

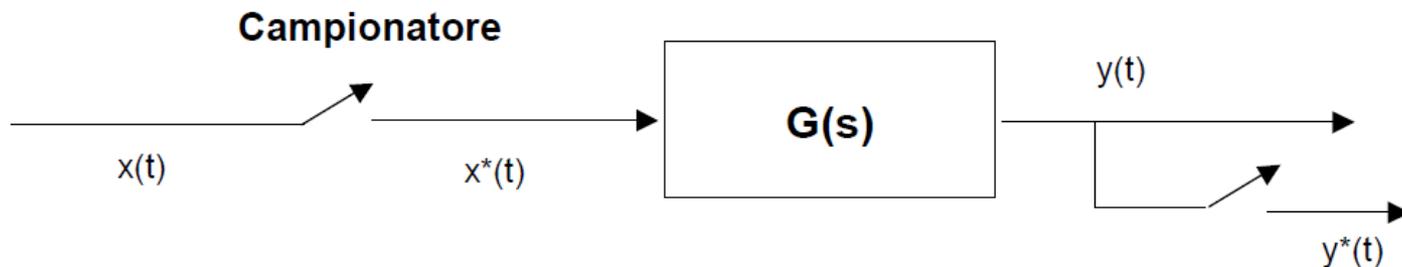
Controllo digitale

**Sistemi a dati campionati e relative
funzioni di trasferimento**

Ing. Alessandro Pisano
`apisano@unica.it`

Funzioni di trasferimento di sistemi a dati campionati

Analizziamo preliminarmente la situazione in cui un processo dinamico, descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$, è soggetto ad un segnale di ingresso $x^*(t)$ ottenuto campionando un segnale **causale** $x(t)$



Poichè

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)\delta(t - kT_c) = \underbrace{x(0)\delta(t)}_{x_0^*(t)} + \underbrace{x(T_c)\delta(t - T_c)}_{x_1^*(t)} + \underbrace{x(2T_c)\delta(t - 2T_c)}_{x_2^*(t)} + \dots$$

la risposta $y(t)$ del sistema all'ingresso $x^*(t)$ può essere calcolata, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come sommatoria delle risposte relative ai singoli impulsi $x_0^*(t)$, $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ che, sommati fra loro, formano il segnale complessivo.

Ricordiamo come l'uscita $y(t)$ di un sistema dinamico avente FdT $G(s)$ e sollecitato dal segnale causale di ingresso $u(t)$ sia in generale espressa mediante la convoluzione fra il segnale di ingresso e la risposta impulsiva $g(t)$ del sistema (la risposta impulsiva $g(t)$ risulta essere la trasformata inversa di Laplace della Funzione di trasferimento $G(s)$)

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

Calcoliamo quindi la convoluzione fra la risposta impulsiva $g(t)$ del sistema in esame e le varie componenti $x_0^*(t)$, $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, ... in cui abbiamo decomposto il segnale impulsivo che viene applicato in ingresso al sistema

Considerando la prima componente $x_0^*(t)$ si ottiene (applicando le proprietà dell'impulso di Dirac)

$$y_0(t) = \int_0^t x_0^*(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t x(0)\delta(\tau)g(t - \tau)d\tau = x(0) g(t)$$

Considerando la seconda componente $x_1^*(t)$ si ottiene

$$y_1(t) = \int_0^t x_1^*(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t x(T_c)\delta(\tau - T_c)g(t - \tau)d\tau = x(T_c) g(t - T_c)$$

Considerando la terza componente $x_2^*(t)$ si ottiene

$$y_2(t) = \int_0^t x_2^*(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t x(2T_c)\delta(\tau - 2T_c)g(t - \tau)d\tau = x(2T_c) g(t - 2T_c)$$

Iterando il ragionamento possiamo desumere come la risposta $y_h(t)$ alla generica componente $x_h^*(t)$ del termine di ingresso sia pari a

$$y_h(t) = x(hT_c) g(t - hT_c)$$

ed applicando quindi il principio di sovrapposizione degli effetti si ottiene per l'uscita complessiva $y(t)$ la forma seguente

$$y(t) = \sum_{h=0}^{\infty} y_h(t) = \sum_{h=0}^{\infty} x(hT_c) g(t - hT_c)$$

Ora valutiamo tale espressione in corrispondenza degli istanti di campionamento $t = t_k = kT_c$

$$y(t_k) = y(kT_c) = \sum_{h=0}^{\infty} x(hT_c) g(kT_c - hT_c) = \sum_{h=0}^{\infty} x(hT_c) g((k - h)T_c)$$

Possiamo esprimere tale relazione in una forma più familiare se denotiamo

$$x(hT_c) \triangleq x(h)$$

$$g((k-h)T_c) \triangleq g(k-h)$$

La relazione può essere riscritta nella forma seguente

$$y(t_k) = y(kT_c) = \sum_{h=0}^{\infty} x(h)g(k-h)$$

Riconosciamo in tale espressione l'operatore di **convoluzione discreta** fra le sequenze $x(k)$ e $g(k)$ (che fu introdotto nell'ambito della trattazione sulla trasformata Z per illustrarne una delle fondamentali proprietà)

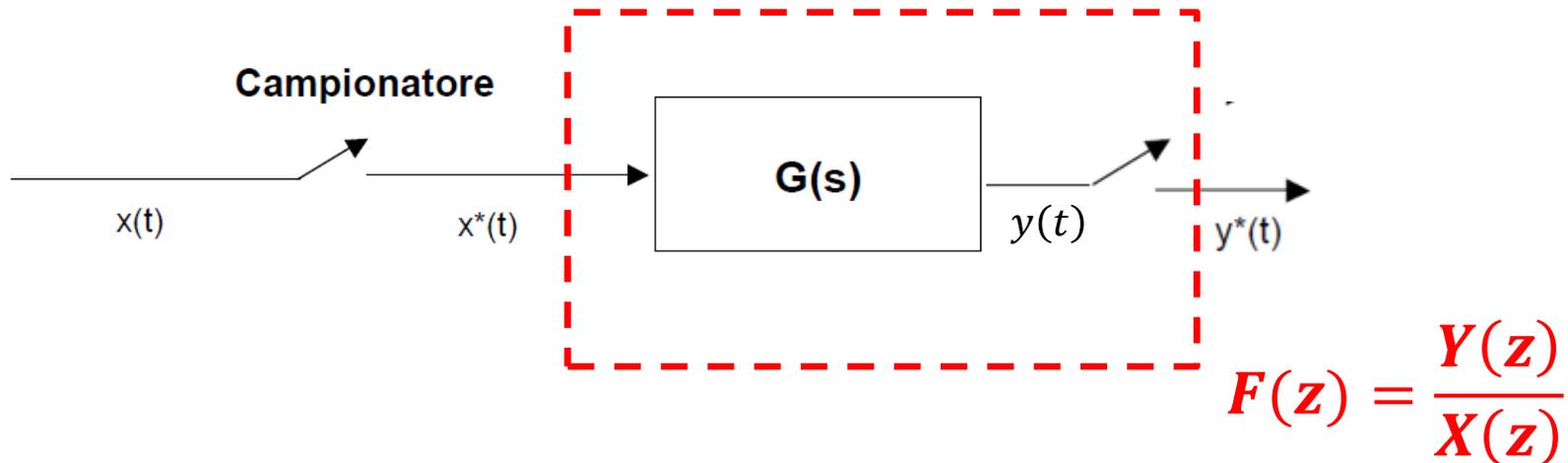
Abbiamo visto a suo tempo come la trasformata Z della convoluzione discreta fra due sequenze (o, equivalentemente, fra due funzioni di variabile discreta) sia pari al prodotto fra le trasformate Z delle singole sequenze:

$$Y(z) = X(z)G(z)$$



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z)$$

L'ultima relazione ci consente di definire la **funzione di trasferimento $F(z)$** associata ad un sistema in cui un segnale campionato alimenta un processo a tempo continuo avente FdT $G(s)$, e l'uscita di quest'ultimo viene a sua volta campionata

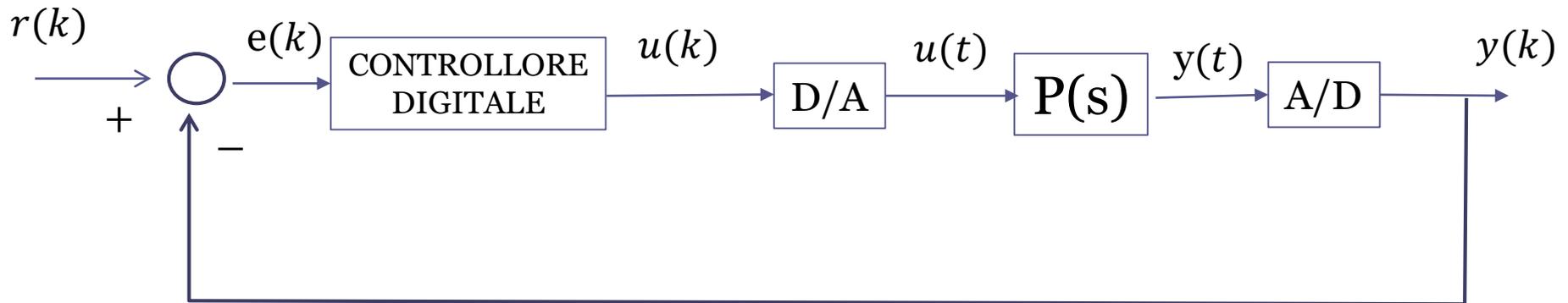


La funzione di trasferimento $F(z)$ coincide con la trasformata Z della sequenza numerica che si ottiene valutando la risposta all'impulso $g(t)$ del processo a tempo continuo in corrispondenza degli istanti di campionamento

$$\mathbf{F(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathbf{Z}\{[g(t)]_{t=kT_c}\} = \mathbf{Z}\{[\mathcal{L}^{-1}(G(s))]_{t=kT_c}\}$$

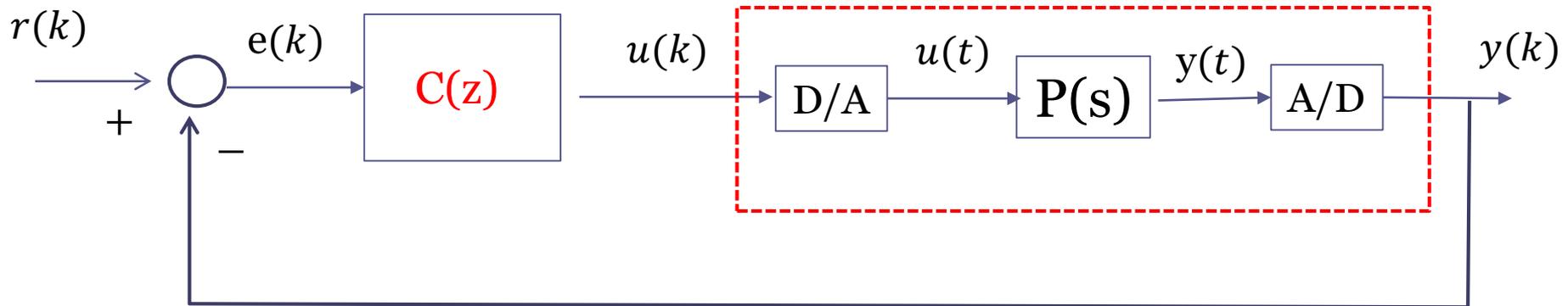
Il risultato appena ricavato non ha particolare rilevanza ai fini pratici, trattandosi di uno scenario non realistico, ma ci consente, come vedremo da qui a breve, di ricavare facilmente la funzione di trasferimento a tempo discreto da associare ad un sistema a tempo continuo sollecitato da un segnale generato da un blocco ricostruttore ZOH e seguito da un campionatore.

Ritorniamo alla configurazione standard per un sistema di controllo digitale



Il risultato appena ricavato non ha particolare rilevanza ai fini pratici, trattandosi di uno scenario non realistico, ma ci consente, come vedremo da qui a breve, di ricavare facilmente la funzione di trasferimento a tempo discreto da associare ad un sistema a tempo continuo sollecitato da un segnale generato da un blocco ricostruttore ZOH e seguito da un campionario.

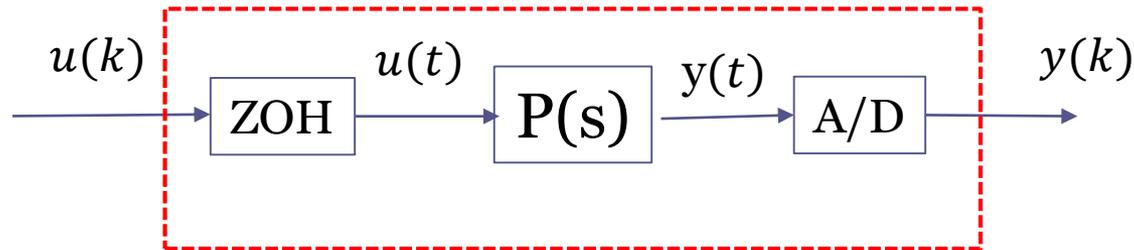
Ritorniamo alla configurazione standard per un sistema di controllo digitale



Abbiamo imparato a **caratterizzare il controllore digitale per mezzo di una funzione di trasferimento $C(z)$** che contiene, a numeratore e denominatore, i coefficienti della relazione ingresso-uscita (equazione alle differenze finite) associata al controllore.

Ora vediamo come caratterizzare attraverso una FdT digitale la cascata fra il ricostruttore ZOH (il convertitore D/A), il processo $P(s)$ a tempo continuo, ed il campionario (convertitore A/D).

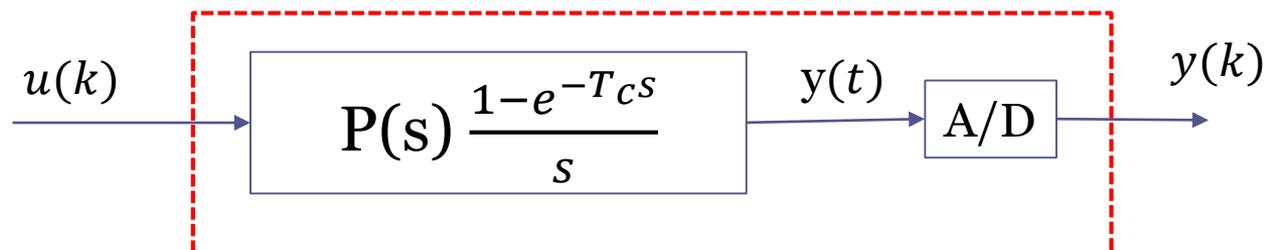
Isoliamo dal sistema di controllo complessivo la parte che ci interessa

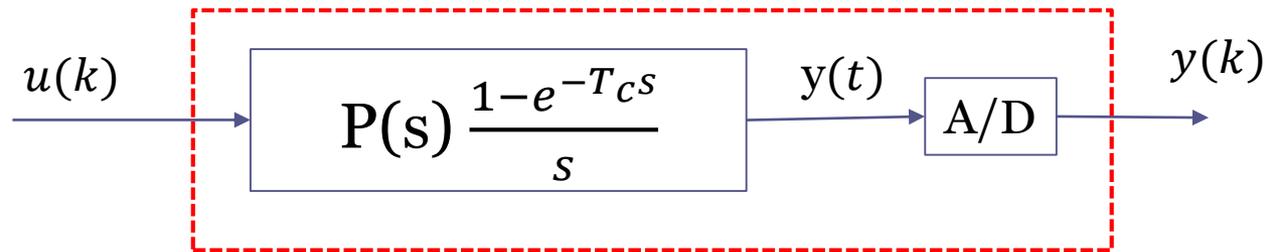


Vogliamo determinare

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

In base a quanto visto finora, il blocco ZOH è equivalente ad un sistema dinamico avente funzione di trasferimento $G_{ZOH}(s) = \frac{1-e^{-Tcs}}{s}$, quindi lo schema può essere rappresentato in forma più compatta come segue





Tale configurazione è analoga a quella studiata poco prima, e sappiamo quindi che

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \frac{Y(\mathbf{z})}{U(\mathbf{z})} = \mathbf{Z} \left\{ \left[\mathcal{L}^{-1} \left(P(s) \frac{1 - e^{-T_c s}}{s} \right) \right]_{t=kT_c} \right\}$$

Possiamo elaborare tale relazione per giungere ad una forma che, da un punto di vista operativo, risulti più semplice da trattare ai fini pratici.

Riscriviamo in forma lievemente diversa la FdT $G(s) = P(s) \frac{1 - e^{-T_c s}}{s}$, della quale dobbiamo determinare la trasformata inversa di Laplace $g(t)$, estrarre da tale segnale una sequenza numerica costituita dai suoi campioni negli istanti di campionamento $t = kT_c$, e successivamente Z-trasformare tale sequenza secondo la formula soprariportata

$$G(s) = P(s) \frac{1 - e^{-T_c s}}{s} = (1 - e^{-T_c s}) \frac{P(s)}{s}$$

$$G(s) = P(s) \frac{1 - e^{-T_c s}}{s} = (1 - e^{-T_c s}) \frac{P(s)}{s}$$

Definendo $Q(s) = \frac{P(s)}{s}$

si ha $G(s) = (1 - e^{-T_c s})Q(s)$

Dobbiamo determinare $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$

Chiamando $q(t) = \mathcal{L}^{-1}(Q(s))$ (si noti che $q(t)$ risulta essere la risposta al gradino unitario del processo a tempo continuo $P(s)$ da controllare) si avrà, applicando le proprietà della trasformata di Laplace

$$G(s) = (1 - e^{-T_c s})Q(s) = Q(s) - Q(s) e^{-T_c s} \quad \Rightarrow \quad g(t) = q(t) - q(t - T_c)$$

Il segnale $g(t)$ è pertanto la differenza fra la risposta al gradino unitario del processo $P(s)$ da controllare ed il medesimo segnale ritardato di un tempo pari a T_c

Ora valutiamo quest'ultima espressione di $g(t)$ negli istanti di campionamento

$$g(kT_c) = q(kT_c) - q(kT_c - T_c) = q(kT_c) - q((k-1)T_c)$$

Se definiamo

$$g(kT_c) \triangleq g(k) \quad q(hT_c) \triangleq q(h)$$

si ottiene

$$g(k) = q(k) - q(k-1)$$

Applicando l'operatore di Z trasformata e la sua proprietà dello scorrimento a destra:

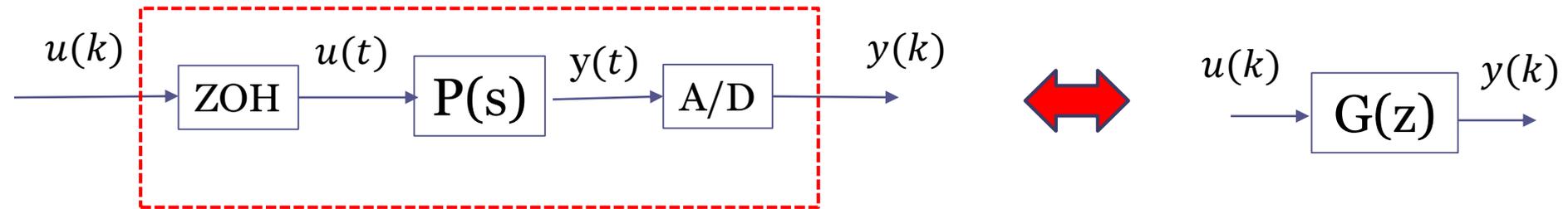
$$G(z) = Q(z) - z^{-1}Q(z) = (1 - z^{-1})Q(z) = \frac{z-1}{z}Q(z)$$

In cui $Q(z)$ è la Z-trasformata della sequenza ottenuta campionando con periodo T_c la risposta al gradino unitario del processo $P(s)$

Giungiamo quindi alla seguente espressione finale per la Funzione di trasferimento discreta cercata

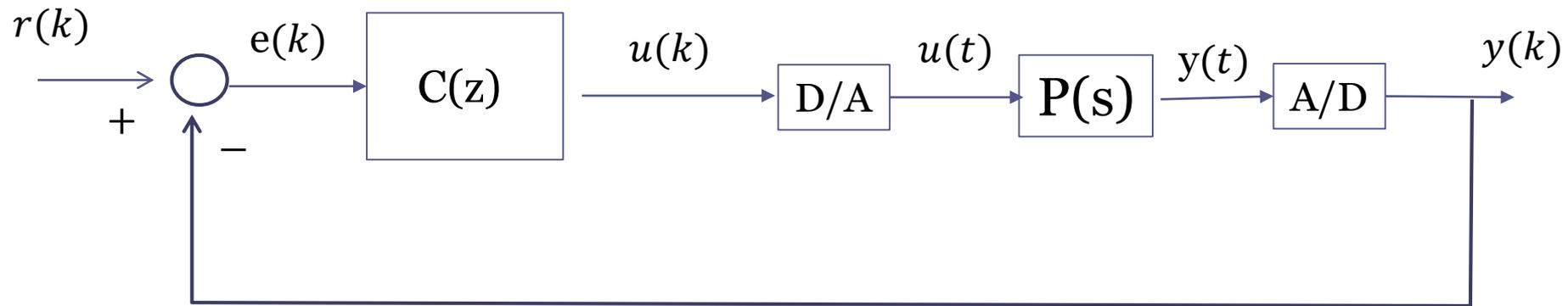
$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \right]_{t=kT_c} \right\}$$

Le due rappresentazioni seguenti sono completamente equivalenti ai fini del legame ingresso uscita

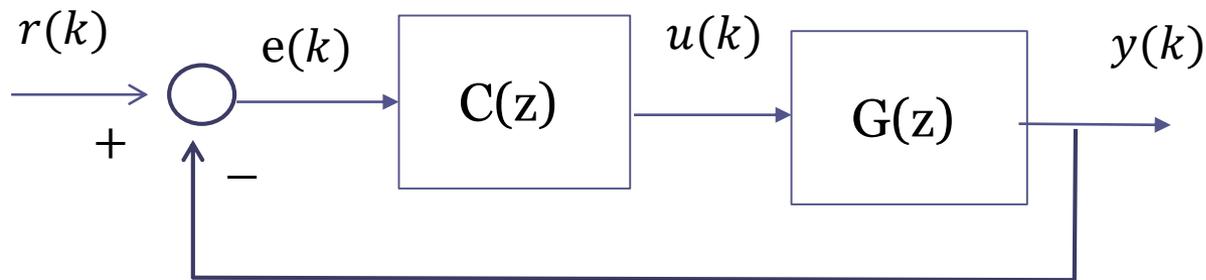


Si noti che tale rappresentazione descrive il comportamento del processo $P(s)$ solo negli istanti di campionamento.

Il sistema di controllo



risulta pertanto essere completamente equivalente al seguente

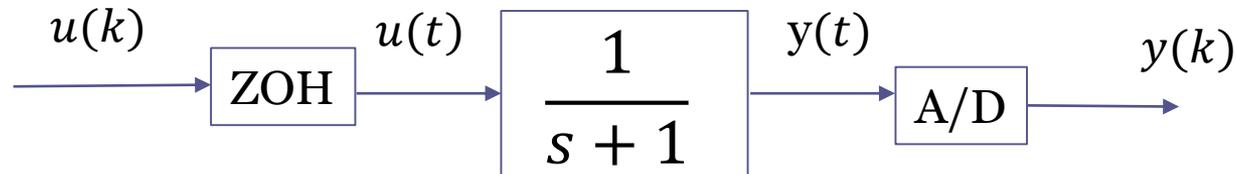


ove si ponga:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \right]_{t=kT_c} \right\}$$

Esempio

Si determini la funzione di trasferimento discreta $G(z)=Y(z)/U(z)$ del sistema



nell'ipotesi in cui il ricostruttore ZOH ed il campionatore lavorino con un periodo di campionamento $T_c = 1s$ (caso 1) oppure $T_c = 0.1s$ (caso 2).

La risposta al gradino unitario del processo $P(s) = \frac{1}{s+1}$ ha trasformata di Laplace

$$Q(s) = \frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Utilizzando le Tabelle delle trasformate di Laplace delle funzioni notevoli si ottiene

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = \delta_{-1}(t) - e^{-t} \delta_{-1}(t)$$

Caso 1 $T_c = 1s$

$$q(kT_c) = \delta_{-1}(k) - e^{-kT_c} \delta_{-1}(k) = \delta_{-1}(k) - e^{-k} \delta_{-1}(k)$$

Utilizzando le Tabelle delle Z-trasformate notevoli si ottiene (v. nota a pie di pagina)

$$Q(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}}$$

La funzione di trasferimento cercata è pertanto

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Q(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}} \right] = 1 - \frac{z-1}{z-e^{-1}} = \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}} = \frac{0.632}{z-0.367}$$

N.B. La trasformata Z della sequenza $e^{-k} \delta_{-1}(k)$ si determina come caso particolare della sequenza esponenziale $a^k \delta_{-1}(k)$ in corrispondenza del valore $a = e^{-1}$

Sequenza
esponenziale

$$a^k \delta_{-1}(k)$$

$$\frac{z}{z-a}$$

Caso 2 $T_c = 0.1s$

$$q(kT_c) = \delta_{-1}(k) - e^{-kT_c} \delta_{-1}(k) = \delta_{-1}(k) - e^{-0.1k} \delta_{-1}(k)$$

Utilizzando le Tabelle delle Z-trasformate notevoli si ottiene

$$Q(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-0.1}}$$

La funzione di trasferimento cercata è pertanto

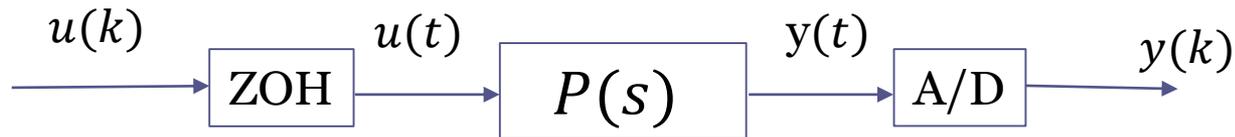
$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-0.1}} \right] = 1 - \frac{z-1}{z-e^{-0.1}} = \frac{1-e^{-0.1}}{z-e^{-0.1}}$$

Caso 3 T_c qualunque

Attraverso passaggi analoghi, la funzione di trasferimento cercata è

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_c}} \right] = 1 - \frac{z-1}{z-e^{-T_c}} = \frac{1-e^{-T_c}}{z-e^{-T_c}}$$

Calcolo della $G(z)$ mediante Matlab



La funzione di trasferimento discreta $G(z)=Y(z)/U(z)$ si calcola per mezzo della funzione `c2d` (continuous2discrete)

Vediamo come impiegarla per il calcolo della FdT di cui al caso 1 del precedente esempio, in cui il processo è descritto dalla FdT $P(s) = \frac{1}{s+1}$



```
P=tf(1,[1 1]);
Tc=1;
Gz=c2d(P,Tc,'zoh')
```



```
Gz =
      0.6321
-----
z - 0.3679
|
Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

$$1 - e^{-0.1} = 0.6321$$

$$e^{-0.1} = 0.3679$$

La funzione di trasferimento discreta $G(z)$ che caratterizza la cascata fra un ricostruttore ZOH, un processo $P(s)$ a tempo continuo, ed un campionatore è tale che i suoi poli p_i^z (i poli di $G(z)$) sono legati ai poli p_i^s del processo originario $P(s)$ dalla relazione

$$p_i^z = e^{T_c p_i^s} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Gli zeri di $G(z)$, invece, non seguono questa corrispondenza e possono comparire anche in numero superiore a quelli di $P(s)$.

Nell'esempio appena svolto, la $P(s)$ aveva un unico polo $p_1^s = -1$.

Si può notare come le funzioni di trasferimento discrete $G(z)$ calcolate nei tre casi ($T_c = 1s$, $T_c = 0.1s$, e T_c arbitrario) soddisfino la relazione riportata sopra

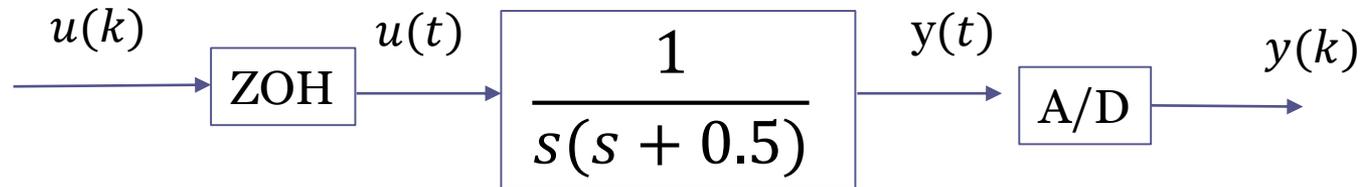
Caso 1 $T_c = 1s$ $p_1^z = e^{-T_c} = e^{-1}$

Caso 2 $T_c = 0.1s$ $p_1^z = e^{-T_c} = e^{-0.1}$

Caso 3 T_c qualunque $p_1^z = e^{-T_c}$

Esempio

Si determini la funzione di trasferimento discreta $G(z)=Y(z)/U(z)$ del sistema



nell'ipotesi in cui il ricostruttore ZOH ed il campionario lavorino con un periodo di campionamento $T_c = 1s$

La risposta al gradino unitario del processo $P(s) = \frac{1}{s(s+0.5)}$ ha trasformata di Laplace

$$Q(s) = \frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s^2(s+0.5)} = -\frac{4}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s+0.5}$$

Utilizzando le Tabelle delle trasformate di Laplace delle funzioni notevoli si ottiene

$$q(t) = -4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+0.5}\right) = -4\delta_{-1}(t) + 2t\delta_{-1}(t) + 4e^{-0.5t}\delta_{-1}(t)$$

$$T_c = 1s$$

$$q(kT_c) = q(k) = -4\delta_{-1}(k) + 2k\delta_{-1}(k) + 4e^{-0.5k} \delta_{-1}(k)$$

Utilizzando le Tabelle delle Z-trasformate notevoli si ottiene

$$Q(z) = -\frac{4z}{z-1} + \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{4z}{z-e^{-0.5}}$$

Sviluppando i conti:

$$Q(z) = \frac{z[(4e^{-0.5} - 2)z + (4 - 6e^{-0.5})]}{(z-1)^2(z-e^{-0.5})} = \frac{z[0.4261z + 0.3608]}{(z-1)^2(z-0.6065)}$$

La funzione di trasferimento cercata è pertanto

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{z} Q(z) = \frac{z^{-1}}{z} \left[\frac{z[0.4261z+0.3608]}{(z-1)^2(z-0.6065)} \right] = \frac{0.4261z+0.3608}{(z-1)(z-0.6065)}$$

Si verifica come i poli della $G(z)$ siano determinabili a partire dai poli del processo $P(s)$ attraverso la corrispondenza vista in precedenza

La $P(s)$ ha i due poli $p_1^s = 0$ $p_2^s = -0.5$

$$T_c = 1s \quad p_1^z = e^{p_1^s \cdot T_c} = e^{0 \cdot T_c} = 1$$

$$p_2^z = e^{p_2^s \cdot T_c} = e^{-0.5 \cdot T_c} = e^{-0.5} = 0.6065$$

*Determinazione della funzione di trasferimento mediante **Matlab***



```
P=tf(1,[1 0.5 0]);
Tc=1;
Gz=c2d(P,Tc,'zoh')
```



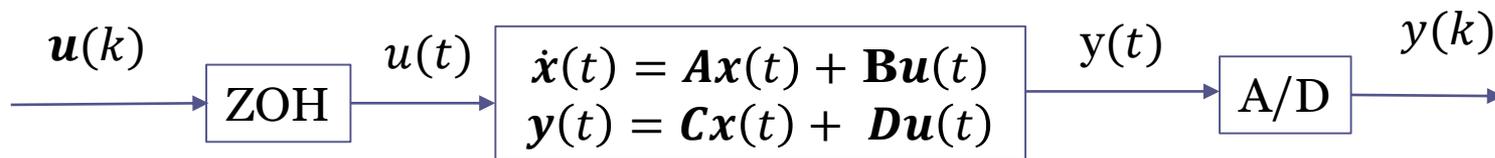
Gz =

$$\frac{0.4261 z + 0.3608}{z^2 - 1.607 z + 0.6065}$$

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

Discretizzazione esatta di un processo a tempo continuo espresso in variabili di stato

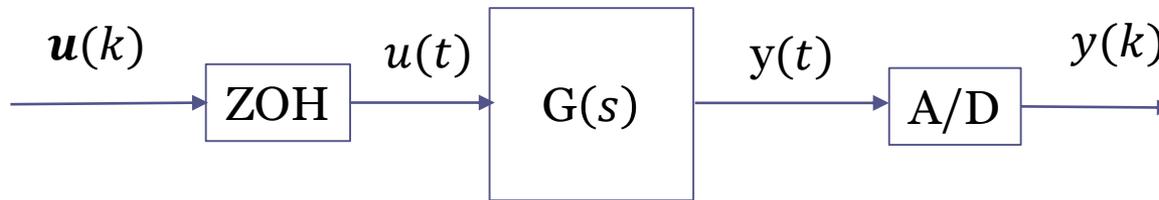
Ora vediamo come determinare un modello a tempo discreto per la configurazione riportata in figura, in cui un sistema dinamico **a tempo continuo**, il cui modello matematico è espresso in forma di variabili di stato, è soggetto ad un ingresso $u(t)$ generato da un ricostruttore ZOH



Il calcolo della funzione di trasferimento $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ risulta essere banale. E' infatti sufficiente calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ del sistema a tempo continuo, che si determina mediante la formula

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

e ricondurre lo schema a blocchi della figura precedente al seguente schema equivalente



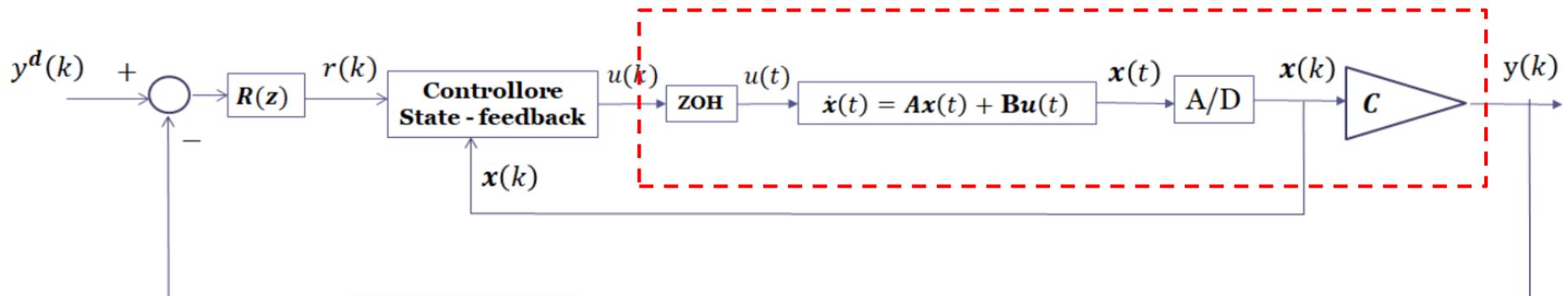
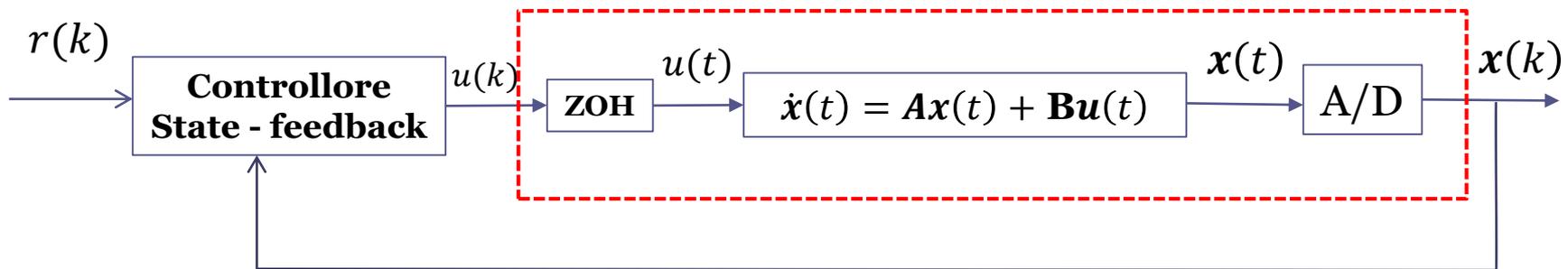
che abbiamo trattato in precedenza e conduce a

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) \right]_{t=kT_c} \right\}$$

E' però talvolta indispensabile ricavare un modello matematico a tempo discreto che **rappresenti anche i valori assunti dallo stato $x(t)$ negli istanti di campionamento**, e non solo quelli della variabile di uscita.

Difatti, esiste una metodologia di controllo denominata «in retroazione sullo stato» (state-feedback) che non si limita a trasdurre e retroazionare la variabile di uscita, come nei classici sistemi di controllo in retroazione sull'uscita (output-feedback) ma che invece **trasduce e retroaziona tutto lo stato del sistema**

Due possibili architetture di controllo sono le seguenti. Per poterle analizzare e progettare si deve determinare un modello a tempo discreto in variabili di stato per il legame fra $u(k)$ ed $x(k)$



Ricaviamo il modello a tempo discreto che descrive **negli istanti di campionamento** l'evoluzione delle variabili di stato del modello in VdS a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

sotto l'ipotesi che il segnale di ingresso $\mathbf{u}(t)$ sia applicato per tramite di un ricostruttore ZOH, e sia pertanto un segnale **costante a tratti**

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(k) \quad kT_c \leq t < (k+1)T_c$$

La traiettoria a tempo continuo dello stato $\mathbf{x}(t)$ a partire da un generico istante iniziale t_0 è la seguente

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{A}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Traiettoria di stato a partire da un generico istante iniziale t_0

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{A(t-t_0)} \mathbf{A} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Valutiamo l'espressione precedente all'istante $t = (k+1)T_c$ inserendo come condizione iniziale $t_0 = kT_c$ (ovviamente $t - t_0 = T_c$)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{e}^{AT_c} \mathbf{x}(k) + \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} \mathbf{e}^{A((k+1)T_c-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Nell'intervallo $[kT_c, (k+1)T_c)$ il vettore di ingresso $\mathbf{u}(\tau)$ ha valore costante, pari ad $\mathbf{u}(k)$, e può pertanto essere portato fuori dall'integrale

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{e}^{AT_c} \mathbf{x}(k) + \left[\int_{kT_c}^{(k+1)T_c} \mathbf{e}^{A((k+1)T_c-\tau)} \mathbf{B} d\tau \right] \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{e}^{AT_c} \mathbf{x}(k) + \left[\int_{kT_c}^{(k+1)T_c} \mathbf{e}^{A((k+1)T_c-\tau)} \mathbf{B} d\tau \right] \mathbf{u}(k)$$

La matrice caratteristica del modello assume pertanto la forma \mathbf{e}^{AT_c}

Il termine integrale che pre-moltiplica l'ingresso:

$$\left[\int_{kT_c}^{(k+1)T_c} \mathbf{e}^{A((k+1)T_c-\tau)} \mathbf{B} d\tau \right]$$

può essere espresso in una forma più compatta attraverso il cambio di variabile

$$\eta = ((k+1)T_c - \tau)$$

$$\int_{kT_c}^{(k+1)T_c} \mathbf{e}^{A((k+1)T_c-\tau)} \mathbf{B} d\tau = \int_0^{T_c} \mathbf{e}^{A\eta} \mathbf{B} d\eta$$

Si ottiene pertanto la seguente espressione finale del modello cercato

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d u(k)$$

$$\mathbf{A}_d = e^{A T_c}$$

$$\mathbf{B}_d = \int_0^{T_c} e^{A\tau} \mathbf{B} d\tau = \left[\int_0^{T_c} e^{A\tau} d\tau \right] \mathbf{B}$$

Se la matrice A è invertibile (cioè se non ha autovalori nulli) la matrice di controllo \mathbf{B}_d può essere espressa in forma chiusa attraverso la risoluzione dell'integrale, originando la formula:

$$\mathbf{B}_d = (\mathbf{A}_d - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

L'espressione della uscita negli istanti di campionamento si ottiene banalmente applicando la trasformazione in uscita

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

e valutandola negli istanti di campionamento

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

Le matrici C e D del modello a tempo discreto sono pertanto coincidenti con quelle del modello a tempo continuo

Calcolo di e^{AT_c}

La matrice e^{AT_c} si determina **calcolando la matrice di transizione dello stato e^{At} del modello in VdS a tempo continuo, e valutandola per $t = T_c$**

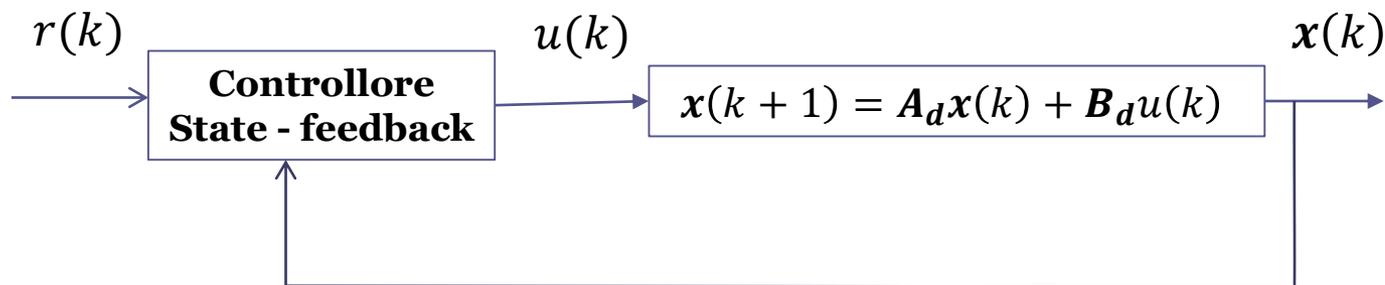
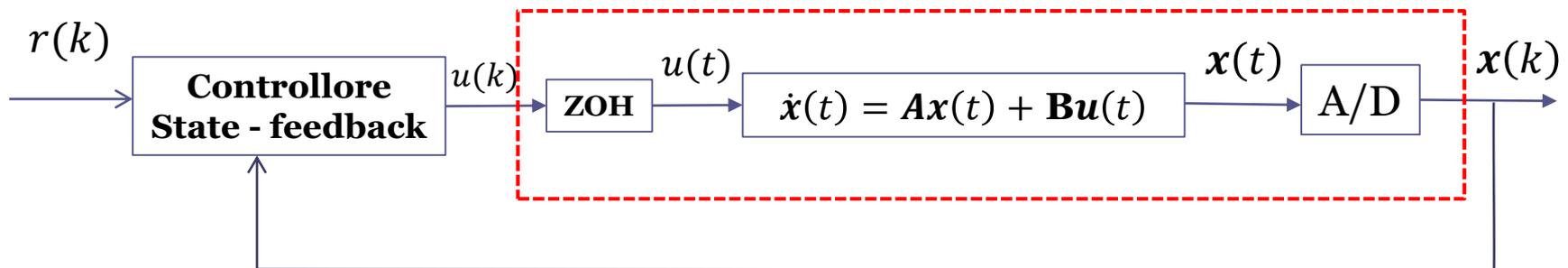
La matrice di transizione dello stato e^{At} del modello in VdS a tempo continuo può essere determinata attraverso uno sviluppo di Sylvester concettualmente simile a quello che abbiamo visto a suo tempo per la determinazione della matrice di transizione dello stato A^k di un modello in VdS a tempo discreto, oppure ricorrendo alla espressione equivalente

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

Lo studente può ragionare sulla origine di tale relazione equivalente (si ragioni sul modo con cui sia stata ricavata, nell'ambito del presente corso, la relazione $A^k = \mathcal{Z}^{-1}\{z(zI - A)^{-1}\}$)

Nel corso di un esercizio che svilupperemo a breve, sarà presentato un esempio di calcolo della matrice e^{At}

Per quanto concerne i valori assunti dal vettore di stato $x(t)$ negli istanti di campionamento, i seguenti schemi a blocchi sono completamente equivalenti



$$A_d = e^{AT_c}$$

$$B_d = \int_0^{T_c} e^{A\tau} d\tau \mathbf{B}$$

Esempio Ricavare un modello a tempo discreto per il sistema in variabili di stato

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sotto l'ipotesi che all'ingresso del sistema sia inserito un ricostruttore ZOH che operi con periodo $T_c = 0.1$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d u(k) \quad \mathbf{A}_d = e^{AT_c} \quad \mathbf{B}_d = (e^{AT_c} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Determiniamo la matrice di transizione dello stato e^{At}

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} & \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{-2}{s^2 + 3s + 2} & \frac{s}{s^2 + 3s + 2} \end{bmatrix}$$

Inversa di una
matrice 2x2

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{adj}(M^T) = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \\ -2 & s \\ \frac{-2}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

Dobbiamo antitrasformare gli elementi della «matrice risolvante» $(sI - A)^{-1}$

Lavoriamo sul primo elemento della prima riga, ricavandone la decomposizione in fratti semplici

$$\Phi_{11}(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = [(s+1)\phi_{11}(s)]_{s=-1} = \left[\frac{s+3}{s+2} \right]_{s=-1} = 2$$

$$B = [(s+2)\phi_{11}(s)]_{s=-2} = \left[\frac{s+3}{s+1} \right]_{s=-2} = -1$$

$$\Phi_{11}(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad \Rightarrow \quad \phi_{11}(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad \text{Primo elemento di } e^{At}$$

Procedendo analogamente per gli altri termini si ottiene matrice di transizione dello stato e^{At}

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

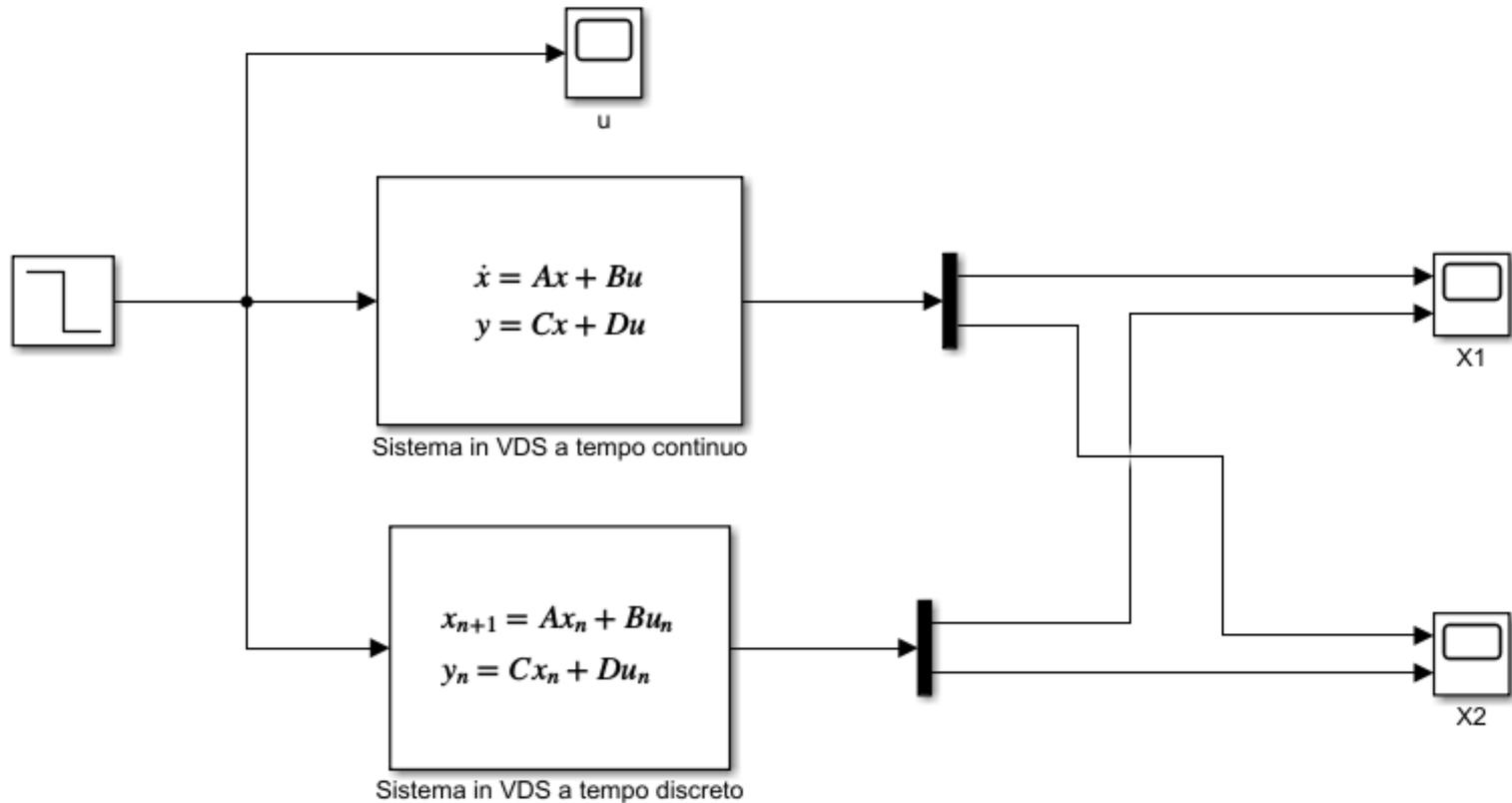
Otteniamo la matrice caratteristica del modello a tempo discreto calcolando la matrice e^{At} per $t = T_c = 0.1$

$$A_d = e^{AT_c} = \begin{bmatrix} 2e^{-T_c} - e^{-2T_c} & e^{-T_c} - e^{-2T_c} \\ 2e^{-2T_c} - 2e^{-T_c} & 2e^{-2T_c} - e^{-T_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9909 & 0.0861 \\ -0.1722 & 0.7326 \end{bmatrix}$$

Poichè la matrice A è non singolare, per il calcolo della matrice B_d possiamo impiegare la formula chiusa $B_d = (e^{AT_c} - I)A^{-1}B$

$$B_d = (e^{AT_c} - I)A^{-1}B = \left(\begin{bmatrix} 0.99 & 0.086 \\ -0.172 & 0.732 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.0861 \end{bmatrix}$$

Confrontiamo, per mezzo di Simulink, il comportamento del sistema a tempo continuo e della sua versione a tempo discreto in risposta ad un ingresso del tipo



Script da eseguire prima di avviare il modello Simulink della slide precedente

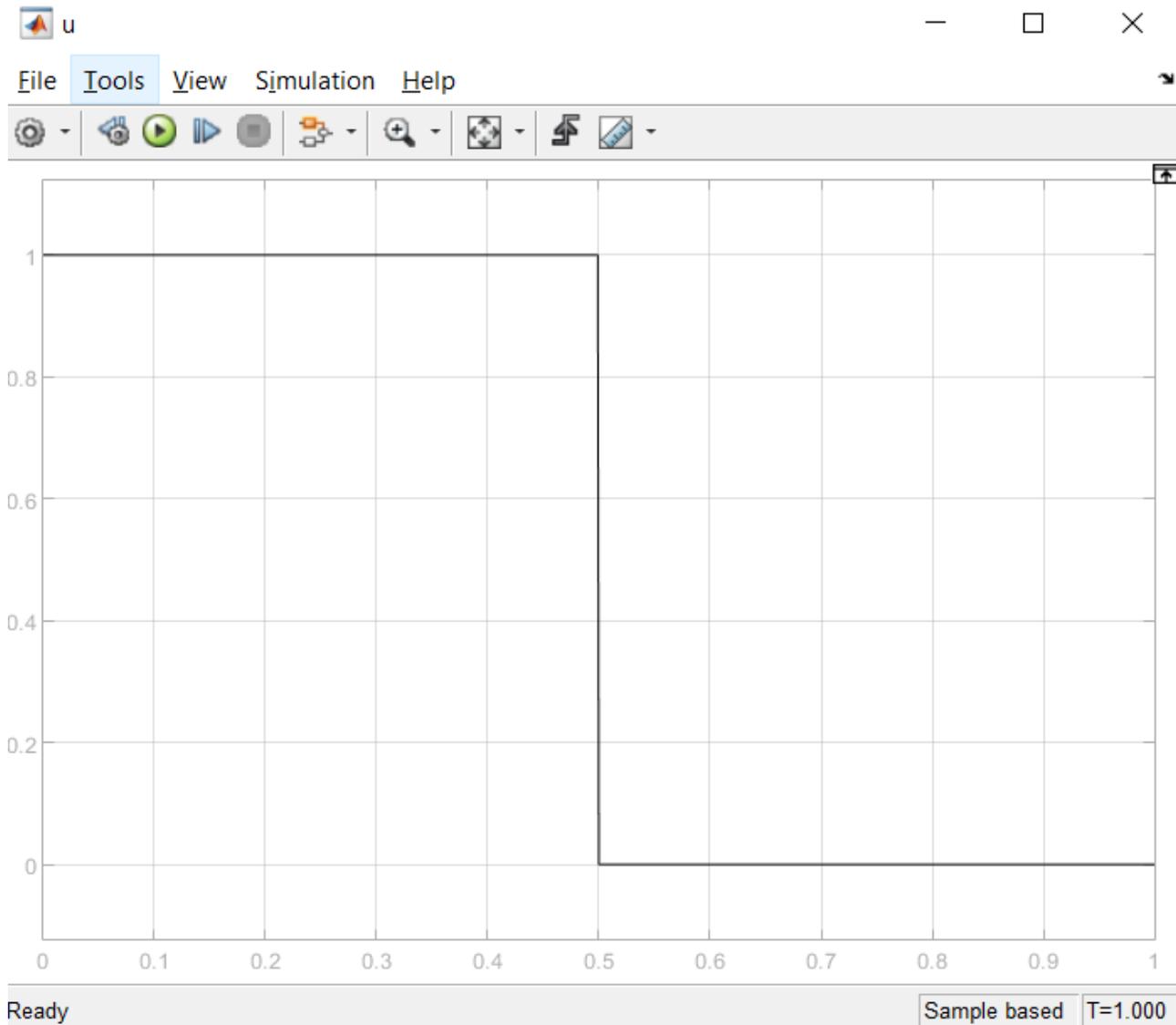
ConfrontoModelliVdS_TCTD_dati.m

```
A=[0 1;-2 -3];  
B=[0;1];  
C=eye(2);  
D=[0;0];  
Tc=0.1;
```

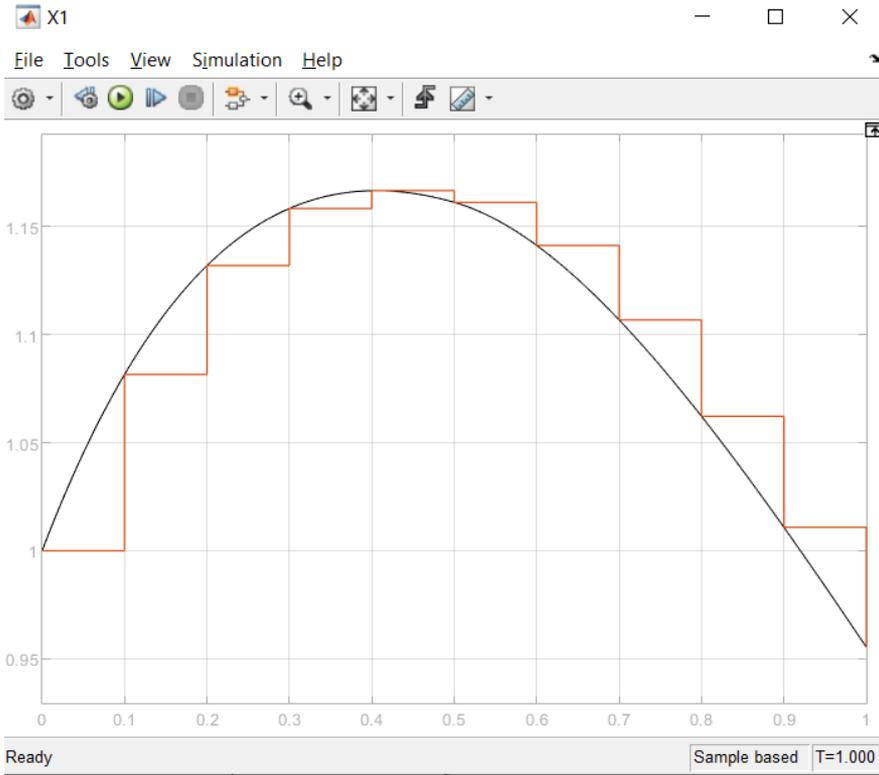
```
Ad=expm(A*Tc) %calcolo di e^(A T_c)  
Bd=(Ad-eye(2))*inv(A)*B
```

```
%istruzioni alternative per il calcolo del modello a tempo discreto  
% Ad2 e Bd2 coincidono con le espressioni calcolate sopra per Ad e Bd  
P=ss(A,B,C,D);  
Pd=c2d(P,Tc,'zoh');  
[Ad2,Bd2,Cd2,Dd2]=ssdata(Pd)
```

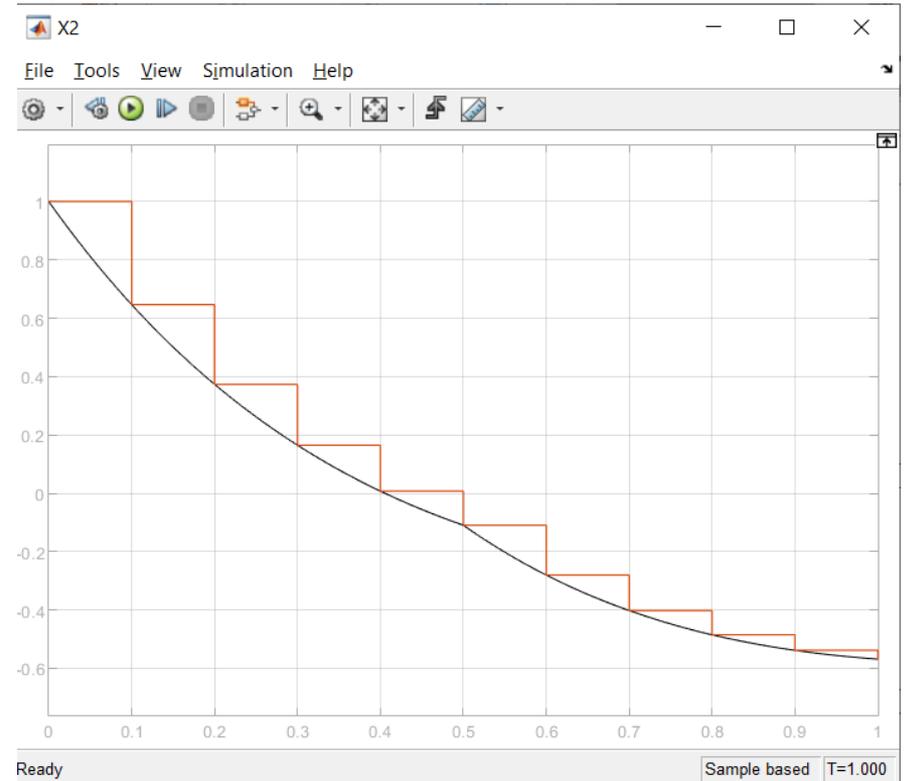
Ingresso applicato



$$x_1(t) / x_1(k)$$



$$x_2(t) / x_2(k)$$



Si noti come gli stati $x_1(k)$ e $x_2(k)$ prodotti dal modello a tempo discreto coincidano con i valori assunti dagli stati $x_1(t)$ e $x_2(t)$ del modello a tempo continuo negli istanti di campionamento