Controllo digitale

Discretizzazione e controllo digitale di sistemi con ritardo

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Sistemi con ritardo

Nei sistemi dinamici a tempo continuo, la presenza di ritardi finiti nel modello matematico del processo è fonte di gravi complicazioni in sede di analisi e progetto del controllore.

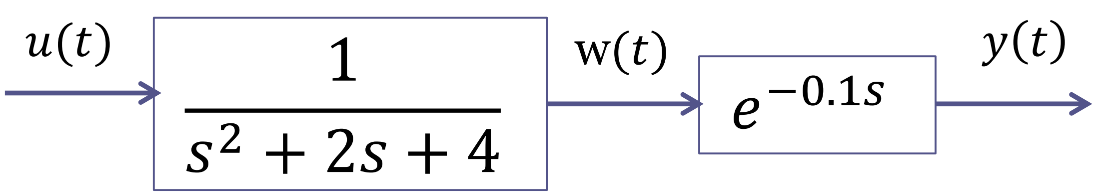
Si consideri ad esempio un processo governato dal modello matematico

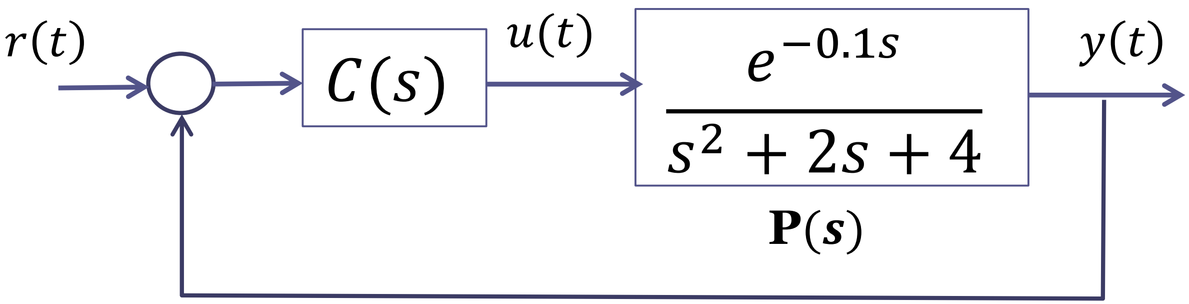
$$\ddot{w}(t) + 2\dot{w}(t) + 4w(t) = u(t)$$

$$y(t) = z(t - 0.1)$$

in cui l'ultima relazione potrebbe rappresentare il fatto che la misura $y(t)$ del segnale $\mathrm{w}(t)$ è affetta da un ritardo di un decimo di secondo (ciò potrebbe essere dovuto, a titolo di esempio, ad una rete di comunicazione digitale che introduce una latenza nella trasmissione del segnale misurato verso i dispositivi di controllo).

A tale processo possiamo associare la seguente rappresentazione in termini di funzioni di trasferimento





Il progetto e l'analisi di un sistema di controllo in cui sono presenti sottosistemi affetti da ritardo è molto complicato in quanto le funzioni di trasferimento in gioco (e quindi anche il polinomio caratteristico) diventano funzioni trascendenti, e non più algebriche, della variabile s

Utilizzando un regolatore proporzionale $C(s) = k = 1$ si ottiene, per la FdT a ciclo chiuso

$$W_r^y(s) = \frac{e^{-0.1s}}{s^2 + 2s + 4 + e^{-0.1s}}$$

Il sistema è stabile a ciclo chiuso ?

Quali sono i modi ?

Lavorare a tempo discreto consente, come vedremo a breve, di attenuare in maniera significativa tali problemi.

Il requisito essenziale per poter sfruttare appieno i vantaggi della analisi a tempo discreto è che si scelga il periodo di campionamento come un sottomultiplo intero del ritardo.

Scegliamo ad esempio, con riferimento al processo $\mathrm{P}(s) = \frac{e^{-0.1s}}{s^2+2s+4}$ introdotto nell'esempio, il periodo di campionamento $T_c = 0.05s$, cioè la meta del valore di ritardo

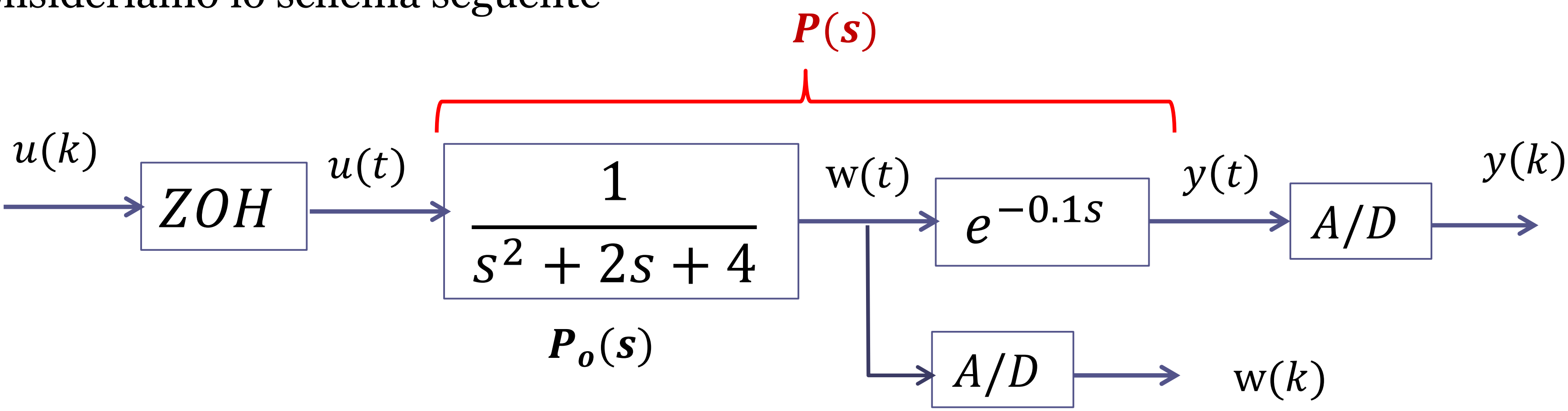
$$\mathrm{P(s)} = \frac{e^{-0.1s}}{s^2 + 2s + 4} = P_o(s)e^{-\delta s}$$

$$P_o(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 4}$$ parte razionale della FdT del processo

$\delta = 0.1$ Valore del ritardo

$$T_c = \frac{\delta}{2} = 0.05s$$

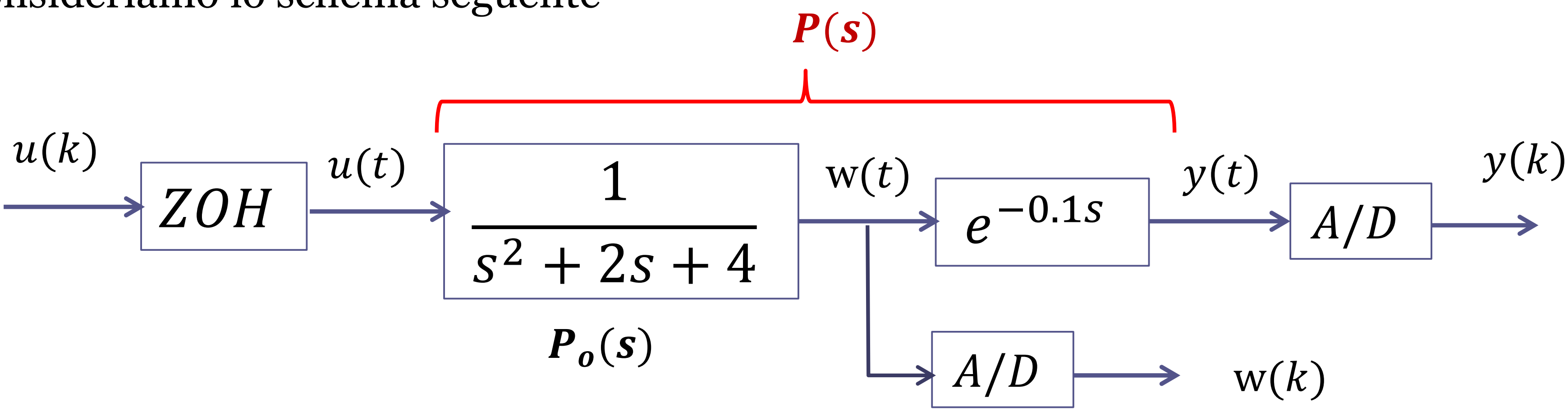
Consideriamo lo schema seguente



Se ipotizziamo di applicare in ingresso al processo un segnale $u(t)$ costante a tratti, prodotto da un ricostruttore ZOH che lavora con periodo di campionamento pari a $T_c = \frac{\delta}{2} = 0.05s$ si determina facilmente la FdT a tempo discreto fra $u(k)$ ed $w(k)$

$$P_0\,(z) = \frac{W(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z}\mathrm{Z}\left\{\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P_0(\mathrm{s})}{s}\right)\right]_{t=kT_c}\right\} = \frac{0.001208(z+0.9672)}{z^2-1.895z+0.9048}$$

Consideriamo lo schema seguente



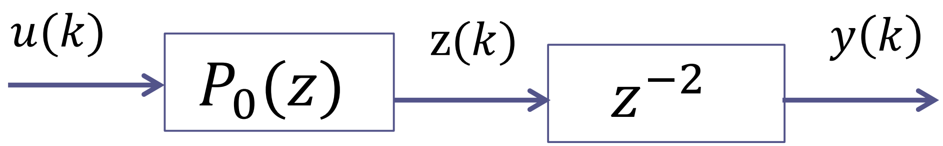
La FdT $e^{-0.1s}$ modella un ritardo puro di $\delta = 0.1\ s$, pari a due periodi di campionamento.

$y(t) = w(t - 2T_c)$ ⇨ $\boldsymbol{y(k) = w(k-2)}$

Ciò implica, sulla base delle proprietà della trasformata Z, che la funzione di trasferimento fra $w(k)$ e $y(k)$ sarà pari a

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = z^{-2}$$

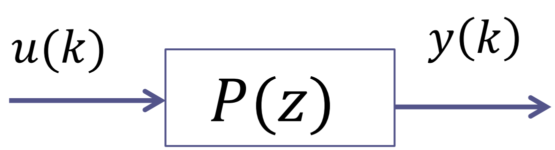
Si può pertanto costruire il seguente schema equivalente



in cui la FdT $P_0\,(z)$ fra $u(k)$ e $z(k)$ la abbiamo valutata nella slide precedente attraverso la «solita» espressione

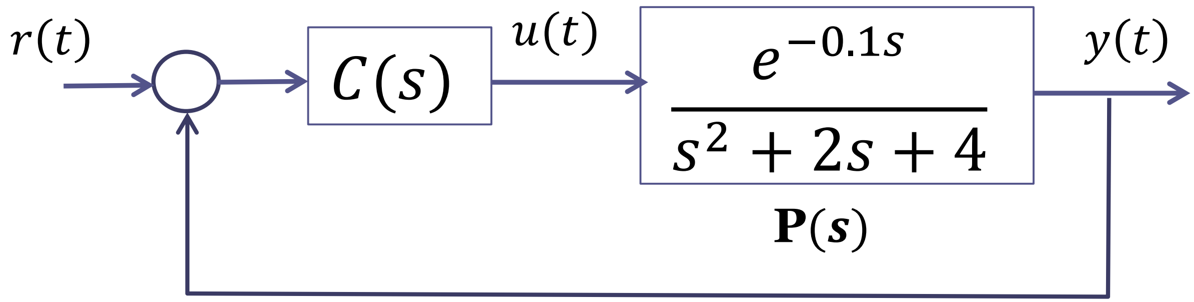
$$P_0\,(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\ \frac{P_0(s)}{s}\ \right)\right]_{t=kT_c}\right\} = \frac{0.001208(z+0.9672)}{z^2-1.895z+0.9048}$$

Componendo in serie fra loro $P_0(z)$ e z^{-2} si ottiene la FdT complessiva fra $u(k)$ ed $y(k)$

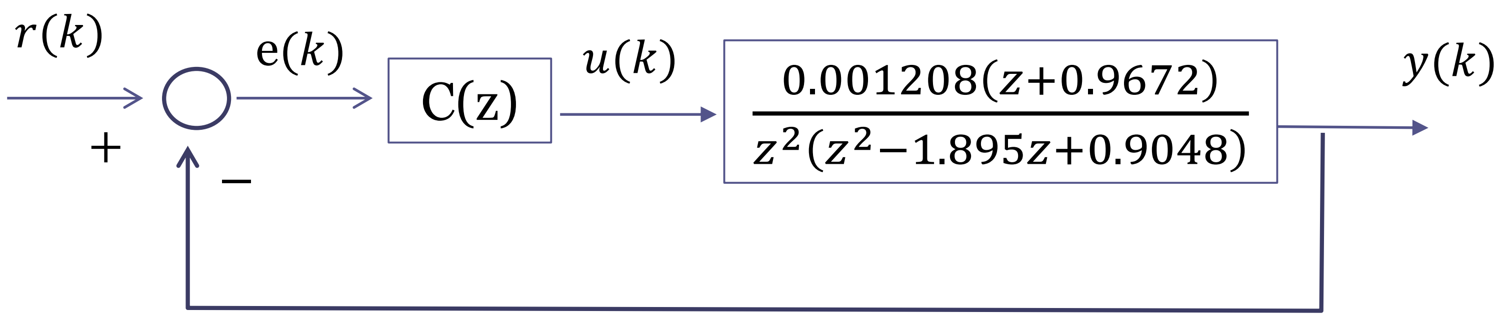


$$P(z) = P_0\,(z)\ z^{-2} = \frac{0.001208(z+0.9672)}{z^2(z^2-1.895z+0.9048)}$$

La stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo

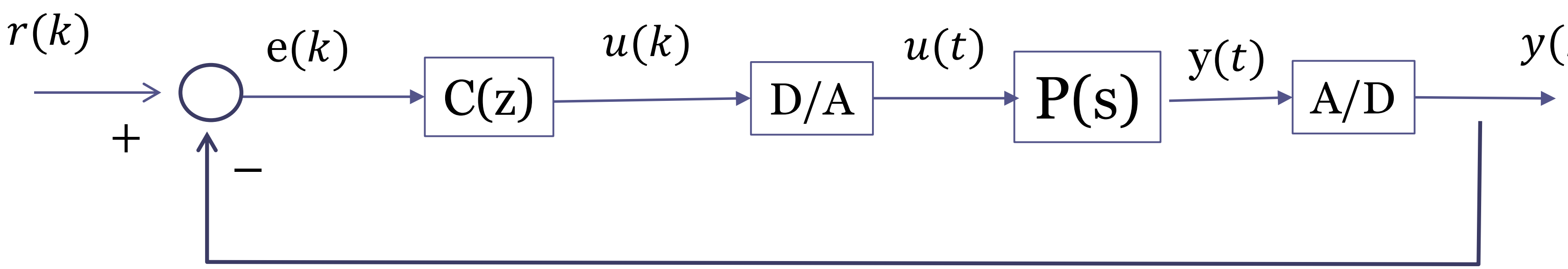


è pertanto analizzabile ricorrendo alla sua versione discretizzata



che risulta essere descritto da FdT razionali ed è tale pertanto che l'analisi di stabilità a ciclo chiuso, o il progetto del regolatore, non presentano alcuna difficoltà

Presentiamo il tutto in termini più generali. Consideriamo il seguente sistema di controllo



in cui P(s) assume la forma $\mathrm{P}(s) = P_o(s)e^{-\delta s}$.

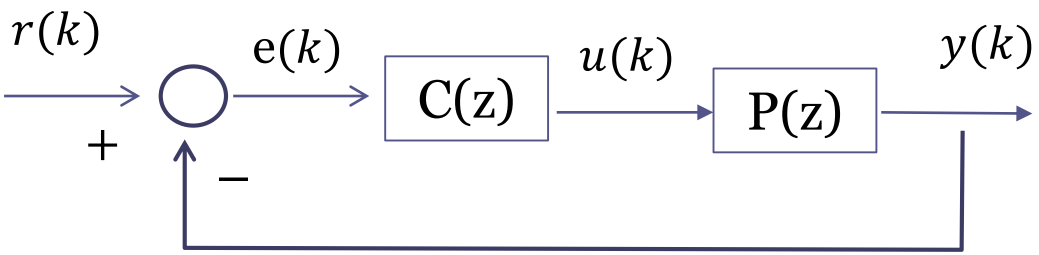
Se si sceglie il periodo di campionamento T_c come un sottomultiplo intero del ritardo δ

$$T_c = \frac{\delta}{m} \qquad m = 1,2,3, \dots .$$

si puo definire una FdT a tempo discreto fra $u(k)$ ed $y(k)$ avente forma completamente algebrica:

$$P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^m}\frac{z-1}{z}\mathrm{Z}\left\{\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P_0(\mathrm{s})}{s}\right)\right]_{t=kT_c}\right\}$$

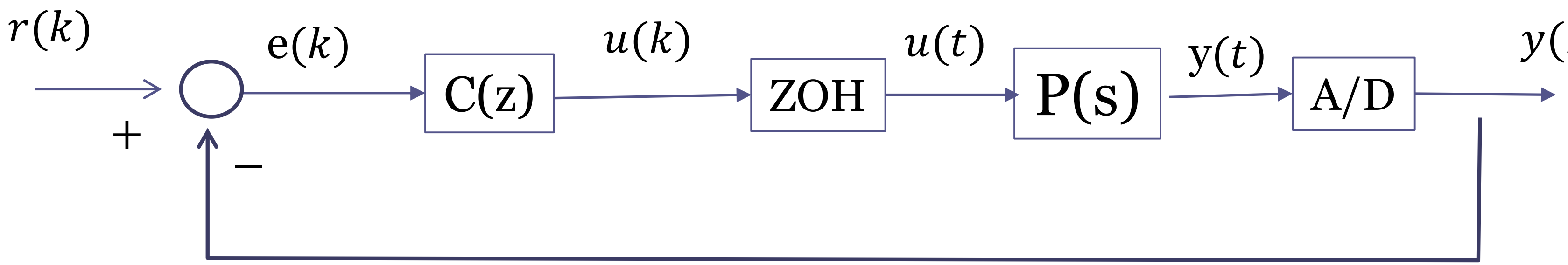
Il comportamento dell'uscita y(t) del processo a tempo continuo, valutata negli istanti di campionamento, può essere quindi descritto dal seguente schema equivalente



$$P(z) = \frac{1}{z^m}\frac{z-1}{z}\mathrm{Z}\left\{\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P_0(s)}{s}\right)\right]_{t=kT_c}\right\}$$

Ciò rende possibile analizzare con strumenti «standard» le proprietà di stabilità a ciclo chiuso, e procedere al progetto del controllore C(z) secondo i metodi visti nel corso.

Esempio. Si consideri il sistema di controllo



in cui il processo ha FdT $\mathrm{P(s)} = \dfrac{e^{-0.2s}}{s(s+2)}$

Ipotizzando di impiegare un controllore C(z)=k ad azione proporzionale, analizzare la stabilita a ciclo chiuso del sistema di controllo al variare del guadagno del regolatore

$$\mathrm{P(s)} = \frac{e^{-0.2s}}{s(s+2)} = P_o(s)e^{-\delta s}$$

$$P_o(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$ parte razionale della FdT del processo

$$\delta = 0.2$$ Valore del ritardo

Scegliamo $T_c = \dfrac{\delta}{m}$ $\quad m = 2 \quad$ $T_c = 0.1s$

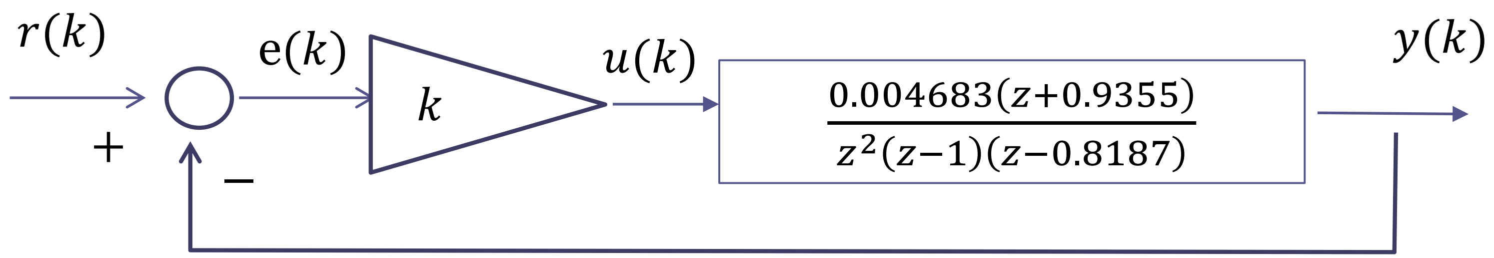
```
P0=tf(1,[1 2 0]);
P0z=c2d(P0,0.1)
[numP0z denP0z]=tfdata(P0z,'v');
zeri=roots(numP0z)
poli=roots(denP0z)
```

```
P0z =

  0.004683 z + 0.004381
  ----------------------
  z^2 - 1.819 z + 0.8187

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.


zeri =

  -0.9355


poli =

    1.0000
    0.8187
```

$$P_0\,(z) = \frac{0.004683(z+0.9355)}{(z-1)(z-0.8187)}$$

$$P(z) = z^{-2}\,P_0\,(z) = \frac{0.004683(z+0.9355)}{z^2(z-1)(z-0.8187)}$$

Sistema equivalente a ciclo chiuso



Mediante il Criterio di Jury, si può determinare l'intervallo ammissibile di valori del guadagno k tale da rendere Jury-stabile il polinomio caratteristico

$$P_{car}(z) = z^2(z-1)(z-0.8187) + \mathrm{k} \cdot 0.004683(z+0.9355)$$

Soluzione: $0 \leq \mathrm{k} \leq 8.67$