Controllo digitale

Forme canoniche dei modelli in variabili di stato. Assegnamento poli e controllabilità.

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Esistono delle particolari forme dei modelli in variabili di stato, che vengono dette **forme canoniche**, in corrispondenza delle quali le matrici del modello hanno delle particolari, e ben definite, strutture.

Ne presenteremo due: la forma canonica controllabile e la forma canonica osservabile.

Come vedremo, tali forme canoniche consentono l'immediata determinazione del polinomio caratteristico della matrice A e della funzione di trasferimento associata.

Qual è l'utilità di tali forme di rappresentazione ?

L'utilità di tali forme di rappresentazione si rivela nell'ambito di due importanti problemi, il primo dei quali, denominato «assegnamento poli» è di fondamentale importanza nel controllo in retroazione dello stato (state-feedback) dei sistemi a tempo discreto. Il secondo problema si riferisce alla realizzazione di un «osservatore di stato», un algoritmo che consente di ricostruire l'evoluzione temporale delle variabili di stato di un sistema dinamico sulla base della misura della sola variabile di uscita.

Sviluppiamo la trattazione con riferimento, per semplicità, a modelli SISO

Forma canonica (o «compagna») controllabile

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bu(k)$$

$$\mathrm{y}(k) = Cx(k)$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = [b_{n-1} \quad b_{n-2} \qquad \ldots \quad b_1 \quad b_0]$$

La forma canonica controllabile prevede particolari strutture per le matrici A e B

Rappresentazione alternativa della matrice A

$$A = \left[\begin{array}{c:ccccc} 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & I_{n-1} & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \hdashline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{array}\right]$$

I_{n-1} = matrice identità di dimensione $n-1$

Per una matrice quadrata avente tale struttura, la determinazione del polinomio caratteristico associato è immediata

$$P_{car}(A) = det(zI - A) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$$

Più in generale, per un modello in variabili di stato in forma compagna controllabile risulta immediata anche la determinazione della funzione di trasferimento associata

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1\, z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0}$$

Forma canonica (o «compagna») osservabile

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bu(k)$$

$$\mathrm{y}(k) = Cx(k)$$

La forma canonica osservabile prevede particolari strutture per le matrici A e C.

$$A = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \hline & & & & & & -a_1 \\ & & & & & & -a_2 \\ & & & I_{n-1} & & & \vdots \\ & & & & & & -a_{n-2} \\ & & & & & & -a_{n-1} \end{array}\right]$$

$$C = [0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1]$$

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

La matrice B ha invece struttura arbitraria

Il polinomio caratteristico della matrice A, e la funzione di trasferimento, hanno la stessa espressione riportata per il modello in forma compagna controllabile.

ASSEGNAMENTO POLI

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

L'assegnamento poli consiste nella applicazione, in ingresso al processo, di una legge di controllo in retroazione sullo stato nella forma seguente:

$$u(k) = -K\,x(k) + r(k) \qquad K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

$r(k)$ è una «nuova» sequenza di ingresso

Approfondiamo, come detto, la trattazione riferendoci a sistemi SISO, tali cioè che sia l'ingresso che l'uscita sono variabili scalari. K è pertanto un vettore riga, e la legge di controllo viene riscritta in forma estesa come segue

$$u(k) = -k_1\,x_1(k) - k_2\,x_2(k) - \cdots - k_n\,x_n(k) + r(k)$$

Si noti come l'applicazione di tale legge di controllo prevede che siano accessibili per misura tutte le variabili di stato del sistema dinamico, e non solo la variabile di uscita come nella architettura «tradizionale» (output-feedback) che abbiamo trattato finora

Sostituendo nelle equazioni del sistema l'espressione della legge di controllo si ottiene

$$x(k+1) = [A - BK]\,x(k) + Br(k)$$

$$\mathrm{y}(k) = Cx(k)$$

Il modello di partenza viene pertanto trasformato in un modello differente, che ne descrive il comportamento a ciclo chiuso.

Il modello a ciclo chiuso ha matrice di stato $[A - BK]$ differente da quella del sistema di partenza, ed un nuovo ingresso $r(k)$

Il problema dell'assegnamento poli consiste nel determinare il vettore K (vettore di retroazione dello stato) in modo che gli autovalori della matrice $[A - BK]$ siano posizionati arbitrariamente nel piano.

Ci chiediamo, preliminarmente, quando ciò sia possibile, cioè sotto quali condizioni sulle matrici A e B sia possibile determinare un vettore K tale che gli autovalori della matrice $A - BK$ siano posizionabili a piacere.

Teorema

Gli autovalori della matrice $[A - BK]$ possono essere assegnati arbitrariamente mediante una opportuna scelta della matrice K se e solo se la «matrice di controllabilità»

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots A^{n-1}B]$$

ha rango pieno.

Teorema

In un modello in variabili di stato espresso in forma compagna controllabile, la matrice di controllabilità

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots A^{n-1}B]$$

ha rango pieno.

Esempio Si consideri il modello in variabili di stato

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bu(k) \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una legge di controllo in retroazione sullo stato che assegni i poli del sistema a ciclo chiuso $p_{1,2}^{des} = 0.5 \pm j0.5$

Grazie al fatto che il modello è espresso in forma canonica controllabile, il polinomio caratteristico della matrice A è derivabile senza alcun conto

$$P_{car}(A) = z^2 + z + 0.16 \qquad a_0 = 0.16 \qquad a_1 = 1$$

I poli del sistema a ciclo aperto sono pertanto $p_1 = 0.2, p_2 = 0.8$

Il modello è in forma canonica controllabile, quindi il problema è certamente risolubile.

$$M_c = [B \quad AB] \qquad AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det(M_c) = -1 \qquad rank(M_c) = 2$$

Legge di controllo

$$u(k) = -K\,x(k) + r(k) = -k_1\,x_1(k) - k_2\,x_2(k) + r(k) \qquad K = [k_1 \quad k_2]$$

Dinamica a ciclo chiuso

$$x(k+1) = [A - BK]\,x(k) + Br(k) \qquad BK = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix} x(k) + Br(k)$$

Grazie alla particolare forma della matrice B, abbiamo ottenuto un sistema a ciclo chiuso anch’esso espresso in forma compagna controllabile, il cui polinomio caratteristico è:

$$P_{car}(A - BK) = z^2 + (1 + k_2)z + 0.16 + k_1$$

L’individuazione dei guadagni k_1 e k_2 che assegnano alle radici del polinomio $P_{car}(A - BK)$ i valori desiderati di $0.5 \pm j0.5$ è pertanto immediata

E' sufficiente individuare quello che risulta essere il «polinomio caratteristico desiderato», cioè il polinomio le cui radici coincidono con gli autovalori desiderati

$$P_{car}^{des} = (z - 0.5 + j0.5)(z - 0.5 + j0.5) = z^2 - z + 0.5$$

e scegliere di conseguenza i guadagni k_1 e k_2 in modo che si abbia

$$P_{car}(A - BK) = P_{car}^{des}$$

$$\Downarrow$$

$$z^2 + (1 + k_2)z + 0.16 + k_1 = z^2 - z + 0.5$$

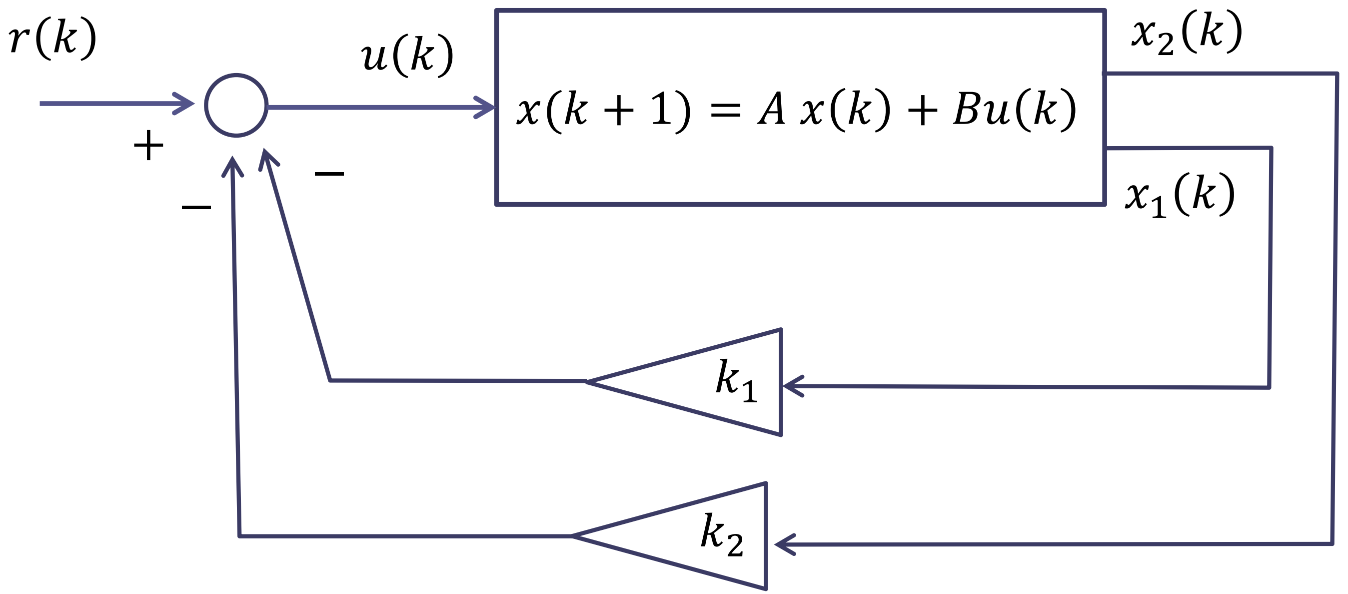
$$\Downarrow$$

Imponiamo che i coefficienti dei due polinomi a sinistra e destra dell'uguale siano coincidenti

$$(1 + k_2) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad k_2 = -2$$

$$0.16 + k_1 = 0.5 \qquad \qquad k_1 = 0.34$$

Architettura di controllo risultante (controllo in «state-feedback»)



Devono essere accessibili per misura tutte le variabili di stato del sistema

Come procedere se il sistema non è descritto in forma compagna controllabile ?

Esempio Si consideri un servomotore in corrente continua

$$J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) = K_1 i(t)$$

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t) - K_2\dot{\theta}(t)$$

$\theta(t)$ $\dot{\theta}(t)$ Posizione e velocita angolare

$i(t)$ Corrente circolante

$v(t)$ Tensione applicata

J, B, K_1, K_2, L, R Parametri elettromeccanici

Determinare una legge di controllo digitale in retroazione sullo stato che assegni i poli del sistema discretizzato a ciclo chiuso $p^{des} = [0.45\,, 0.5\,, 0.55]$

Vettore di stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

Modello in variabili di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{K_1}{J} \\ 0 & -\frac{K_2}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Parametri elettromeccanici

$J = 0.01\ kg\ m^2$ $\quad R = 3\ \Omega$ $\quad K_1 = 0.02\ N\ m\ /A$

$B = 0.01\ N\ m\ s/rad$ $\quad L = 10\ mH$ $\quad K_2 = 0.02\ V\ s\ /rad$

Il modello in variabili di stato viene particolarizzato come segue

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t)$$

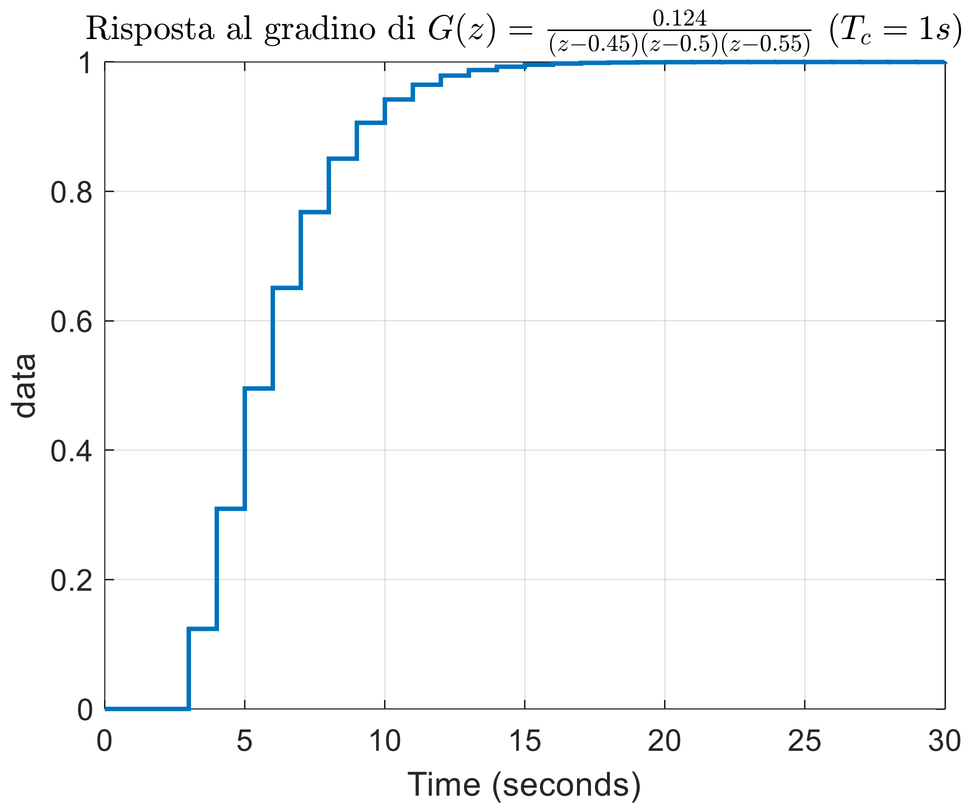
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -300 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A sono collocati in:

```
AutovaloriA =

         0
   -1.0134
 -299.9866
```

Scegliamo il periodo di campionamento inferiore ad un decimo del tempo di assestamento al 5% del sistema a tempo discreto avente i poli desiderati



Il tempo di assestamento al 5% contiene 11 campioni. Potremmo quindi anche scegliere $T_c = 1s$. Scegliamo un valore sufficientemente inferiore alla soglia

$$T_c = 0.1s$$

Calcoliamo il modello in variabili di stato a tempo discreto sulla base dei parametri elettromeccanici del particolare motore in esame e del periodo di campionamento scelto

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \qquad A_d = e^{AT_c} \qquad B_d = \int_0^{T_c} e^{A\tau}\, d\tau\, B$$

```
J=1e-2; B=1e-2;
R=3; L=1e-2;
K1=0.02; K2=0.02;

A=[0 1 0;0 -B/J K1/J; 0 -K2/L -R/L]
B=[0;0;1/L];
C=eye(3);
D=zeros(3,1);

Tc=0.1;
P=ss(A,B,C,D);
Pd=c2d(P,Tc,'zoh');
[Ad,Bd,Cd,Dd]=ssdata(Pd);
Ad
Bd
AutovaloriAd=eig(Ad)
```

```
Ad =

    1.0000    0.0951    0.0006
         0    0.9037    0.0060
         0   -0.0060   -0.0000


Bd =

    0.0030
    0.0614
    0.3329


AutovaloriAd =

    1.0000
    0.9036
    0.0000
```

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d v(k) \qquad A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0.0951 & 0.006 \\ 0 & 0.9037 & 0.006 \\ 0 & -0.006 & -0.00004 \end{bmatrix} \qquad B_d = \begin{bmatrix} 0.003 \\ 0.0613 \\ 0.3329 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(kT_c) \\ \dot{\theta}(kT_c) \\ i(kT_c) \end{bmatrix}$$

Il vettore di stato contiene nell'ordine i valori campionati della posizione angolare, della velocita angolare, e della corrente

$v(k)$

Il vettore di ingresso contiene il valore di tensione costante $v(k)$ applicata fra gli istanti kT_c e $(k+1)T_c$

Verifichiamo se il problema è risolubile attraverso la valutazione del rango della matrice di controllabilità

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B]$$

Matrice di controllabilità

```
Mc=[Bd Ad*Bd Ad^2*Bd]
Mc=ctrb(Ad,Bd) % istruzione Matlab alternativa
rankMc=rank(Mc)
detMc=det(Mc)
condMc=cond(Mc)
```

La matrice Mc ha rango pieno. Il problema dell'assegnamento poli è pertanto risolubile.

```
Mc =

    0.0030    0.0091    0.0145
    0.0614    0.0575    0.0519
    0.3329   -0.0004   -0.0003


rankMc =

     3


detMc =

  -1.2150e-04


condMc =

   73.6755
```

Ciò garantisce che con una legge di controllo in retroazione sullo stato:

$$\mathrm{v}(k) = -Kx(k) + r(k) = -k_1x_1(k) - k_2x_2(k) - k_3x_3(k) + r(k)$$

gli autovalori della matrice $A_d - B_dK$ possono essere posizionati arbitrariamente nel piano, previa una opportuna scelta dei tre guadagni k_1, k_2 e k_3

$$B_dK = \begin{bmatrix} 0.003 \\ 0.0613 \\ 0.3329 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = \begin{bmatrix} 0.003k_1 & 0.003k_2 & 0.003k_3 \\ 0.0613k_1 & 0.0613k_2 & 0.0613k_3 \\ 0.3329k_1 & 0.3329k_2 & 0.3329k_3 \end{bmatrix}$$

$$A_d - B_dK = \begin{bmatrix} 1 & 0.0951 & 0.006 \\ 0 & 0.9037 & 0.006 \\ 0 & -0.006 & -0.00004 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.003k_1 & 0.003k_2 & 0.003k_3 \\ 0.0613k_1 & 0.0613k_2 & 0.0613k_3 \\ 0.3329k_1 & 0.3329k_2 & 0.3329k_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 0.003k_1 & 0.0951 - 0.003k_2 & 0.006 - 0.003k_3 \\ -0.0613k_1 & 0.9037 - 0.0613k_2 & 0.006 - 0.0613k_3 \\ -0.3329k_1 & -0.006 - 0.3329k_2 & -0.00004 - 0.3329k_3 \end{bmatrix}$$

Dovremmo, come nell'esempio precedentemente svolto, calcolare il polinomio caratteristico della matrice $A_d - B_d K$ e successivamente imporre che coincida con il polinomio caratteristico desiderato le cui radici sono $p^{des} = [0.45\,, 0.5\,, 0.55]$

Nell'esempio precedentemente svolto, però, il modello era in forma compagna controllabile, e quindi la determinazione del polinomio caratteristico della matrice $A - BK$ risultò immediata.

Completiamo l'esempio utilizzando la funzione Matlab `place` per mezzo della quale è possibile determinare automaticamente il vettore K dei guadagni della legge di controllo in retroazione sullo stato, ed affronteremo successivamente il problema di semplificare e rendere sistematica la risoluzione del problema dell'assegnamento poli per modelli in variabili di stato espressi in forma qualunque.

```
pdes=[0.45 0.5 0.55];
K = place(Ad,Bd,pdes)
eig_ciclochiuso=eig(Ad-Bd*K)
```

```
K =

   19.5181    7.5709   -0.3606


eig_ciclochiuso =

    0.5500
    0.5000
    0.4500
```

La funzione `place` ci ha restituito come soluzione il vettore

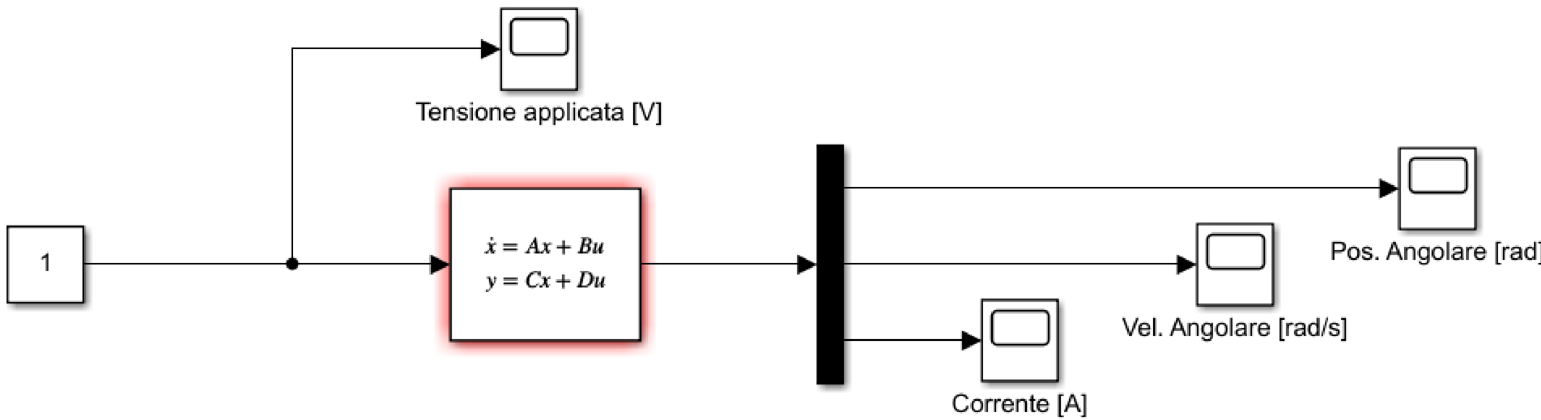
$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [19.51 \quad 7.57 \quad -0.36]$$

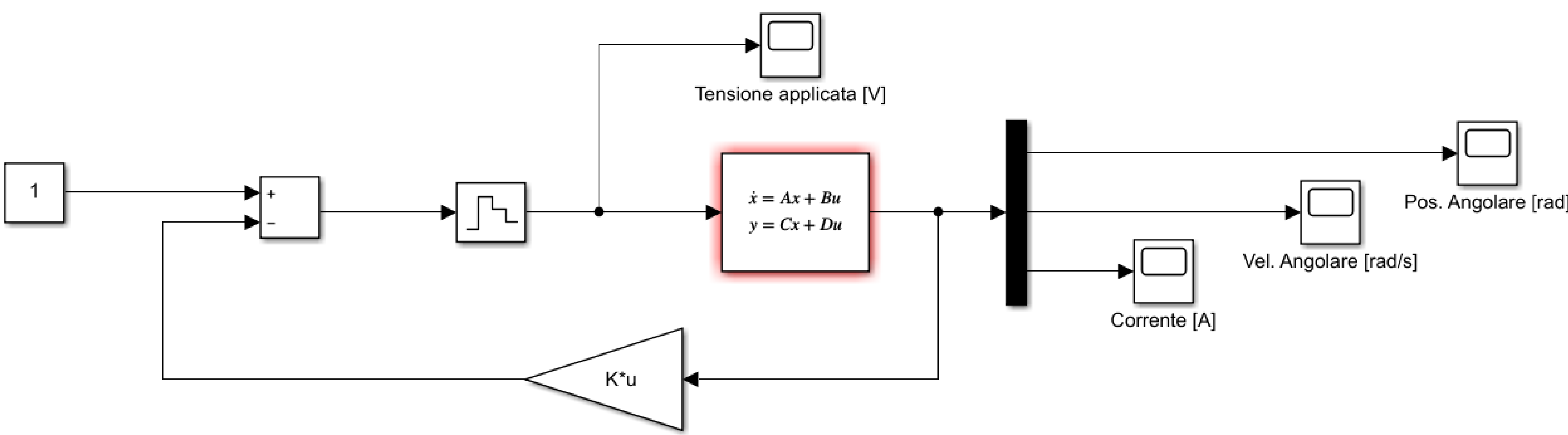
Dobbiamo quindi applicare la legge di controllo

$$v(k) = -Kx(k) + r(k) = -19.51x_1(k) - 7.57x_2(k) + 0.36x_3(k) + r(k)$$

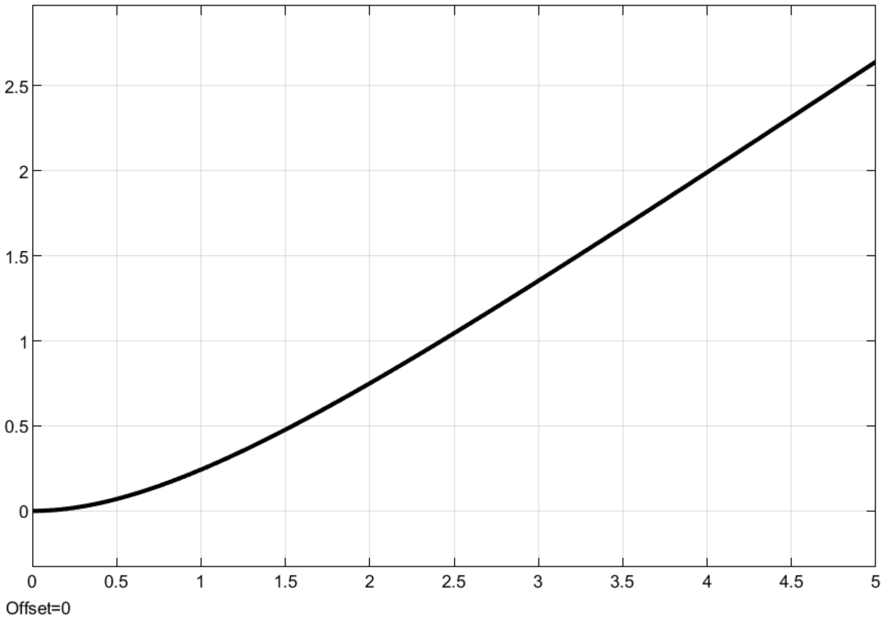
$$= -19.51\theta(kT_c) - 7.57\dot{\theta}(kT_c) + 0.36i(kT_c) + r(k)$$

Verifichiamo con Simulink le prestazioni del sistema con e senza la retroazione sullo stato. Focalizziamo l'analisi sulla posizione angolare dell'albero del motore

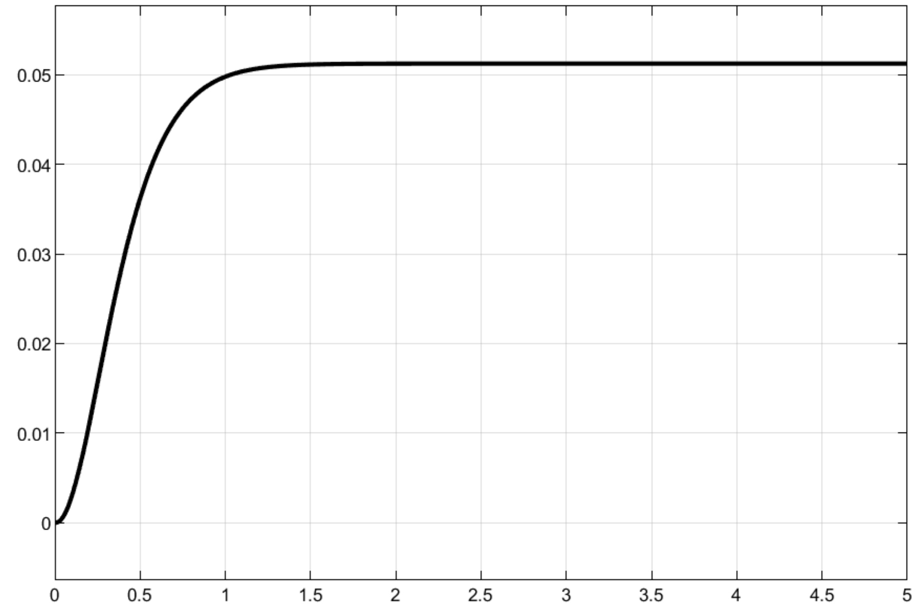




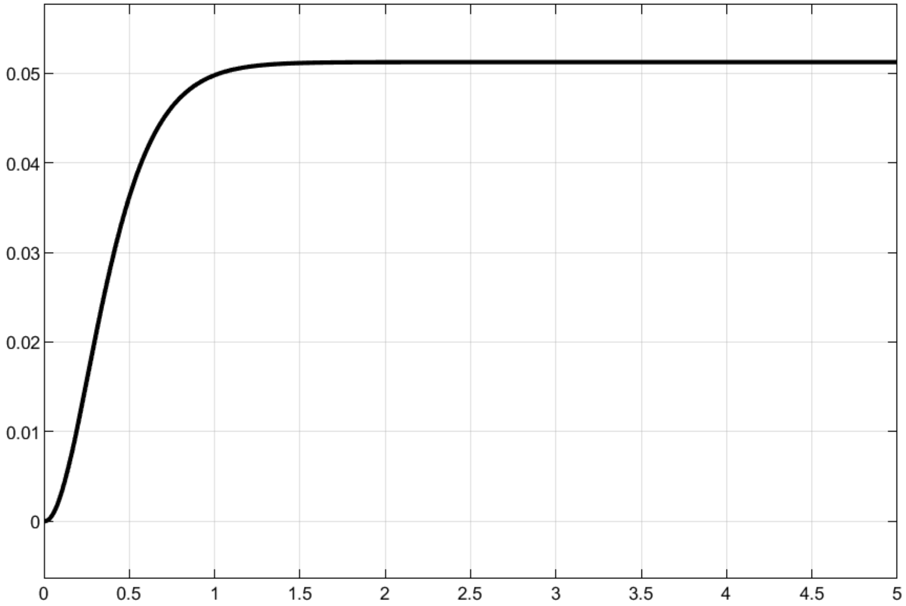
$\theta(t)$ a ciclo aperto



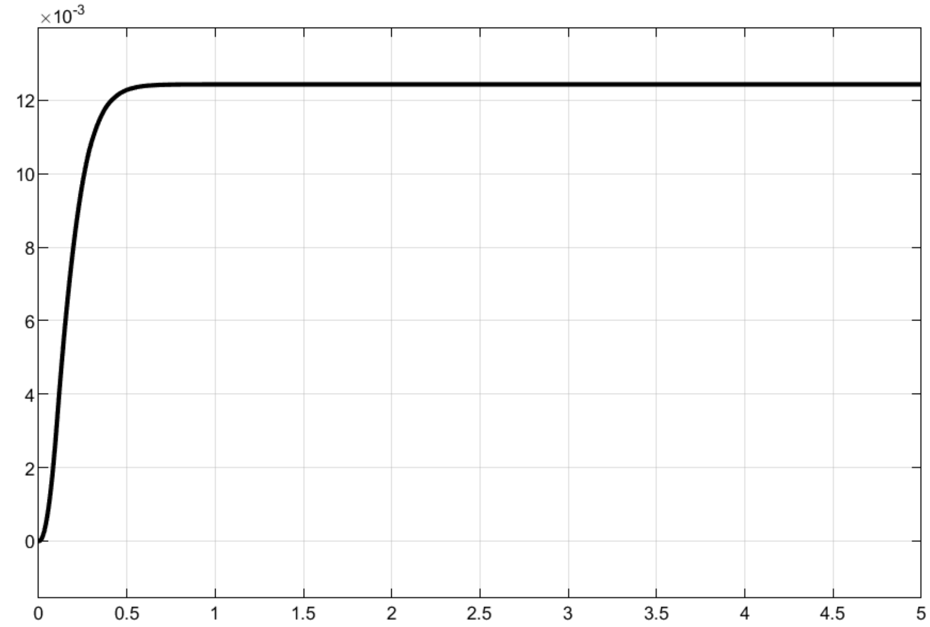
$\theta(t)$ con retroazione sullo stato



$\theta(t)$ con retroazione sullo stato e $p^{des} = [0.45\,,0.5\,,0.55]$



$\theta(t)$ con retroazione sullo stato e $p^{des} = [0.15\,,0.2\,,0.25]$



Come possiamo fare in modo che la posizione di regime coincida con un valore scelto arbitrariamente ?

La risoluzione del problema non è completamente soddisfacente a causa delle difficolta di calcolo che emergono nel momento in cui si deve determinare il polinomio caratteristico della matrice $A_d - B_d K$ in funzione dei guadagni k_1 , k_2 e k_3 per imporre successivamente che coincida con il polinomio caratteristico desiderato.

Possiamo determinare una strada alternativa, più semplice e sistematica, che sfrutta il concetto di trasformazioni di similitudine di modelli in variabili di stato.

In breve, impareremo a «trasformare» il modello di partenza in una forma equivalente in termini di legami ingresso-uscita (cioè tale da rappresentare il medesimo sistema fisico) ma rappresentato in forma compagna controllabile.

Progetteremo la legge di controllo con riferimento a tale modello «trasformato» ed in ultimo applicheremo la trasformazione inversa per «ritornare» nel modello originario e rendere quindi disponibile la legge di controllo in funzione delle variabili di stato del modello originario, che sarà quella che dovremo concretamente applicare in ingresso al sistema

Descriviamo l'approccio in termini generali, ed applichiamolo quindi all'esempio del motore in corrente continua.

Trasformazioni di similitudine di modelli in variabili di stato

La rappresentazione di un sistema fisico per mezzo di un modello in variabili di stato **non è unica**.

Se difatti si considera, a partire da un generico modello in VdS avente come vettore di stato $x(k)$:

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bu(k)$$

$$\mathrm{y}(k) = Cx(k)$$

un diverso vettore di stato $z(k)$, che sia legato al vettore $x(k)$ da una trasformazione invertibile

$$x(k) = Tz(k) \qquad z(k) = T^{-1}x(k)$$

T : matrice quadrata non singolare di ordine n

si ricava, con riferimento al vettore $z(k)$, un modello in variabili di stato che descrive il medesimo processo fisico di partenza attraverso variabili di stato differenti. Tale modello ha quindi gli stessi modi e conduce alla medesima funzione di trasferimento fra ingresso e uscita, ma avendo cura di scegliere T in maniera opportuna può assumere forme particolarmente convenienti, come ad esempio la forma compagna controllabile (o osservabile).

Ricaviamo il modello in variabili di stato associato al vettore di stato $z(k)$

$$z(k+1) = T^{-1}x(k+1) = T^{-1}(A\,x(k) + Bu(k))$$

$$= T^{-1}A\,x(k) + T^{-1}Bu(k)$$

$$= T^{-1}A\,Tz(k) + T^{-1}Bu(k)$$

$$\mathrm{y}(k) = Cx(k) = CTz(k)$$

Modello in variabili di stato trasformato

$$z(k+1) = \bar{A}\,z(k) + \bar{B}u(k) \qquad \bar{A} = T^{-1}A\,T \qquad \bar{B} = T^{-1}\mathrm{B}$$

$$y(k) = \bar{C}\,z(k) \qquad \bar{C} = \mathrm{C}\,T$$

Il modello trasformato ha come matrice di stato la matrice $\bar{A} = T^{-1}A\,T$, come matrice di controllo la matrice $\bar{B} = T^{-1}\mathrm{B}$, e come matrice stato-uscita $\bar{C} = \mathrm{C}\,T$

Ci poniamo due quesiti:
Q1 Sotto quali condizioni un modello in variabili di stato qualsiasi può essere trasformato nella forma canonica controllabile mediante una trasformazione di similitudine ?
Q2 Qual è la matrice T della trasformazione associata ?

La risposta al quesito Q1 è fornita dal seguente teorema

Teorema

Un modello in variabili di stato

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bu(k)$$

$$\mathrm{y}(k) = Cx(k)$$

può essere trasformato nella forma canonica controllabile mediante una trasformazione di similitudine se e solo se la «matrice di controllabilità»

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots A^{n-1}B]$$

ha rango pieno.

La risposta al quesito Q2 è invece fornita dal seguente teorema

Teorema Un modello in variabili di stato di ordine n

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

la cui «matrice di controllabilità» $M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots A^{n-1}B]$ ha rango pieno può essere trasformato nella forma canonica controllabile mediante una trasformazione di similitudine $x(k) = Tz(k)$ in cui

$$T = M_c\,\Gamma \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove a_1, a_2, a_{n-1} sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice A

$$P_{car}(A) = det(zI - A) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$$

Si noti come nella matrice Γ del precedente teorema siano coinvolti tutti i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice A eccetto il termine noto a_0

Ora descriviamo in maniera sistematica il problema dell'assegnamento poli per un sistema in forma qualunque

1. Il sistema di partenza

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

soddisfa la condizione che la sua matrice di controllabilità $M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots A^{n-1}B]$ ha rango pieno.

2. Lo trasformiamo in forma canonica controllabile mediante la trasformazione di similitudine $x(k) = Tz(k)$ in cui $T = M_c\,\Gamma$, dove la matrice Γ ha la forma

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene il modello trasformato in forma compagna controllabile

$$z(k+1) = \bar{A}\, z(k) + \bar{B}u(k) \qquad \bar{A} = T^{-1}A\,T \qquad \bar{B} = T^{-1}\mathrm{B}$$

$$y(k) = \bar{C}\, z(k) \qquad \bar{C} = \mathrm{C}\,T$$

in cui le matrici $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono espresse come segue

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I coefficienti a_0, a_1, a_2, a_{n-1} sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice $\bar{A}$, che risulta essere coincidente con il polinomio caratteristico della matrice A

$$P_{car}(A) = P_{car}(\bar{A}) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

3. Progettiamo il controllo in retroazione sullo stato $z(k)$ con riferimento al modello trasformato in forma compagna controllabile

$$u(k) = -\bar{K}z(k) + r(k) = -\bar{k}_1\, x_1(k) - \bar{k}_2\, x_2(k) - \cdots - \bar{k}_n\, x_n(k) + r(k)$$

Denotiamone i coefficienti della legge di controllo in retroazione sullo stato $z(k)$ come $\bar{k}_1, \bar{k}_2 ,..., \bar{k}_n$ per differenziarli dai coefficienti $k_1, k_2 ,..., k_n$ associati alla corrispondente legge di controllo in retroazione sullo stato $x(k)$, che ricaveremo come passo conclusivo della procedura

$$z(k+1) = [\bar{A} - \bar{B}\bar{K}]\, z(k) + \bar{B}r(k)$$

$$\bar{B}\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 & \cdots & \bar{k}_{n-1} & \bar{k}_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} - \bar{B}\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & & & I_{n-1} & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ -(a_0+\bar{k}_1) & -(a_1+\bar{k}_2) & -(a_2+\bar{k}_3) & \cdots & -(a_{n-2}+\bar{k}_{n-1}) & -(a_{n-1}+\bar{k}_n) \end{bmatrix}$$

La matrice $\bar{A} - \bar{B}\bar{K}$ è ancora nella forma compagna controllabile, ed il suo polinomio caratteristico è pertanto determinabile in maniera immediata

$$P_{car}(\bar{A} - \bar{B}\bar{K}) = z^n + (a_{n-1} + \bar{k}_n)z^{n-1} + \cdots + (a_1 + \bar{k}_2)z + (a_0 + \bar{k}_1)$$

Per fare in modo che le radici del $P_{car}(\bar{A} - \bar{B}\bar{K})$ coincidano con le radici del polinomio caratteristico desiderato

$$P_{car}^{des} = z^n + \gamma_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \gamma_1 z + \gamma_0$$

è sufficiente scegliere i coefficienti $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_n$ facendo la differenza fra i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice A ed i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato

$$\begin{aligned} a_0 + \bar{k}_1 &= \gamma_0 \\ a_1 + \bar{k}_2 &= \gamma_1 \\ &\vdots \\ a_{n-1} + \bar{k}_n &= \gamma_{n-1} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \bar{k}_1 &= \gamma_0 - a_0 \\ \bar{k}_2 &= \gamma_1 - a_1 \\ &\vdots \\ \bar{k}_n &= \gamma_{n-1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi determinato i coefficienti del vettore $\bar{K}$ associato alla legge di controllo in retroazione sullo stato trasformato $z(k)$

$$u(k) = -\bar{K}z(k) + r(k)$$

$$\bar{K} = [\bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \dots \quad \bar{k}_n]$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \gamma_0 - a_0 \\ \bar{k}_2 &= \gamma_1 - a_1 \\ &\vdots \\ \bar{k}_n &= \gamma_{n-1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

4. Dobbiamo «ritornare» nel sistema di partenza, determinando i coefficienti da applicare nella legge di controllo in retroazione sullo stato $x(k)$. E' sufficiente sostituire nella legge di controllo derivata poc'anzi la relazione $z(k) = T^{-1}x(k)$

$$\begin{aligned} u(k) &= -\bar{K}T^{-1}x(k) + r(k) \\ &= -Kx(k) + r(k) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{K = \bar{K}T^{-1}}$$

Esempio Servomotore in corrente continua (continua)

Applichiamo la procedura illustrata per risolvere il problema dell'assegnamento poli per l'esempio del motore in corrente continua.

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d v(k) \qquad A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0.0951 & 0.006 \\ 0 & 0.9037 & 0.006 \\ 0 & -0.006 & -0.00004 \end{bmatrix} \qquad B_d = \begin{bmatrix} 0.003 \\ 0.0613 \\ 0.3329 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(kT_c) \\ \dot{\theta}(kT_c) \\ i(kT_c) \end{bmatrix} \qquad T_c = 0.1s$$

Il polinomio caratteristico della matrice A_d è

$$P_{car}(A_d) = z^3 - 1.9036z^2 + 0.9036z - 8.46 \cdot 10^{-14} = (z-1)(z-0.9036)(z-9.37 \cdot 10^{-14})$$

$$a_2 = -1.9036 \qquad a_1 = 0.9036 \qquad a_0 = -8.46 \cdot 10^{-14}$$

La matrice di controllabilità è

$$M_c = \begin{bmatrix} 0.0030 & 0.0091 & 0.0145 \\ 0.0614 & 0.0575 & 0.0519 \\ 0.3329 & -0.0004 & -0.0003 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione che trasferisce il modello nella forma compagna controllabile è

$$T = M_c\,\Gamma \qquad\qquad \Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9036 & -1.9036 & 1 \\ -1.9036 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 6.71 \cdot 10^{-6} & 0.0033 & 0.0030 \\ -0.0020 & -0.0593 & 0.0163 \\ 0.3012 & -0.6341 & 0.3329 \end{bmatrix}$$

Il vettore di stato trasformato è pertanto

$$z(k) = T^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} 157.721 & -24.840 & 3.149 \\ 157.721 & 7.466 & 0.053 \\ 157.721 & 8.252 & 0.051 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(kT_c) \\ \dot{\theta}(kT_c) \\ i(kT_c) \end{bmatrix}$$

Si noti come le componenti del vettore $z(k)$ non abbiamo un chiaro significato fisico, essendo delle combinazioni lineari fra la posizione, la velocita e la corrente.

Il modello in variabili di stato che governa l'evoluzione temporale del vettore $z(k)$ è

$$z(k+1) = \bar{A}\, z(k) + \bar{B} u(k) \qquad \bar{A} = T^{-1} A\, T \qquad \bar{B} = T^{-1}\mathrm{B}$$

$$y(k) = \bar{C}\, z(k) \qquad \bar{C} = \mathrm{C}\, T$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8.46 \cdot 10^{-14} & -0.9036 & 1.9036 \end{bmatrix}$$

L'ultima riga della matrice $\bar{A}$ contiene, come atteso, i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice A. Difatti, la matrice A e la matrice $\bar{A}$ hanno il medesimo polinomio caratteristico

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{C} = \mathrm{T}$$

La matrice C del modello originario è stata scelta pari alla matrice identità, in modo che il vettore di uscita y(k) coincida con il vettore di stato $x(k)$

Come atteso, le matrici $\bar{A}$ e $\bar{B}$ hanno la struttura propria di un modello in forma compagna controllabile.

Applichiamo la procedura di calcolo del vettore K illustrata in precedenza

$$P_{car}(A_d) = z^3 - 1.9036z^2 + 0.9036z - 8.46 \cdot 10^{-14}$$

$$a_2 = -1.9036 \qquad a_1 = 0.9036 \qquad a_0 = -8.46 \cdot 10^{-14}$$

Il polinomio caratteristico desiderato, le cui radici sono i poli desiderati $p^{des} = [0.45\ , 0.5\ , 0.55]$, è:

$$P_{car}^{des} = z^3 - 1.5z^2 + 0.7475z - 0.1238 \qquad \gamma_2 = -1.5 \qquad \gamma_1 = 0.7475 \qquad \gamma_0 = -0.1238$$

I coefficienti $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_n$ sono determinati facendo la differenza fra i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice A ed i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato

$$\bar{k}_1 = \gamma_0 - a_0 = -0.1237$$

$$\bar{k}_2 = \gamma_1 - a_1 = -0.1561 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{K} = [-0.1237 \quad -0.1561 \quad 0.4036]$$

$$\bar{k}_3 = \gamma_3 - a_2 = 0.4036$$

Come ultimo passo, determiniamo i coefficienti della legge di controllo in retroazione sullo stato $x(k)$ post-moltiplicando il vettore $\bar{K}$ per la matrice T^{-1}

$$K = \bar{K}T^{-1} = \begin{bmatrix} -0.1237 & -0.1561 & 0.4036 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 157.721 & -24.840 & 3.149 \\ 157.721 & 7.466 & 0.053 \\ 157.721 & 8.252 & 0.051 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19.51 & 7.57 & -0.36 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ovviamente riottenuto lo stesso risultato ricavato in precedenza mediante la funzione `place` di Matlab

Approfondimenti – conservazione della proprietà di controllabilità a fronte della discretizzazione

Dato un modello in variabili di stato a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t)$$

tale che la matrice di controllabilità associata sia a rango pieno, il modello discretizzato con ricostruttore ZOH

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \qquad A_d = e^{AT_c} \qquad B_d = \int_0^{T_c} e^{A\tau}\, d\tau\, B$$

ha anche esso matrice di controllabilità a rango pieno **se e solo se** la matrice A non possiede autovalori la cui parte immaginaria differisca per multipli interi della pulsazione di campionamento $\omega_c = 2\,\pi\,/\,T_c$

G. Marro, Modellistica e Controllo nello Spazio degli Stati

http://online.universita.zanichelli.it/marro/files/2015/05/modconsta.pdf

Approfondimenti – Definizioni di controllabilità e raggiungibilità

La relazione imposta sul rango della matrice di controllabilità volta a garantire la risolubilità del problema dell'assegnamento poli ha origine e significati più profondi, correlati a due proprietà strutturali dei sistemi dinamici a tempo discreto denominate «raggiungibilità» e «controllabilità»

Definizione: sistema (completamente) raggiungibile

Un sistema dinamico a tempo discreto $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ di ordine n viene detto «raggiungibile» (o, più precisamente, «completamente raggiungibile») se per qualunque valore dello stato iniziale $x(0)$ e per qualunque valore di $x(n)$ esiste una sequenza di ingresso $[u(0), u(1), \ldots\ldots, u(n-1)]$ tale che la traiettoria del sistema originata dal punto $x(0)$ transita al più dopo n passi per il punto $x(n)$

La proprietà di completa raggiungibilità garantisce che il sistema può essere trasferito fra due punti arbitrari dello spazio di stato in un numero finito di passi (al più n passi)

Mostriamo che la proprietà di completa raggiungibilità è garantita se e solo se la matrice di raggiungibilità ha rango pieno.

Sviluppiamo la dimostrazione, per semplicità, nel caso «single-input» in cui la sequenza $u(k)$ di ingresso è una sequenza scalare (e, come conseguenza, B è un vettore colonna)

Partiamo dalla espressione della traiettoria di un sistema a tempo discreto espresso in variabili di stato, che ricavammo a suo tempo

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}\,\mathrm{B}\,u(i)$$

Valutandola per $k = n$ si ottiene

$$x(n) - A^k x(0) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}\,\mathrm{B}\,u(i)$$

$$= A^{n-1}\,\mathrm{B}\,u(0) + A^{n-2}\,\mathrm{B}\,u(1) + \cdots ABu(n-2) + Bu(n-1)$$

$$= [B \quad AB \quad A^2\mathrm{B} \quad \ldots.\, A^{n-1}\,\mathrm{B}] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$x(n) - A^k x(0) = [B \quad AB \quad A^2\mathrm{B} \quad \ldots . A^{n-1}\,\mathrm{B}] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = M_c \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = M_c^{-1}\left(x(n) - A^k x(0)\right)$$

Appare pertanto chiaro che affinché esista una sequenza di ingresso in grado di trasferire il sistema dal punto iniziale $x(0)$ al punto finale $x(n)$ la matrice di controllabilità deve essere a rango pieno (si noti che nel caso di ingresso scalare M_c è una matrice quadrata, quindi deve essere invertibile). In realta questi ragionamenti mostrano la sufficienza, ma non la necessità. Si veda il testo consigliato [K. Ogata, Discrete-time control systems, 2nd edition] per una dimostrazione completa.

Si dimostra, mediante analisi eccessivamente complicate che omettiamo, che la completa raggiungibilità di un sistema è condizione necessaria e sufficiente affinché gli autovalori della matrice $A - BK$ possano essere arbitrariamente collocati nel piano attraverso una scelta opportuna della matrice K.
[v. The Control handbook – 2° Edition, «Control Systems Fundamentals», cap. 9.6 «State-space pole placement»]

Definizione: sistema (completamente) controllabile

Un sistema dinamico a tempo discreto $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ di ordine n viene detto «controllabile» (o, più precisamente, «completamente controllabile») se per qualunque valore dello stato iniziale $x(0)$ esiste una sequenza di ingresso $[u(0), u(1), \ldots\ldots, u(n-1)]$ tale che la traiettoria del sistema originata dal punto $x(0)$ converge verso l'origine del piano al più dopo n passi

La completa controllabilità è una proprietà più debole rispetto alla raggiungibilità, in quanto non richiede che il punto finale della traiettoria debba essere un punto arbitrario del piano ma si concentra sull'origine. Nel contesto dei sistemi dinamici a tempo continuo le proprietà di controllabilità e raggiungibilità sono equivalenti e si implicano a vicenda. Nell'ambito dei sistemi a tempo discreto questa equivalenza in generale non è verificata, se non nel caso in cui la matrice A non possiede autovalori nulli.

Un sistema dinamico a tempo discreto è completamente controllabile se vale la seguente relazione

$$\text{rank } M_c = \text{rank } [M_c \quad A^n]$$

(meno restrittiva rispetto a quella per la completa raggiungibilità)

Se un sistema a tempo discreto è completamente raggiungibile allora è anche completamente controllabile. Il viceversa è vero solo se la matrice A è non singolare .

A tempo discreto

Raggiungibilità $\rightleftarrows$ **Controllabilità**

Solo se $\det A \neq 0$

A tempo continuo

Raggiungibilità $\Leftrightarrow$ **Controllabilità**