Controllo digitale

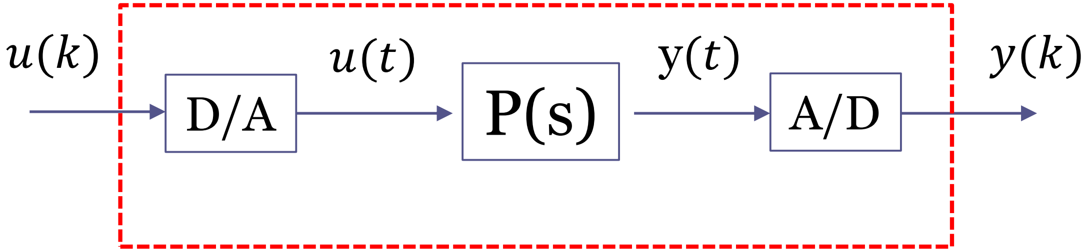
Sistemi a tempo discreto in forma «ingresso-uscita»
Analisi.

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Equazioni alle differenze (EaD)

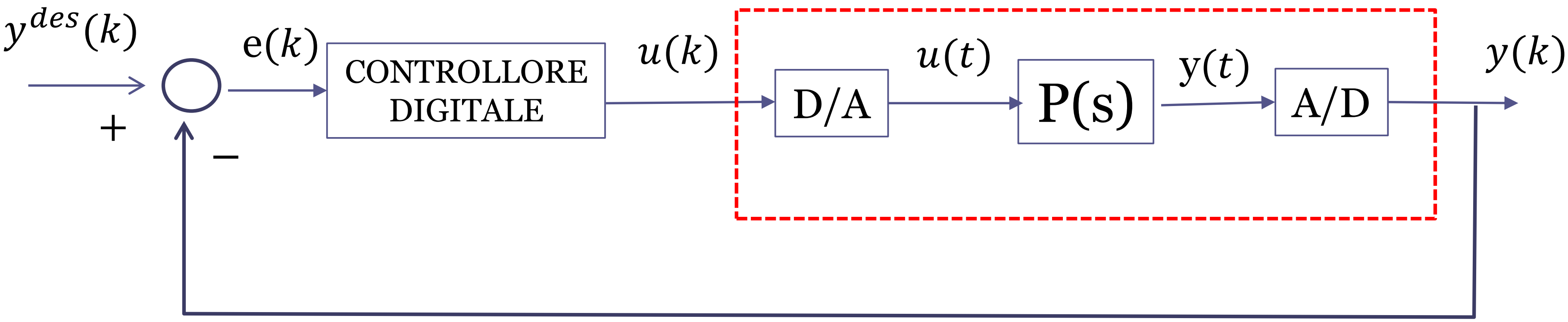
Nei sistemi di controllo digitale, si impiegano modelli matematici che mettono in relazione fra loro sequenze numeriche

Tali modelli matematici vengono impiegati sia per caratterizzare il processo da controllare:



che per caratterizzare il controllore

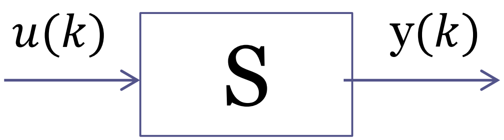
Ricordiamo, infatti, la struttura di un sistema di controllo digitale in retroazione (in realtà una delle possibili strutture) introdotta e discussa nella lezione introduttiva.



*Sistema di controllo digitale **in retroazione sull'uscita**, in cui il processo da controllare è espresso attraverso la sua Funzione di trasferimento P(s)*

Analisi di sistemi a tempo discreto espressi in forma «ingresso-uscita»

Concentriamoci per il momento sulla caratterizzazione di sistemi a tempo discreto «SISO» (single-input-single-output) secondo l'approccio dei modelli «ingresso-uscita»



$u(k), y(k)$ sono delle sequenze numeriche scalari

Nella forma più generale, una **equazione alle differenze** assume la forma

$$y(k) = \Phi(k, y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n), u(k), u(k-1), \dots, u(k-m))$$

che esprime il campione attuale della variabile di uscita attraverso una generica funzione $\Phi()$ della variabile temporale k, degli n campioni precedenti dell'uscita, del campione attuale $u(k)$ dell'ingresso, e degli m campioni precedenti dell'ingresso.

Ad es:

$$y(k) = k + (k+1)\sin(y(k-1)) + y(k-2)u(k) + u^2(k-1)$$

La precedente EaD risulta essere definita mediante una funzione non lineare.

Nell'ambito del presente corso ci interessiamo a sistemi a tempo discreto lineari e stazionari , descritti mediante EaD lineari ed a coefficienti costanti

Esistono diverse forme equivalenti per le EaD lineari a coeff. costanti

Forma standard in avanti

$$a_n\, y(k+n) + \ldots + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = b_m\, u(k+m) + \ldots + b_1\, u(k+1) + b_0\, u(k)$$

In cui

In cui	$k \in \mathbb{Z}$	Variabile indipendente temporale
	$y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$	Sequenza di uscita
	$u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$	Sequenza di ingresso
	$a_i, b_i \in \mathbb{R}$	Coefficienti della EaD

In forma compatta $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k+i)$

$\boldsymbol{n}$ ordine della EaD (o, equivalentemente, del sistema a tempo discreto descritto dalla EaD)

Esempio:

$$y(k+2)+2y(k+1)-y(k)=0.5u(k+1)+3u(k)$$

$n=2 \qquad m=1$

$a_2=1 \qquad a_1=2 \qquad a_0=-1$

$b_1=0.5 \qquad b_0=3$

N.B. Affinché una EaD sia causale deve valere la diseguaglianza $n \geq m$

Esempio: $y(k)=u(k+1)+2u(k) \qquad n=0 \qquad m=1$

L'uscita all'istante k dipende da valori «futuri» della sequenza di ingresso. Nessun sistema fisico in natura può essere descritto da una EaD con m>n.

Forma standard all'indietro

$$a_n\, y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + a_0\, y(k-n) =$$
$$b_m\, u(k-n+m) + b_{m-1}\, u(k-n+m-1) + \ldots + b_0\, u(k-n)$$

In forma compatta $$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-n+i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-n+i)$$

Tale forma è ottenuta semplicemente ritardando di n passi ciascun termine di ingresso e uscita della forma standard in avanti

Esempio

La EaD del precedente esempio $y(k+2) + 2y(k+1) - y(k) = 0.5u(k+1) + 3u(k)$ è riscritta in forma std all'indietro come segue:

$$y(k) + 2y(k-1) - y(k-2) = 0.5u(k-1) + 3u(k-2)$$

$$n = 2 \qquad m = 1$$

$$a_2 = 1 \qquad a_1 = 2 \qquad a_0 = -1 \qquad b_1 = 0.5 \qquad b_0 = 3$$

La seguente rappresentazione grafica mette in luce i campioni attuali, passati e futuri di ingresso e uscita coinvolti nei modelli espressi nella forma standard in avanti e all'indietro

$$y_{k+n} \quad y_{k+n-1} \quad \dots \quad y_{k+m} \quad \dots \quad y_{k+1} \quad y_k \quad y_{k-1} \quad \dots \quad y_{k-n+m} \quad \dots \quad y_{k-n} \quad y_{k-n-1}$$

$$u_{k+n} \quad u_{k+n-1} \quad \dots \quad u_{k+m} \quad \dots \quad u_{k+1} \quad u_k \quad u_{k-1} \quad \dots \quad u_{k-n+m} \quad \dots \quad u_{k-n} \quad u_{k-n-1}$$

Forma standard in avanti **Forma standard all'indietro**

Forma standard in avanti

$$a_n\, y(k+n) + \ldots + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = b_m\, u(k+m) + \ldots + b_1\, u(k+1) + b_0\, u(k)$$

Forma standard all'indietro

$$a_n\, y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + a_0\, y(k-n) = b_m\, u(k-n+m) + b_{m-1}\, u(k-n+m-1) + \ldots + b_0\, u(k-n)$$

Le due aree rettangolari sono ottenute mediante «traslazione di n campioni» verso destra (o sinistra)

Nello studio dei **filtri digitali** si è soliti impiegare una rappresentazione ancora differente, seppur completamente equivalente, in cui il modello standard all'indietro viene riscritto in forma esplicita, isolando cioè alla sinistra dell'uguale il campione corrente $y(k)$ della sequenza di uscita:

Forma standard per filtri digitali (caso m=n)

$$y(k) = a'_1\, y(k-1) + \ldots + a'_n\, y(k-n) + b'_0\, u(k) + b'_1\, u(k-1) \ldots + b'_n\, u(k-n)$$

$$a'_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad a'_2 = -\frac{a_{n-2}}{a_n} \qquad \ldots \qquad a'_n = -\frac{a_0}{a_n}$$

$$b'_0 = \frac{b_n}{a_n} \qquad b'_1 = \frac{b_{n-1}}{a_n} \qquad \ldots \qquad b'_n = \frac{b_0}{a_n}$$

Esempio

Un piano di investimento, prevede un tasso di interesse annuo costante del 100α % e la possibilità di versare o prelevare capitale alla fine di ogni anno.

Siano:
y(k) il capitale disponibile all'inizio dell'anno k
u(k) il versamento/prelievo alla fine dell'anno k

$$y(k) = (1+\alpha)\, y(k-1) + u(k-1),$$

che in **forma standard all'indietro** assume la forma

$$y(k) - (1+\alpha)\, y(k-1) = u(k-1)$$

Ordine $n = 1$ $m = 0$

$a_1 = 1$ $a_0 = -(1+\alpha)$ $b_0 = 1$

In **forma standard in avanti** il modello diviene

$$y(k+1)-(1+\alpha)y(k)=u(k)$$

Tasso di interesse al 20%: $\alpha = 0.2$

$u(k) = C = 5\ k€$ Alla fine di ogni anno si versano ulteriori 5000 €

$$y(k+1) = 1.2y(k) + 5$$

Calcoliamo per via numerica la sequenza di uscita

Condizione iniziale $y(0) = 10\ k€$ Capitale iniziale (in migliaia di Euro)

$$y(0) = 10\ k€$$

$$y(1) = 1.2y(0) + u(0) = 1.2y(0) + C = 17\ k€$$

$$\boxed{y(k) = ???}$$

$$y(2) = 1.2y(1) + u(1) = (1.2)^2 y(0) + (1.2)C + C = 25.4\ k€$$

$$y(3) = (1.2)^3 y(0) + (1.2)^2 C + (1.2)C + C = 35.48\ k€$$

Si desume facilmente come:

$$y(k) = (1.2)^k y(0) + C \sum_{i=0}^{k-1} (1.2)^i$$

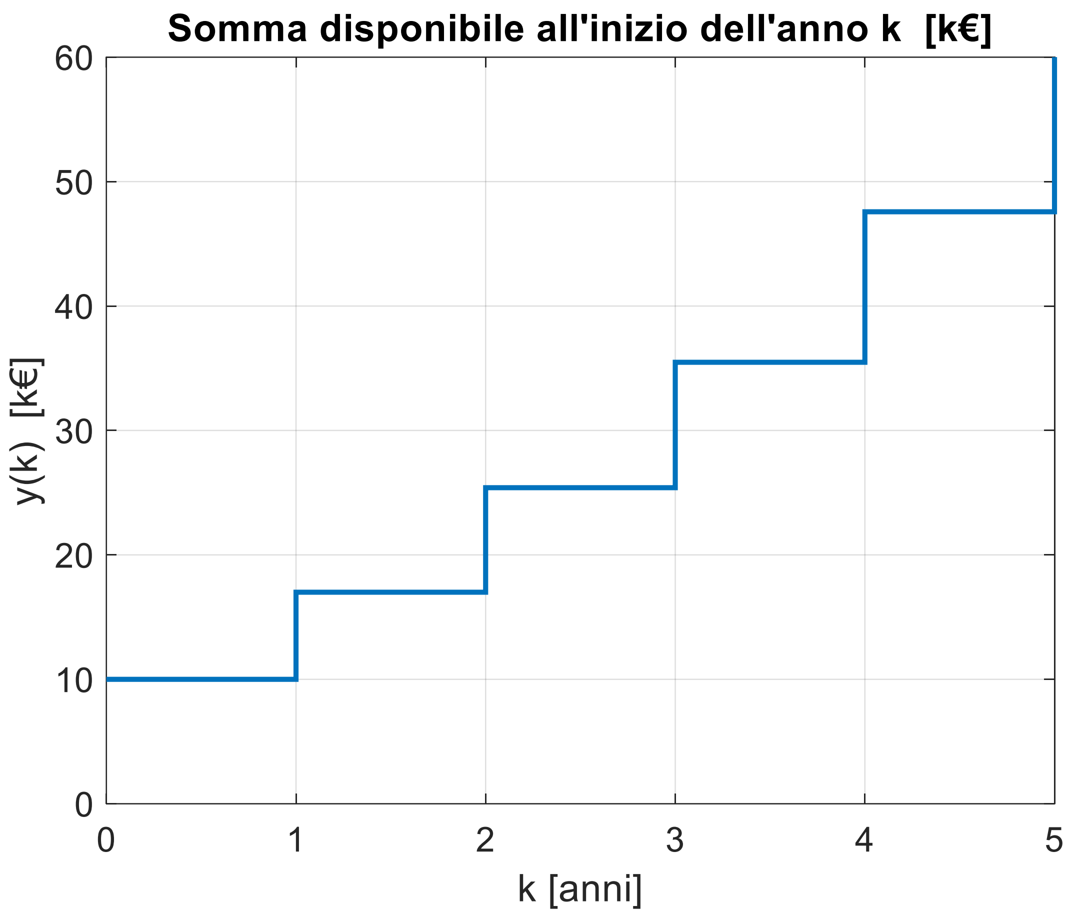
Sostituendo i valori assegnati di $y(0)$ e C: $$y(k) = 10(1.2)^k + 5 \sum_{i=0}^{k-1} (1.2)^i$$

Applicando la nota formula $$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

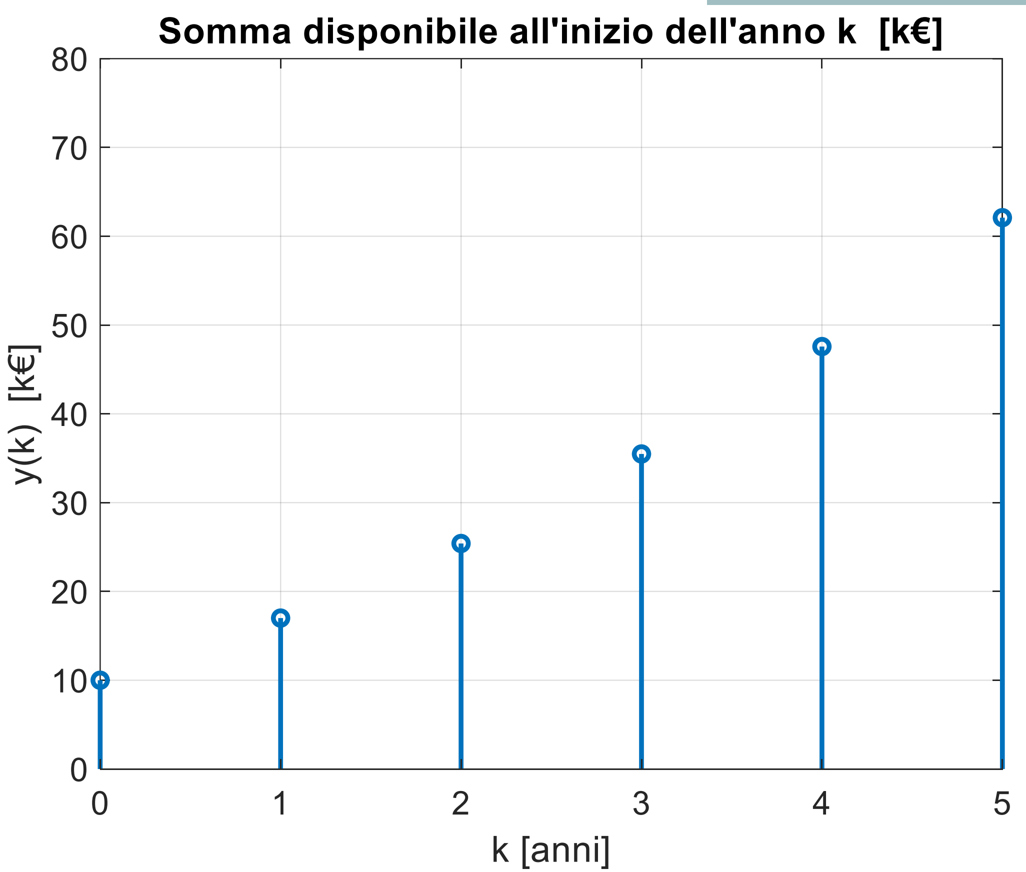
Si ottiene

$$y(k) = (1.2)^k y(0) + 5 \frac{1 - (1.2)^k}{1 - 1.2} = (1.2)^k [y(0) + 25] - 25$$
$$= 35(1.2)^k - 25$$

In casi piu complicati, non si riesce a determinare con facilità l'espressione generica della sequenza di uscita all'istante k. Svilupperemo da qui a breve metodi formali per risolvere in maniera sistematica equazioni alle differenze finite.




```
k=0:5;
y=35*(1.2).^k-25;
stairs(k,y,'LineWidth',2),grid
axis([0 5 0 60])
xlabel('k [anni]')
ylabel('y(k)  [k€]')
title('Somma disponibile all''inizio dell''anno k  [k€]')
set(gca,'FontSize',14)
```




```
k=0:5;
y=35*(1.2).^k-25;
stem(k,y,'LineWidth',2),grid
axis([0 5 0 80])
xlabel('k [anni]')
ylabel('y(k)  [k€]')
title('Somma disponibile all''inizio dell''anno k  [k€]')
set(gca,'FontSize',14)
```

Risoluzione per via analitica di Equazioni alle Differenze Finite

Assegnata una EaD, in una qualunque delle forme standard presentate in precedenza, si desidera determinare l’espressione analitica della sequenza di uscita $y(k)$ per ogni valore di k nota la sequenza di ingresso $u(k)$ e noto un opportuno set di condizioni iniziali.

Il problema si declina in maniera lievemente diversa in funzione della forma considerata per l’equazione alle differenze, se in avanti o all’indietro.

Riferiamoci alla **forma std. all'indietro**

$$a_n\, y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + a_0\, y(k-n) =$$

$$b_m\, u(k-n+m) + b_{m-1}\, u(k-n+m-1) + \ldots + b_0\, u(k-n)$$

Problema:

Assegnate le IC (Initial Conditions): $y(-1)$ $y(-2)$ … $y(-n)$

Nota la sequenza di ingresso $\mathrm{u}(k)$ per $k \geq -n$

Determinare $y(k)$ per $k \geq 0$

Per quanto riguarda la **forma std. in avanti**

$$a_n\, y(k+n) + \ldots + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = b_m\, u(k+m) + \ldots + b_1\, u(k+1) + b_0\, u(k)$$

Problema:

Assegnate le IC (Initial Conditions): $y(0)$ $y(1)$ … $y(n-1)$

Nota la sequenza di ingresso $\mathrm{u}(k)$ per $k \geq 0$

Determinare $y(k)$ per $k \geq n$

La linearità della equazione garantisce che la soluzione puo essere espressa mediante la somma fra due termini distinti

$$y(k) = y_\ell(k) + y_f(k).$$

Il termine $y_\ell(k)$, detto **evoluzione libera**, rappresenta per la risposta del sistema a partire dalle condizioni iniziali qualora la sequenza di ingresso $u(k)$ sia identicamente nulla.

Il termine $y_f(k)$, detto **evoluzione forzata**, rappresenta per la risposta del sistema a partire dalle condizioni iniziali nulle sotto l'effetto forzante della sequenza di ingresso $u(k)$

Impariamo a determinare per via analitica l'espressione della evoluzione libera.

Circa la determinazione della espressione della evoluzione forzata ci arriveremo piu avanti in quanto sarà necessario ricorrere ad ulteriori strumenti matematici (Z-trasformata) che saranno discussi nel seguito

L’evoluzione libera $y_\ell(k)$ è pertanto soluzione della equazione **omogenea**

$$a_n\, y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + a_0\, y(k-n) = 0$$

o, indifferentemente, della equazione

$$a_n\, y(k+n) + \ldots + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = 0$$

con l’abbinamento delle relative condizioni iniziali.

Introdurremo il concetto fondamentale di **modo**, un segnale (o meglio, un insieme di segnali) che caratterizzano l’evoluzione libera del sistema descritto dalla EaD che si sta risolvendo.

Associamo alla equazione alle differenze omogenea (espressa indifferentemente nella forma «in avanti» o «all'indietro») un polinomio di grado n che viene denominato polinomio caratteristico associato alla EaD

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

Il polinomio caratteristico ha gli **stessi coefficienti** presenti nella equazione alle differenze omogenea.

$$a_n\, y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + a_0\, y(k-n) = 0$$

Essendo un polinomio a coefficienti reali, avrà quindi n radici p_i reali oppure complesse coniugate:

$$P(z) = a_n (z - p_1)(z - p_2) \ldots (z - p_n)$$

Essendo un polinomio a coefficienti reali, avrà quindi n radici p_i reali oppure complesse coniugate:

$$P(z) = a_n(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n)$$

Tali radici non sono necessariamente tutte distinte ma possono avere anche molteplicità ν maggiore di 1.

Si avranno pertanto, in generale, le seguenti r radici distinte

$p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_r$ radici distinte $\quad r \leq n$

$p_i \ (i = 1,2,\dots,r)$ ha molteplicità $\nu_i \quad \sum_{i=1}^{r} \nu_i = n$

Esempio

$$P(z) = z^3 - z^2 - z + 1 = \ (z-1)^2(z+1)$$

$r = 2$ 2 radici distinte

$p_1 = 1$ con molteplicità $\nu_1 = 2$

$p_2 = -1$ con molteplicità $\nu_1 = 1$

Ad ogni radice distinta p_i del polinomio caratteristico $(i = 1,2, \dots, r)$ si associano ν_i funzioni della variabile temporale *k*

Tali funzioni, dette MODI, ci consentiranno di esprimere in forma analitica la risposta libera di una equazione alle differenze finite

La risposta libera di una equazione alle differenze finite risulta infatti essere una semplice combinazione lineare fra tutti i modi associati alle radici del polinomio caratteristico (che in tutto sono n)

I coefficienti di tale combinazione lineare vengono determinati in funzione delle condizioni iniziali, imponendo cioè che la risposta libera le soddisfi.

Modi associati a radici reali e non nulle del polinomio caratteristico

Trattiamo preliminarmente il caso in cui il polinomio caratteristico abbia radici reali tutte diverse da zero.

Sia $p \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ una radice del polinomio caratteristico, e sia ν la sua molteplicità

A tale radice si associano le seguenti ν funzioni del tempo, dette **MODI**

$$p^k$$

$$kp^k$$

$$\vdots$$

$$k^{\nu-1}p^k$$

Esempio

Ritorniamo all'esempio del piano di investimento con tasso di interesse annuo costante trattato in precedenza

$$y(k+1)-(1+\alpha)y(k)=u(k) \qquad y(0)=10\ k€ \qquad \alpha=0.2$$

L'evoluzione libera corrisponde alla soluzione della EaD omogenea

$$y(k+1)-(1+\alpha)y(k)=0 \qquad y(0)=10\ k€ \qquad \alpha=0.2$$

ottenuta azzerando il termine forzante di ingresso, assumendo cioè che alla fine di ogni anno non si versi o prelievi dal conto nessun capitale.

Polinomio caratteristico

$$P(z)=z-(1+\alpha)=z-1.2$$

Radice del polinomio caratteristico

$$P(z) = z - (1 + \alpha) = z - 1.2$$

$r = 1$ 1 radice (ovviamente distinta)

$p_1 = (1 + \alpha)$ con molteplicità $\nu_1 = 1$

Modo: $(1 + \alpha)^k = (1.2)^k$

Evoluzione libera: $y_\ell(k) = A(1 + \alpha)^k = A(1.2)^k$

In cui A è una costante da determinarsi in funzione della condizione iniziale $y(0) = 10\ k€$

Imponendo che $y_\ell(0) = 10$ si ottiene $y_\ell(0) = A = 10$

$y_\ell(k) = 10(1.2)^k$

Coincide con il risultato precedentemente ottenuto ponendo C= 0

Esempio

Modellistica della popolazione animale

Ogni coppia di conigli adulti genera, ogni mese, ℓ coppie di conigli

Ogni coppia di conigli diventa adulta, e quindi in grado di procreare, dopo 1 mese

Si trascura la mortalità dei conigli

Sia y(k) il numero di coppie di conigli al mese k

$$y(k+1) = \underbrace{y(k)}_{\text{coppie di conigli presenti nel mese } k} + \underbrace{\ell y(k-1)}_{\text{Coppie di conigli generate durante il mese } k\text{, pari ad } \ell \text{ volte il numero di conigli presente nel mese } k-1\text{, che diventano «fertili» nel mese } k}$$

coppie di conigli presenti nel mese k

Coppie di conigli generate durante il mese k, pari ad ℓ volte il numero di conigli presente nel mese $k-1$, che diventano «fertili» nel mese k

Il caso $\ell = 1$ origina la celebre «equazione di Fibonacci»

Analizziamo il caso $\ell = 2$

$$y(k+1) = y(k) + 2\, y(k-1)$$

Forma standard in avanti

$$y(k+2) + y(k+1) - 2\, y(k) = 0$$

$n = 2 \qquad a_2 = 1 \qquad a_1 = -1 \qquad a_0 = -2$

Polinomio caratteristico

$$P(z) = z^2 - z - 2$$

Polinomio caratteristico

$$P(z) = z^2 - z - 2$$

Radici del polinomio caratteristico

$$P(z) = z^2 - z - 2 = (z+1)(z-2)$$

$$r = 2$$

$p_1 = -1$ con molteplicità $\nu_1 = 1$

$p_2 = 2$ con molteplicità $\nu_2 = 1$

Modi: $(-1)^k$ 2^k

Evoluzione libera: $y(k) = A_1(-1)^k + A_2 2^k$

In cui A_1, A_2 sono costanti da determinarsi in funzione delle condizioni iniziali

Condizioni iniziali

$y(0) = 1$ 1 coppia di conigli neonata nell'allevamento al mese k=0

$y(1) = 1$ 1 coppia di conigli che è diventata adulta presente nell'allevamento al mese k=1

Calcoliamo A_1 e A_2

$$y(k) = A_1(-1)^k + A_2 2^k$$

$$y(0) = A_1 + A_2 = 1$$

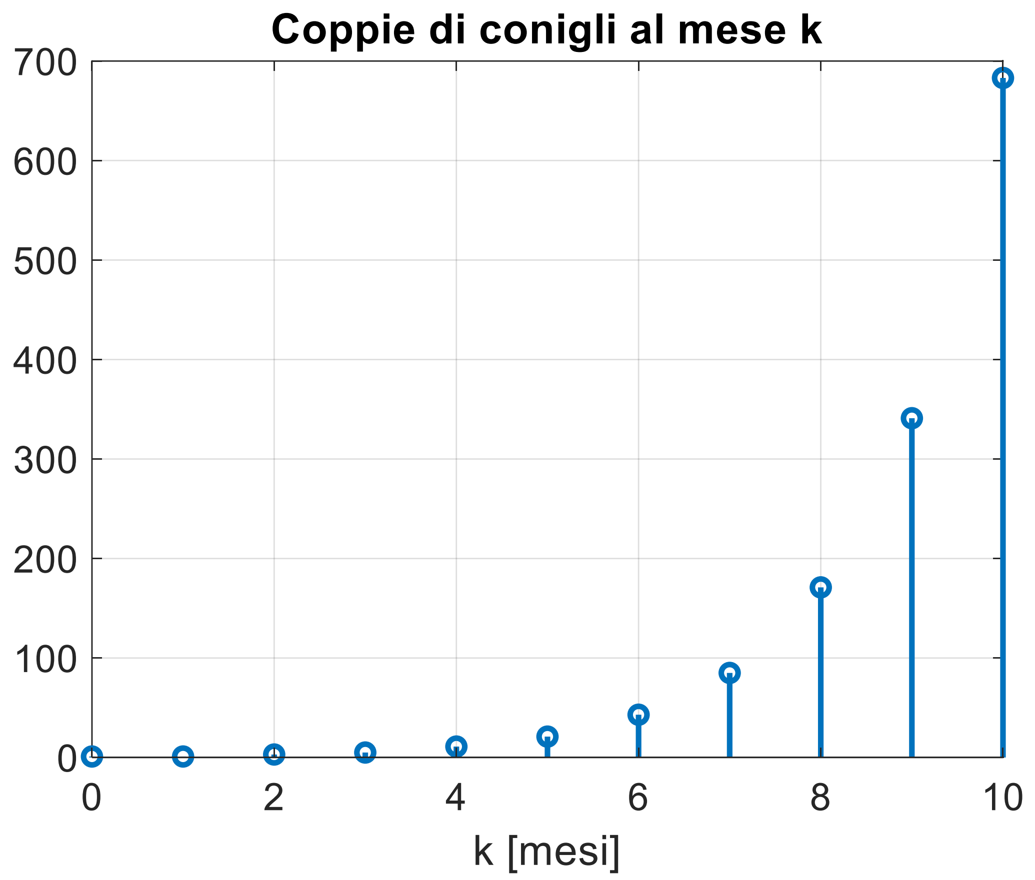
$$y(1) = -A_1 + 2A_2 = 1$$

$\Rightarrow$

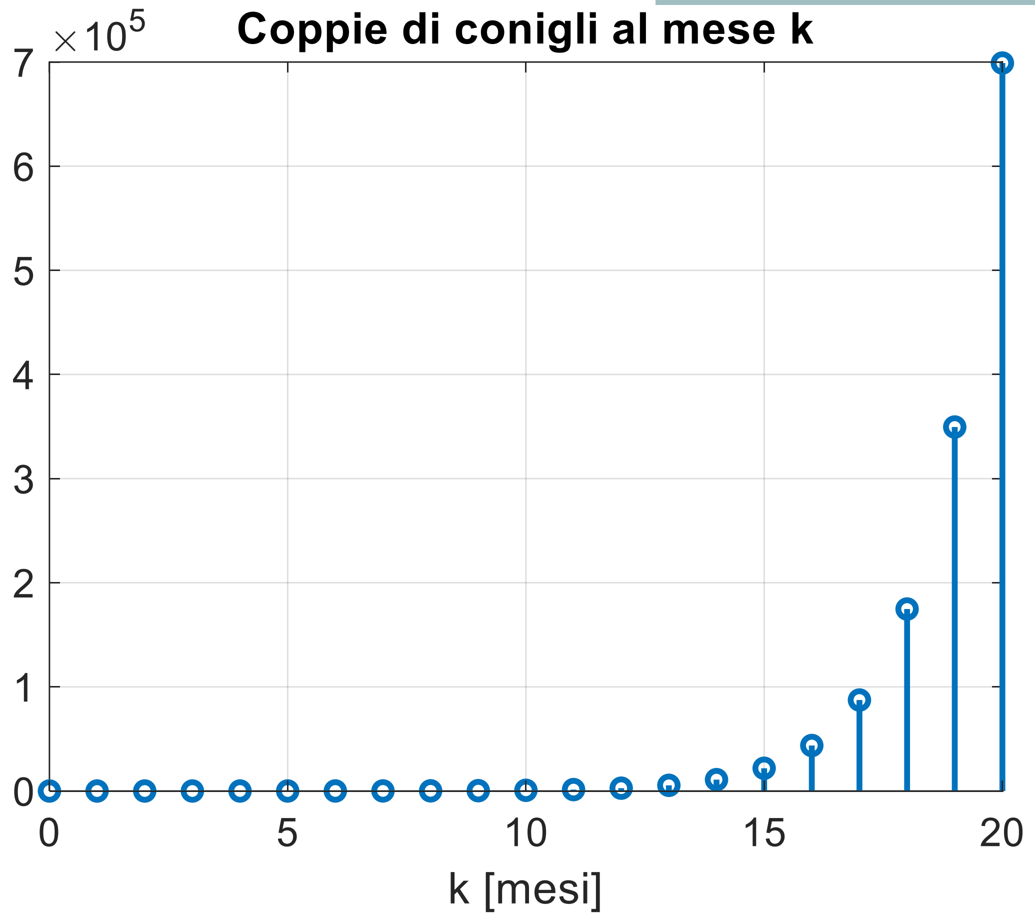
$$A_1 = 1/3$$

$$A_2 = 2/3$$

$$y(k) = \frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}2^k$$




```
k=0:10;
y=(1/3)*(-1).^k+(2/3)*(2.^k);
stem(k,y,'LineWidth',2),grid
xlabel('k [mesi]')
title('Coppie di conigli al mese k')
set(gca,'FontSize',14)
```




```
k=0:20;
y=(1/3)*(-1).^k+(2/3)*(2.^k);
stem(k,y,'LineWidth',2),grid
xlabel('k [mesi]')
title('Coppie di conigli al mese k')
set(gca,'FontSize',14)
```

Esempio

$$3y(k) + 3y(k-1) - 9\,y(k-2) - 15\,y(k-3) - 6\,y(k-4) = 0$$

Polinomio caratteristico

$$P(z) = 3z^4 + 3z^3 - 9z^2 - 15z - 6 = 0$$

Command Window

```
>> roots([3 3 -9 -15 -6])

ans =

   2.0000 + 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
  -1.0000 - 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
```

$$P(z) = (z+1)^3(z-2)$$

$$P(z) = (z+1)^3(z-2)$$

$r = 2$ 2 radici distinte

$p_1 = -1$ con molteplicità $\nu_1 = 3$

$p_2 = 2$ con molteplicità $\nu_2 = 1$

Modi: $(-1)^k$ $k(-1)^k$ $k^2(-1)^k$ 2^k

Evoluzione libera:

$$y(k) = A_1(-1)^k + A_2k(-1)^k + A_3k^2(-1)^k + A_42^k$$

Esercizio

$$y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 1$$

Soluzione: $\quad y(k) = (-1)^k - 2k(-1)^k$

Modi associati a radici nulle del polinomio caratteristico

Consideriamo un caso concreto di un polinomio caratteristico avente una radice nulla

$$P(z) = z(z+1) = z^2 + z$$

Ricordando quella che è l'espressione generica del polinomio caratteristico:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

desumiamo come al polinomio caratteristico P(z) soprariportato siano associati i coefficienti

$$n = 2 \qquad a_2 = 1 \qquad a_1 = 1 \qquad a_0 = 0$$

Se ora ricordiamo quella che è la forma std all'indietro di una eq. alle differenze finite

$$a_n\, y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + a_0\, y(k-n) = 0$$

si ottiene, sostituendo i valori, la seguente EaD associata

$$y(k) + y(k-1) = 0$$

Partendo da un polinomio caratteristico del secondo ordine, abbiamo ottenuto una equazione alle differenze del primo ordine …

$$y(k) + y(k-1) = 0$$

$$n = 1 \qquad a_1 = 1 \qquad a_0 = 1$$

alla quale sappiamo essere associato, procedendo a ritroso, il polinomio caratteristico

$$\mathrm{Q}(z) = z + 1$$

Si noti che il polinomio Q(z) coincide con il polinomio P(z) nel momento in cui da quest'ultimo sia stata rimossa la radice nell'origine.

Non è quindi errato sostenere che ad un polinomio caratteristico avente una o piu radici nulle corrisponde una EaD omogenea che «degenera» in una equazione avente ordine inferiore ad n.

Sembrerebbe quindi che non abbia senso considerare il caso di radici nulle del polinomio caratteristico, in quanto queste conducono ad equazioni alle differenze «degeneri».

Ciò non è completamente vero.

In realtà, il polinomio caratteristico è associato unicamente alla parte della EaD che dipende dalla sequenza di uscita

La necessita di studiare anche la situazione in cui il polinomio caratteristico presenta delle radici nulle emerge se consideriamo equazioni alle differenze nella loro interezza, includendo quindi anche i termini dipendenti dalla sequenza di ingresso.

A partire dalla equazione alle differenze $y(k) + y(k-1) = 0$ «degenere» ricavata nella slide precedente, aggiungiamo anche dei termini che dipendono dalla sequenza di ingresso:

$$y(k) + y(k-1) = u(k-2)$$

Non vi è modo di inquadrare questa EaD in nessuna delle forme standard con n=1.

Non vi è modo di inquadrare questa EaD in nessuna delle forme standard con n=1.

$$y(k) + y(k-1) = u(k-2)$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} y_{k+n} & y_{k+n-1} & \dots & y_{k+m} & \dots & y_{k+1} & y_k & y_{k-1} & \dots & y_{k-n+m} & \dots & y_{k-n} & y_{k-n-1} \\ u_{k+n} & u_{k+n-1} & \dots & u_{k+m} & \dots & u_{k+1} & u_k & u_{k-1} & \dots & u_{k-n+m} & \dots & u_{k-n} & u_{k-n-1} \end{array}$$

Forma standard all'indietro

Notiamo infatti che una equazione alle differenze espressa in forma standard all'indietro con $n = 1$ non può dipendere da campioni dell'ingresso piu «vecchi» di $k - 1$.

Invece l'equazione che stiamo considerando dipende anche dal campione $u(k-2)$

Risulta quindi **inevitabile** ricorrere ad un modello standard almeno del secondo ordine

$$1 \cdot y(k) + 1 \cdot y(k-1) + 0 \cdot y(k-2) = 0 \cdot u(k) + 0 \cdot u(k-1) + 1 \cdot u(k-2)$$

$a_2 = 1$ $\quad a_1 = 1$ $\quad a_0 = 0$ $\quad b_2 = 0$ $\quad b_1 = 0$ $\quad b_0 = 1$

Tutto questo ragionamento è servito a motivare il fatto che ha senso considerare anche il caso di polinomi caratteristici con radici nulle, in quanto alcune equazioni alle differenze conducono inevitabilmente a situazioni di questo tipo

I modi associati a radici nulle del polinomio caratteristico assumono una forma differente a seconda del fatto che l’equazione alle differenze da cui si parte sia espressa nella forma in avanti o all’indietro

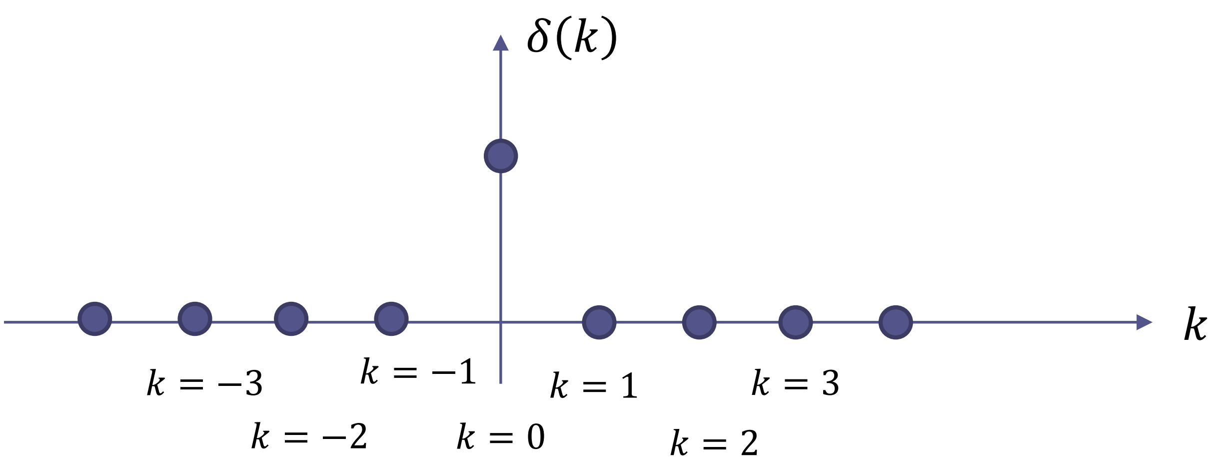
Alla radice $p = 0$ di un polinomio caratteristico di grado n avente molteplicità ν si associano i ν modi:

$$\delta(k + k_0 + n) \qquad \delta(k + k_0 + n - 1) \qquad \dots \qquad \delta(k + k_0 + n - \nu + 1)$$

in cui il coefficiente k_0 vale 0 se l'equazione alle differenze è espressa in forma standard all'indietro, mentre k_0 vale $-n$ se l'equazione alle differenze è espressa in forma standard in avanti.

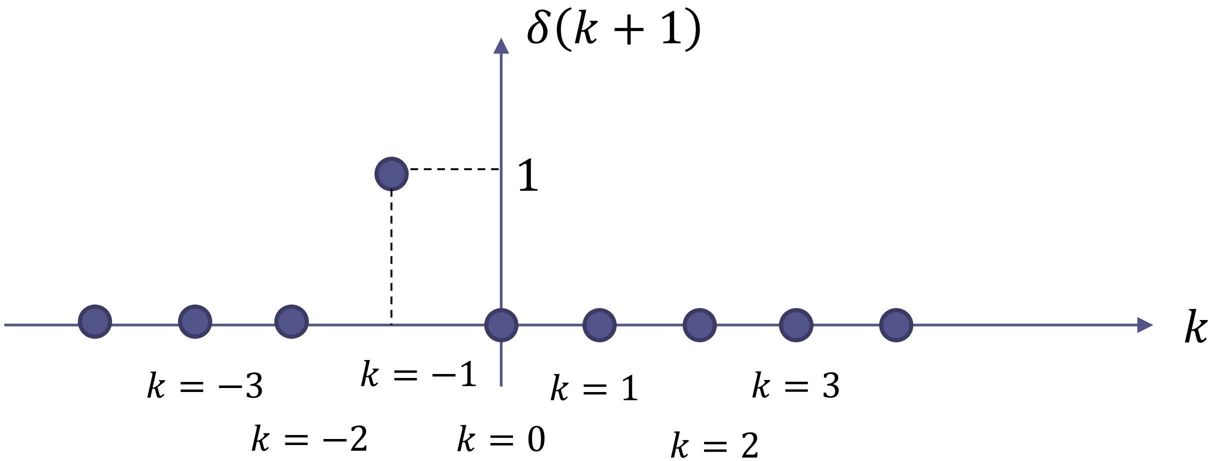
$\delta(k)$ denota la sequenza numerica denominata «Impulso di Kronecker discreto» definita come segue:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

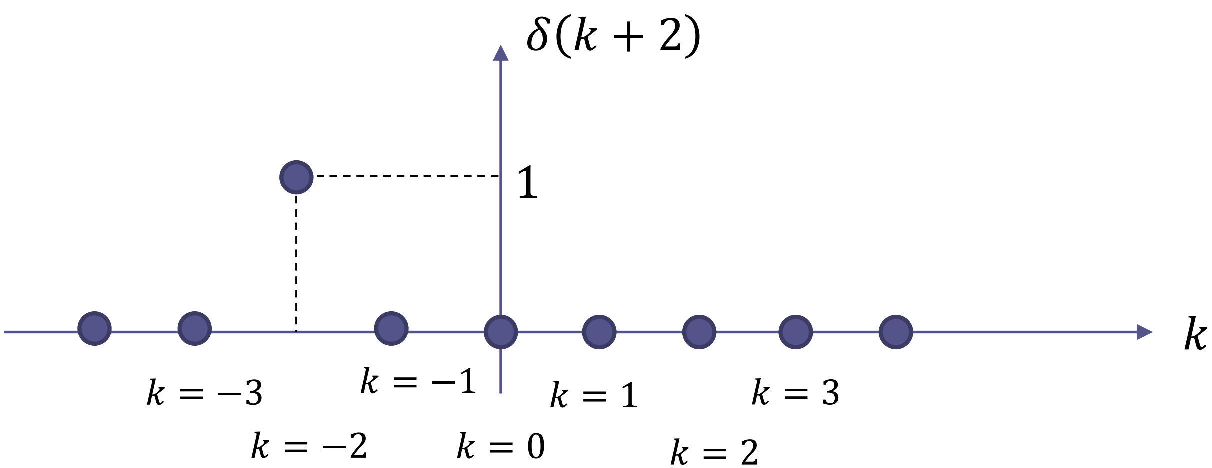


Le sequenze $\delta(k+1), \delta(k+2), \dots, \delta(k+n)$ si ottengono «traslando» verso sinistra di 1, 2 o n passi la sequenza di base

$$\delta(k+1) = \begin{cases} 1 & k = -1 \\ 0 & k \neq -1 \end{cases}$$

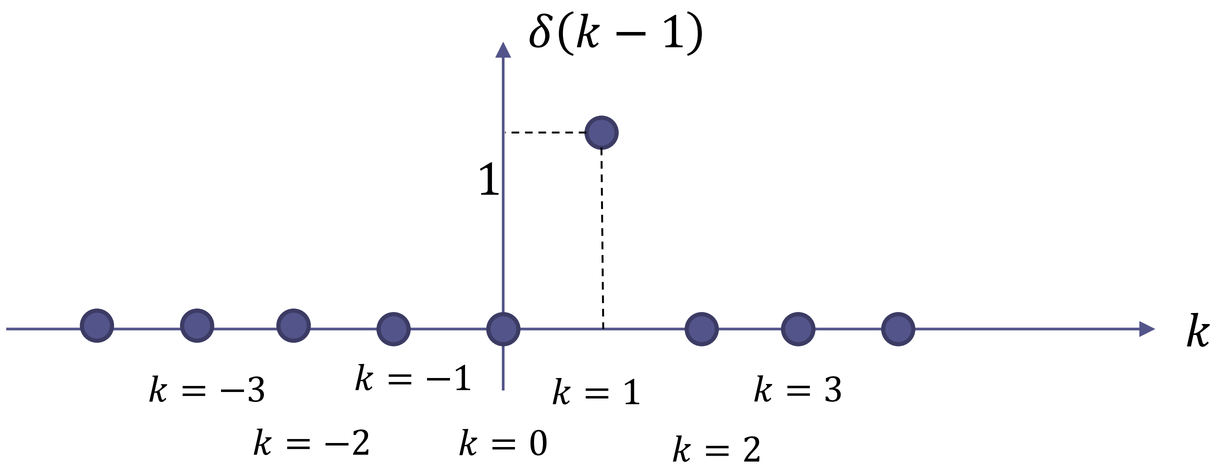


$$\delta(k+2) = \begin{cases} 1 & k = -2 \\ 0 & k \neq -2 \end{cases}$$

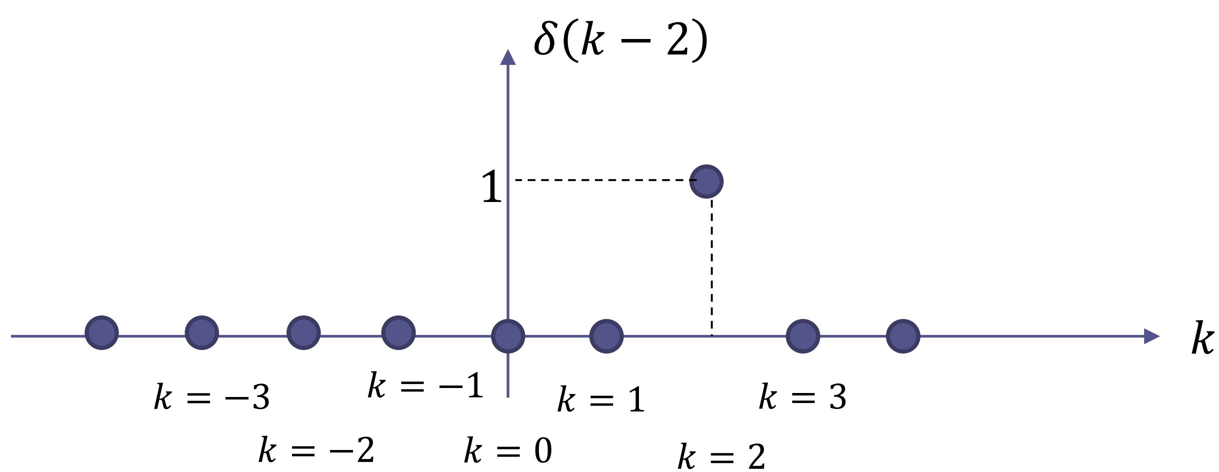


Analogamente, le sequenze $\delta(k-1), \delta(k-2), \ldots, \delta(k-n)$ si ottengono «traslando» verso destra di 1, 2 o n passi la sequenza di base

$$\delta(k-1) = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$$



$$\delta(k-2) = \begin{cases} 1 & k = 2 \\ 0 & k \neq 2 \end{cases}$$



Esempio Determinare l'evoluzione libera della equazione alle differenze

$y(k) + 3y(k-1) = 3u(k-1) - u(k-3)$ $\quad y(-1) = 1 \quad y(-2) = 1 \quad y(-3) = 1$

$n = 3$ $\quad a_3 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_1 = 0 \quad a_0 = 0$

$m = 3$ $\quad b_3 = 0 \quad b_2 = 3 \quad b_1 = 0 \quad b_0 = -1$

Polinomio caratteristico: $P(z) = z^3 + 3z^2 = (z+3)z^2$

$r = 2$ 2 radici distinte

$p_1 = -3$ con molteplicità $\nu_1 = 1$

$p_2 = 0$ con molteplicità $\nu_2 = 2$

Modi: $(-3)^k$ $\quad \delta(k+3) \quad \delta(k+2)$

Analizziamo un po' meglio la determinazione dei **modi associati alla radice nulla del polinomio caratteristico** per questo esempio

La loro espressione generale è:

$$\delta(k + k_0 + n) \qquad \delta(k + k_0 + n - 1) \qquad \cdots \qquad \delta(k + k_0 + n - \nu + 1)$$

L'ordine n della equazione alle differenze è $n = 3$, quindi:

$$\delta(k + k_0 + 3) \qquad \delta(k + k_0 + 2) \qquad \cdots \qquad \delta(k + k_0 + 4 - \nu)$$

L'equazione alle differenze è espressa in forma all'indietro, quindi $k_0 = 0$

$$\delta(k + 3) \qquad \delta(k + 2) \qquad \cdots \qquad \delta(k + 4 - \nu)$$

La molteplicità ν della radice nulla del polinomio caratteristico è $\nu = \nu_2 = 2$

Si ha quindi, come già riportato nella slide precedente

$$\delta(k + 3) \qquad \delta(k + 2)$$

Evoluzione libera:

$$y(k) = A_1(-3)^k + A_2\delta(k+2) + A_3\delta(k+3)$$

Per determinare univocamente l'evoluzione libera, abbiniamo le condizioni iniziali

$$y(-1) = 1 \qquad y(-2) = 1 \qquad y(-3) = 1$$

$$y(-1) = -\frac{A_1}{3} = 1$$

$$y(-2) = -\frac{A_1}{9} + A_2 = 1$$

$$y(-3) = -\frac{A_1}{27} + A_3 = 1$$

$$\Rightarrow$$

$$A_1 = -3$$

$$A_2 = \frac{4}{3}$$

$$A_3 = \frac{10}{9}$$

Modi associati a radici complesse coniugate del polinomio caratteristico

Siano $p = \alpha + j\omega$

$\bar{p} = \alpha - j\omega$

Una coppia di radici complesse coniugate del polinomio caratteristico

E' noto come dei numeri complessi possano essere convenientemente espressi anche in notazione polare $Me^{j\varphi}$ dove M è il modulo del numero complesso mentre φ è la fase

Riscriviamo pertanto la coppia di radici complesse coniugate in forma polare

$$p = \rho e^{j\theta}$$

$$\bar{p} = \rho e^{-j\theta}$$

con

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\theta = atan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Se la molteplicità della coppia di radici complesse coniugate è pari ad uno, ad essa corrisponde la coppia di modi

$$\rho^k sin(\theta k) \qquad \rho^k cos(\theta k)$$

che combinate linearmente fra loro danno luogo, nella risposta libera, ad un contributo espresso come segue

$$A\ \rho^k sin(\theta k) + B\ \rho^k cos(\theta k)$$

in cui A e B sono, al solito, delle costanti da determinarsi in funzione delle condizioni iniziali

Se invece la molteplicità della coppia di radici complesse coniugate è genericamente pari a $\nu \geq 1$, si hanno i modi

$$\rho^k sin(\theta k) \qquad k\rho^k sin(\theta k) \qquad k^2\rho^k sin(\theta k) \qquad \dots \qquad k^{\nu-1}\rho^k sin(\theta k)$$

$$\rho^k cos(\theta k) \qquad k\rho^k cos(\theta k) \qquad k^2\rho^k cos(\theta k) \qquad \dots \qquad k^{\nu-1}\rho^k cos(\theta k)$$

Si noti come l'insieme di modi soprariportato, se viene particolarizzato al caso $\nu = 1$, dia luogo alla medesima coppia di modi riportata nella slide precedente.

Esempio Determinare la soluzione generale della equazione alle differenze

$$2y(k+3) - 3y(k+2) + 2y(k+1) + 2y(k) = 0$$

Polinomio caratteristico: $P(z) = 2z^3 - 3z^2 + 2z + 2$

```
>> roots([2 -3 2 2])

ans =

   1.0000 + 1.0000i
   1.0000 - 1.0000i
  -0.5000 + 0.0000i
```

$r = 2$ 2 radici distinte (di cui una radice reale, ed una coppia di radici complesse coniugate)

$p_1 = -0.5$ con molteplicità $\nu_1 = 1$

$p_{2,3} = 1 \pm j$ con molteplicità $\nu_2 = 1$

Calcoliamo modulo e fase della coppia di radici complesse coniugate

$$p_{2,3} = 1 \pm j \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = atan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = atan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Modi: $(-0.5)^k$ $\quad (\sqrt{2})^k sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)$ $\quad (\sqrt{2})^k cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)$

Soluzione generale

$$y(k) = A_1(-0.5)^k + A_2(\sqrt{2})^k sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) + A_3(\sqrt{2})^k cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)$$

Esercizio Determinare l'evoluzione libera della equazione alle differenze

$$2y(k) - 5y(k-1) + 4\, y(k-2) - y(k-3) = 2u(k-1)$$

$y(-1) = 2$ $\quad$ $y(-2) = 0$ $\quad$ $y(-3) = -1$

Soluzione $y(k) = 0.5\,(0.5)^k + 4 + 3k$