importante al fine di valutare il comportamento asintotico della sequenza di uscita in un sistema di controllo digitale in retroazione

Si può sapere a priori se il $\lim_{k\to\infty} x(k)$ assume o meno un valore finito ?

Il $\lim_{k\to\infty} x(k)$ esiste ed è finito se e solo se tutti i poli della $X(z)$ (cioè le radici del polinomio a denominatore di $X(z)$) hanno modulo inferiore ad uno ad eccezione di un eventuale polo semplice in $z = 1$.

Teorema del valore iniziale

Data una sequenza $x(k)$. Se esiste finito il $\lim_{z\to\infty} X(z)$ allora:

$$\boxed{x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)}$$

Prodotto di una sequenza per il termine esponenziale $a^k, \quad a \in \mathbb{R}$

Data una sequenza $x(k)$, identicamente nulla per $k < 0$ ed avente Z-trasformata $X(z)$, si consideri un numero reale a e la sequenza $y(k)$ ottenuta moltiplicando il termine generico $x(k)$ della sequenza originaria per un termine esponenziale del tipo a^k, cioè:

$$y(k) = a^k x(k)$$

Si dimostra che

$$\mathrm{Z}\left(a^k x(k)\right) = \mathrm{Y}(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Z trasformata della sequenza sinusoidale modulata da un esponenziale

La sequenza sinusoidale modulata da un esponenziale viene definita come

$$x(k) = sin(\theta k)\rho^k \delta_{-1}(k) = \begin{cases} sin(\theta k)\rho^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

La sua Z-trasformata è desumibile a partire da quella della sequenza sinusoidale applicando la proprietà vista poc'anzi:

$$\mathrm{Z}\left(\rho^k x(k)\right) = X\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

Si avrà quindi:

$$Z\{sin(\theta k)\rho^k \delta_{-1}(k)\} = \frac{\left(\frac{z}{\rho}\right) sin(\theta)}{\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{\rho}\right) cos(\theta) + 1} = \frac{\rho\, sin(\theta) z}{z^2 - 2z\rho\, cos(\theta) + \rho^2}$$

La Z trasformata può anche essere equivalentemente espressa mediante potenze negative di z:

$$Z\{sin(\theta k)\rho^k \delta_{-1}(k)\} = \frac{z^{-1}\rho sin(\theta)}{1 - 2z^{-1}\,\rho cos(\theta)e^{\lambda} + z^{-2}\rho^2}$$

Z trasformata della sequenza cosinusoidale modulata da un esponenziale

La sequenza cosinusoidale modulata da un esponenziale viene definita come

$$x(k) = cos(\theta k)\rho^k \delta_{-1}(k) = \begin{cases} cos(\theta k)\rho^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

La sua Z-trasformata è determinabile a partire da quella della sequenza cosinusoidale applicando la medesima procedura impiegata nella slide precedente:

$$Z\{cos(\theta k)\rho^k \delta_{-1}(k)\} = \frac{z(z - \rho cos(\theta))}{z^2 - 2z\rho\, cos(\theta) + \rho^2} = \frac{1 - z^{-1}\rho\, cos(\theta)}{1 - 2z^{-1}\,\rho cos(\theta) e^{\lambda} + z^{-2}\rho^2}$$

Z trasformata della sequenza cosinusoidale sfasata modulata da un esponenziale

$$x(k) = r|\rho|^k cos(\theta k + \beta)\delta_{-1}(k)$$

Inseriamo nel segnale anche un termine premoltiplicativo costante r, in quanto ci consentirà di ricavare delle formule particolarmente utili nel momento in cui dovremo svolgere delle operazioni di antitrasformazione.

Imponiamo anche, per la medesima ragione, che la base $|\rho|$ del termine esponenziale $|\rho|^k$ sia una quantità non negativa.

Tale sequenza risulta essere una combinazione lineare fra le corrispondenti sequenze sinusoidale e cosinusoidale modulate da un esponenziale:

$$r|\rho|^k cos(\theta k + \beta)\delta_{-1}(k) = rcos(\beta)|\rho|^k cos(\theta k)\delta_{-1}(k) - rsin(\beta)|\rho|^k sin(\theta k)\,\delta_{-1}(k)$$

La trasformata Z della sequenza cosinusoidale sfasata modulata da un esponenziale è pertanto ricavabile applicando la proprietà di linearità combinando fra loro con i medesimi coefficienti $rcos(\beta)$ e $-rsin(\beta)$ le corrispondenti trasformate Z delle sequenze sinusoidale e cosinusoidale modulate da un esponenziale

Si ottiene:

$$Z\{r|\rho|^k cos(\theta k + \beta)\delta_{-1}(k)\} =$$

$$= rcos(\beta)\frac{z(z - \rho cos(\theta))}{z^2 - 2z\rho\ cos(\theta) + \rho^2} - rsin(\beta)\frac{\rho\ sin(\theta)z}{z^2 - 2z\rho\ cos(\theta) + \rho^2}$$

$$= \frac{rz[z\,cos(\beta) - |\rho| cos(\theta - \beta)]}{z^2 - 2|\rho|\,cos(\theta)z + |\rho|^2}$$

Presentiamo la sua trasformata Z in una forma equivalente che ci tornerà particolarmente utile nell’affrontare i problemi di antitrasformazione

$$Z\{r|\rho|^k cos(\theta k + \beta)\delta_{-1}(k)\} = \frac{0.5re^{j\beta}z}{z - |\rho|e^{j\theta}} + \frac{0.5re^{-j\beta}z}{z - |\rho|e^{-j\theta}}$$

Teorema della derivata (prodotto di una sequenza per k^h)

Data una sequenza $x(k)$, identicamente nulla per $k < 0$, si consideri un intero $h > 0$ e la sequenza definita come

$$y(k) = k^h x(k)$$

Si dimostra che

$$\mathrm{Y}(z) = -z \left(\frac{d}{dz}\right)^h X(z)$$

Z trasformata della sequenza $y(k) = k^h \delta_{-1}(k) \ (h = 1,2, \dots .)$

Applicando il teorema della derivata considerando come caso particolare la sequenza gradino unitario $x(k) = \delta_{-1}(k)$, si ottiene (ricordando che la z-trasformata della sequenza gradino unitario vale $\frac{z}{z-1}$)

$$\mathrm{Y}(z) = Z\{k^h \delta_{-1}(k)\} = -z \left(\frac{d}{dz}\right)^h \frac{z}{z-1}$$

Valutando tale espressione per h=1 si ottiene la trasformata della sequenza a rampa, già fornita in precedenza «sulla fiducia»

$$Z\{k\delta_{-1}(k)\} = -z \frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Valutando tale espressione per h=2 si ottiene la Z trasformata della sequenza parabolica

$$Z\{k^2 \delta_{-1}(k)\} = -z \left(\frac{d}{dz}\right)^2 \frac{z}{z-1} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

Teorema dell'integrale (divisione di una sequenza per k)

Data una sequenza $x(k)$, identicamente nulla per $k < 0$, si consideri la sequenza definita come

$$y(k) = \frac{x(k)}{k}$$

Sotto l'assunzione che $y(0)$ sia finito, la Z trasformata di $y(k)$ ha la seguente espressione:

$$Z\{y(k)\} = Y(z) = \int_{z}^{\infty} \frac{X(\xi)}{\xi} d\xi + y(0)$$

Esempio

Si ricavi la Z trasformata della sequenza a rampa $y(k) = k\delta_{-1}(k)$ a partire dalla Z trasformata della sequenza a parabola $x(k) = k^2\delta_{-1}(k)$

Poiché vale $y(k) = \frac{x(k)}{k}$, ed $y(0) = 0$, si può applicare il teorema della derivata che stabilisce che

$$Z\{y(k)\} = Y(z) = \int_z^{\infty} \frac{X(\xi)}{\xi} d\xi$$

Dalle tabelle la Z trasformata della sequenza a parabola vale $X(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

$$Y(z) = \int_z^{\infty} \frac{X(\xi)}{\xi} d\xi = \int_z^{\infty} \frac{\xi+1}{(\xi-1)^3} d\xi = \int_z^{\infty} \frac{\xi+1-2+2}{(\xi-1)^3} d\xi = \int_z^{\infty} \frac{1}{(\xi-1)^2} d\xi + 2\int_z^{\infty} \frac{1}{(\xi-1)^3} d\xi$$

$$= \left[-\frac{1}{\xi-1}\right]_z^{\infty} + 2\left[-\frac{1}{2(\xi-1)^2}\right]_z^{\infty} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Z- trasformata di funzioni periodiche

Sia data una sequenza $x_p(k)$ periodica di periodo p, e sia $x(k)$ la «sequenza generatrice» coincidente con la sequenza $x_p(k)$ nel primo periodo, e nulla quando $k \geq p$

$$x(k) = \begin{cases} x_p(k) & 0 \leq k < p \\ 0 & k \geq p \end{cases}$$

Se $X(z)$ è la Z- trasformata di $x(k)$ si ha che la Z-trasformata della sequenza periodica $x_p(k)$ è

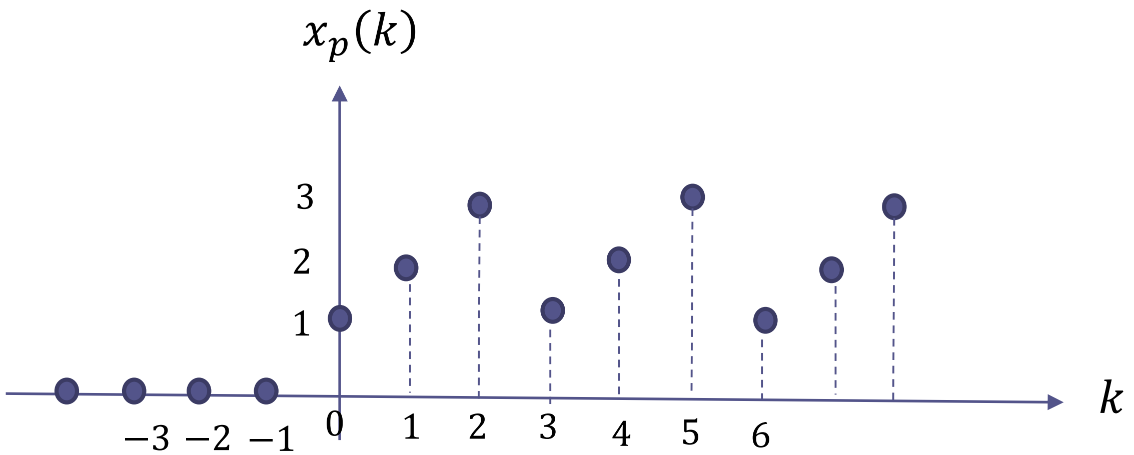
$$Z\{x_p(k)\} = \frac{z^p}{z^p - 1} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-p}} X(z)$$

Il risultato discende dal fatto che la sequenza periodica complessiva puo essere espressa in funzione della sequenza generatrice come segue:

$$x_p(k) = \sum_{i=0}^{\infty} x(k - ip) = x(k) + x(k-p) + x(k-2p) + \cdots..$$

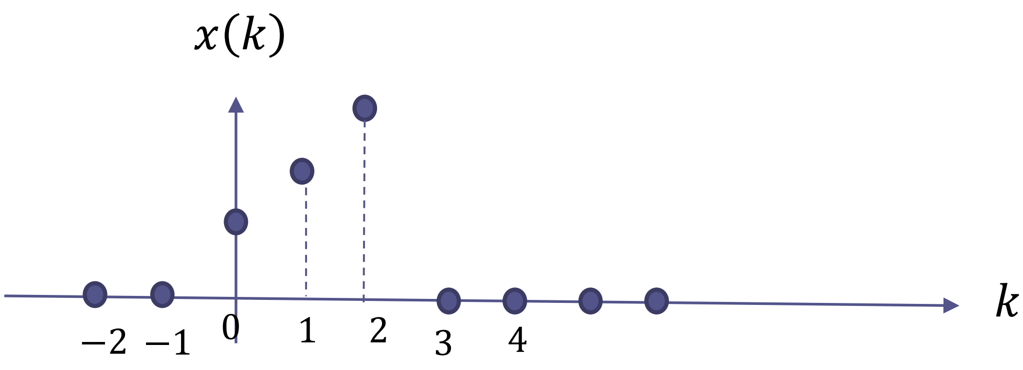
Esempio

Si consideri la sequenza $x_p(k) = \{1,2,3,1,2,3,1,2,3, \dots\dots\}$ di periodo p=3



La sequenza «generatrice» $x(k)$ è

$$x(k) = \begin{cases} x_p(k) & 0 \le k < 3 \\ 0 & k \ge 3 \end{cases}$$



La Z trasformata della sequenza generatrice $x(k)$ è

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2}$$

La Z trasformata della sequenza periodica «completa» $x_p(k)$ è pertanto

$$Z\{x_p(k)\} = \frac{z^p}{z^p - 1} X(z) = \frac{z^3}{z^3 - 1} \cdot \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2} = \frac{z^3(z^2 + 2z + 3)}{(z^3 - 1)z^2}$$

Convoluzione

Si considerino due sequenze $x_1(k)$ e $x_2(k)$, identicamente nulle per $k < 0$ ed aventi Z-trasformate $X_1(z)$ e $X_2(z)$.

Si definisce «convoluzione discreta» fra le due sequenze $x_1(k)$ e $x_2(k)$ una terza sequenza, denotata come $y(k) = x_1(k) * x_2(k)$ e definita come segue:

$$y(k) = x_1(k) * x_2(k) = \sum_{i=0}^{k} x_1(i)x_2(k-i) = \sum_{i=0}^{k} x_2(i)x_1(k-i)$$

Poiché le due sequenze $x_1(k)$ e $x_2(k)$ sono per ipotesi identicamente nulle per $k < 0$, le sommatorie possono essere estese fino ad ∞ senza alterare il risultato

$$y(k) = x_1(k) * x_2(k) = \sum_{i=0}^{\infty} x_1(i)x_2(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} x_2(i)x_1(k-i)$$

Si dimostra che $\mathrm{Y}(z) = X_1(z)\, X_2(z)$

Riassunto Z-trasformate notevoli

	Funzione	Z-trasformata (polinomi in z)	Z-trasformata (polinomi in z^{-1})
Impulso Discreto	$\delta(k)$	1	1
Impulso Discreto ritardato	$\delta(k-h)$		z^{-h}
Gradino unitario	$\delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
Sequenza esponenziale	$a^k\delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
Rampa	$k\delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
Parabola	$k^2\delta_{-1}(k)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$

Riassunto Z-trasformate notevoli

	Funzione	Z-trasformata (polinomi in z)	Z-trasformata (polinomi in z^{-1})
Sinusoide	$\sin(\theta k)\delta_{-1}(k)$	$\dfrac{z\, sin(\theta)}{z^2+2z\, cos(\theta)+1}$	$\dfrac{z^{-1}\, sin(\theta)}{1+2z^{-1}\, cos(\theta)+z^{-2}}$
Cosinusoide	$\cos(\theta k)\delta_{-1}(k)$	$\dfrac{z(z-cos(\theta))}{z^2-2z\, cos(\theta)+1}$	$\dfrac{1-z^{-1}\, cos(\theta)}{1-2z^{-1}\, cos(\theta)+z^{-2}}$
Sinusoide modulata da un esponenziale	$sin(\theta k)\lambda^k\delta_{-1}(k)$	$\dfrac{\lambda\, sin(\theta)z}{z^2-2z\lambda\, cos(\theta)+\lambda^2}$	$\dfrac{z^{-1}\lambda\, sin(\theta)}{1-2z^{-1}\,\lambda cos(\theta)e^{\lambda}+z^{-2}\lambda^2}$
Cosinusoide modulata da un esponenziale	$cos(\theta k)\lambda^k\delta_{-1}(k)$	$\dfrac{z(z-\lambda cos(\theta))}{z^2-2z\lambda\, cos(\theta)+\lambda^2}$	$\dfrac{1-z^{-1}\lambda\, cos(\theta)}{1-2z^{-1}\,\lambda cos(\theta)e^{\lambda}+z^{-2}\lambda^2}$
Polinomio fattoriale	$\dfrac{k^{(h)}}{h!}\delta_{-1}(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^{h+1}}$	$\dfrac{z^{-h}}{(1-z^{-1})^{h+1}}$
Polinomio fattoriale esponenziale	$\dfrac{k^{(h)}}{h!}a^{k-h}\delta_{-1}(k)$	$\dfrac{z}{(z-a)^{h+1}}$	$\dfrac{z^{-h}}{(1-az^{-1})^{h+1}}$

Riassunto Z-trasformate notevoli

Funzione	Z-trasformata (polinomi in z)	Z-trasformata (polinomi in z^{-1})
Cosinusoide sfasata		
$cos(\theta k+\beta)\delta_{-1}(k)$	$\frac{z(z\,cos(\beta) - cos(\theta-\beta))}{z^2-2z\,cos(\theta)+1}$	$\frac{cos(\beta) - cos(\theta-\beta)z^{-1}}{1-2z^{-1}\,cos(\theta)+z^{-2}}$
$cos(\theta k+\beta)\delta_{-1}(k)$	$\frac{0.5e^{j\beta}z}{z-e^{j\theta}}+\frac{0.5e^{-j\beta}z}{z-e^{-j\theta}}$	$\frac{0.5e^{j\beta}}{1-e^{j\theta z^{-1}}}+\frac{0.5e^{-j\beta}}{1-e^{-j\theta}z^{-1}}$
Cosinusoide sfasata modulata da un esponenziale		
$r\|\rho\|^k cos(\theta k+\beta)\delta_{-1}(k)$	$\frac{rz[z\,cos(\beta) - \|\rho\| cos(\theta-\beta)]}{z^2-2\|\rho\|\,cos(\theta)z+\|\rho\|^2}$	
	$\frac{0.5re^{j\beta}z}{z-\|\rho\|e^{j\theta}}+\frac{0.5re^{-j\beta}z}{z-\|\rho\|e^{-j\theta}}$	

Riassunto proprietà

	Funzione	Z-trasformata
Linearità	$ax_1(k) + bx_2(k)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Ritardo (scorrimento a destra)	$x(k-m)$	$z^{-m}X(z)$
Anticipo (scorrimento a sinistra)	$x(k+m)$	$z^m X(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x(i) z^{m-i}$
Prodotto per k^h	$k^h x(k)$	$-z \left(\frac{d}{dz}\right)^h X(z)$
Prodotto per a^k	$a^k x(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
Convoluzione	$x_1(k) * x_2(k)$	$X_1(z)\, X_2(z)$

Riassunto proprietà

	Funzione	Z-trasformata
Divisione per k	$\frac{x(k)}{k}$	$\int_z^{\infty} \frac{X(\xi)}{\xi} d\xi + \lim_{k\to 0} \frac{x(k)}{k}$
Sequenza di periodo p, con generatrice $x(k)$		$\frac{z^p}{z^p - 1} X(z)$

Teorema del valore finale

Se esiste finito il $\lim_{k\to\infty} x(k)$ allora vale: $\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z) = \lim_{z\to 1}(z - 1)X(z)$

Teorema del valore iniziale

Se esiste finito il $\lim_{z\to\infty} X(z)$ allora vale: $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$