Controllo digitale

Sistemi a tempo discreto in forma «variabili di stato». Analisi.

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Il punto della situazione e qualche richiamo

Facciamo alcuni brevi richiami alla teoria dei sistemi dinamici a tempo continuo per inquadrare meglio la direzione delle considerazioni che ci accingiamo a fare

Nel contesto della analisi dei sistemi dinamici a tempo continuo, ricordate sicuramente come venivano impiegate differenti rappresentazioni per il relativo modello matematico:

Rappresentazione «ingresso-uscita»

Rappresentazione in «variabili di stato»

La rappresentazione «ingresso-uscita» coincideva con una equazione differenziale che, nel caso di sistemi SISO (single-input-single-output), ha la forma

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = \\ b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

con le condizioni iniziali

$$y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = y_{1,0} \qquad \ldots \qquad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1,0}$$

ed il vincolo di fisica realizzabilità $n \geq m$

Nei sistemi a tempo discreto, l' «equivalente» di tale rappresentazione è l'equazione alle differenze finite, che abbiamo trattato fino ad ora.

Per risolvere l'equazione differenziale, come insegna l'analisi matematica, si segue un approccio non dissimile da quello che abbiamo impiegato per risolvere l'equazione alle differenze finite.

La soluzione $y(t)$ si calcola sommando fra loro la risposta libera e la risposta forzata.

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

Dove la risposta libera $y_\ell(t)$ è soluzione della equazione differenziale nella quale i termini di ingresso sono posti uguali a zero e si impongono le condizioni iniziali

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$$

$$y(0) = y_0$$

$$\dot{y}(0) = y_{1,0}$$

$$\ldots$$

$$y^{(n-1)}(0) = y_{n-1,0}$$

La risposta forzata è invece soluzione della equazione differenziale «completa», cioè comprensiva dei termini dipendenti dall’ingresso, ma a partire da condizioni iniziali nulle

Si ricorderà anche come per il calcolo della risposta libera si ricorreva al polinomio caratteristico associato alla equazione differenziale omogenea, e ai relativi «modi» fra loro combinati linearmente.

Abbiamo sviluppato, per la risoluzione delle equazioni alle differenze, un approccio sostanzialmente equivalente, con qualche piccola differenza dovuta al particolare ruolo delle radici nulle del polinomio caratteristico, un aspetto che non ha la sua controparte nei sistemi dinamici a tempo continuo.

Nei sistemi a tempo continuo, veniva impiegata con profitto anche una rappresentazione alternativa, detta «modello in variabili di stato»

Nell’ambito di tale rappresentazione, la relazione fra gli ingressi e le uscite è «mediata» da un set di variabili denominate «variabili di stato».

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

vettore di stato

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

vettore delle uscite
(per sistemi SISO q=1)

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}$$

vettore degli ingressi
(per sistemi SISO p=1)

La forma generale di un modello in variabili di stato a tempo continuo è la seguente

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \mathbf{C}\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$$

$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ Condizione iniziale

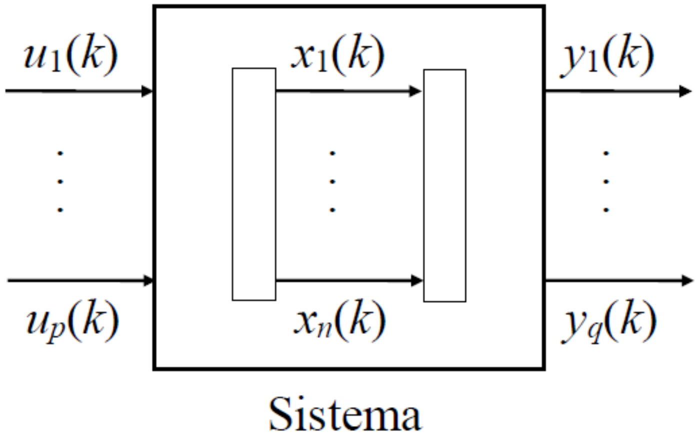
$\boldsymbol{A}$, **B, C, D** matrici costanti di dimensione opportuna

I «modi» del sistema risultavano essere definiti attraverso gli autovalori della matrice A.

Ora presentiamo la versione «a tempo discreto» di questa rappresentazione, che avrà vari tratti in comune, in termini di metodologie di analisi, con la rappresentazione a tempo continuo soprariportata.

Analisi di sistemi a tempo discreto espressi in forma di «variabili di stato»

Una descrizione in termini di *variabili di stato* (VS) di un sistema a tempo discreto considera nel caso più generale un sistema MIMO (*multiple-input multiple-output*) caratterizzato da p *ingressi* $u_1(k), \ldots, u_p(k)$, e q *uscite* $y_1(k), \ldots, y_q(k)$. Il legame fra ingressi e uscite tiene conto anche degli n stati del sistema $x_1(k), \ldots, x_n(k)$, come esemplificato in Fig. 2.4. Il numero di stati n è detto *ordine del sistema*.



Segnali che caratterizzano un modello in variabili di stato

vettore degli ingressi

$$\boldsymbol{u}(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_p(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p,$$

vettore di stato

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

vettore delle uscite

$$\boldsymbol{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_q(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^q.$$

Un sistema a tempo discreto lineare e stazionario di ordine n, con p ingressi e q uscite, ha la seguente rappresentazione in termini di variabili di stato

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \\ \quad \boldsymbol{y}(k) \quad = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{cases}$$

Equazione di stato

Trasformazione di uscita

Tale modello è caratterizzato da quattro matrici di costanti: $\boldsymbol{A}$ di dimensione $n \times n$, $\boldsymbol{B}$ di dimensione $n \times p$ $\boldsymbol{C}$ di dimensione $q \times n$ e $\boldsymbol{D}$ di dimensione $q \times p$.

L'equazione vettoriale $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$ è detta *equazione di stato* ed è costituita da n equazioni alle differenze del *primo ordine*. Essa descrive come il valore successivo dello stato dipende dal valore corrente dello stato e dell'ingresso.

L'equazione vettoriale $\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)$ è detta *trasformazione di uscita* ed è costituita da q equazioni algebriche. Essa descrive come il valore corrente dell'uscita dipende dal valore corrente dello stato e dell'ingresso. Qualora la matrice $\boldsymbol{D}$ abbia tutti gli elementi nulli, il termine $\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)$ si omette in tale equazione: in tale caso il sistema è detto *strettamente proprio*.

Le diverse rappresentazioni sono ovviamente equivalenti. Vediamo un esempio di trasformazione di un modello ingresso-uscita in forma variabili di stato

Esempio Rappresentare in forma variabili di stato la seguente equazione alle differenze

$$2y(k+3) - 3y(k+2) + 2\,y(k+1) + 2y(k) = 2u(k)$$

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = 2$$

$$y(2) = 3$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

vettore di stato

Equazioni di stato

$$x_1(k+1) = y(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = y(k+2) = x_3(k)$$

Equazioni di stato (continua)

$$x_1(k+1) = y(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = y(k+2) = x_3(k)$$

$$\begin{aligned} x_3(k+1) = y(k+3) = & \\ & = \frac{3}{2}y(k+2) - y(k+1) - y(k) + \frac{1}{2}u(k) \\ & = \frac{3}{2}x_3(k) - x_2(k) - x_1(k) + \frac{1}{2}u(k) \end{aligned}$$

Modello in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{B} u(k)$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

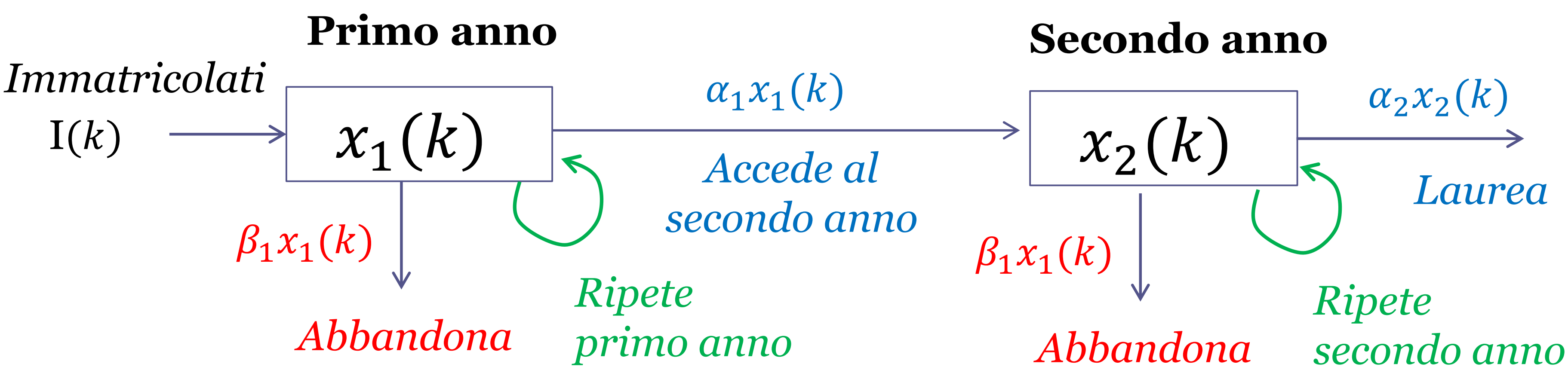
$$\boldsymbol{D = 0}$$

Esempio Dinamica di un corso di laurea magistrale

$x_1(k)$ Studenti iscritti al primo anno di corso nel k-esimo anno accademico

$x_2(k)$ Studenti iscritti al secondo anno di corso nel k-esimo anno accademico

$\mathrm{I}(k)$ Immatricolati nel k-esimo anno accademico



$\alpha_{1,}, \alpha_2$ Tassi di successo

$\beta_{1,}, \beta_2$ Tassi di abbandono

$$x_1(k) = I(k) + x_1(k-1) - \alpha_1 x_1(k-1) - \beta_1 x_1(k-1)$$

- $x_1(k)$: Studenti iscritti al 1° anno dell' AA corrente
- $I(k)$: Immatricolati nell' AA corrente
- $x_1(k-1)$: Iscritti dall' AA precedente
- $\alpha_1 x_1(k-1)$: Iscritti del precedente AA passati al secondo anno
- $\beta_1 x_1(k-1)$: Abbandoni

$$x_2(k) = \alpha_1 x_1(k-1) + x_2(k-1) - \alpha_2 x_2(k-1) - \beta_2 x_2(k-1)$$

- $x_2(k)$: Studenti iscritti al 2° anno dell' AA corrente
- $\alpha_1 x_1(k-1)$: Studenti provenienti dal primo anno
- $x_2(k-1)$: Iscritti dall' AA precedente
- $\alpha_2 x_2(k-1)$: Iscritti al precedente AA che si sono laureati
- $\beta_2 x_2(k-1)$: Abbandoni

$$x_1(k) = I(k) + x_1(k-1) - \alpha_1 x_1(k-1) - \beta_1 x_1(k-1)$$

$$x_2(k) = \alpha_1 x_1(k-1) + x_2(k-1) - \alpha_2 x_2(k-1) - \beta_2 x_2(k-1)$$

Incrementiamo k per far comparire $x_1(k+1)$ e $x_2(k+1)$

$$x_1(k+1) = I(k+1) + x_1(k) - \alpha_1 x_1(k) - \beta_1 x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + x_2(k) - \alpha_2 x_2(k) - \beta_2 x_2(k)$$

Raccogliamo a fattor comune i termini omologhi

$$x_1(k+1) = I(k+1) + (1 - \alpha_1 - \beta_1)\, x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + (1 - \alpha_2 - \beta_2) x_2(k)$$

$y(k) = \alpha_2 x_2(k)$ **Uscita**: studenti che si laureano nel k -esimo A.A.

$$u(k) = I(k+1)$$

$$x_1(k+1) = u(k) + (1-\alpha_1-\beta_1)\, x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + (1-\alpha_2-\beta_2) x_2(k)$$

$$y(k) = \alpha_2 x_2(k)$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha_1-\beta_1) & 0 \\ \alpha_1 & (1-\alpha_2-\beta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\text{A}=\begin{bmatrix} (1-\alpha_1-\beta_1) & 0 \\ \alpha_1 & (1-\alpha_2-\beta_2) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad \text{D}= 0$$

Nel parametrizzare il modello, si abbia cura di garantire le condizioni $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ e $\alpha_2 + \beta_2 < 1$ o si otterranno soluzioni senza significato fisico

Come determinare l'evoluzione di un modello matematico espresso in forma VdS ?

$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(k)$ $\quad$ $\boldsymbol{x}(0)$ Assegnato $\quad$ $\mathbf{u}(k)$ Noto per ogni k

Risulta abbastanza semplice risolvere per via numerica l'equazione

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(0)$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(1) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(0) + \mathbf{AB}\,\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(1)$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(2) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(2) = \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{A}^2\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}(0) + \mathbf{AB}\,\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(2)$$

$$\boxed{\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{A}^{k-1-i}\,\mathbf{B}\,\boldsymbol{u}(i)}$$

E ovviamente, per quanto riguarda l'uscita:

$$\mathrm{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\mathbf{u}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}\sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{A}^{k-1-i}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}(i) + \boldsymbol{D}\mathbf{u}(k)$$

Problema fondamentale della Analisi dei Sistemi a tempo discreto

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) \quad\;\; = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}_\ell(k) + \boldsymbol{x}_f(k).$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \underbrace{\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}(0)}_{\boldsymbol{x}_\ell(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{A}^{k-1-i} \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)}_{\boldsymbol{x}_f(k)}$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}(0)}_{\boldsymbol{y}_\ell(k)} + \underbrace{\boldsymbol{C}\sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{A}^{k-1-i} \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)}_{\boldsymbol{y}_f(k)}$$

Risposta libera e forzata hanno lo stesso significato visto in precedenza: la risp. libera considera l'effetto delle condizioni iniziali mettendo a zero il termine di ingresso, mentre la risp. Forzata include l'effetto dell'ingresso $\boldsymbol{u}(k)$ ma assumendo condizioni iniziali $\boldsymbol{x}(0)$ nulle

Esempio «Opinion dynamics»

In un modello di evoluzione delle opinioni (in inglese opinion dynamics) il parere di un individuo su un determinato argomento viene influenzata degli altri individui con cui comunica tramite reti sociali e dalle fonti informative a cui ha accesso

Dati due individui che comunicano fra loro e accedono a due fonti informative (TV e stampa), si vuole studiare come varia giornalmente l'opinione dei due individui relativamente, per esempio, ad un referendum, e capire se l'opinione media è favorevole o contraria al referendum.

Siano $x_1(k)$ e $x_2(k)$ le variabili che caratterizzano l'opinione dei due soggetti nel giorno k, con la convenzione che il valore 0 indica "voto certamente contrario" e il valore 1 indica "voto certamente a favore"

Il primo individuo ascolta la TV la cui opinione al giorno k si denota $u_1(k)$, mentre il secondo individuo legge la stampa la cui opinione al giorno k si denota $u_2(k)$.

Si desidera monitorare l'opinione media al giorno k, che vale

$$y(k) = \frac{1}{2}(x_2(k) + x_1(k))$$

Secondo il cosiddetto "*modello di DeGroot*" l'opinione di un individuo varia giornalmente come media pesata della sua precedente opinione e delle opinioni che ha ricevuto il giorno precedente.

Dunque il problema descritto potrebbe essere modellato come segue:

$$x_1(k+1) = a_{1,1}\, x_1(k) + a_{1,2}\, x_2(k) + b_{1,1}\, u_1(k)$$
$$x_2(k+1) = a_{2,1}\, x_1(k) + a_{2,2}\, x_2(k) + b_{2,2}\, u_2(k)$$
$$y(k) = 0.5\, x_1(k) + 0.5\, x_2(k)$$

$$a_{1,1} + a_{1,2} + b_{1,1} = 1 \qquad a_{2,1} + a_{2,2} + b_{2,2} = 1$$

In tale modello gli stati sono le opinioni dei due individui e dunque esso ha ordine n = 2.

Vi sono p = 2 ingressi: le opinioni diffuse dalla TV e dalla stampa

Vale infine q = 1, perché l'unica uscita è la media delle opinioni dei due individui.

$$x_1(k+1) = a_{1,1}\, x_1(k) + a_{1,2}\, x_2(k) + b_{1,1}\, u_1(k)$$
$$x_2(k+1) = a_{2,1}\, x_1(k) + a_{2,2}\, x_2(k) + b_{2,2}\, u_2(k)$$
$$y(k) = 0.5\, x_1(k) + 0.5\, x_2(k)$$

Valori ammissibili dei parametri sono ad esempio

$a_{1,1} = 0.2$ $\quad a_{1,2} = 0.4$ $\quad b_{1,1} = 0.4$

(l’individuo 1 si fa influenzare facilmente)

$a_{2,1} = 0.1$ $\quad a_{2,2} = 0.6$ $\quad b_{1,1} = 0.3$

(l’individuo 2 è abbastanza convinto delle sue opinioni e comunque non ritiene l’individuo 2 autorevole)

Questo porta alla seguente rappresentazione in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

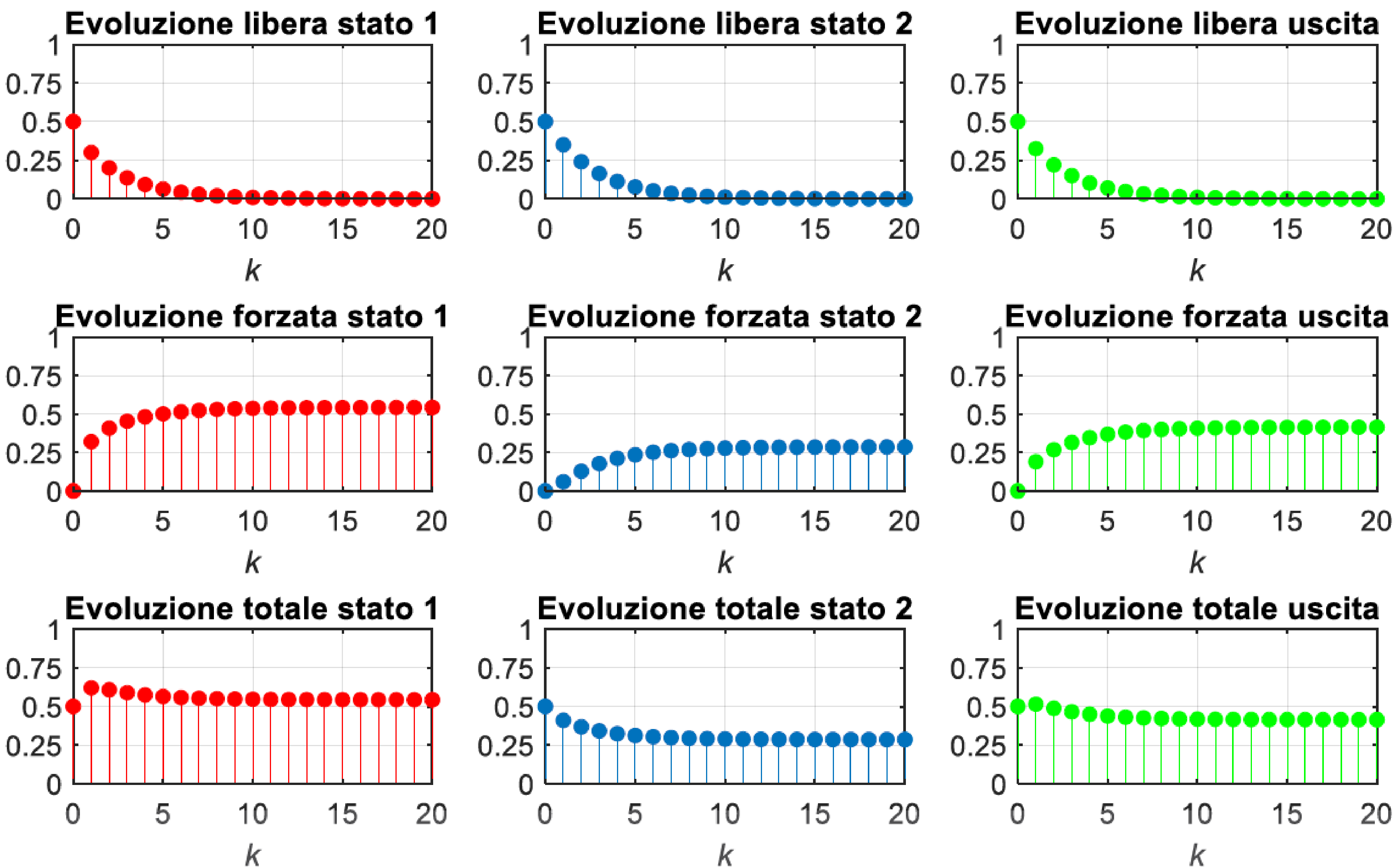
Si suppone che inizialmente i due individui non si siano ancora fatti una chiara opinione:

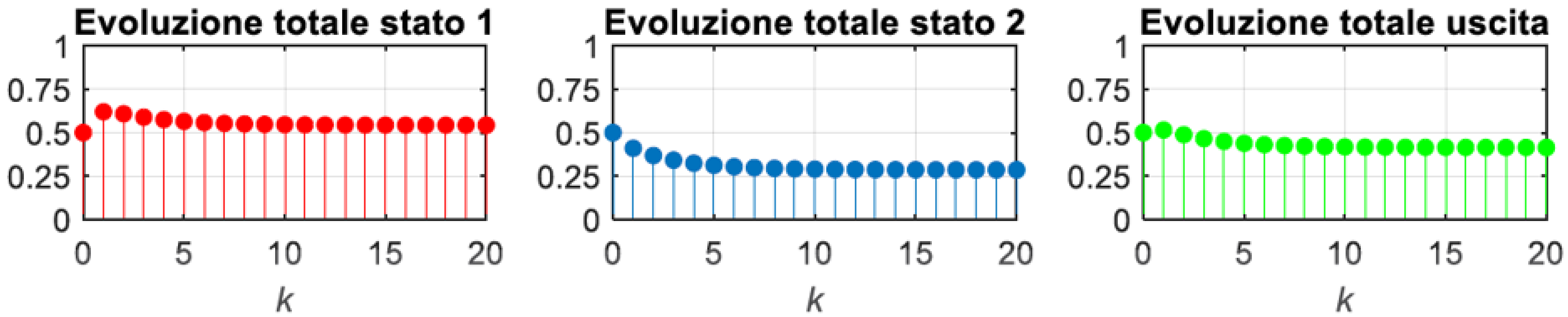
$$\boldsymbol{x}(0) = [0.5 \quad 0.5]^T$$

Inoltre la TV è decisamente schierata pro-referendum: $u_1(k) = 0.8 \text{ per } k \geq 0$

La stampa è invece decisamente schierata contro $u_2(k) = 0.2 \text{ per } k \geq 0$

Il valore medio delle opinioni espresse dalle fonti informative vale comunque sempre (0.8+0.2)/2=0.5, quindi è complessivamente da ritenersi neutro.


Evoluzione libera stato 1
Evoluzione libera stato 2
Evoluzione libera uscita
Evoluzione forzata stato 1
Evoluzione forzata stato 2
Evoluzione forzata uscita
Evoluzione totale stato 1
Evoluzione totale stato 2
Evoluzione totale uscita
1
0.75
0.5
0.25
0
0
5
10
15
20
k

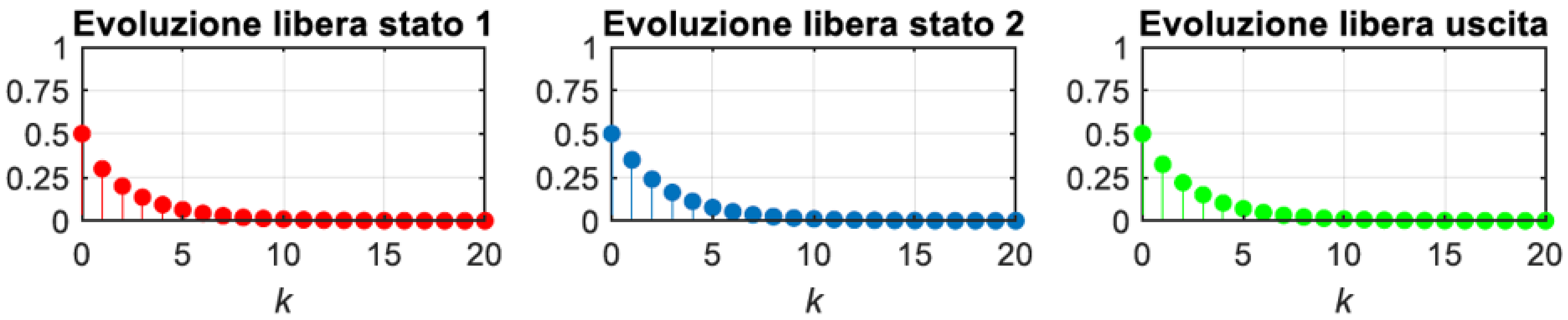


Si nota che l'opinione media dopo 20 giorni vale 0.41, ossia è contraria al referendum, benché il valore medio delle opinioni espresse dalle fonti informative sia, come abbiamo evidenziato, da ritenersi neutro.

Come si giustifica questo fatto ?

Ciò è dovuto al fatto che il soggetto 2, meno influenzabile e maggiormente autorevole rispetto al soggetto 1, accede alla fonte informativa stampa, che risulta schierata contro il referendum.

Il soggetto 1, che risulta influenzato in maniera equivalente dal soggetto 1 e dalla TV (con coefficienti 0.4) converge verso una opinione lievemente a favore del referendum.



Inoltre, poiché l’evoluzione libera dello stato e dell’uscita tendono a zero, le opinioni finali risultano essere indipendenti dalle opinioni iniziali.

Determinazione analitica della evoluzione libera per un modello espresso in termini di variabili di stato

$$\boldsymbol{x}_\ell(k) = \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}(0)$$

La matrice $\boldsymbol{A}^k$ si definisce *matrice di transizione dello stato*. Essa ha dimensione $n \times n$ e i suoi elementi sono delle funzioni della variabile temporale k. In genere non è immediato determinarne analiticamente la forma.

Esiste un caso in cui la determinazione della matrice di transizione dello stato è banale

se A è una **matrice diagonale** di dimensione n

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Vediamo come procedere in casi più generali.

Presentiamo un metodo di calcolo di $\boldsymbol{A}^k$ basato sul cosiddetto **«Sviluppo di Sylvester»**

Proposizione 2.5 (Sviluppo di Sylvester) *Se A è una matrice di dimensione $n \times n$, la corrispondente matrice di transizione dello stato $\boldsymbol{A}^k$ può essere scritta come:*

$$\boldsymbol{A}^k = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(k)\boldsymbol{A}^i = \beta_0(k)\boldsymbol{I} + \beta_1(k)\boldsymbol{A} + \cdots + \beta_{n-1}(k)\boldsymbol{A}^{n-1}$$

dove i coefficienti dello sviluppo $\beta_i(k)$ sono opportune funzioni scalari del tempo.

La precedente Proposizione ci rivela come la matrice di transizione dello stato $\boldsymbol{A}^k$ di una matrice quadrata $\boldsymbol{A}$ di dimensione n sia calcolabile attraverso una combinazione lineare fra la matrice identità e le matrici $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3, \dots, \boldsymbol{A}^{n-1}$.

I coefficienti di tale combinazione lineare sono delle funzioni scalari della variabile temporale k.

Le funzioni $\beta_0(k), \beta_1(k), .., \beta_{n-1}(k)$ si calcolano risolvendo un sistema di equazioni lineari.

La forma assunta da tale sistema è differente in funzione del fatto che la matrice A abbia autovalori distinti oppure presenti alcuni autovalori con molteplicità maggiore di uno.

Iniziamo dal caso di autovalori distinti.

Calcolo della matrice di transizione dello stato A^k nel caso di **autovalori distinti**

Se la matrice A ha autovalori tutti distinti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ le n funzioni incognite $\beta_0(k)$, $\beta_1(k), \ldots, \beta_{n-1}(k)$ si ricavano risolvendo il seguente sistema di n equazioni (tante equazioni quanti sono gli autovalori):

$$
\begin{aligned}
\beta_0(k) + \lambda_1\beta_1(k) + \lambda_1^2\beta_2(k) + \cdots + \lambda_1^{n-1}\beta_{n-1}(k) &= \lambda_1^k \\
\beta_0(k) + \lambda_2\beta_1(k) + \lambda_2^2\beta_2(k) + \cdots + \lambda_2^{n-1}\beta_{n-1}(k) &= \lambda_2^k \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
\beta_0(k) + \lambda_n\beta_1(k) + \lambda_n^2\beta_2(k) + \cdots + \lambda_n^{n-1}\beta_{n-1}(k) &= \lambda_n^k
\end{aligned}
$$

Tale sistema di equazioni può essere espresso, e successivamente convenientemente risolto, ricorrendo ad una **forma matriciale**.

Se infatti alloggiamo le funzioni incognite $\beta_0(k), \beta_1(k), .., \beta_{n-1}(k)$ in un vettore colonna

$$\boldsymbol{\beta}(k) = [\beta_0(k)\ \beta_1(k) .., \beta_{n-1}(k)]^{\boldsymbol{T}}$$

il membro sinistro del sistema può essere espresso attraverso il prodotto fra una matrice costante $\boldsymbol{V}$ ed il vettore $\boldsymbol{\beta}(k)$

$$\begin{bmatrix} \beta_0(k) + \lambda_1\beta_1(k) + \lambda_1^2\beta_2(k) + \cdots + \lambda_1^{n-1}\beta_{n-1}(k) \\ \beta_0(k) + \lambda_2\beta_1(k) + \lambda_2^2\beta_2(k) + \cdots + \lambda_2^{n-1}\beta_{n-1}(k) \\ \vdots \\ \beta_0(k) + \lambda_n\beta_1(k) + \lambda_n^2\beta_2(k) + \cdots + \lambda_n^{n-1}\beta_{n-1}(k) \end{bmatrix} = \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{\beta}(k)$$

In cui la matrice $\boldsymbol{V}$ è definita come segue:

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Una matrice che assume tale forma è detta «**matrice di Vandermonde**»

Il membro destro del sistema di equazioni contiene le funzioni note $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ che inseriamo in un vettore colonna

$$\boldsymbol{\eta}(k) = [\lambda_1^k \quad \lambda_2^k \quad \dots \quad \lambda_n^k]^T$$

In modo da giungere alla seguente forma equivalente del sistema

$$\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{\beta}(k) = \boldsymbol{\eta}(k)$$

Poiché **sotto l'ipotesi che gli autovalori siano tutti distinti la matrice di Vandermonde è invertibile**, si può facilmente calcolare il vettore incognito $\boldsymbol{\beta}(k)$ attraverso la relazione

$$\boldsymbol{\beta}(k) = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\eta}(k)$$

Come si osserva facilmente, il vettore $\boldsymbol{\eta}(k)$ contiene i modi del sistema. Le funzioni incognite $\beta_0(k), \beta_1(k), .., \beta_{n-1}(k)$ saranno pertanto tutte espresse mediante combinazioni lineari, con opportuni coefficienti, fra i modi del sistema.

Come ulteriore conseguenza, anche tutti gli elementi della matrice di transizione dello stato $\boldsymbol{A}^k$ saranno anch'essi combinazioni lineari fra i modi del sistema.

Esempio Calcolare la risposta del sistema autonomo a tempo discreto del secondo ordine

$$\mathbf{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Abbiamo visto come la risposta del sistema sia $\mathbf{x}(k) = \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}(0)$

Calcoliamo la matrice di transizione dello stato mediante lo sviluppo di Sylvester

$$\boldsymbol{A}^k = \beta_0(k)\mathbf{I} + \beta_1(k)\boldsymbol{A}$$

Essendo $\boldsymbol{A}$ una matrice triangolare, i suoi autovalori coincidono con gli elementi lungo la diagonale:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 3$$

Tale matrice ha dunque autovalori distinti, e per il calcolo delle funzioni $\beta_0(k)$ e $\beta_1(k)$ possiamo applicare la procedura illustrata poc’anzi.

Per il calcolo delle funzioni $\beta_0(k)$ e $\beta_1(k)$ scriviamo pertanto il sistema

$$\begin{aligned}\beta_0(k) + \lambda_1\beta_1(k) &= \lambda_1^k\\ \beta_0(k) + \lambda_2\beta_1(k) &= \lambda_2^k\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\beta_0(k) - \beta_1(k) &= (-1)^k\\ \beta_0(k) + 3\beta_1(k) &= (3)^k\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{\beta}(k) = \boldsymbol{\eta}(k)$$

con

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}(k) = \begin{bmatrix} \beta_0(k) \\ \beta_1(k) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\eta}(k) = \begin{bmatrix} (-1)^k \\ 3^k \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}(k) = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\eta}(k) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^k \\ 3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}(-1)^k + \frac{1}{4}3^k \\ \frac{1}{4}3^k - \frac{1}{4}(-1)^k \end{bmatrix}$$

Si ha quindi

$$\beta_0(k) = \frac{1}{4}\left((3)^k + 3\,(-1)^k\right)$$
$$\beta_1(k) = \frac{1}{4}\left((3)^k - (-1)^k\right)$$

e la matrice di transizione dello stato assume la forma

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k &= \beta_0(k)\boldsymbol{I}_2 + \beta_1(k)\boldsymbol{A} \\ &= \frac{1}{4}\left((3)^k + 3\,(-1)^k\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\left((3)^k - (-1)^k\right)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1)^k & \frac{1}{4}\left((3)^k - (-1)^k\right) \\ 0 & (3)^k \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Come atteso, ogni elemento della matrice $\boldsymbol{A}^k$ è una combinazione dei due modi $(-1)^k$ e 3^k

Esercizio Calcolare la matrice di transizione dello stato per il modello della dinamica della Laurea Magistrale con

$\alpha_1 = 0.7$, $\alpha_2 = 0.7$ $\beta_1 = 0.2$ $\beta_2 = 0.1$

Calcolo della matrice di transizione dello stato A^k nel caso in cui ci siano autovalori con molteplicità maggiore di uno

Se la matrice A ha autovalori di molteplicità non unitaria, si costruisce un sistema simile a quello precedentemente ricavato in cui ad ogni autovalore λ di molteplicità ν corrispondono ν equazioni della forma:

$$\begin{aligned}
\beta_0(k) + \lambda\beta_1(k) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(k) &= \lambda^k \\
\frac{d}{d\lambda}\left(\beta_0(k) + \lambda\beta_1(k) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(k)\right) &= \frac{d}{d\lambda}\lambda^k \\
\vdots \qquad\qquad\qquad &\qquad \vdots \\
\frac{d^{\nu-1}}{d\lambda^{\nu-1}}\left(\beta_0(k) + \lambda\beta_1(k) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(k)\right) &= \frac{d^{\nu-1}}{d\lambda^{\nu-1}}\lambda^k
\end{aligned}$$

ovvero la prima equazione è la stessa che equazione che si associa ad un autovalore di molteplicità singola, mentre le $\nu-1$ equazioni successive si ottengono derivando successivamente primo e del secondo membro dell'equazione precedente rispetto al parametro λ, come se esso fosse una variabile continua

Eseguendo le derivate si ottengono dunque le ν equazioni seguenti

$$
\begin{array}{llllllll}
\beta_0(k) & +\lambda\beta_1(k) & +\lambda^2\beta_2(k) & +\cdots & +\lambda^{\nu-1}\beta_{\nu-1}(k) & +\cdots & +\lambda^{n-1}\beta_{n-1}(k) & = \lambda^k \\
 & \beta_1(k) & +2\lambda\beta_2(k) & +\cdots & +(\nu-1)\lambda^{\nu-2}\beta_{\nu-1}(k) & +\cdots & +(n-1)\lambda^{n-2}\beta_{n-1}(k) & = k\,\lambda^{k-1} \\
 & & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \frac{(\nu-1)!}{0!}\beta_{\nu-1}(k) & +\cdots & +\frac{(n-1)!}{(n-\nu)!}\lambda^{n-\nu}\beta_{n-1}(k) & = \frac{k!}{(k-\nu+1)!}\,\lambda^{k-\nu+1}
\end{array}
$$

Anche in tal caso è possibile scrivere un sistema lineare della forma $\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{\beta}(k) = \boldsymbol{\eta}(k)$ dove ad ogni autovalore λ di molteplicità ν sono associate ν righe della matrice dei coefficienti V aventi la seguente espressione

$$
\begin{bmatrix}
1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{\nu-1} & \cdots & \lambda^{n-1} \\
0 & 1 & 2\lambda & \cdots & (\nu-1)\lambda^{\nu-2} & \cdots & (n-1)\lambda^{n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & (\nu-1)! & \cdots & \frac{(n-1)!}{(n-\nu)!}\lambda^{n-\nu}
\end{bmatrix}
$$

Si devono ovviamente modificare anche i corrispondenti elementi del vettore dei modi $\boldsymbol{\eta}(k)$

Nel vettore dei termini noti $\boldsymbol{\eta}(k)$ le ν righe che competono all'autovalore λ possono essere scritte in una di queste forme (del tutto equivalenti):

$$\begin{bmatrix} \lambda^k \\ k\lambda^{k-1} \\ \frac{k!}{(k-2)!}\,\lambda^{k-2} \\ \vdots \\ \frac{k!}{(k-\nu+1)!}\,\lambda^{k-\nu+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^k \\ k\lambda^{k-1} \\ k(k-1)\,\lambda^{k-2} \\ \vdots \\ k(k-1)\cdots(k-\nu+2)\,\lambda^{k-\nu+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(0)}\,\lambda^k \\ k^{(1)}\,\lambda^{k-1} \\ k^{(2)}\,\lambda^{k-2} \\ \vdots \\ k^{(\nu-1)}\,\lambda^{k-\nu+1} \end{bmatrix}$$

dove nell'ultima forma si è usata la funzione **polinomio fattoriale** $k^{(h)}$ definita nel seguito:

$$k^{(0)} = 1 \qquad k^{(1)} = k \qquad k^{(h)} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-h+1), \qquad h = 1,2,\ldots$$

Si noti come il primo elemento λ^k coincida con quello «standard» che inseriremmo in presenza di un autovalore λ con molteplicità unitaria, mentre gli elementi successivi siano ottenuti derivando successivamente rispetto alla variabile λ trattata anche stavolta come se fosse una variabile continua

Esempio Calcolare la matrice di transizione dello stato associata al sistema a tempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Polinomio caratteristico $\quad P(s) = (s-3)^2(s+1)$

La matrice A ha un autovalore doppio $\lambda_1 = 3$ con molteplicità $\nu_1 = 2$ ed un autovalore semplice $\lambda_2 = -1$ con molteplicità $\nu_2 = 1$

Per determinare A^k scriviamo il sistema

$$\begin{aligned} \beta_0(k) + \lambda_1\beta_1(k) + \lambda_1^2\beta_2(k) &= \lambda_1^k \\ \beta_1(k) + 2\lambda_1\beta_2(k) &= k\lambda_1^{k-1} \\ \beta_0(k) + \lambda_2\beta_1(k) + \lambda_2^2\beta_2(k) &= \lambda_2^k \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \beta_0(k) + 3\beta_1(k) + 9\beta_2(k) &= (3)^k \\ \beta_1(k) + 6\beta_2(k) &= k\,(3)^{k-1} \\ \beta_0(k) - \beta_1(k) + \beta_2(k) &= (-1)^k \end{aligned}$$

Da cui si ricava

$$\beta_0(k) = \tfrac{1}{16}\left(7\cdot(3)^k - 12\cdot k\,(3)^{k-1} + 9\cdot(-1)^k\right)$$
$$\beta_1(k) = \tfrac{1}{8}\left(3\cdot(3)^k - 4\cdot k\,(3)^{k-1} - 3\cdot(-1)^k\right)$$
$$\beta_2(k) = \tfrac{1}{16}\left(-(3)^k + 4\cdot k\,(3)^{k-1} + (-1)^k\right).$$

Dunque vale

$$\boldsymbol{A}^k = \beta_0(k)\boldsymbol{I}_3 + \beta_1(k)\boldsymbol{A} + \beta_2(k)\boldsymbol{A}^2$$
$$= \begin{bmatrix} (3)^k & 0 & k\,(3)^{k-1} \\ \tfrac{1}{2}((3)^k - (-1)^k) & (-1)^k & \tfrac{1}{4}((3)^k + 2k\,(3)^{k-1} - (-1)^k) \\ 0 & 0 & k\,(3)^{k-1} \end{bmatrix}$$

Si noti come ogni elemento di A^k è combinazione lineare fra i modi del sistema, che sono 3^k, $k3^k$, e $(-1)^k$ (N.B. $3^{k-1} = \frac{1}{3}3^k$)

Calcolo della matrice di transizione dello stato A^k nel caso in cui ci siano autovalori complessi coniugati

Anche nel caso in cui vi siano autovalori complessi è possibile determinare i coefficienti dello sviluppo di Sylvester come sopra indicato.

Per evitare, tuttavia, di lavorare con numeri complessi conviene modificare la procedura come segue (tratteremo solo il caso di autovalori di molteplicità unitaria per semplicità).

Supponiamo che fra gli n autovalori della matrice A ve ne siano 2 complessi e coniugati λ e $\bar{\lambda}$, di molteplicità unitaria, che in rappresentazione cartesiana e polare assumono la forma:

$$\lambda, \bar{\lambda} = \alpha \pm j\omega = |\lambda| \, e^{\pm j\theta}$$

In tal caso nel sistema di equazioni dovrebbero comparire le due equazioni seguenti

$$
\begin{aligned}
\beta_0(k) + \lambda\beta_1(k) + \lambda^2\beta_2(k) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(k) &= \lambda^k = |\lambda|^k\, e^{+j\theta k} \\
\beta_0(k) + \bar{\lambda}\beta_1(k) + \bar{\lambda}^2\beta_2(k) + \cdots + \bar{\lambda}^{n-1}\beta_{n-1}(k) &= \bar{\lambda}^k = |\lambda|^k\, e^{-j\theta k}
\end{aligned} \tag{E1}
$$

Possiamo tuttavia sostituire queste due equazioni con due equazioni equivalenti in cui non compaiono termini complessi

$$
\begin{aligned}
\beta_0(k) + \mathrm{Re}(\lambda)\beta_1(k) + \mathrm{Re}\left(\lambda^2\right)\beta_2(k) + \cdots + \mathrm{Re}\left(\lambda^{n-1}\right)\beta_{n-1}(k) &= |\lambda|^k \cos(\theta k) \\
\mathrm{Im}(\lambda)\beta_1(k) + \mathrm{Im}\left(\lambda^2\right)\beta_2(k) + \cdots + \mathrm{Im}\left(\lambda^{n-1}\right)\beta_{n-1}(k) &= |\lambda|^k \sin(\theta k)
\end{aligned} \tag{E2}
$$

dove Re( ) e Im() indicano la parte reale e immaginaria di un numero complesso

In particolare dunque vale $\mathrm{Re}(\lambda) = \alpha$ e $\mathrm{Im}(\lambda) = \omega$.

$$\beta_0(k) + \lambda\beta_1(k) + \lambda^2\beta_2(k) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(k) = \lambda^k = |\lambda|^k \, e^{+j\theta k}$$
$$\beta_0(k) + \bar{\lambda}\beta_1(k) + \bar{\lambda}^2\beta_2(k) + \cdots + \bar{\lambda}^{n-1}\beta_{n-1}(k) = \bar{\lambda}^k = |\lambda|^k \, e^{-j\theta k} \qquad \text{(E1)}$$

$$\beta_0(k) + \mathrm{Re}(\lambda)\beta_1(k) + \mathrm{Re}(\lambda^2)\beta_2(k) + \cdots + \mathrm{Re}(\lambda^{n-1})\beta_{n-1}(k) = |\lambda|^k \cos(\theta k)$$
$$\mathrm{Im}(\lambda)\beta_1(k) + \mathrm{Im}(\lambda^2)\beta_2(k) + \cdots + \mathrm{Im}(\lambda^{n-1})\beta_{n-1}(k) = |\lambda|^k \sin(\theta k) \qquad \text{(E2)}$$

La prima delle (E2) si ottiene sommando le due equazioni (E1) e dividendo per 2.
La seconda delle (E2) si ottiene sottraendo la seconda delle equazioni (E1) dalla prima e dividendo per 2j.

Infatti se λ e $\bar{\lambda}$ sono complessi e coniugati, tali saranno anche λ^k e λ^k e dunque .

$$\lambda^k + \lambda^k = 2\mathrm{Re}(\lambda^k) \text{ e } \lambda^k - (\lambda)^k = 2j\mathrm{Im}(\lambda^k)$$

La presenza dei termini in coseno e seno al secondo membro deriva invece dalle formule di Eulero

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Esempio Calcolare la matrice di transizione dello stato associata al sistema a tempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico $P(s) = s^2 - 2s + 2$

autovalori complessi e coniugati $\lambda, \bar{\lambda} = 1 \pm j = \sqrt{2}\, e^{\pm \pi/4}$

Per determinare A^k scriviamo il sistema

$$\begin{aligned} \beta_0(k) + \mathrm{Re}(\lambda)\beta_1(k) &= |\lambda|^k \cos(\theta k) \\ \mathrm{Im}(\lambda)\beta_1(k) &= |\lambda|^k \cos(\theta k) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \beta_0(k) + \beta_1(k) = (\sqrt{2})^k \cos(\pi k/4) \\ \beta_1(k) = (\sqrt{2})^k \sin(\pi k/4) \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\beta_0(k) = (\sqrt{2})^k \cos(\pi k/4) - (\sqrt{2})^k \sin(\pi k/4)$$
$$\beta_1(k) = (\sqrt{2})^k \sin(\pi k/4).$$

Dunque vale

$$\boldsymbol{A}^k = \beta_0(k)\boldsymbol{I}_2 + \beta_1(k)\boldsymbol{A} = (\sqrt{2})^k \begin{bmatrix} \cos(\pi k/4) & \sin(\pi k/4) \\ -\sin(\pi k/4) & \cos(\pi k/4) \end{bmatrix}$$

Si noti come ogni elemento di A^k è combinazione lineare fra i modi del sistema, che sono $\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right)$ e $\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)$

Modi associati ad un modello in forma variabili di stato

Dato un sistema a tempo discreto descritto dalla rappresentazione in variabili di stato ad ogni autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ di molteplicità ν della matrice di stato A si associano ν funzioni del tempo dette **modi a tempo discreto**. In particolare:

- *ad un autovalore reale $\lambda \neq 0$ di molteplicità ν si associano ν modi:*

$$\lambda^k, \qquad k\lambda^k, \qquad \dots \qquad k^{\nu-1}\lambda^k;$$

- *ad un autovalore $\lambda = 0$ di molteplicità ν si associano ν modi:*

$$\delta(k), \qquad \delta(k-1), \qquad \dots \qquad \delta(k-\nu+1)$$

- *ad una coppia di autovalori complessi e coniugati $\lambda, \bar{\lambda} = |\lambda|\, e^{\pm j\theta}$ di molteplicità ν si associano 2ν modi:*

$$|\lambda|^k \cos(\theta k), \quad |\lambda|^k \sin(\theta k), \qquad k|\lambda|^k \cos(\theta k), \quad k|\lambda|^k \sin(\theta k),$$
$$\dots, \qquad k^{\nu-1}|\lambda|^k \cos(\theta k), \quad k^{\nu-1}|\lambda|^k \sin(\theta k).$$

Ogni elemento della matrice di transizione dello stato A^k è combinazione lineare di tali modi.

Si noti che i modi si determinano in maniera perfettamente equivalente a quanto gia visto per le equazioni alle differenze, con l'unica differenza che mentre nel caso di una equazione alle differenze si consideravano le radici del polinomio caratteristico per un modello in variabili di stato si considerano gli autovalori della matrice A.

Per quanto riguarda i modi associati all'autovalore nullo si tenga presente, nel valutare la corrispondenza con le formule ricavate a suo tempo per le equazioni alle differenze, che i modelli in variabili di stato sono dei modelli «in avanti» ed il parametro k_0 vale pertanto $-n$