

# Controllo digitale

**Mapping fra il piano  $s$  ed il piano  $z$**

**Ing. Alessandro Pisano**  
`apisano@unica.it`

## Introduzione

Abbiamo visto come, qualora si applichi un processo di campionamento impulsivo, le variabili complesse  $s$  e  $z$  delle rispettive trasformate di Laplace e Z risultino legate dalla relazione:

$$z = e^{sT_c} \qquad X^*(s) = X(z)|_{z=e^{sT}}$$

La trasformazione  $z = e^{sT_c}$  è detta **trasformazione di campionamento**, e gioca un ruolo essenziale nei sistemi di controllo digitale.

Poiché è ben noto come si possa caratterizzare il comportamento di un sistema di controllo a tempo continuo analizzandone le posizioni dei poli e degli zeri nel piano  $s$ , ci si aspetta che uno studio analogo possa essere condotto nel piano  $z$  per i sistemi di controllo digitali

Appare rilevante, quindi, analizzare come vengano «mappate» nel piano  $z$ , per effetto della relazione  $z = e^{sT_c}$ , le regioni del piano  $s$  a cui si è soliti associare determinati comportamenti dinamici di un sistema (ad es., la sovraelongazione che non ecceda una determinata soglia percentuale)

Questo è l'obiettivo primario che ci poniamo in questa lezione. Tali conclusioni saranno particolarmente utili in svariati approcci alla sintesi dei sistemi di controllo digitale.

Analizziamo più nel dettaglio la trasformazione di campionamento.

$$z = e^{sT_c}$$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)\delta(t - kT_c) \quad \text{Campionamento impulsivo}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)z^{-k} \quad \text{Trasformata Z della sequenza campionata}$$

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)e^{-kT_c s} \quad \text{Trasformata di Laplace del segnale campionato impulsivamente}$$

$$X^*(s) = X(z) \Big|_{z=e^{sT_c}}$$

Avevamo anche ricavato che

$$X^*(s) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s - jk\omega_c)$$

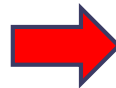
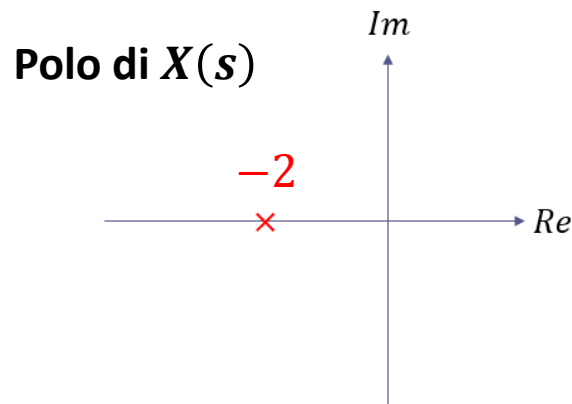
Come sono correlati i poli di  $X^*(s)$  con i poli di  $X(s)$  ?

Facciamo un esempio:

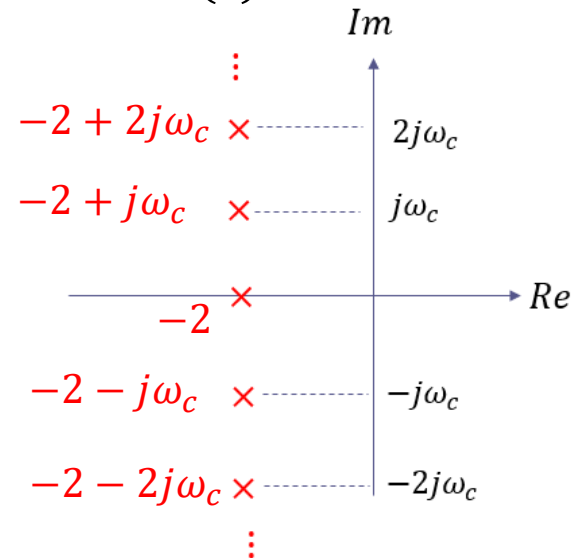
$$x(t) = e^{-2t} \quad X(s) = \frac{1}{s+2} \quad X^*(s) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s - jk\omega_c)$$

$$X^*(s) = \frac{1}{T_c} \left[ \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2-j\omega_c} + \frac{1}{s+2+j\omega_c} + \frac{1}{s+2-2j\omega_c} + \frac{1}{s+2+2j\omega_c} + \dots \right]$$

La relazione  $X^*(s) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s - jk\omega_c)$  ci dice che la TdL del segnale campionato impulsivamente avrà **infiniti poli** ottenuti «traslando» i poli di partenza parallelamente all'asse immaginario di  $\pm\omega_c, \pm2\omega_c, \pm3\omega_c$  etc



**Poli di  $X^*(s)$**



Ora invece ci chiediamo **come sono correlati i poli di  $X^*(s)$  con i poli di  $X(z)$**

Ce lo rivela la relazione  $X^*(s) = X(z)|_{z=e^{sT_c}}$

I poli della  $X(z)$  corrispondono quindi ai poli della  $X^*(s)$  «mappati» dalla trasformazione di campionamento. Sembrerebbe quindi che  $X(z)$  debba avere infiniti poli.

Sappiamo però che , con riferimento all'esempio numerico che stiamo trattando, in cui  $x(t) = e^{-2t}$ , la sequenza  $x(k) = e^{-2kT_c}$  che si ottiene campionando il segnale a tempo continuo con periodo  $T_c$  ha Z-trasformata

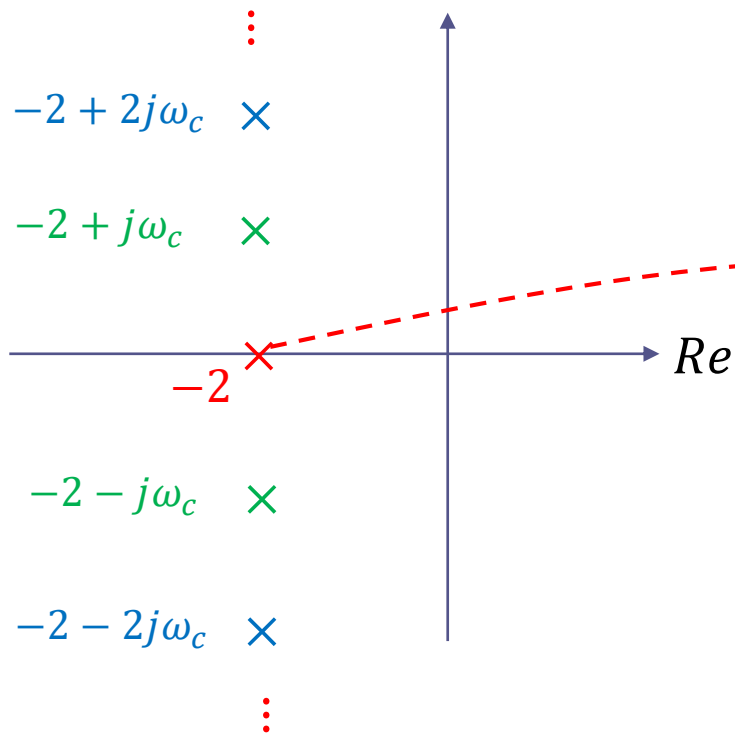
$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-2T_c}}$$

Sviluppiamo i conti per analizzare questa apparente incongruenza.

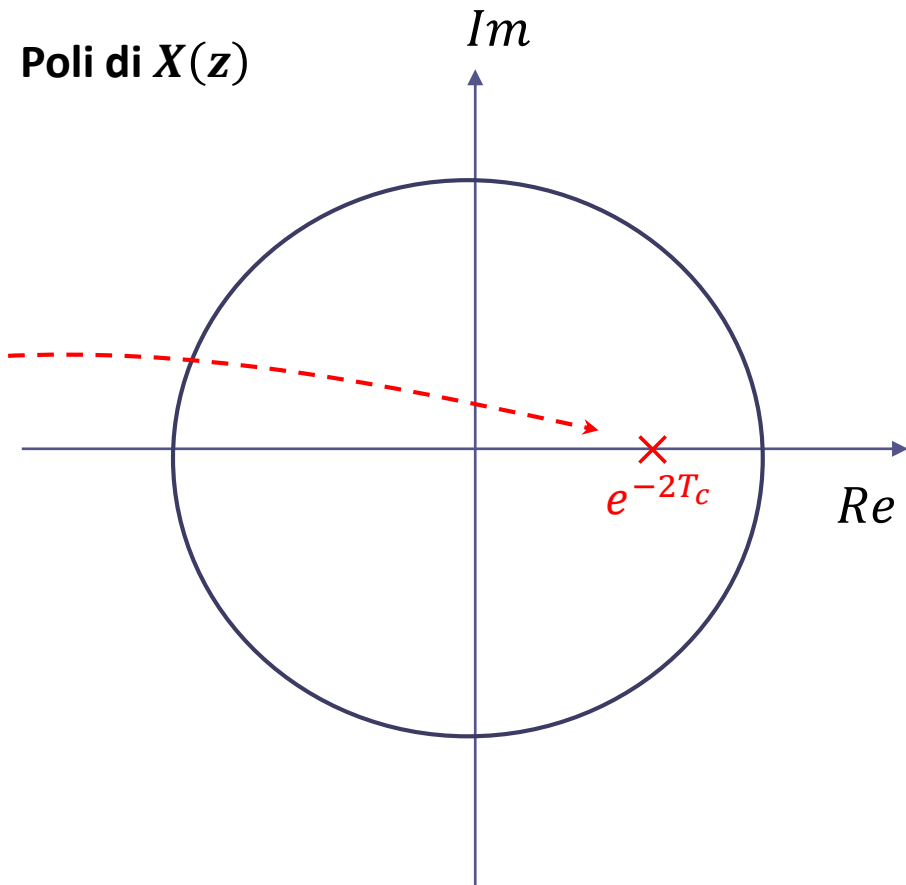
Il polo reale negativo  $p = -2$  della  $X^*(s)$  viene mappato nel polo  $e^{pT_c} = e^{-2T_c}$  della  $X(z)$

Il polo reale negativo  $p = -2$  della  $X^*(s)$  viene mappato nel polo di  $X(z)$   $e^{pT_c} = e^{-2T_c}$

Poli di  $X^*(s)$



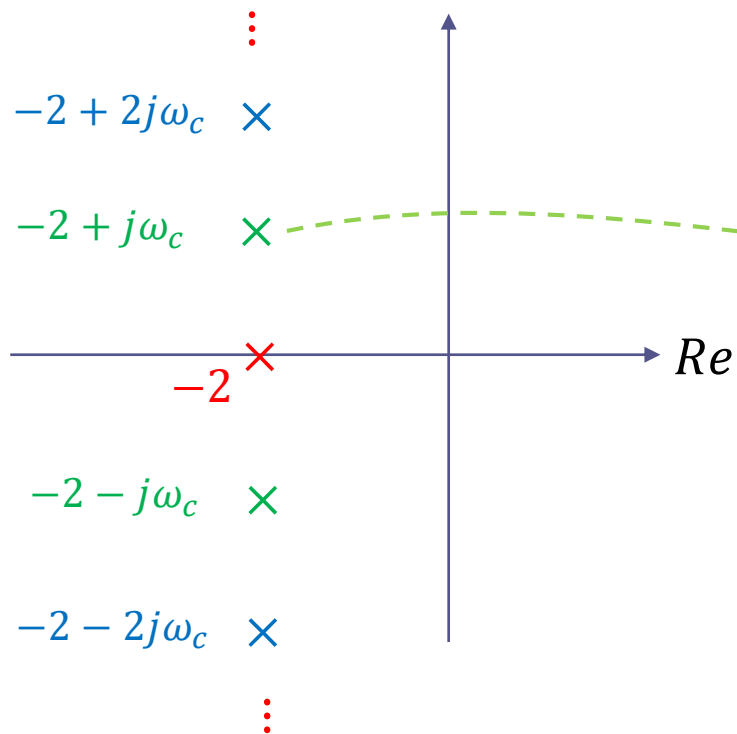
Poli di  $X(z)$



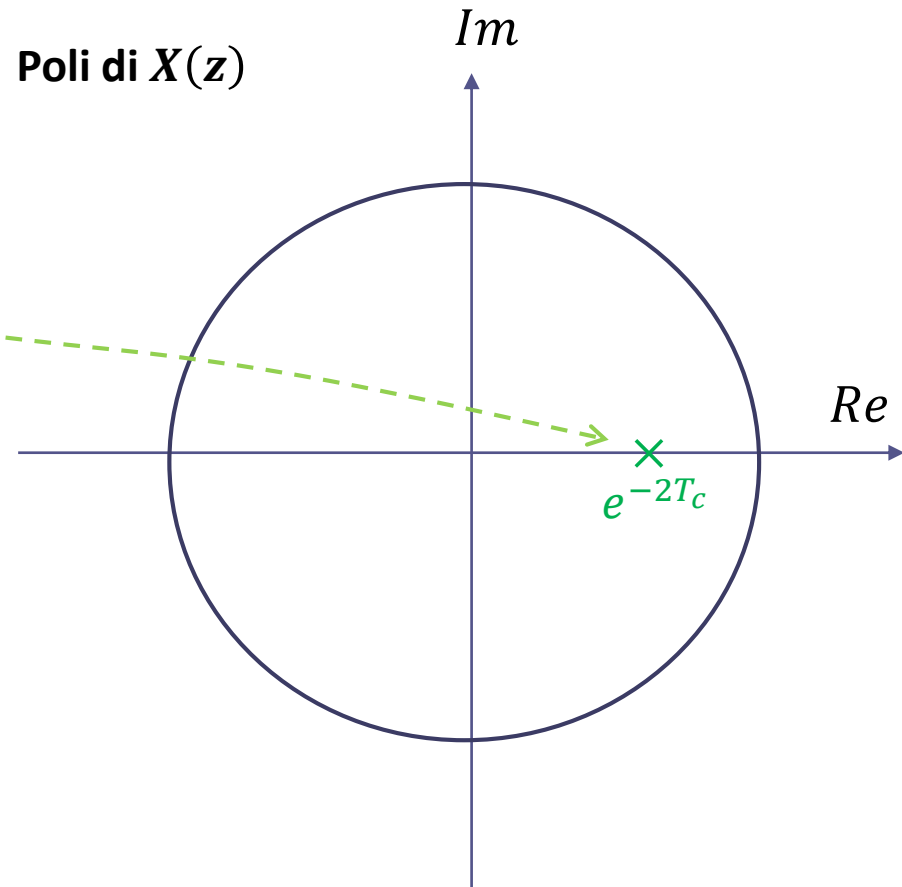
Il polo complesso  $p = -2 + j\omega_c$  della  $X^*(s)$  viene mappato nel polo di  $X(z)$ :

$$e^{pT_c} = e^{(-2+j\omega_c)T_c} = e^{-2T_c} e^{j\omega_c T_c} = e^{-2T_c} e^{j2\pi} = e^{-2T_c} \quad \text{N.B.} \quad \omega_c \triangleq \frac{2\pi}{T_c} ; \quad e^{j2\pi} = 1$$

**Poli di  $X^*(s)$**

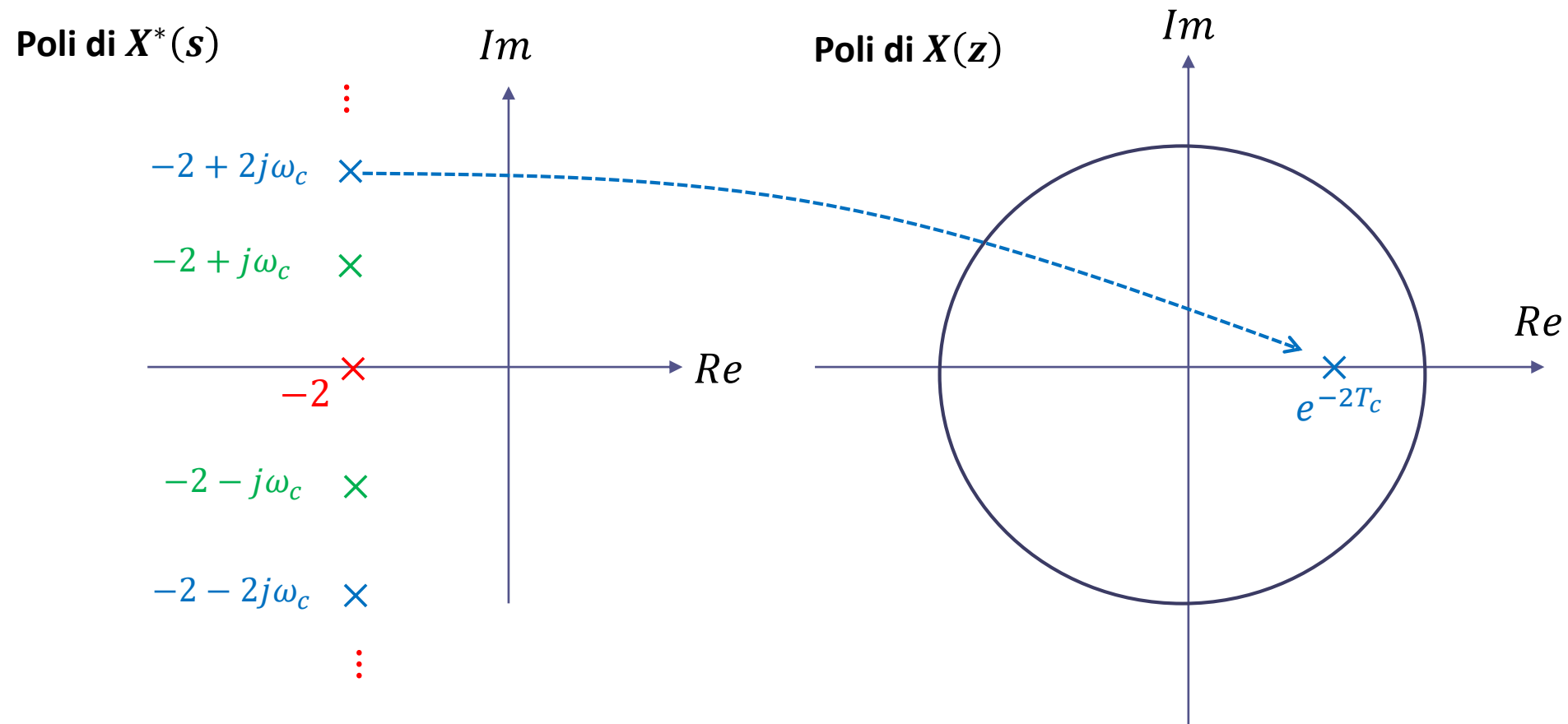


**Poli di  $X(z)$**



Il polo complesso  $\mathbf{p} = -2 + 2j\omega_c$  della  $X^*(s)$  viene mappato nel polo

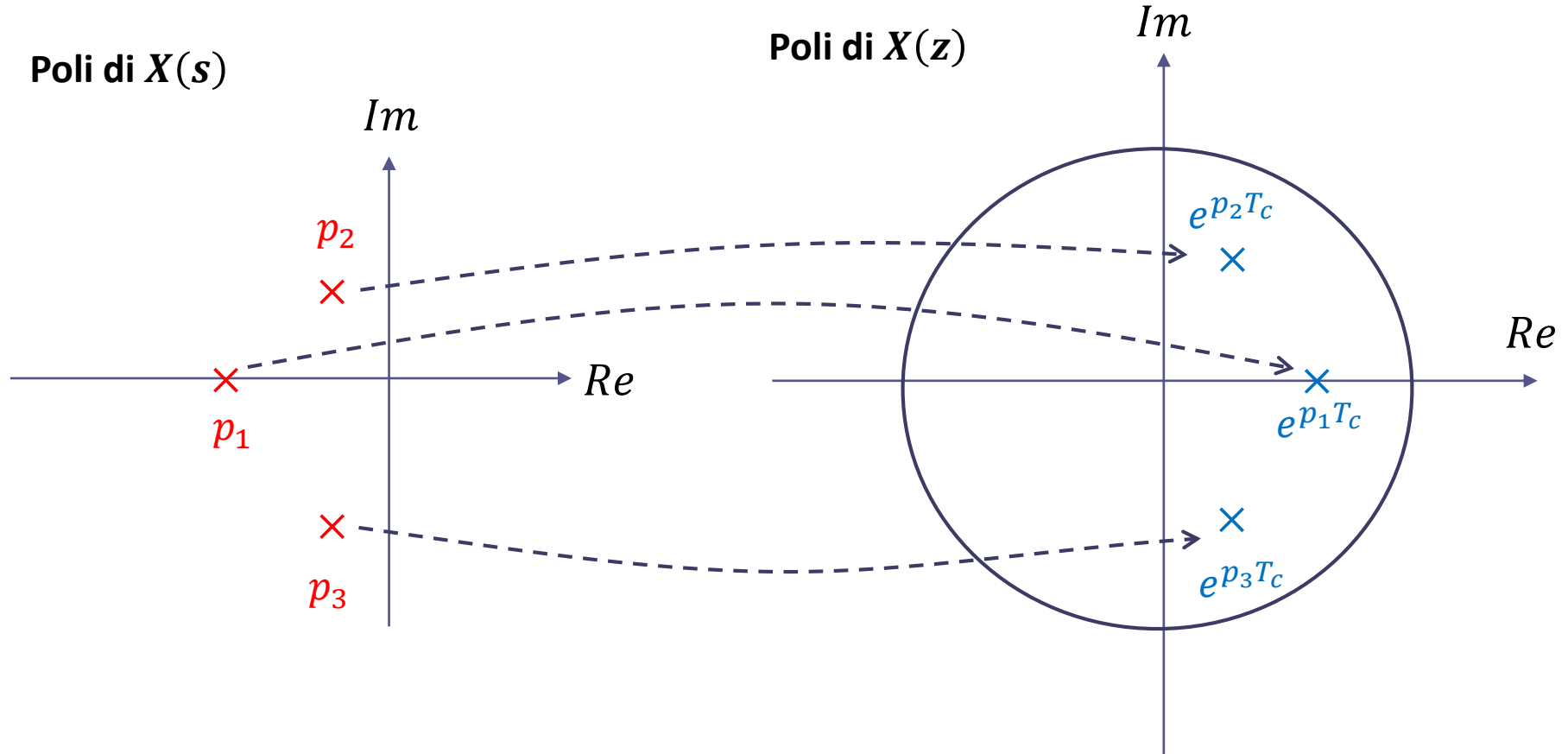
$$e^{pT_c} = e^{(-2+2j\omega_c)T_c} = e^{-2T_c} e^{2j\omega_c T_c} = e^{-2T_c} e^{j4\pi} = e^{-2T_c}$$





Tutti i poli della  $X^*(s)$  che differiscono fra loro per  $\pm j\omega_c, \pm 2j\omega_c, \pm 3j\omega_c$  vengono mappati nel **medesimo punto del piano Z**

Abbiamo in definitiva mostrato come la  $X(z)$  abbia poli determinabili a partire da quelli della  $X(s)$  **mappati attraverso la trasformazione di campionamento**  $z = e^{sT_c}$



Analizziamo più a fondo la trasf. di campionamento

Posto genericamente  $s = \sigma + j\omega$ , si ha  $\mathbf{z} = e^{(\sigma + j\omega)T_c} = e^{\sigma T_c} e^{j\omega T_c}$

Il modulo di  $z$  vale  $|z| = e^{\sigma T_c}$  *N.B.*  $|e^{j\omega T_c}| = 1$

**L'origine del piano  $s$  ( $\sigma = \omega = 0$ ) viene mappata nel punto  $z = 1$**

**I punti del piano  $s$  a parte reale negativa ( $\sigma < 0$ ) sono mappati nei punti del piano  $z$  all'interno del disco unitario**

**I punti del piano  $s$  collocati sull'asse immaginario, aventi cioè parte reale nulla ( $\sigma = 0$ ) hanno modulo unitario sono in corrispondenza con i punti del piano  $z$  collocati sul perimetro del disco unitario**

**I punti del piano  $s$  a parte reale positiva ( $\sigma > 0$ ) sono in corrispondenza con i punti del piano  $z$  all'esterno del disco unitario**

Ora valutiamo se la trasformazione di campionamento è biunivoca o meno (in realtà abbiamo già visto nell'esempio della funzione  $x(t) = e^{-2t}$  che non lo è)

Dalla formula di Eulero si deriva che

$$e^{j\omega T_c} = \cos(\omega T_c) + j \sin(\omega T_c) = e^{j(\omega T_c + 2k\pi)} = e^{jT_c(\omega + k\frac{2\pi}{T_c})} = e^{jT_c(\omega + k\omega_c)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

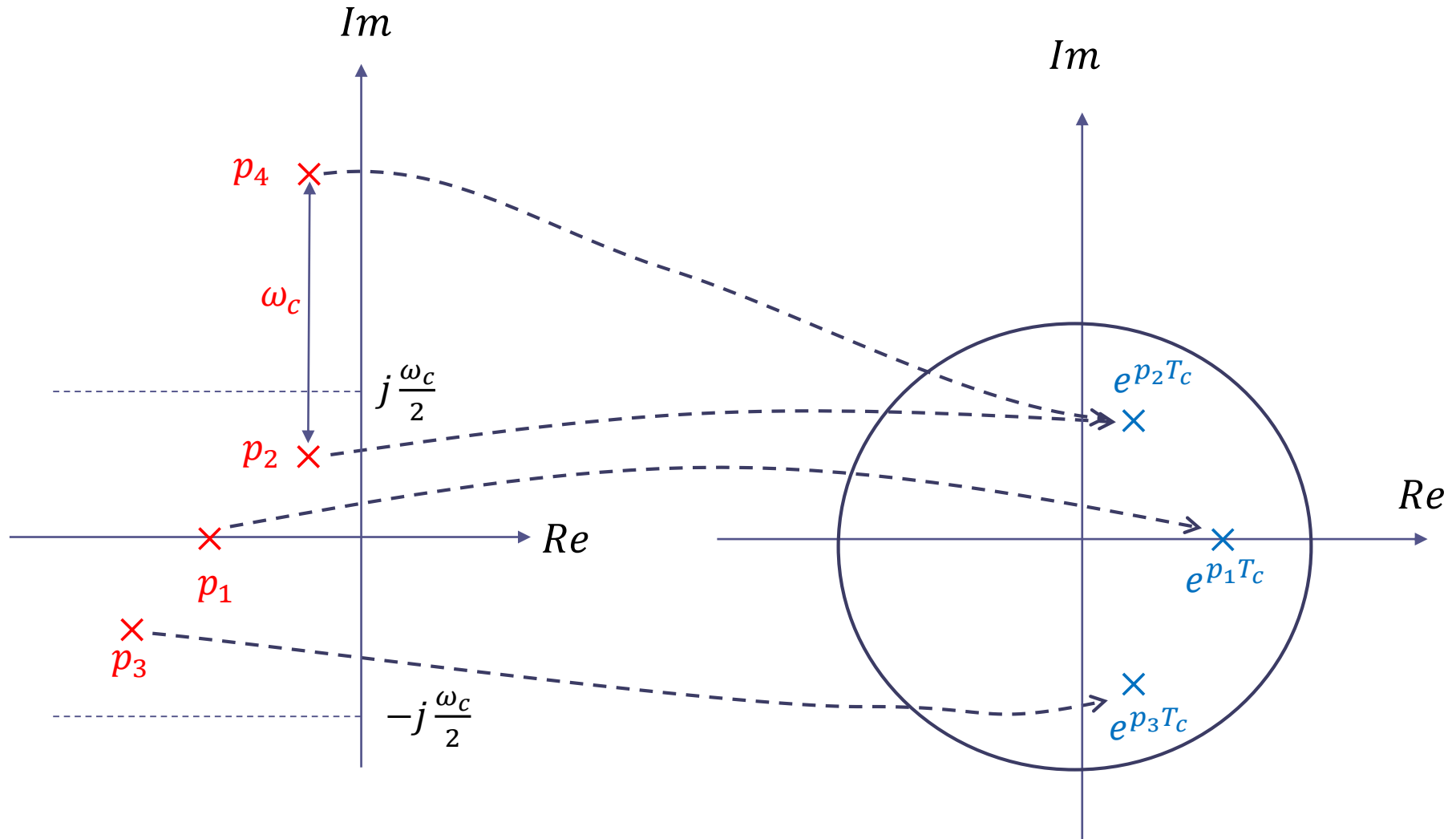
Inserendo tale eguaglianza nella trasformazione di campionamento si ha

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T_c} = e^{\sigma T_c} e^{j\omega T_c} = e^{\sigma T_c} e^{jT_c(\omega + k\omega_c)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

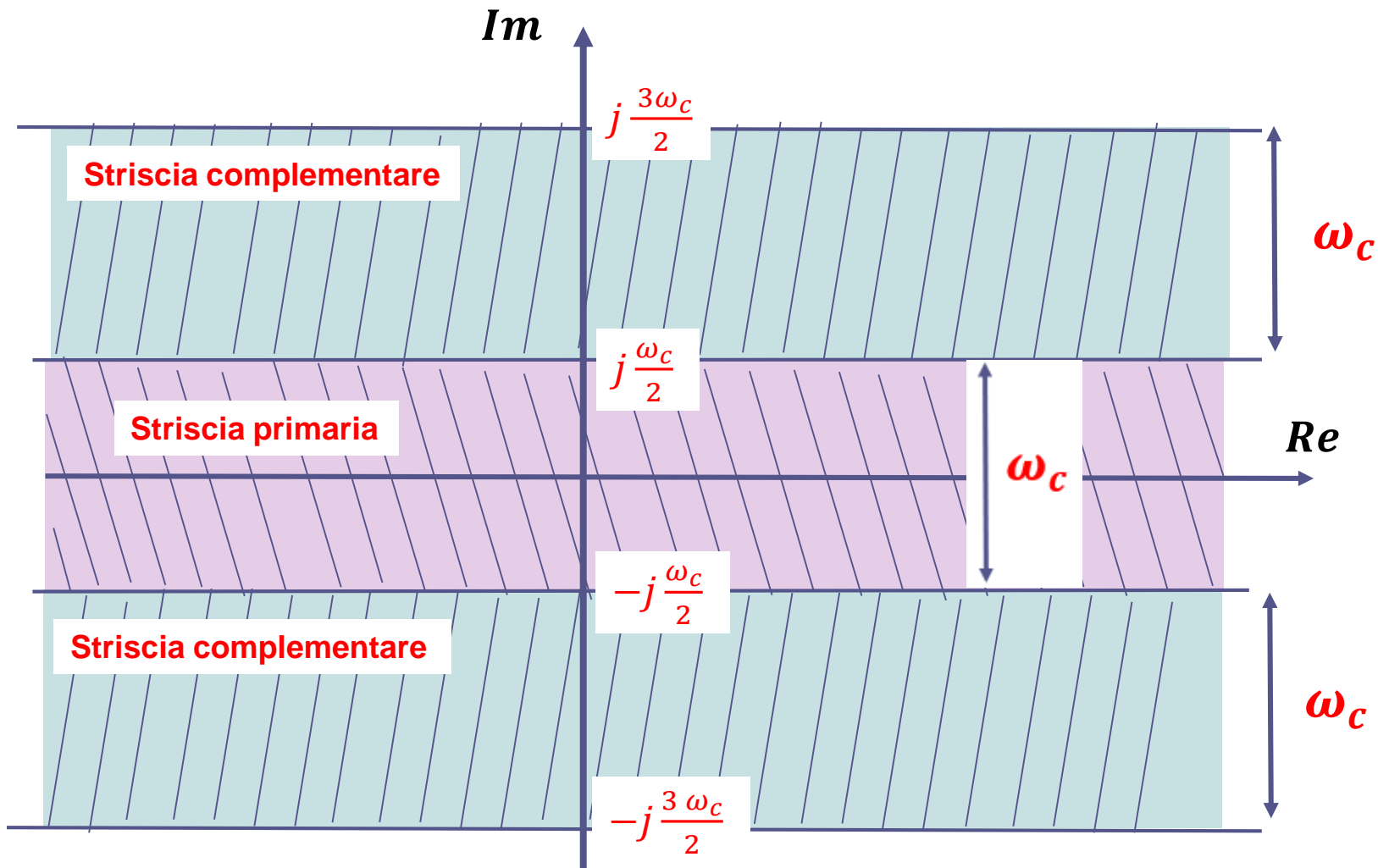
Quindi, **esistono infiniti punti del piano  $s$  che vengono mappati nel medesimo punto del piano  $Z$ .**

In particolare, **due punti del piano  $s$  la cui parte immaginaria differisca per un multiplo intero della pulsazione di campionamento  $\omega_c$  vengono mappati dalla trasformazione di campionamento nel medesimo punto del piano  $Z$ .**

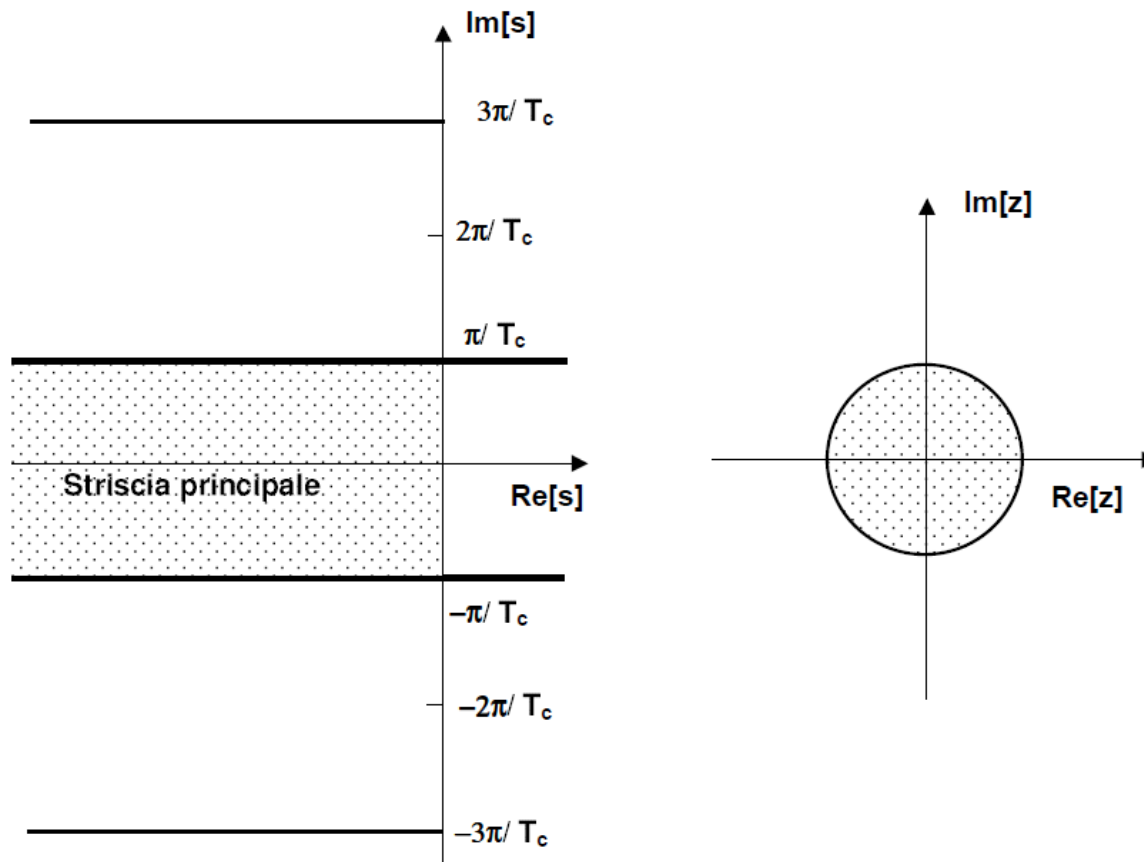
Due punti del piano  $s$  la cui parte immaginaria differisca per un multiplo intero della pulsazione di campionamento  $\omega_c$  vengono mappati dalla trasformazione di campionamento nel medesimo punto del piano  $Z$ .



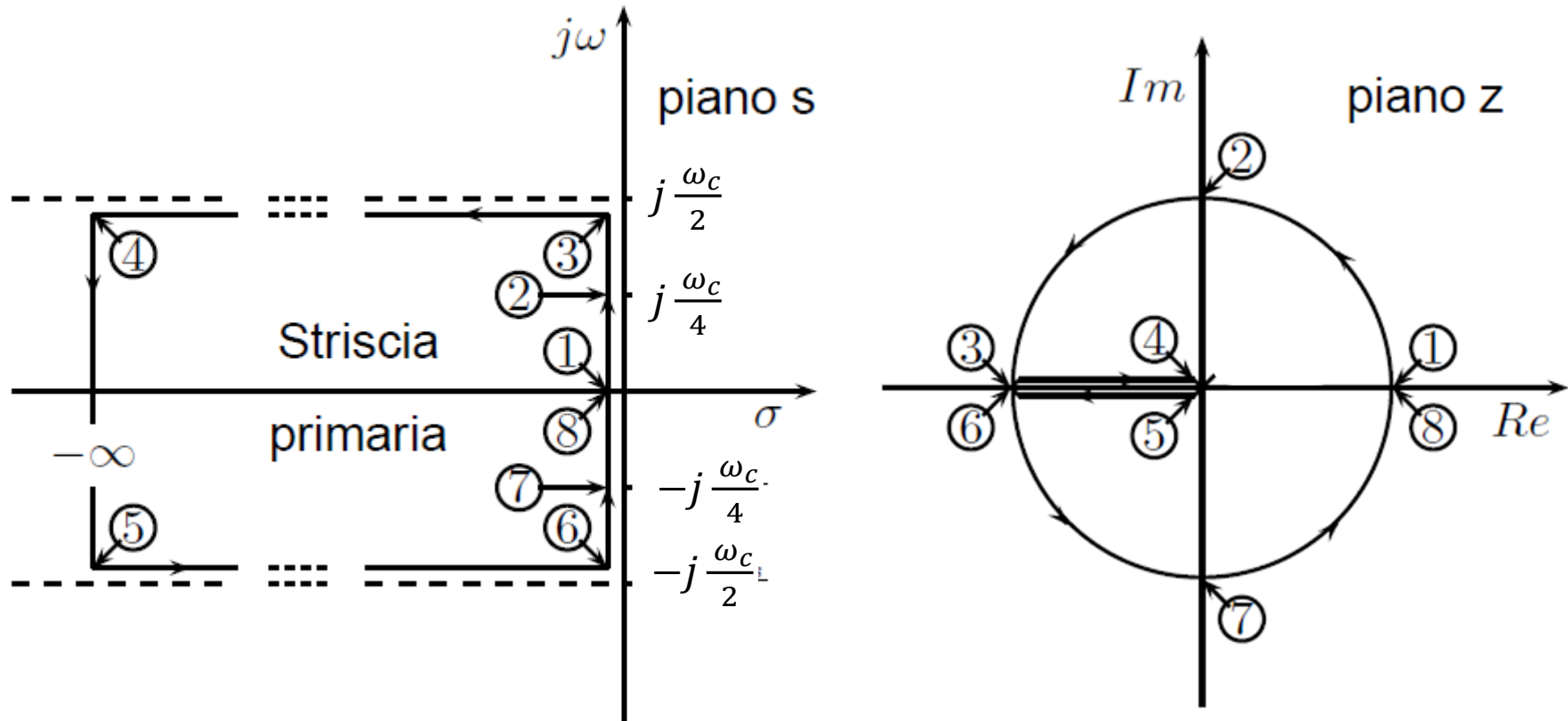
La striscia del piano  $s$  delimitata dalle rette orizzontali  $s = j \frac{\omega_c}{2}$  ed  $s = -j \frac{\omega_c}{2}$  prende il nome di **striscia primaria (o striscia principale)**



In ciascuna delle «strisce» definite nella slide precedente, se prese singolarmente, la corrispondenza indotta dalla trasformazione di campionamento è **biunivoca**. In particolare, la porzione della striscia (ad es. di quella primaria) che giace nel semipiano sinistro è in **corrispondenza biunivoca con il disco unitario** del piano Z

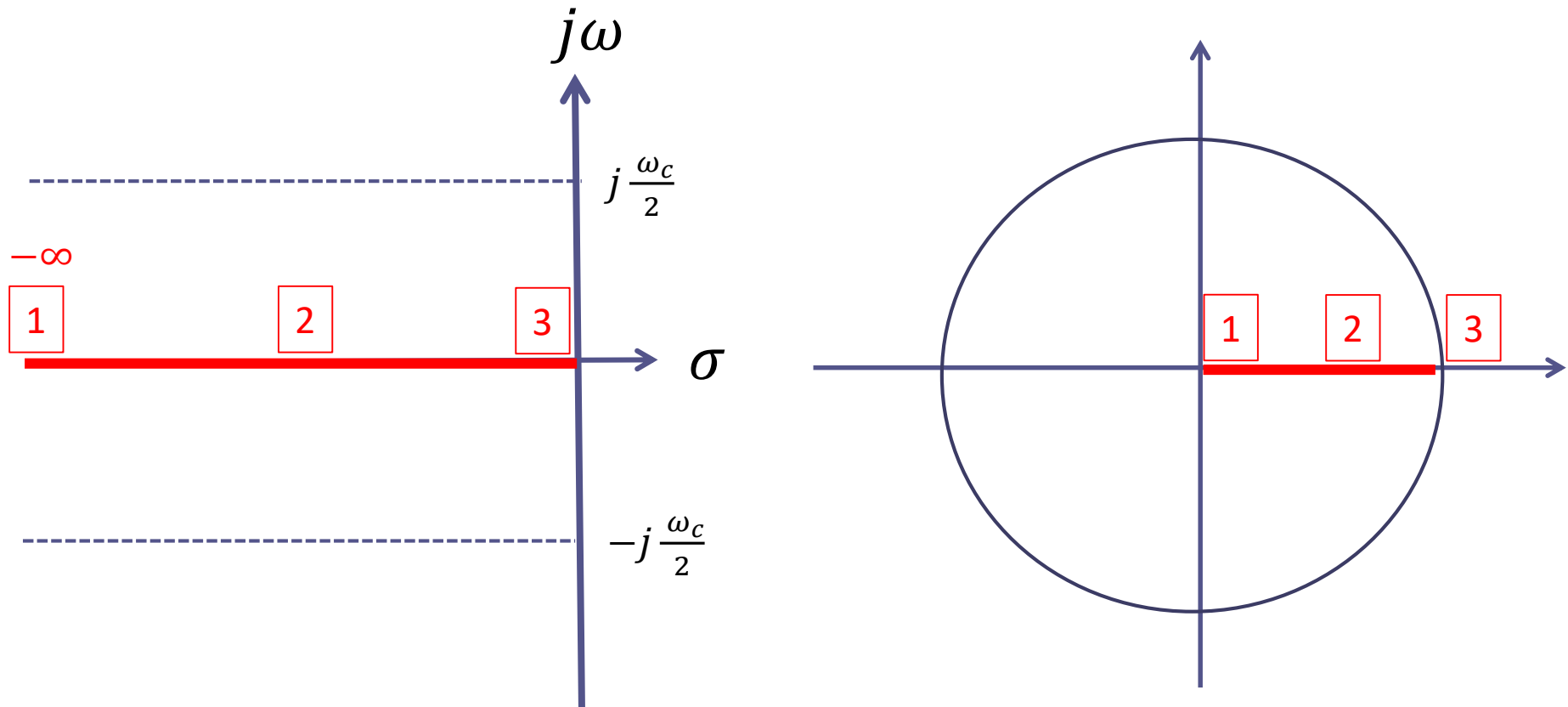


Dettaglio della trasformazione (biunivoca) tra il **perimetro della striscia primaria** (limitatamente alla sua porzione che giace nel semipiano sinistro) ed il **piano z**



$$z = e^{\sigma T_c} e^{j\omega T_c} = e^{\sigma T_c} e^{2\pi j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

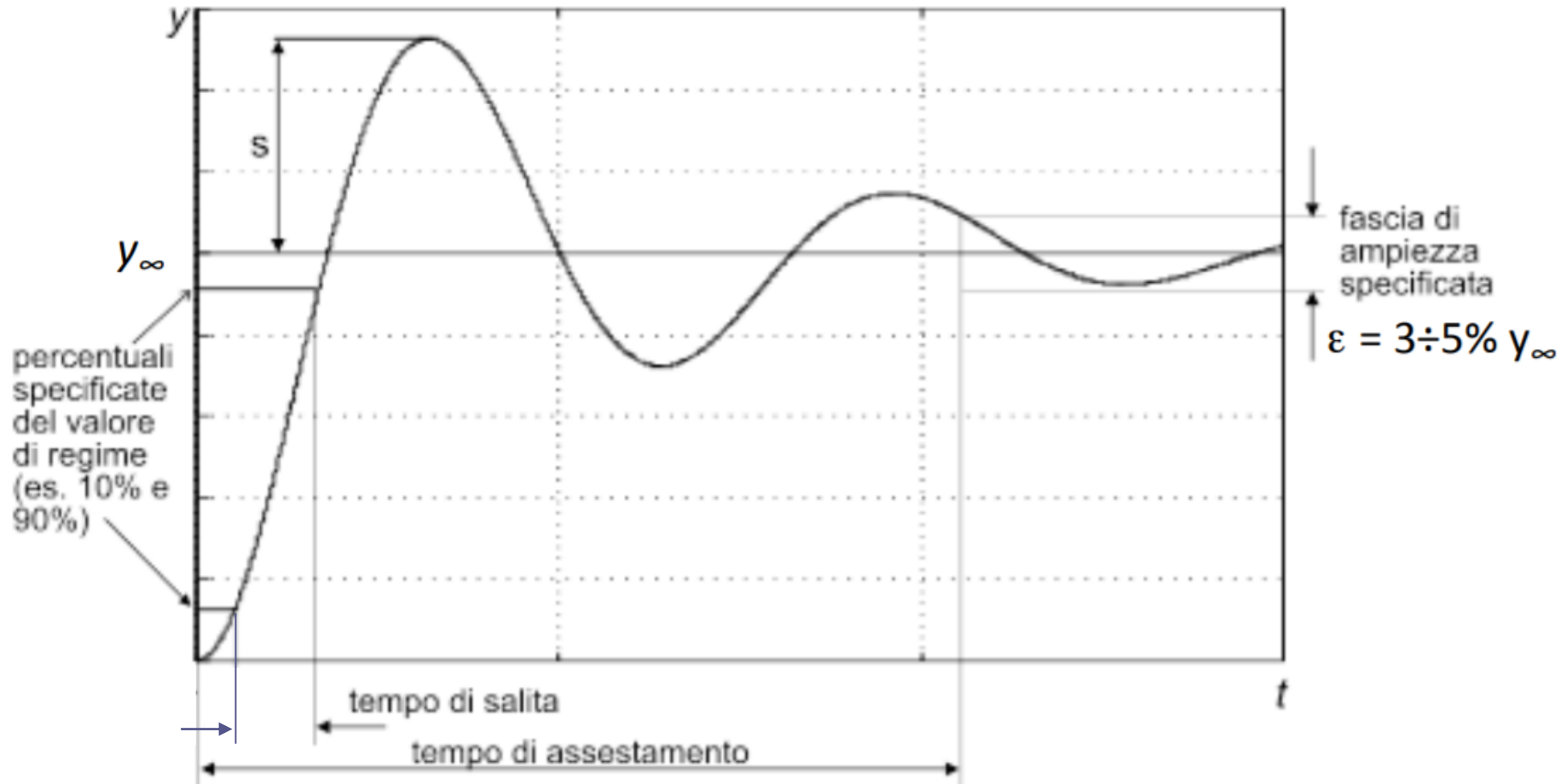
Dettaglio della trasformazione tra il **semiasse reale negativo** ed il **piano z**



$$z = e^{\sigma T_c} e^{j\omega T_c} = e^{\sigma T_c}$$

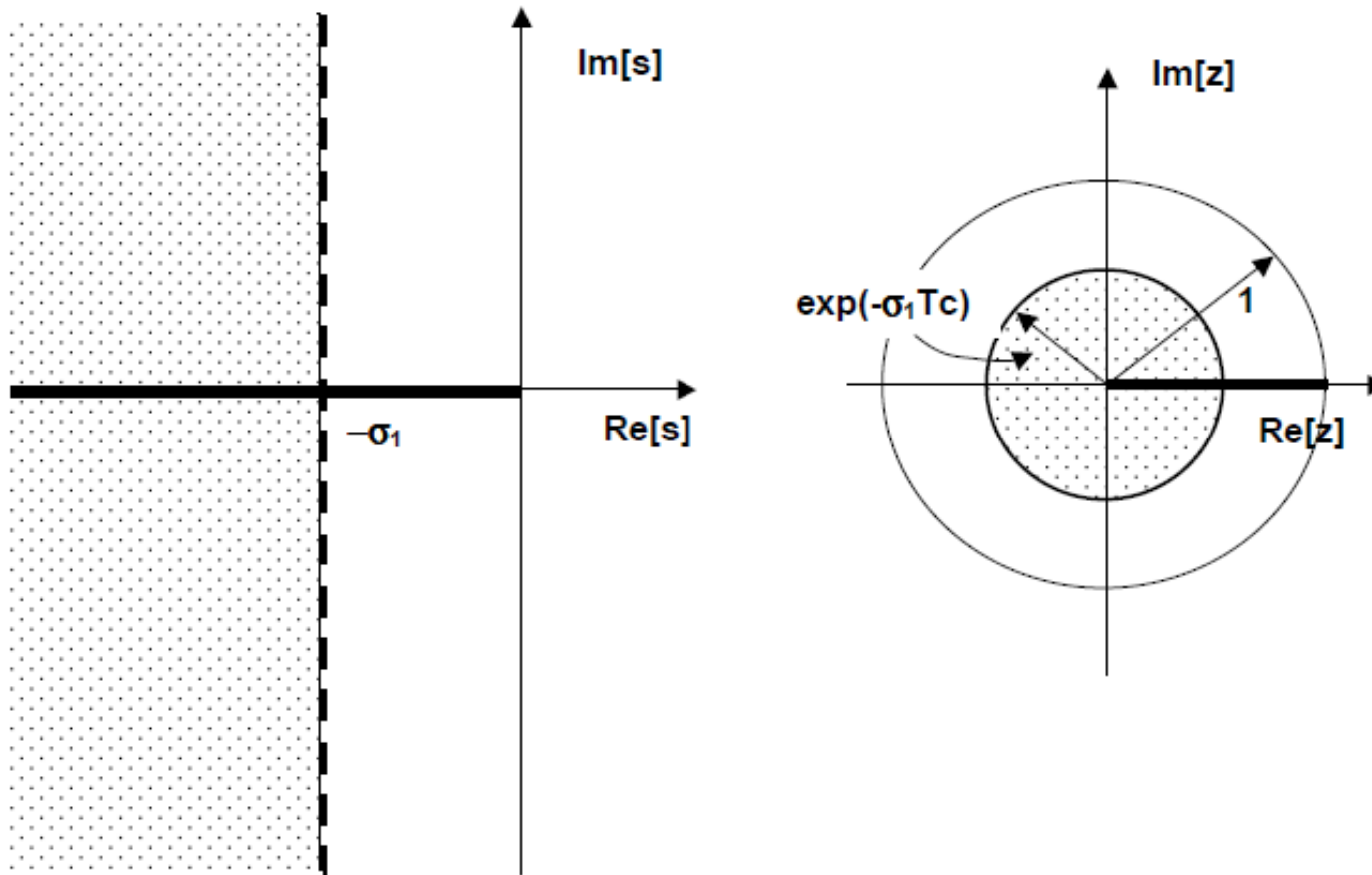


## Parametri fondamentali della risposta al gradino di un sistema a modo dominante



## Luoghi del piano z associati a comportamenti transitori assegnati

*Tempo di assestamento inferiore ad una soglia prestabilita*



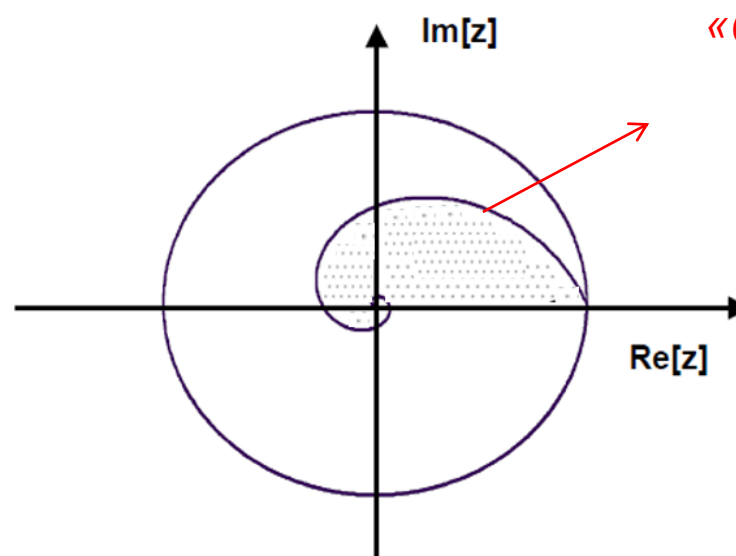
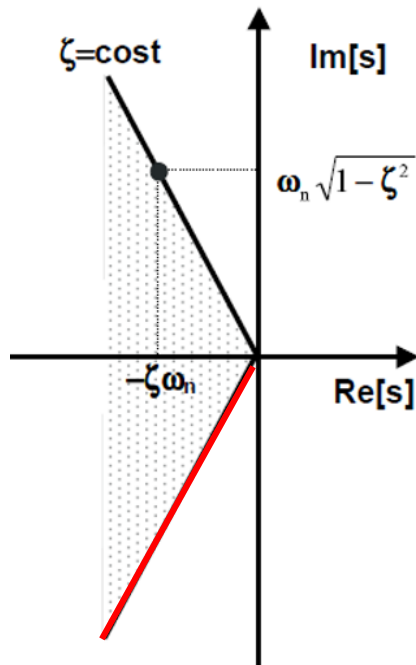
$$Re(s) \leq -\sigma_1$$



$$|z| \leq e^{-\sigma_1 T_c}$$

## Luoghi del piano $z$ associati a comportamenti transitori assegnati

*Sovraelongazione percentuale inferiore ad una soglia prestabilita*



Viene riportata nel piano  $z$  la sola immagine della **retta a smorzamento costante** che si trova nel **secondo quadrante**. La spirale logaritmica associata alla retta a smorzamento costante collocata nel terzo quadrante (la retta in rosso) risulta essere speculare rispetto all'asse reale del piano  $z$

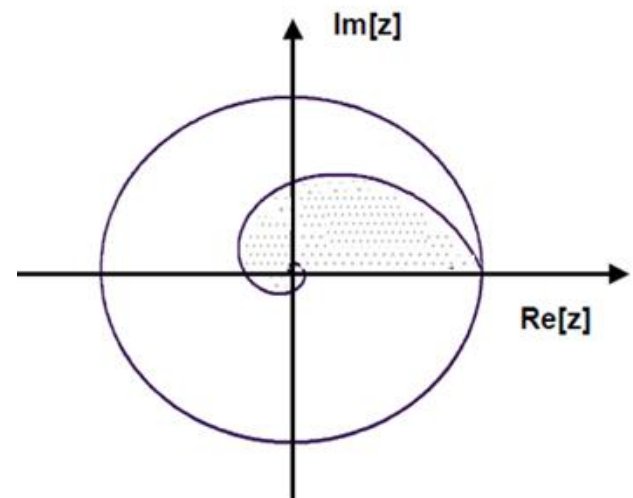
Caratterizziamo analiticamente la cardioide

$$s = \sigma + j\omega = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$z = e^{sT_c} = e^{-\zeta\omega_n T_c} e^{-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T_c} = |z| e^{j\theta}$$

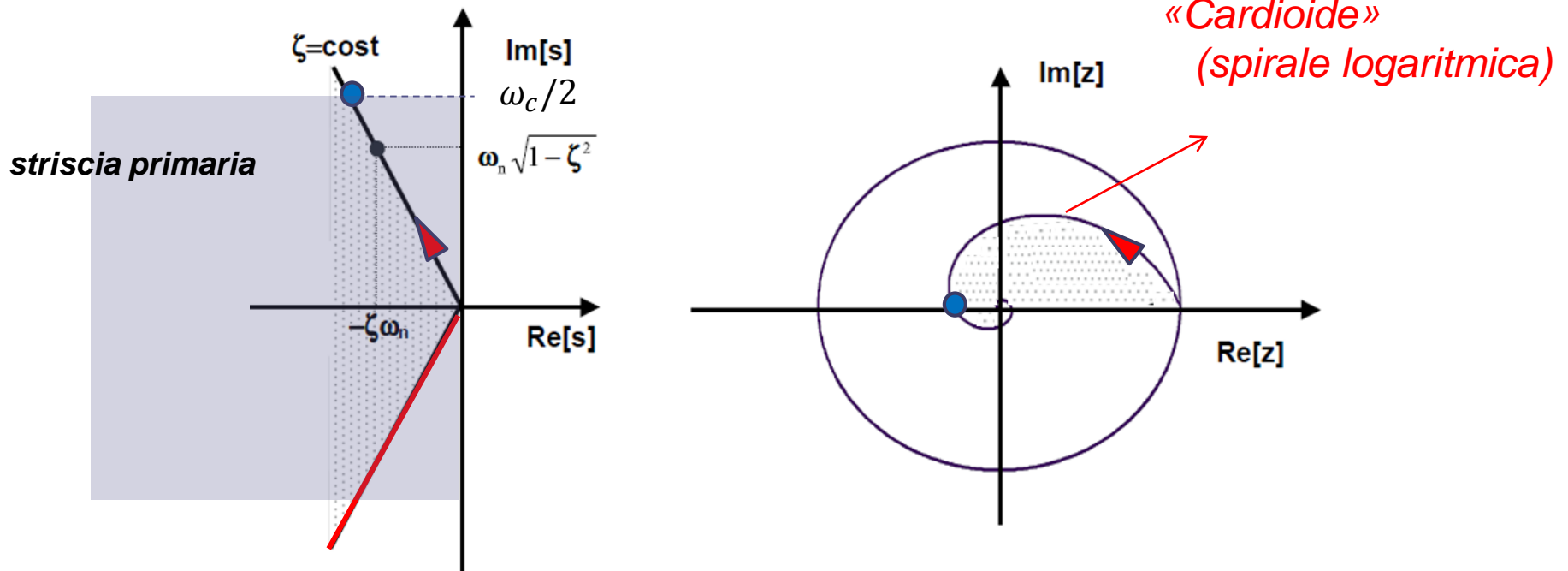
$$|z| = e^{-\zeta\omega_n T_c} \quad \theta = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n T_c$$

Fissando lo smorzamento  $\zeta$  ad un valore costante, e facendo variare  $\omega_n$  (che corrisponde alla distanza dall'origine nel piano  $s$ ) fra zero e infinito si ha che la cardioide parte dal punto  $z=1$  dell'asse reale. Il modulo  $|z|$  decade verso lo zero, mentre la fase  $\theta$  aumenta indefinitamente, comportando in tal modo le «rotazioni» della cardioide



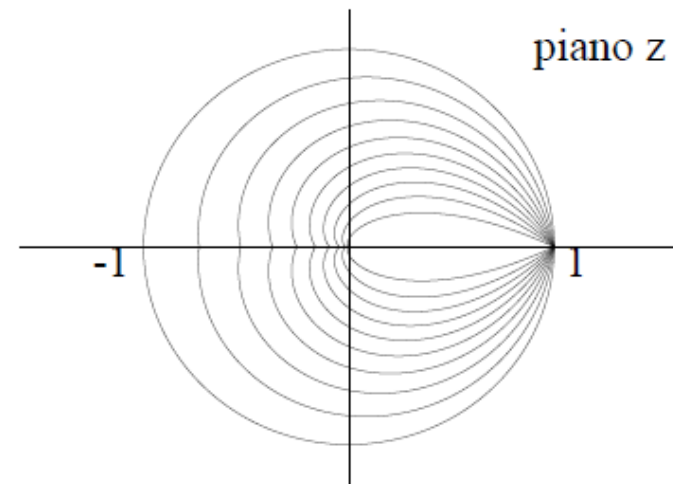
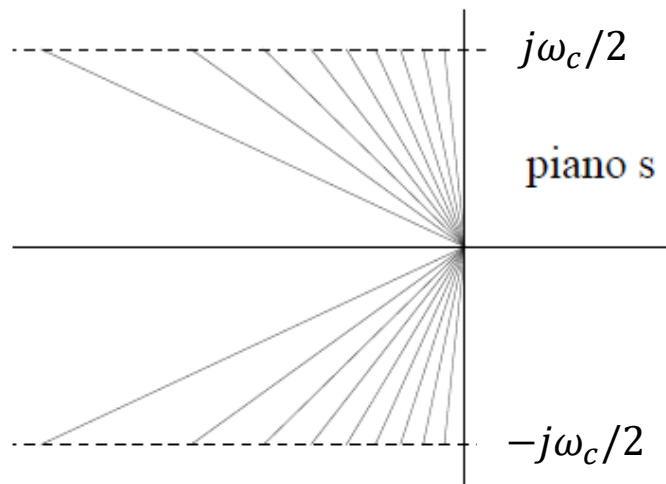
## Luoghi del piano z associati a comportamenti transitori assegnati

*Sovraelongazione percentuale inferiore ad una soglia prestabilita*

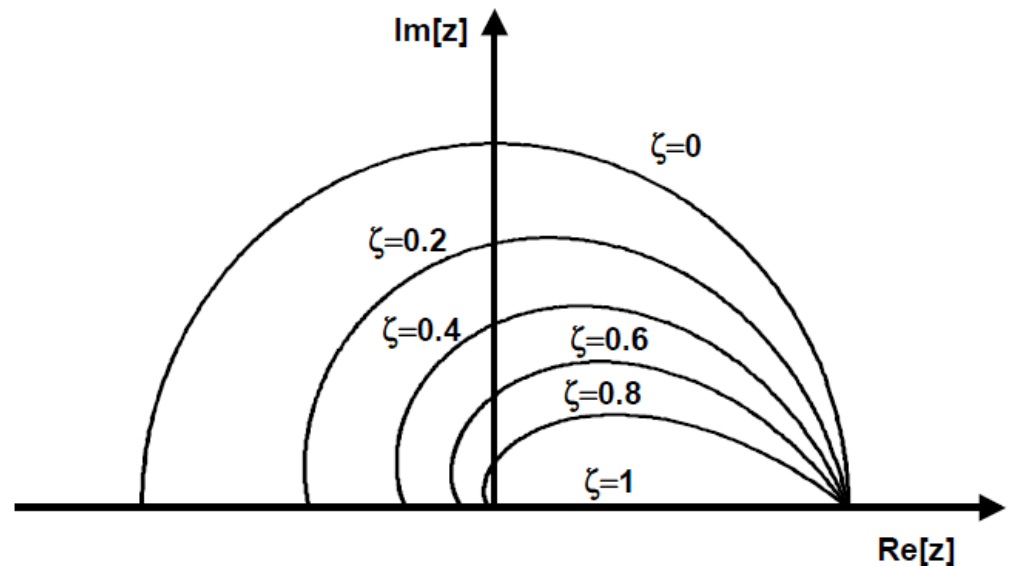


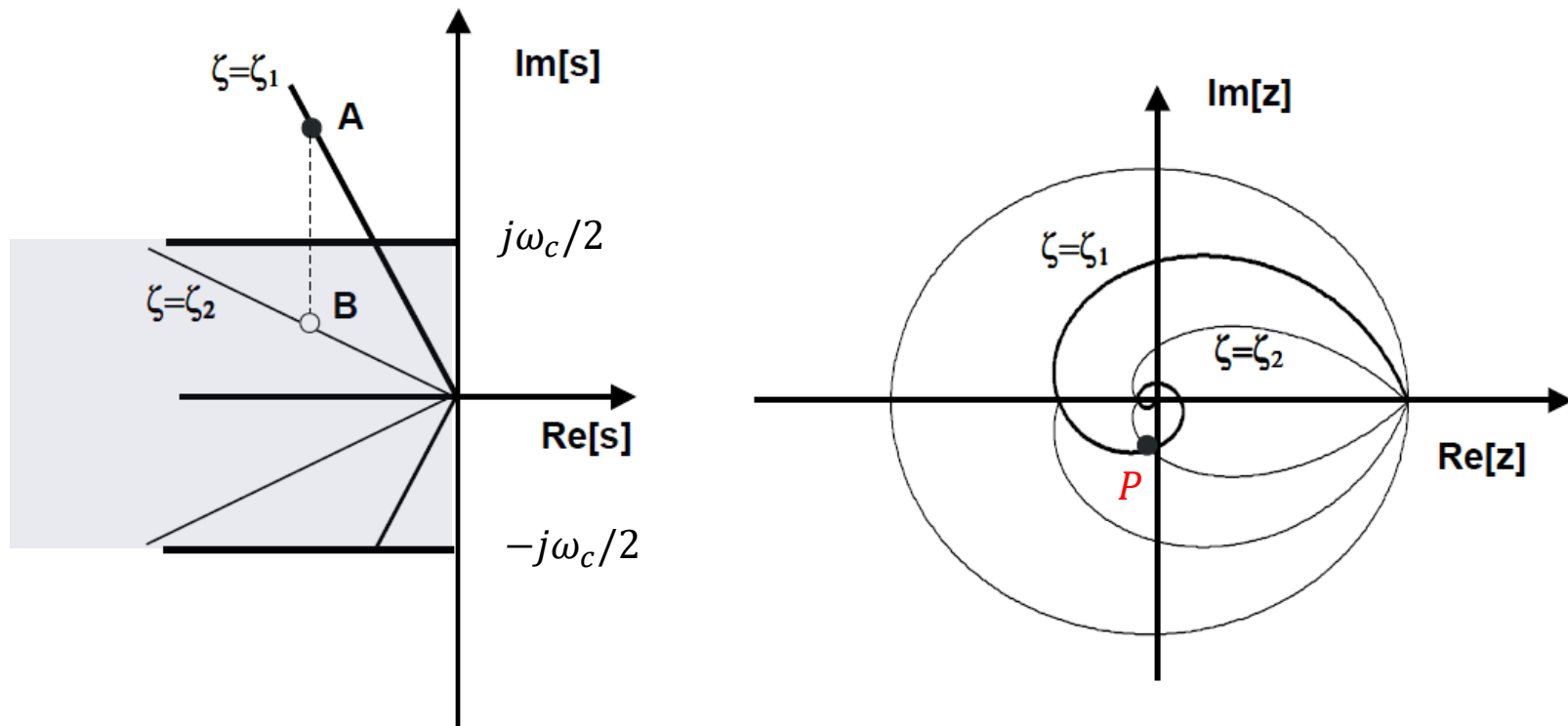
*Se ci limitiamo a considerare la sola porzione della retta a smorzamento costante contenuta nella striscia primaria, la cardioide resta confinata nel semipiano superiore. In altri termini, il punto etichettato con il pallino blu viene mappato nel punto corrispondente del semiasse negativo del piano z*

Possiamo pertanto tracciare le seguenti curve, che mettono in corrispondenza luoghi a smorzamento costante (**nella striscia primaria del piano s**) con le cardioidi associate nel piano z



Cardioidi associate a particolari valori dello smorzamento





Un punto giacente, nel piano  $s$ , lungo una determinata retta a smorzamento costante  $\xi = \xi_1$  ma fuori dalla striscia primaria (punto  $A$  nel piano  $s$ ), sarà mappato, tramite la trasformazione di campionamento, in un punto del piano  $z$  (punto  $P$ ) al quale è associato uno smorzamento differente da quello di partenza.

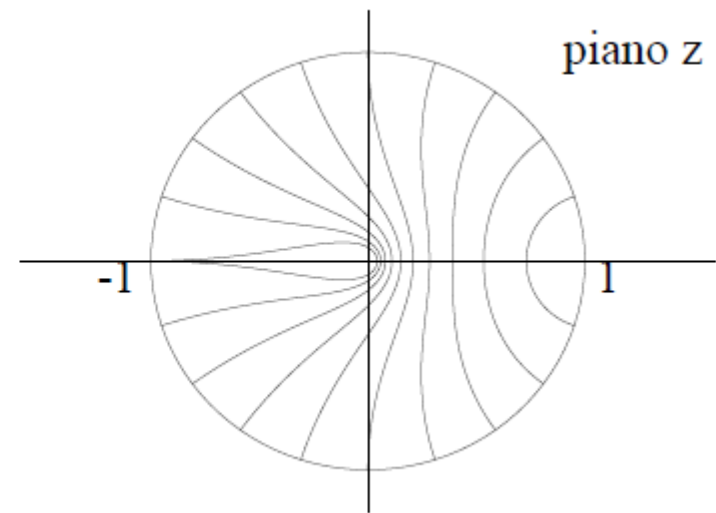
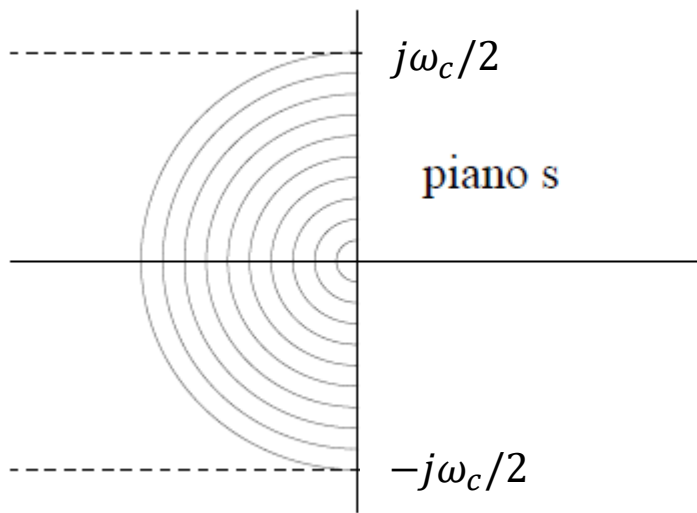
Il periodo di campionamento deve sempre essere scelto in modo tale che tali corrispondenze fra poli in  $s$  e poli in  $z$  vengano valutate a partire dalla striscia primaria (la cui larghezza cresce al decrescere del periodo di campionamento)

## Luoghi del piano z associati a comportamenti transitori assegnati

*Tempo di salita inferiore ad una soglia prestabilita*

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

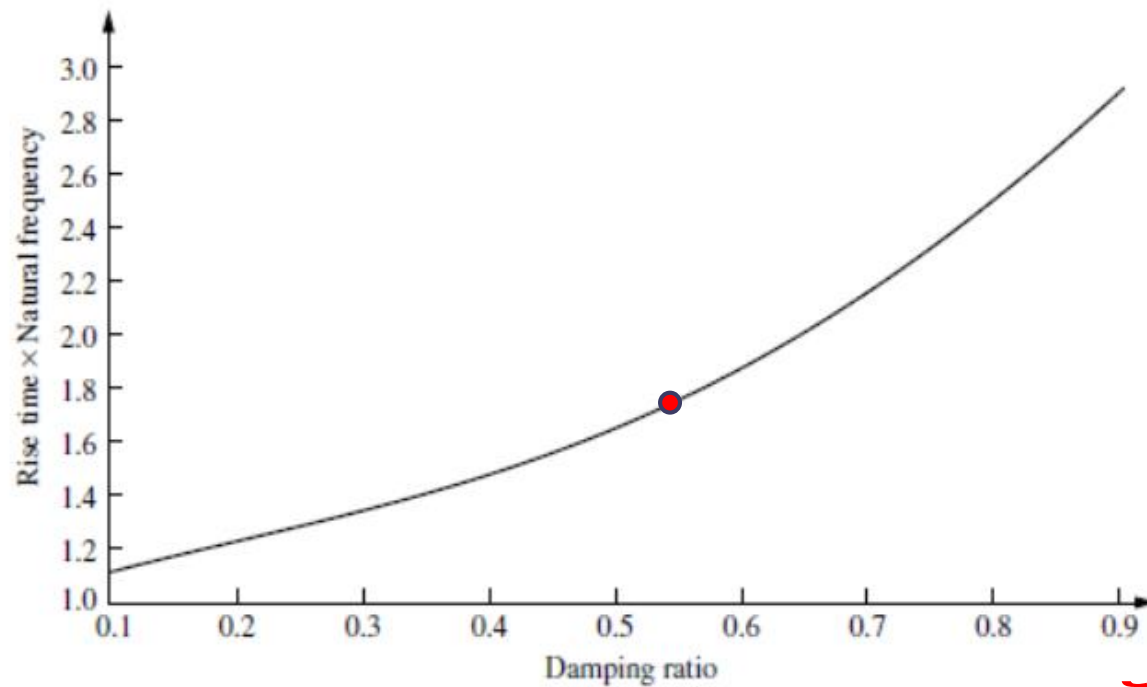
Luoghi a **pulsazione naturale**  $\omega_n$  costante (nella striscia primaria del piano s)



*La pulsazione naturale di una coppia di poli complessi coniugati determina la banda passante*



$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

 $t_r \omega_n$ 


Damping ratio	Normalized rise time
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

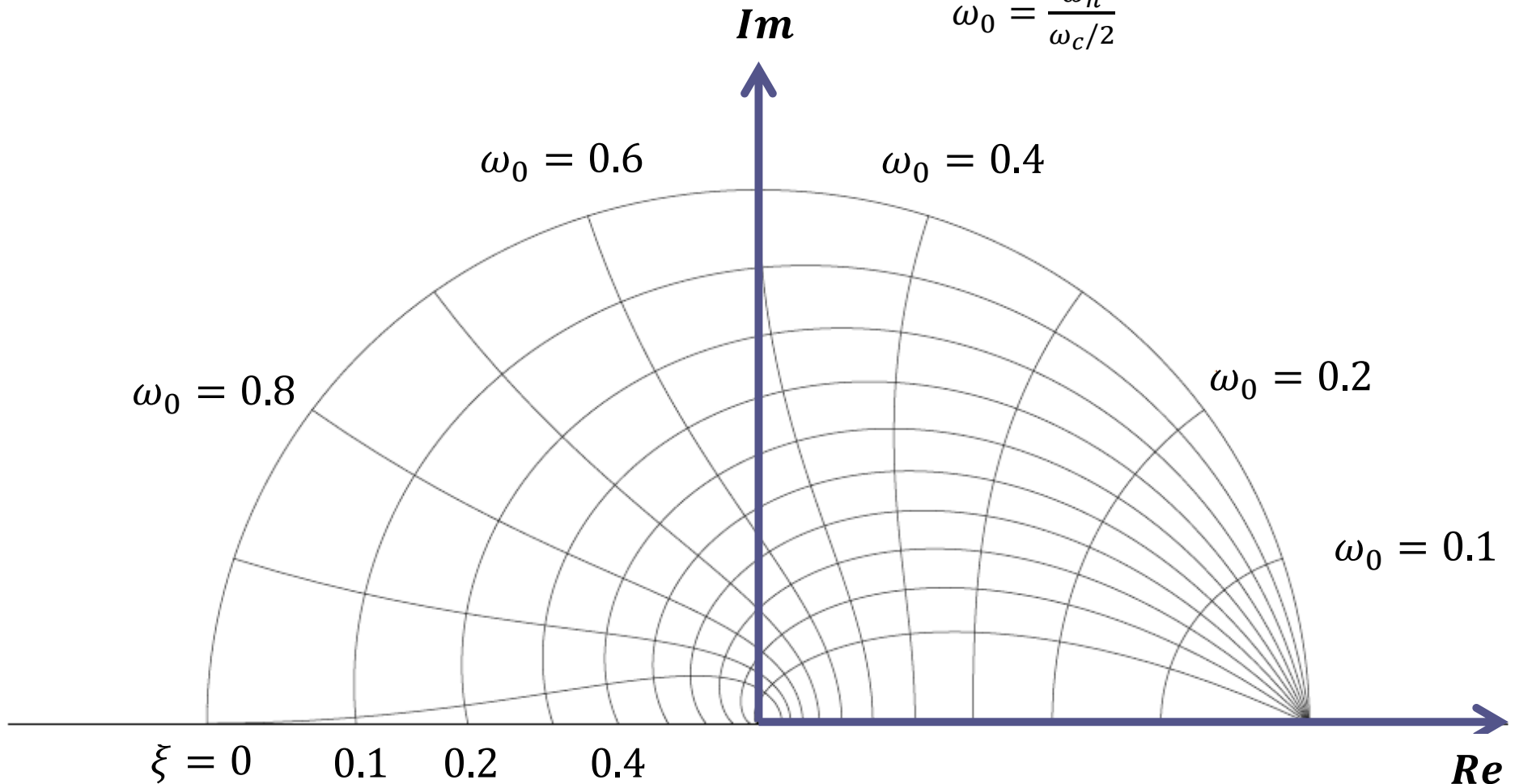
**FIGURE 4.16** Normalized rise time versus damping ratio for a second-order underdamped response



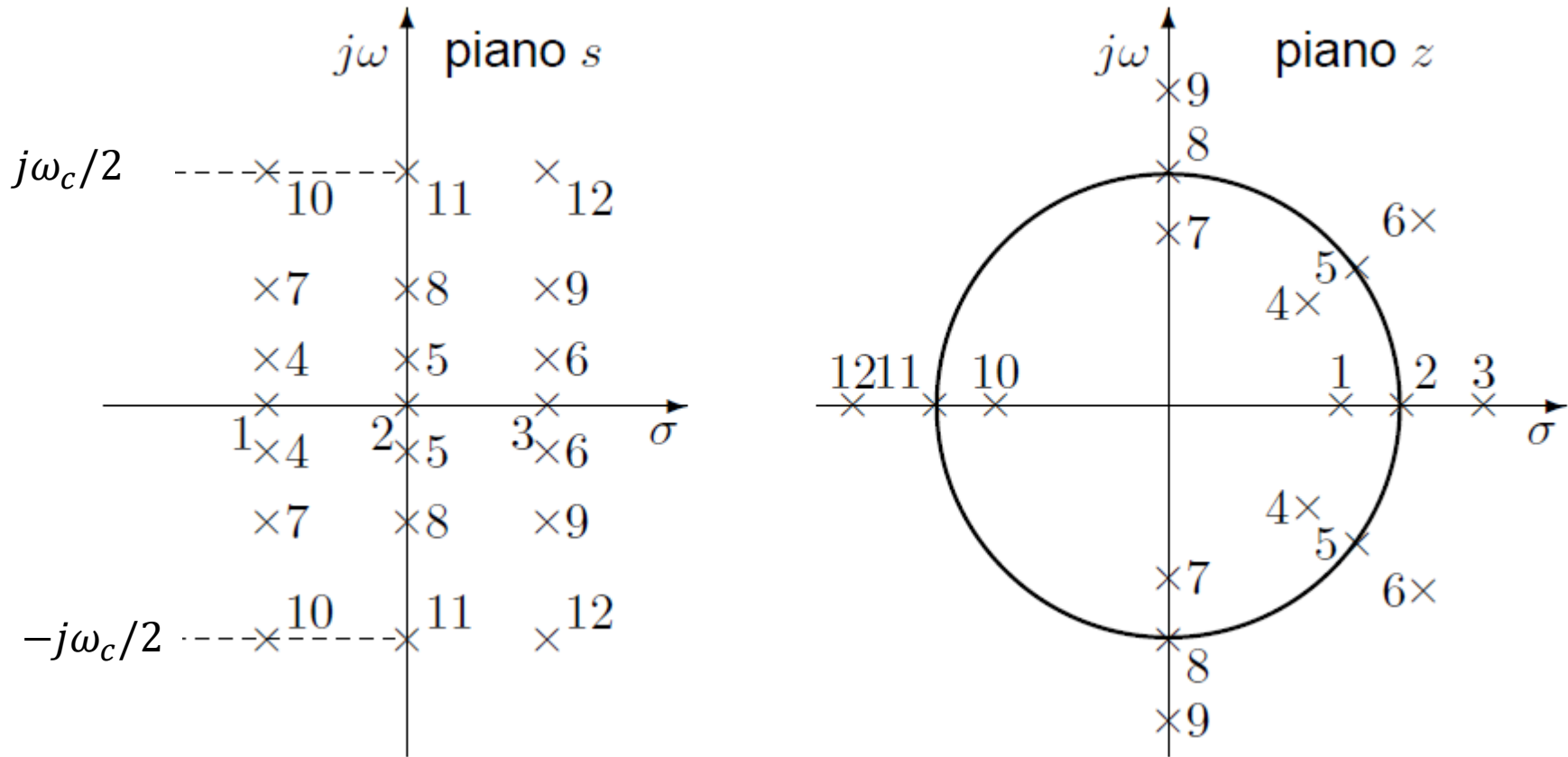
Luoghi del **piano z** corrispondenti a valori di smorzamento  $\xi$  e pulsazione naturale  $\omega_n$  costanti

con **pulsazione normalizzata**

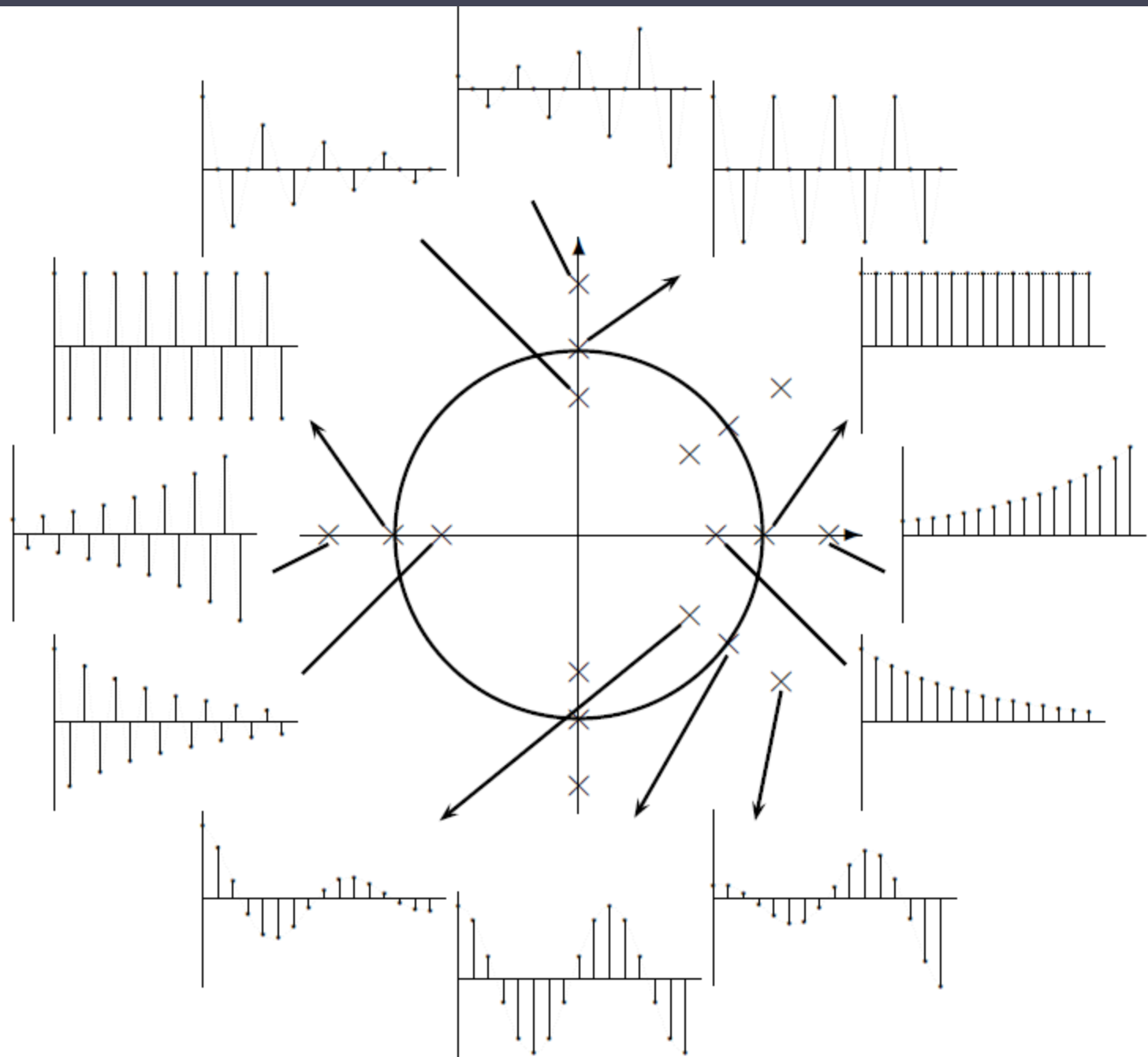
$$\omega_0 = \frac{\omega_n}{\omega_c/2}$$



## Riassunto della corrispondenza fra i piani $s$ e $z$



Notare che **poli reali negativi in  $z$**  sono in corrispondenza con una coppia di **poli complessi coniugati in  $s$** , collocati sui bordi superiore e inferiore della striscia primaria



## Alcune relazioni utili

Ad una coppia di poli complessi coniugati nel piano  $z$  aventi modulo  $r$  e fase  $\theta$

$$z_{1,2} = r e^{j\theta}$$

Corrisponde, nella striscia primaria del piano  $s$ , una coppia di poli

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

aventi smorzamento  $\xi$  e pulsazione naturale  $\omega_n$  pari a

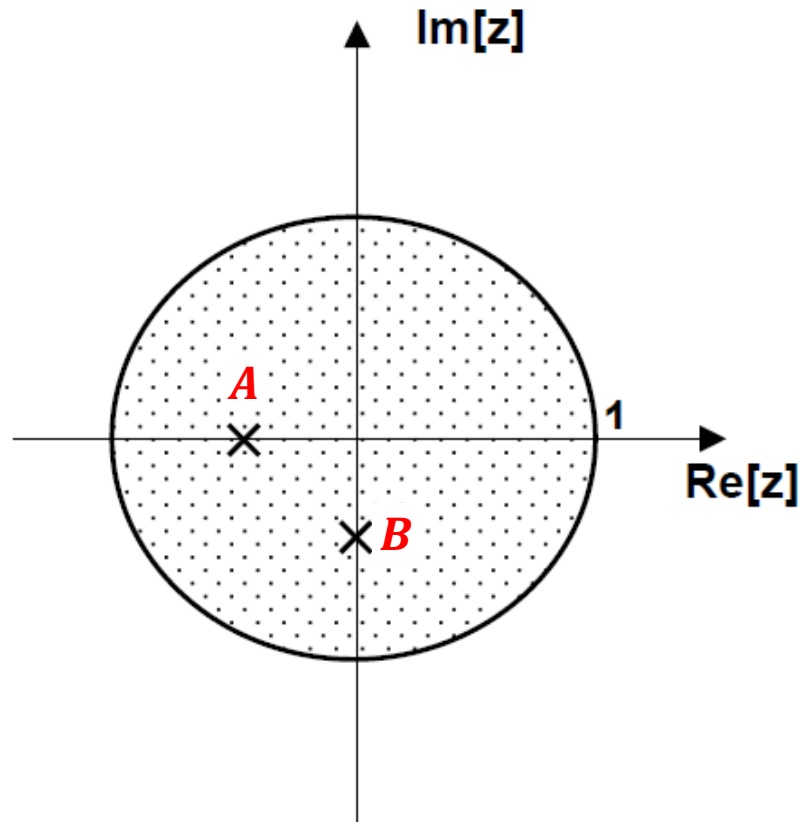
$$\xi = -\frac{\ln r}{\sqrt{\ln r^2 + \theta^2}} \quad \omega_n = -\frac{1}{T_c} \sqrt{\ln r^2 + \theta^2}$$

## Esercizi proposti

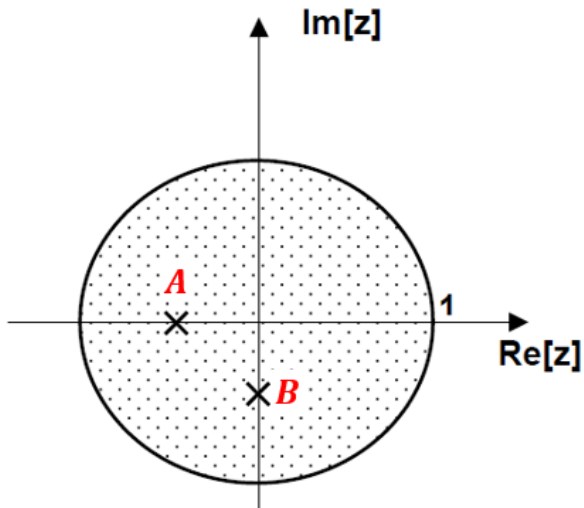
**Esercizio 6.1** *Si consideri la specifica sul transitorio a tempo continuo rappresentata dall'appartenenza delle radici a ciclo chiuso alla regione del piano  $s$  con parte reale  $\leq -2$ . A quale regione corrisponde tale specifica nel piano  $z$ ? Dare l'espressione analitica della regione, assumendo  $T_c = 1$  s.*

**Esercizio 6.2** *Si consideri la specifica sul transitorio a tempo continuo rappresentata dall'appartenenza delle radici a ciclo chiuso alla regione del piano  $s$  con smorzamento  $\geq 0.707$ . A quale regione corrisponde tale specifica nel piano  $z$ ? Dare l'espressione analitica della regione, assumendo  $T_c = 1$  s.*

**Esercizio 6.4** *Indicare i punti del piano  $s$  che possono aver generato, tramite discretizzazione con  $T_c = 1$  s, i punti indicati in Fig.6.8, e giustificare la risposta.*



*Fig.6.8 - Grafico per l'Esercizio 6.4.*



Iniziamo dal punto A, ipotizzando che coincida con il punto  $-0.5$

La trasformazione di campionamento, valutata per un generico punto  $s = \sigma + j\omega$  del piano  $s$ , diventa espressa dalla relazione:

$$z = e^{\sigma T_c} e^{j\omega T_c} \quad T_c = 1s$$

$$z = e^{\sigma} e^{j\omega} \quad |z| = e^{\sigma} \quad \angle z = \omega$$

La parte reale  $\sigma$  del corrispondente punto nel piano  $s$  determina il modulo del punto nel piano  $z$

$$|z| = e^{\sigma} = 0.5 \quad \sigma = \ln 0.5 = -0.69$$

La parte immaginaria  $\omega$  ne determina invece la fase

Il punto A ha fase  $\pi$        $\omega = \pi$

$$s = -0.69 + j\pi$$



Il punto  $s = -0.69 + j \pi$  appartiene alla fascia primaria, e giace esattamente sul bordo di essa.

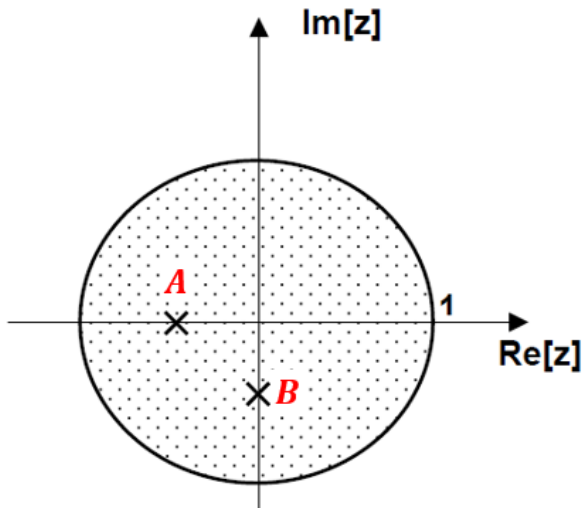
Ricordiamo però che i punti del piano  $s$  che vengono mappati in un punto assegnato del piano  $z$  sono **infiniti**, e le loro parti immaginarie differiscono per multipli interi della pulsazione di campionamento, che nel presente esempio vale

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c} = 2\pi$$

Ricordiamo però che i punti del piano  $s$  che vengono mappati in un punto assegnato del piano  $z$  sono **infiniti**, e le loro parti immaginarie differiscono per multipli interi della pulsazione di campionamento

I punti del piano  $s$  che vengono mappati nel punto **A** sono pertanto i seguenti:

$$s = -0.69 + j (\pi + k\omega_c) = -0.69 + j (\pi \pm 2k\pi) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Ipotizziamo che il punto B sia collocato in

$$B = -j0.5 = 0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$z = e^{\sigma} e^{j\omega} \quad |z| = e^{\sigma} \quad \angle z = \omega$$

Il valore di  $\sigma$  resta invariato, in quanto abbiamo ipotizzato che i punti A e B abbiano entrambi modulo pari a 0.5

Il punto B ha fase  $-\frac{\pi}{2}$        $\omega = -\frac{\pi}{2}$

$$s = -0.69 - j\frac{\pi}{2}$$

$$s = -0.69 - j\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)$$

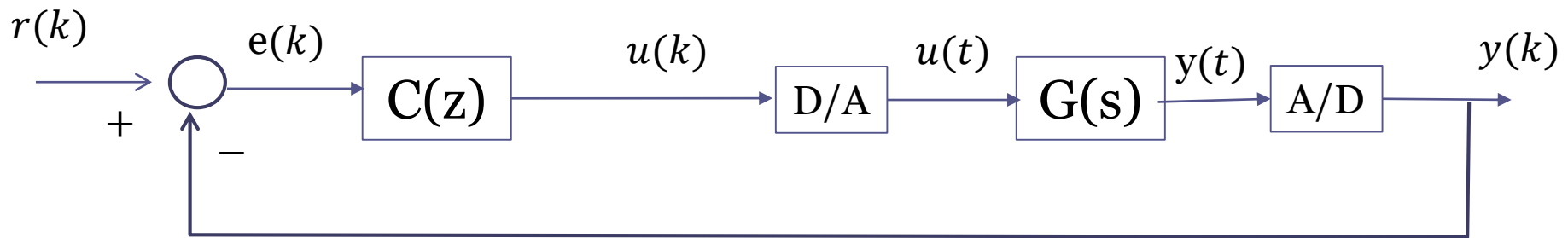
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

## Esempio

Si consideri un sistema a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

ed il sistema di controllo digitale a retroazione unitaria con regolatore proporzionale



Ipotizzando un periodo di campionamento  $T_c = 0.5$  s, progettare un controllore digitale **avente il massimo guadagno possibile** tale da soddisfare le seguenti specifiche

S1 Valore di regime dell'uscita per un set-point costante pari al valore del set-point

S2 Risposta al gradino a ciclo chiuso caratterizzata da una **sovraelongazione percentuale non superiore al 10%**

Calcoliamo la FdT fra  $u(k)$  e  $y(k)$  utilizzando **Matlab**.

Si noti come abbiamo già sviluppato un esercizio ove abbiamo applicato ad un processo analogo la formula di discretizzazione

$$P(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \right]_{t=kT_c} \right\}$$

```
clear all, clc
numG=1;
denG=[1 2 0];
G=tf(numG,denG);
Tc=0.5;
Gzoh=c2d(G,Tc)
```

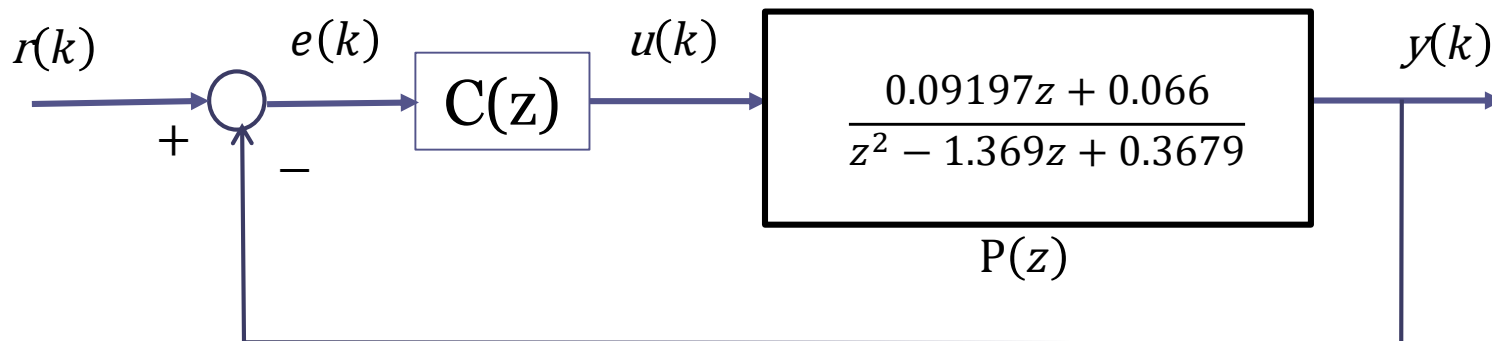
Gzoh =

$$\frac{0.09197 z + 0.06606}{z^2 - 1.368 z + 0.3679}$$

Sample time: 0.5 seconds

Discrete-time transfer function.

Sistema equivalente

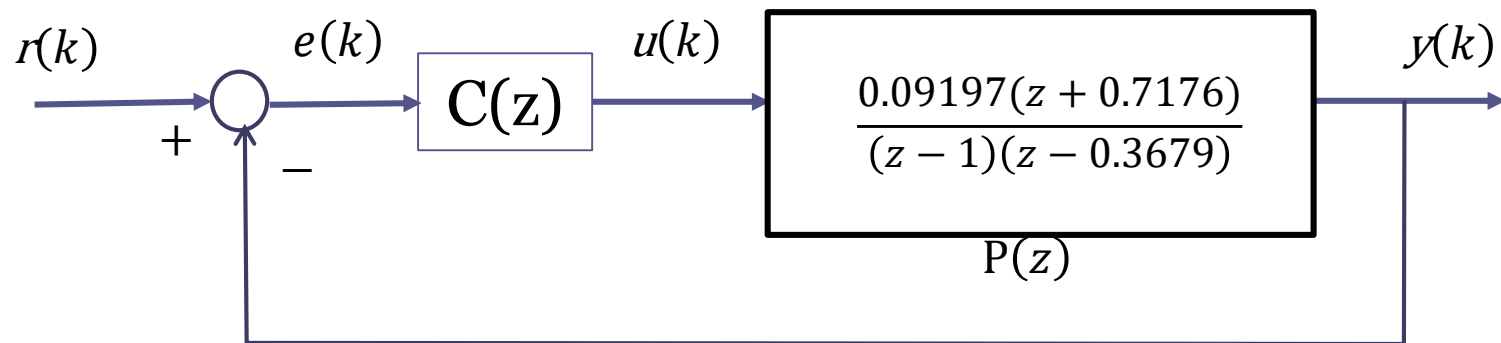


I poli  $p_1^z$  e  $p_2^z$  della  $P(z)$  sono determinabili a partire dai poli  $p_1^s$  e  $p_2^s$  della  $G(s)$  (che valgono  $p_1^s = 0$  e  $p_2^s = -2$ ) secondo la formula

$$p_1^z = e^{T_c p_1^s} = 1$$

$$p_2^z = e^{T_c p_2^s} = e^{-1} = 0.3679$$

Riscriviamo pertanto in forma differente la FdT  $P(z)$  del processo a tempo discreto da controllare



La prima specifica è soddisfatta se la FdT a ciclo chiuso ha guadagno unitario.

Verifichiamo se un controllore proporzionale  $C(z) = k$  è in grado di garantirne il soddisfacimento

$$C(z) = k \quad P(z) = \frac{0.09197(z + 0.7176)}{(z - 1)(z - 0.3679)}$$

$$W_r^y(z) = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} = \frac{k \frac{0.09197(z + 0.7176)}{(z - 1)(z - 0.3679)}}{1 + k \frac{0.09197(z + 0.7176)}{(z - 1)(z - 0.3679)}} = \frac{k \cdot 0.09197(z + 0.7176)}{(z - 1)(z - 0.3679) + k \cdot 0.09197(z + 0.7176)}$$

$$W_r^y(1) = 1 \quad \forall k$$

La presenza nella FdT a ciclo aperto di un polo in  $z = 1$  (sistema di controllo di **tipo 1**) poteva condurci al medesimo risultato senza alcun conto

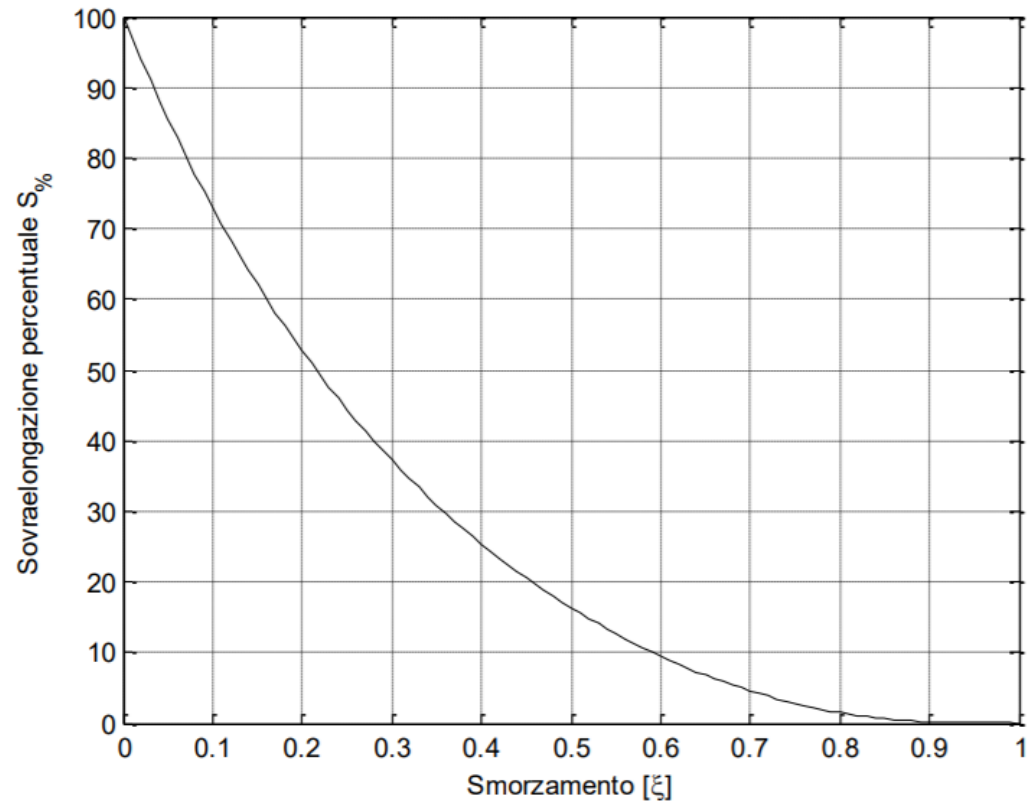
Un regolatore proporzionale è pertanto «compatibile» con la specifica S1.

Analizziamo mediante il luogo delle radici la posizione dei poli a ciclo chiuso al variare di  $k$  per vedere se può essere soddisfatta anche la seconda specifica S2

Prima però chiediamoci: **in quale regione del piano devono essere collocati i poli di  $W_r^y(z)$  affinché sia soddisfatta la specifica S2 ?**

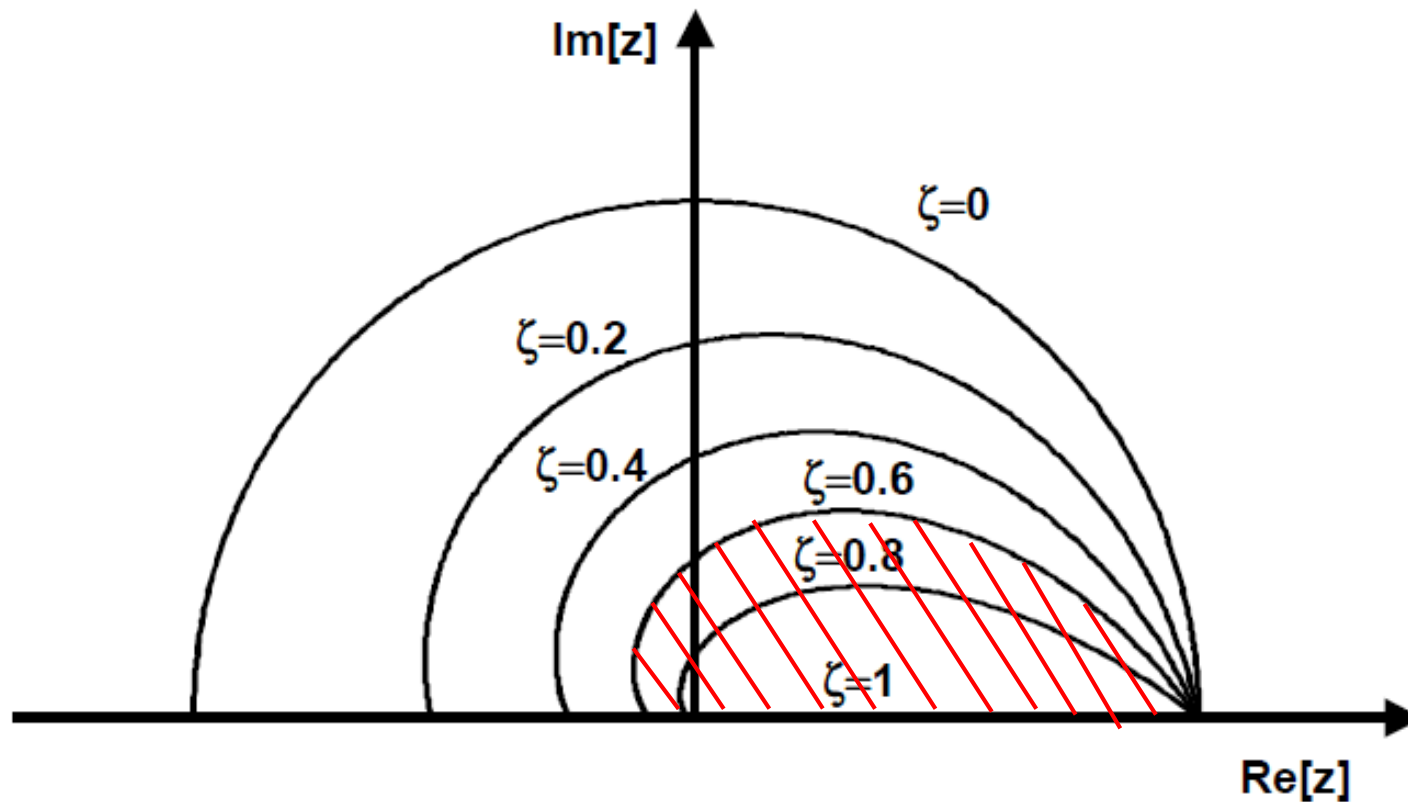
## Sovraelongazione percentuale vs. smorzamento

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



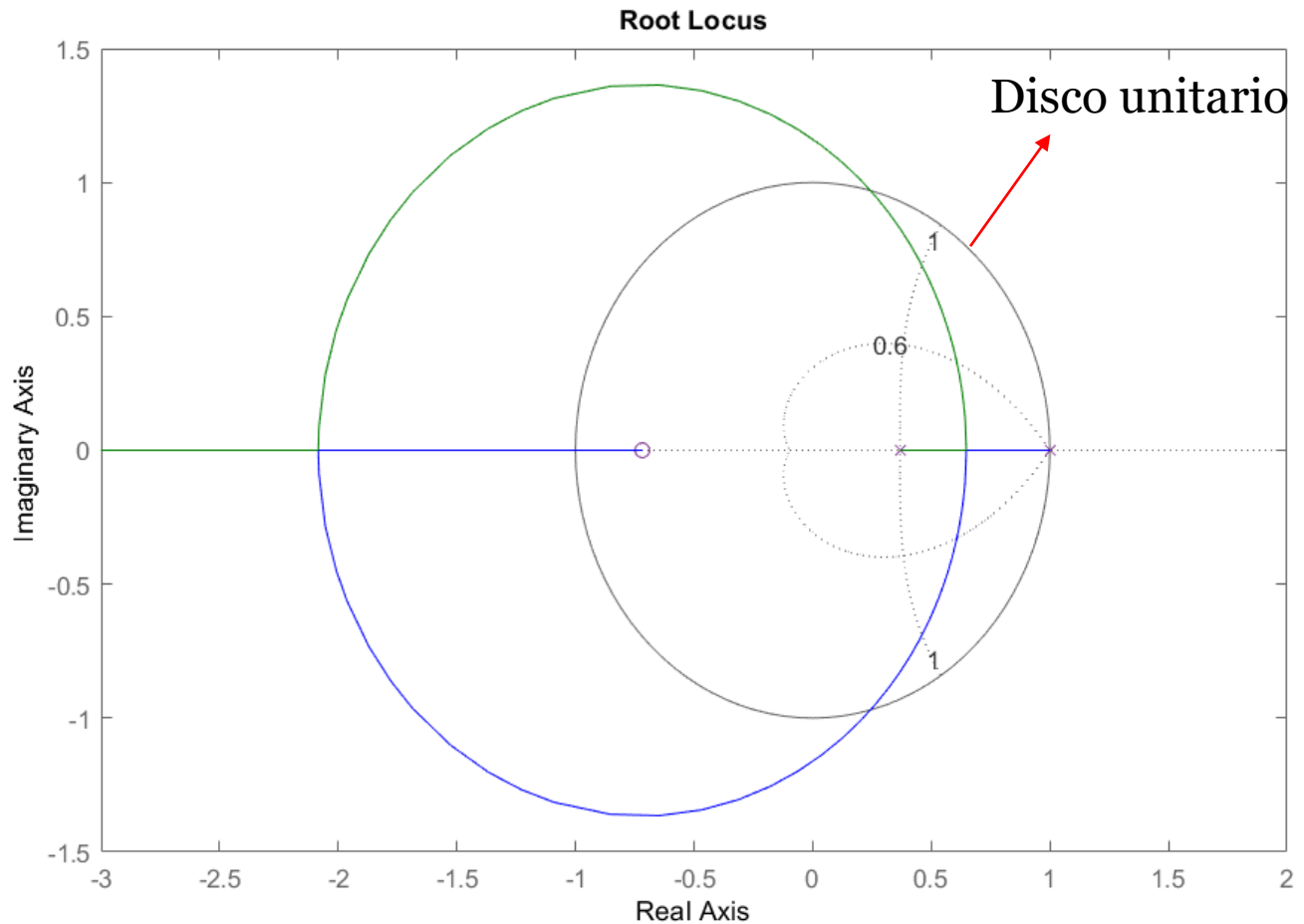
$$S_{\%} \leq 10 \quad \rightarrow \quad \xi \geq 0.6$$

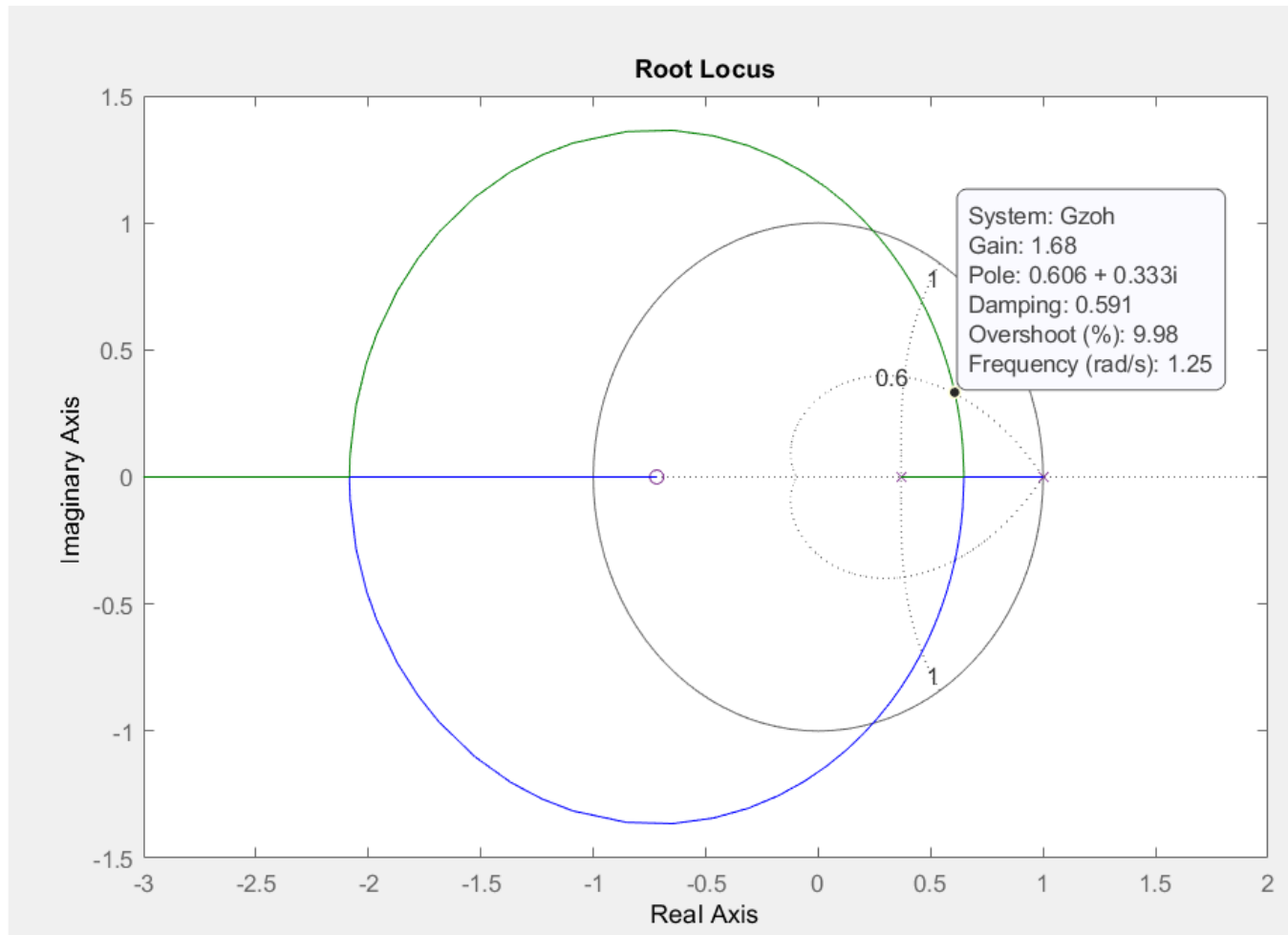
Si deve fare in modo che i poli del sistema a ciclo chiuso siano contenuti nella regione delimitata dalla cardioide associata al valore di smorzamento 0.6, evidenziata nella figura seguente (alla quale va aggiunta la regione speculare del semipiano inferiore)





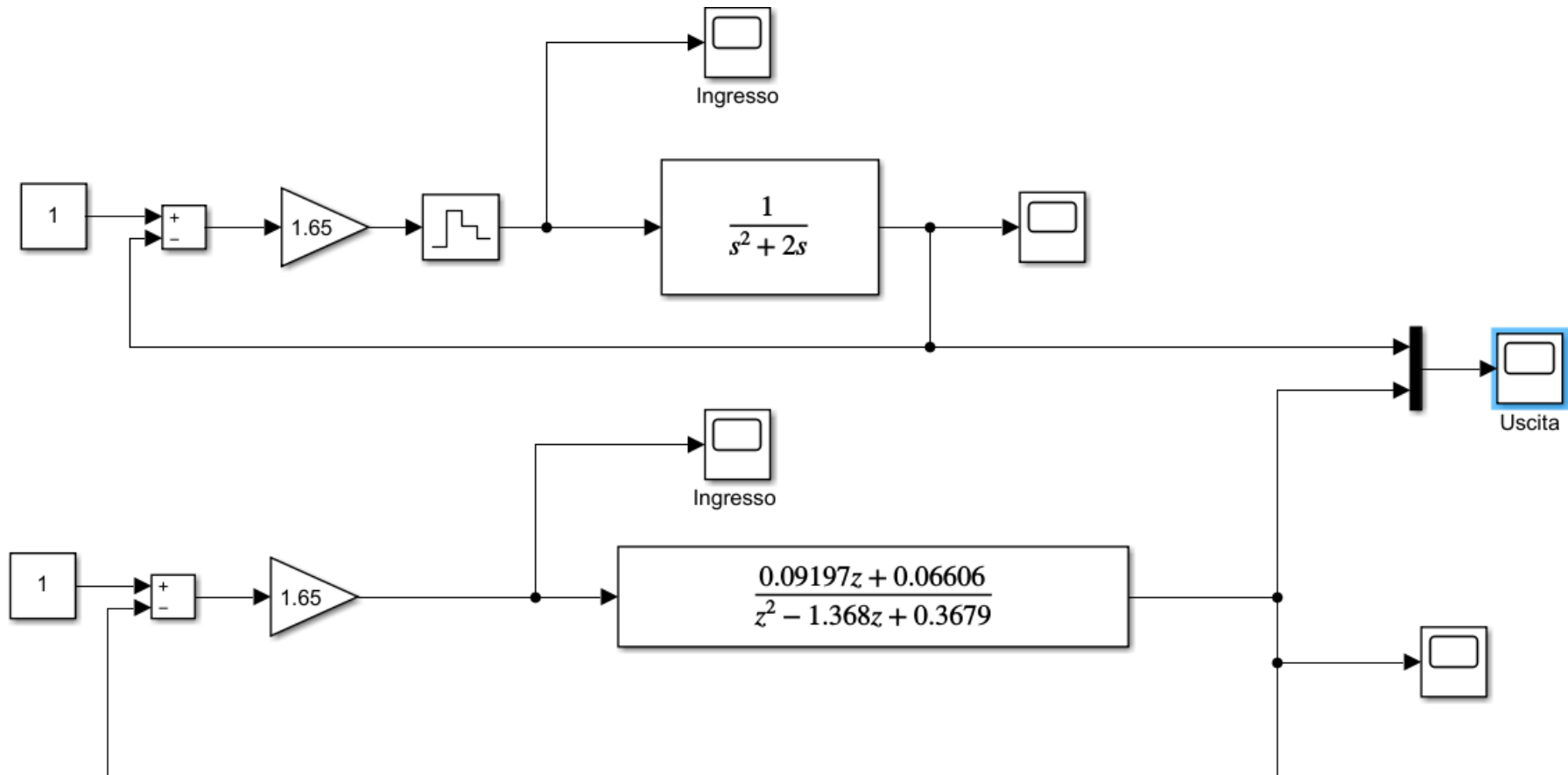
```
clear all,clc
numG=1;
denG=[1 2 0];
G=tf(numG,denG);
Tc=0.5;
Gzoh=c2d(G,Tc)
rlocus(Gzoh)
zgrid(0.6,1)
```

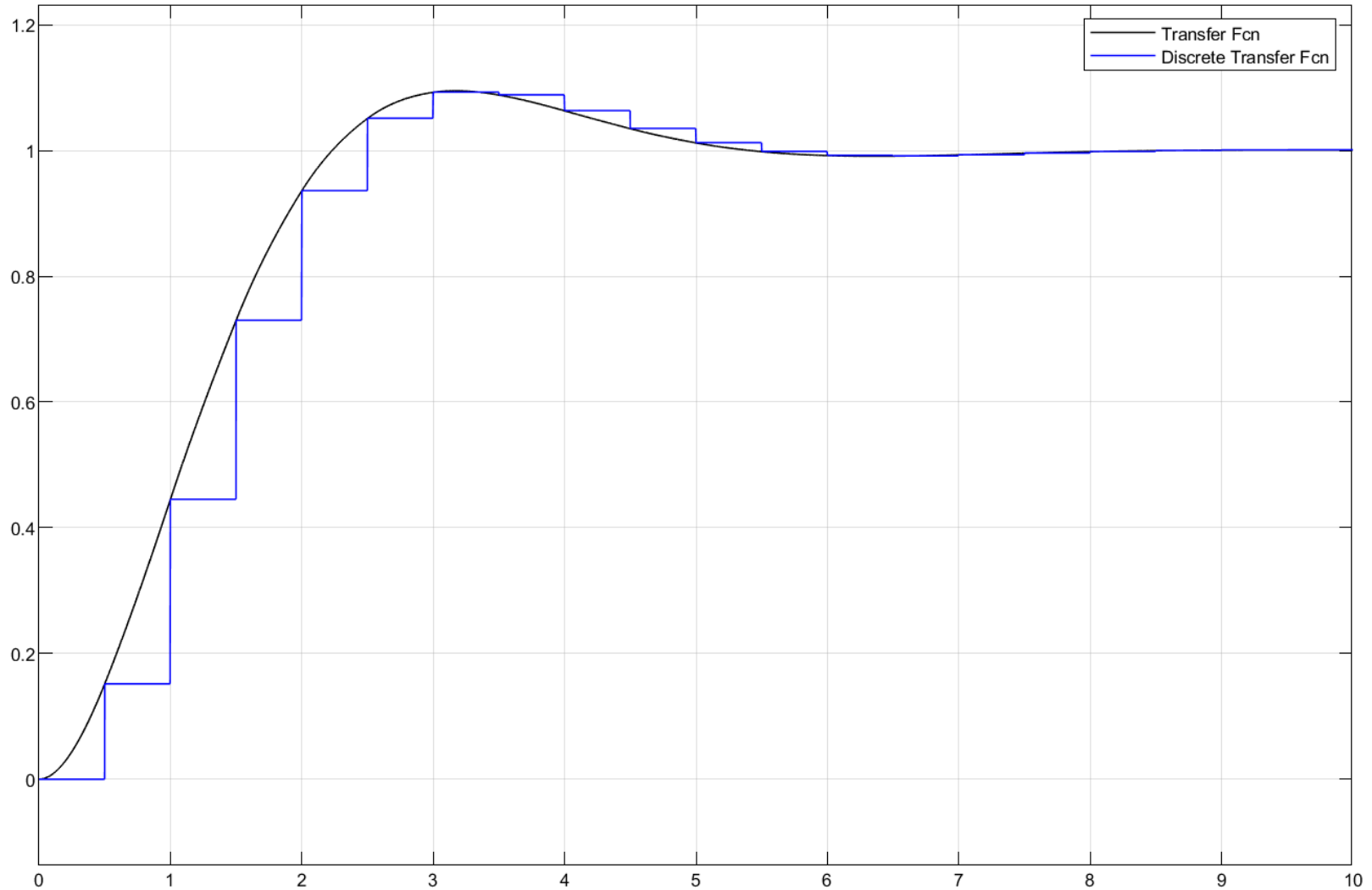




**Il massimo valore di  $k$  che mantiene i poli all'interno della regione ammissibile è pari a poco più di 1.68**

Simuliamo il sistema di controllo utilizzando  $k = 1.65$  nelle due varianti seguenti



$k = 1.65$ 

$k = 3$ 