# Controllo digitale

## Classificazione dei modi di un modello ingresso-uscita o in variabili di stato

**Ing. Alessandro Pisano**
apisano@unica.it

## Classificazione dei modi

I modi caratterizzano la dinamica di un sistema (in realtà abbiamo unicamente visto finora che essi caratterizzano completamente la risposta libera, ma vedremo più avanti come i modi giocano un ruolo essenziale anche nel determinare la risposta forzata) ed è pertanto importante studiare che andamento hanno tali segnali a tempo discreto.

Per uniformità nel seguito si associeranno i modi ad una generica radice $p \in \mathbb{C}$ .

Nel caso dei modelli ingresso-uscita (le equazioni alle differenze) si intende che $p$ è radice del polinomio caratteristico di una equazione alle differenze omogenea. Nel caso dei modelli in variabili di stato (VS) si intende che $p$ è autovalore della matrice di stato A

Si considereranno i modi in forma standard che assumono una delle forme seguenti.

- $\boxed{\textit{Modi impulsivi}}$

$$\delta(k+k_0-h), \qquad \text{per} \quad h=0,\ldots,\nu-1.$$

Corrispondono alla radice nulla $p=0$ di molteplicità $\nu$ dove $k_0=0$ per un modello in avanti e $k_0=-n$ per un modello all'indietro.

- $\boxed{\textit{Modi aperiodici}}$

$$k^h p^k, \qquad \text{per} \quad h=0,\ldots,\nu-1.$$

Corrispondono ad una radice reale non nulla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ di molteplicità $\nu$.

- $\boxed{\textit{Modi pseudoperiodici}}$

$$k^h|p|^k\cos(\theta k) \quad \text{e} \quad k^h|p|^k\sin(\theta k), \qquad \text{per} \quad h=0,\ldots,\nu-1.$$

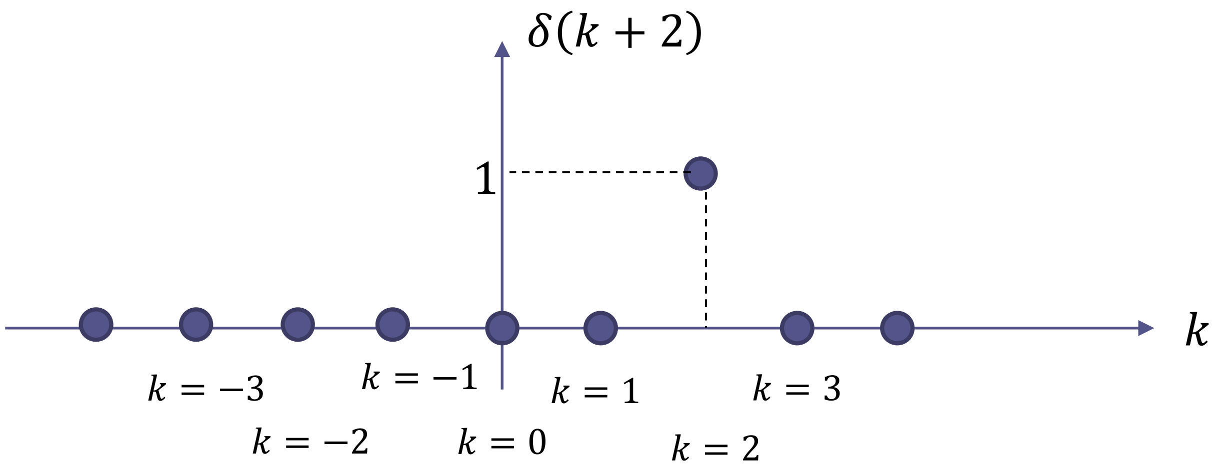
Corrispondono ad una coppia di radici complesse e coniugate $p, \bar{p} = |p|\, e^{\pm j\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ di molteplicità $\nu$.

L'obiettivo è quello di classificare tali modi in:

- modi *stabili* (o *convergenti*): sono i modi che tendono a 0 per $k \to \infty$;
- modi *al limite di stabilità*: sono modi che pur senza tendere a 0 per $k \to \infty$ assumono sempre un valore limitato in modulo;
- modi *instabili* (o *divergenti*): sono i modi che tendono a $\pm\infty$ per $k \to \infty$

# Modi impulsivi

I modi impulsivi $\delta(k + k_0 - h)$ sono segnali che assumono valore zero quasi ovunque tranne che per valori del tempo per cui vale $k = -k_0 + h$ dove assumo valore 1. In tal senso sono modi stabili.



# Modi aperiodici

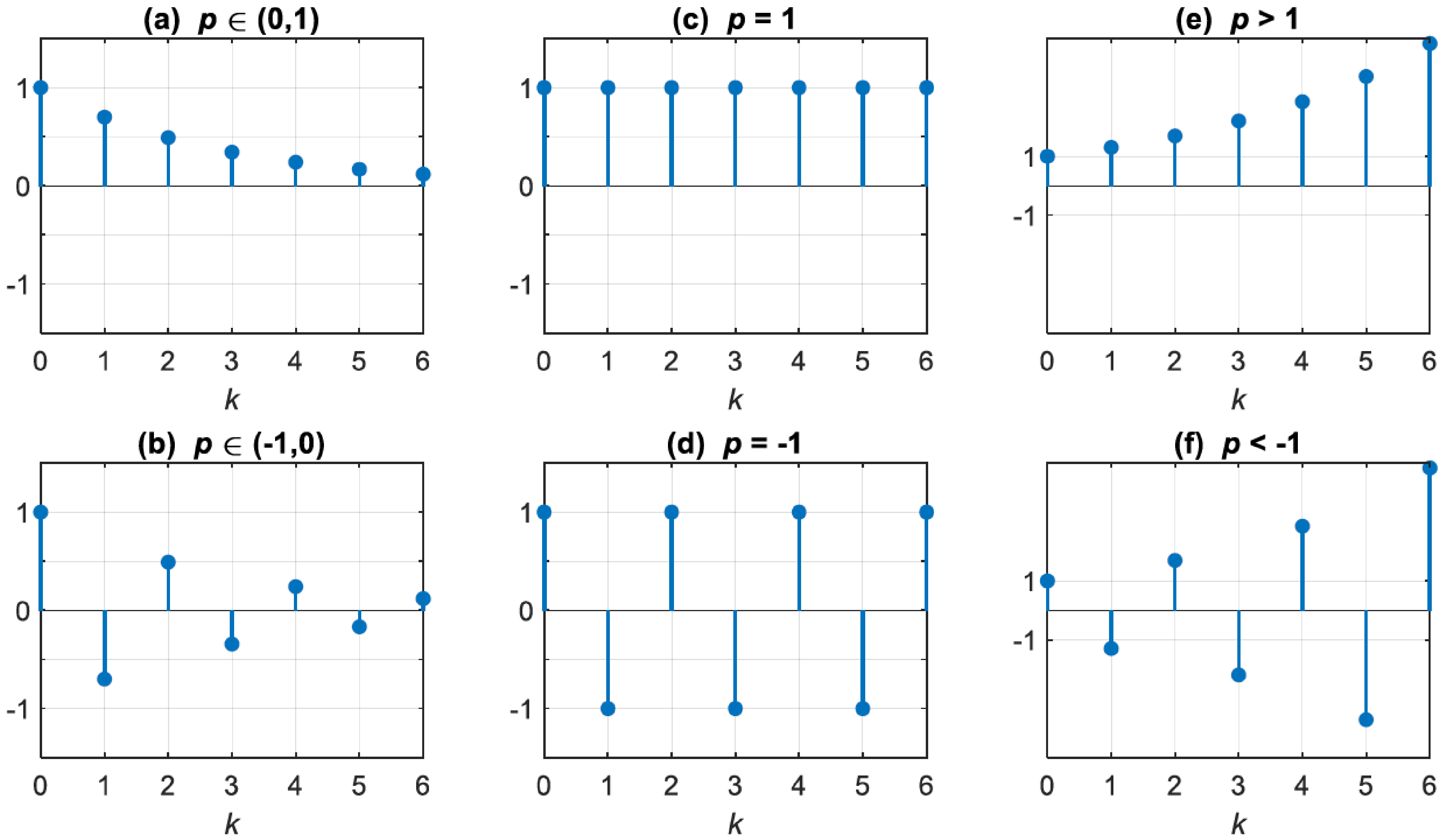
$$k^h p^k, \qquad \text{per} \quad h = 0, \ldots, \nu - 1.$$

Il modo aperiodico più semplice ha ordine $h = 0$ e vale $p^k$:

A seconda del valore assunto dalla radice $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, i possibili comportamenti del modo $p^k$ sono i seguenti:

- il modo è stabile se e solo se $|p| < 1$;
- il modo è al limite di stabilità se e solo se $|p| = 1$;
- il modo è instabile se e solo se $|p| > 1$.

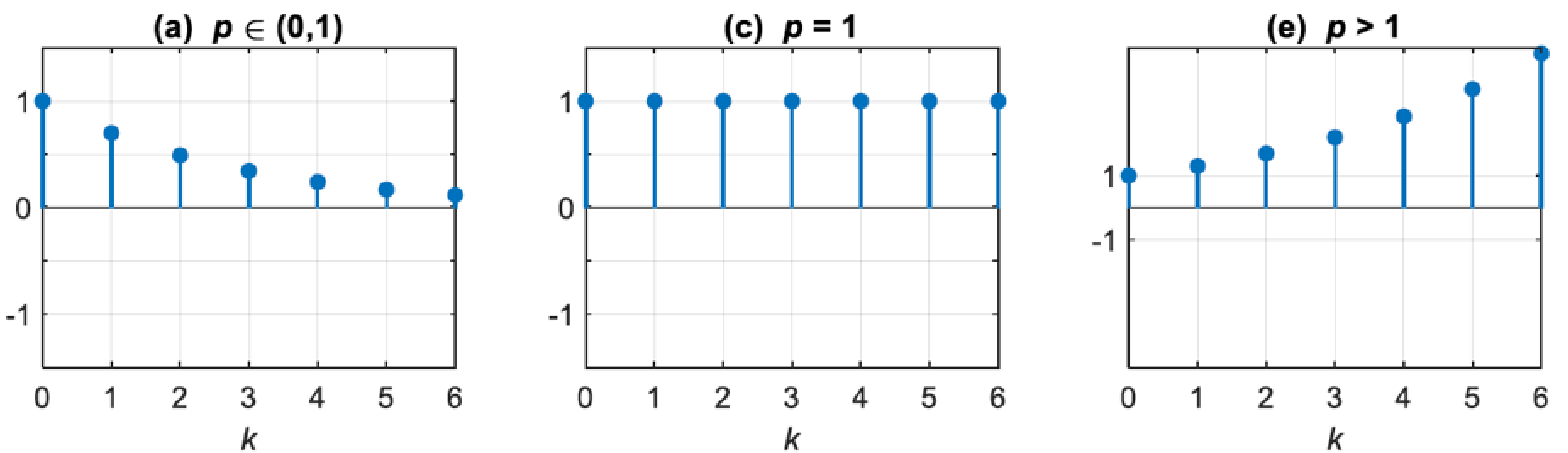
# Andamenti del modo $p^k$ al variare di $p$



$p \in (0,1)$: il modo tende monotonicamente a zero (stabile);

$p = 1$: il modo coincide con il gradino unitario (al limite di stabilità);

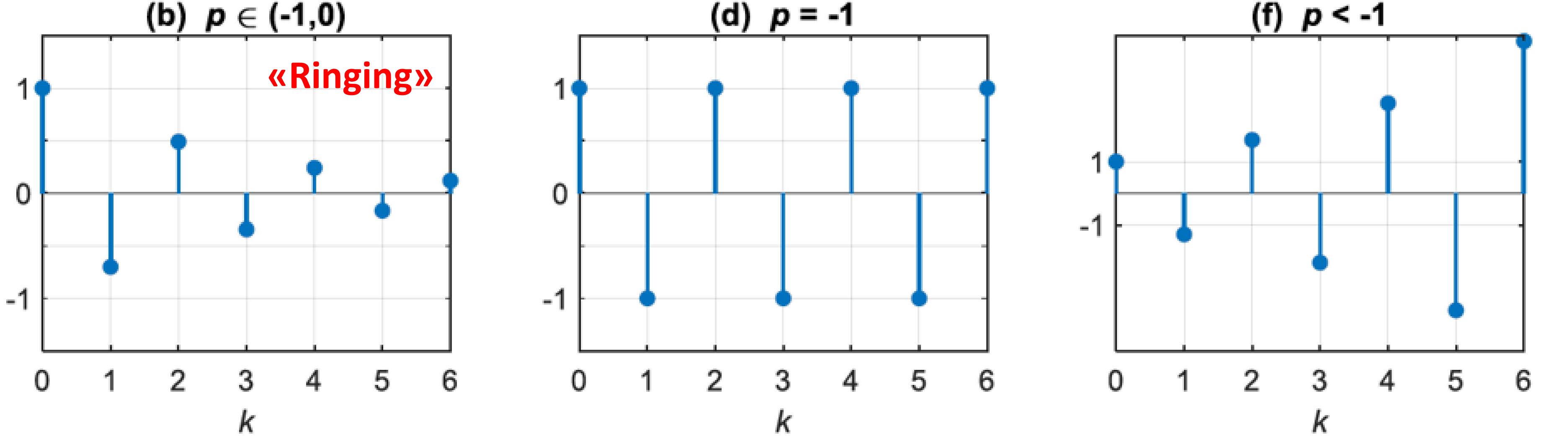
$p \in (1,\infty)$: il modo cresce monotonicamente (instabile);



$p \in (-1, 0)$: il modo assume valori alternativamente positivi e negativi di modulo che tende monotonicamente a zero (stabile);

$p = -1$: il modo assume valori alternativamente positivi e negativi di modulo costante pari a 1 (al limite di stabilità);

$p \in (-\infty, -1)$: il modo assume valori alternativamente positivi e negativi di modulo che cresce monotonicamente (instabile).



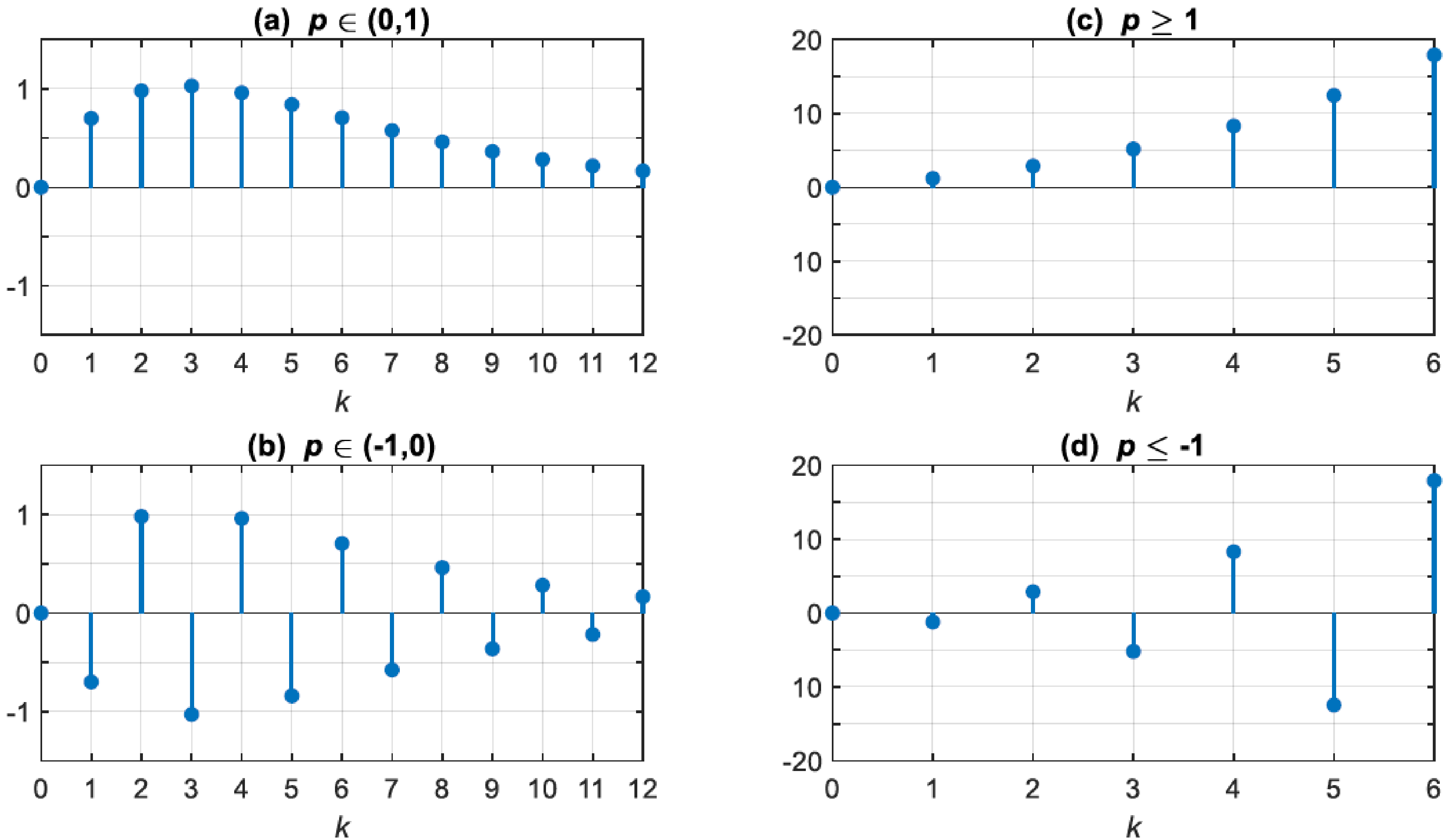
Qualora la radice $p$ abbia molteplicità $\nu > 1$, saranno anche presenti dei modi aperiodici di ordine $h = 1,2, \dots, \nu$-1 che assumono la forma $k^h p^k$

A seconda del valore assunto dalla radice $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, i possibili comportamenti del modo $k^h p^k$ sono i seguenti:

- $|p| < 1$: il modo tende a zero (stabile);
- $|p| \geq 1$: il modo ha ampiezza sempre crescente (instabile).

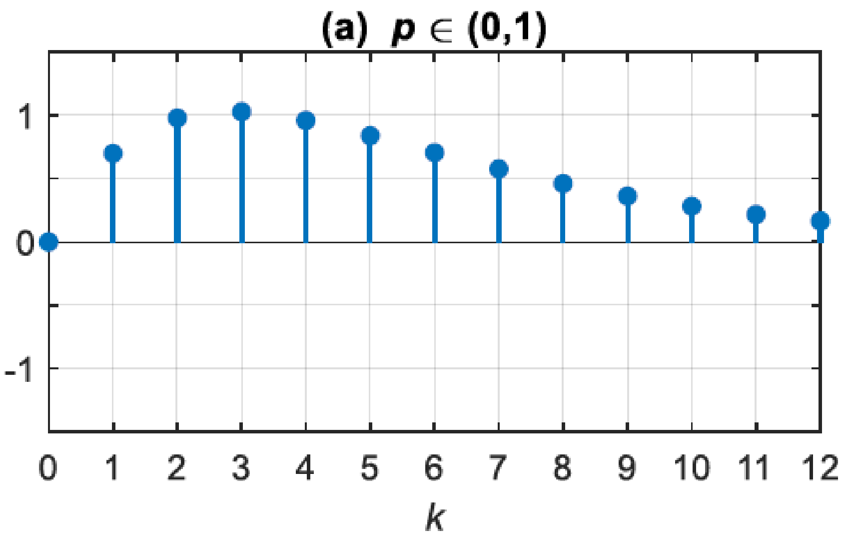
Analizziamo gli andamenti temporali della sequenza nei vari casi, limitandoci al valore $h = 1$ in quanto gli andamenti per valori di $h$ superiori sono qualitativamente equivalenti

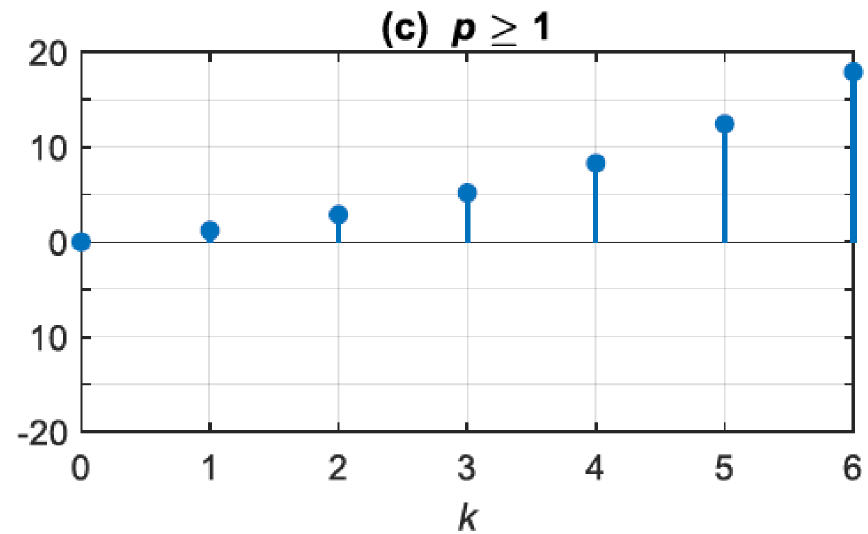
# Andamenti del modo $kp^k$ al variare di $p$



$p \in (0,1)$: il modo cresce sino a raggiungere un valore massimo per poi decrescere monotonicamente tendendo a zero (stabile);

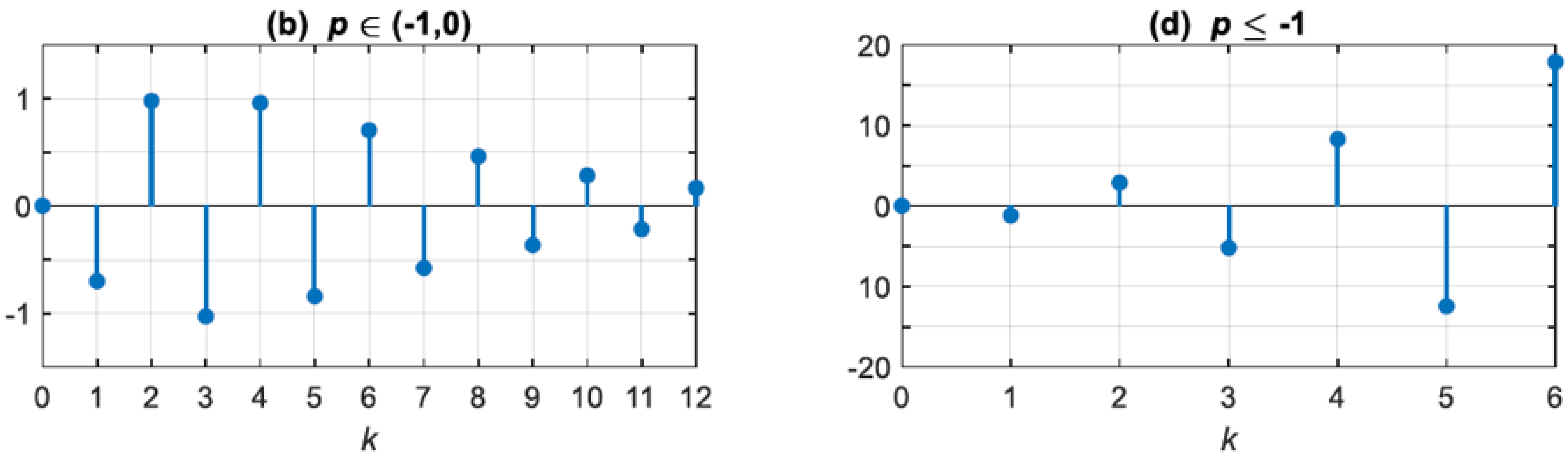
$p \in [1,\infty)$ il modo cresce monotonicamente (instabile);



$p \in (-1, 0)$: il modo assume valori alternativamente positivi e negativi di modulo che cresce sino a raggiungere un valore massimo per poi decrescere monotonicamente tendendo a zero (stabile);

$p \in (-\infty, -1]$: il modo assume valori alternativamente positivi e negativi di modulo che cresce monotonicamente (instabile).




«Ringing»

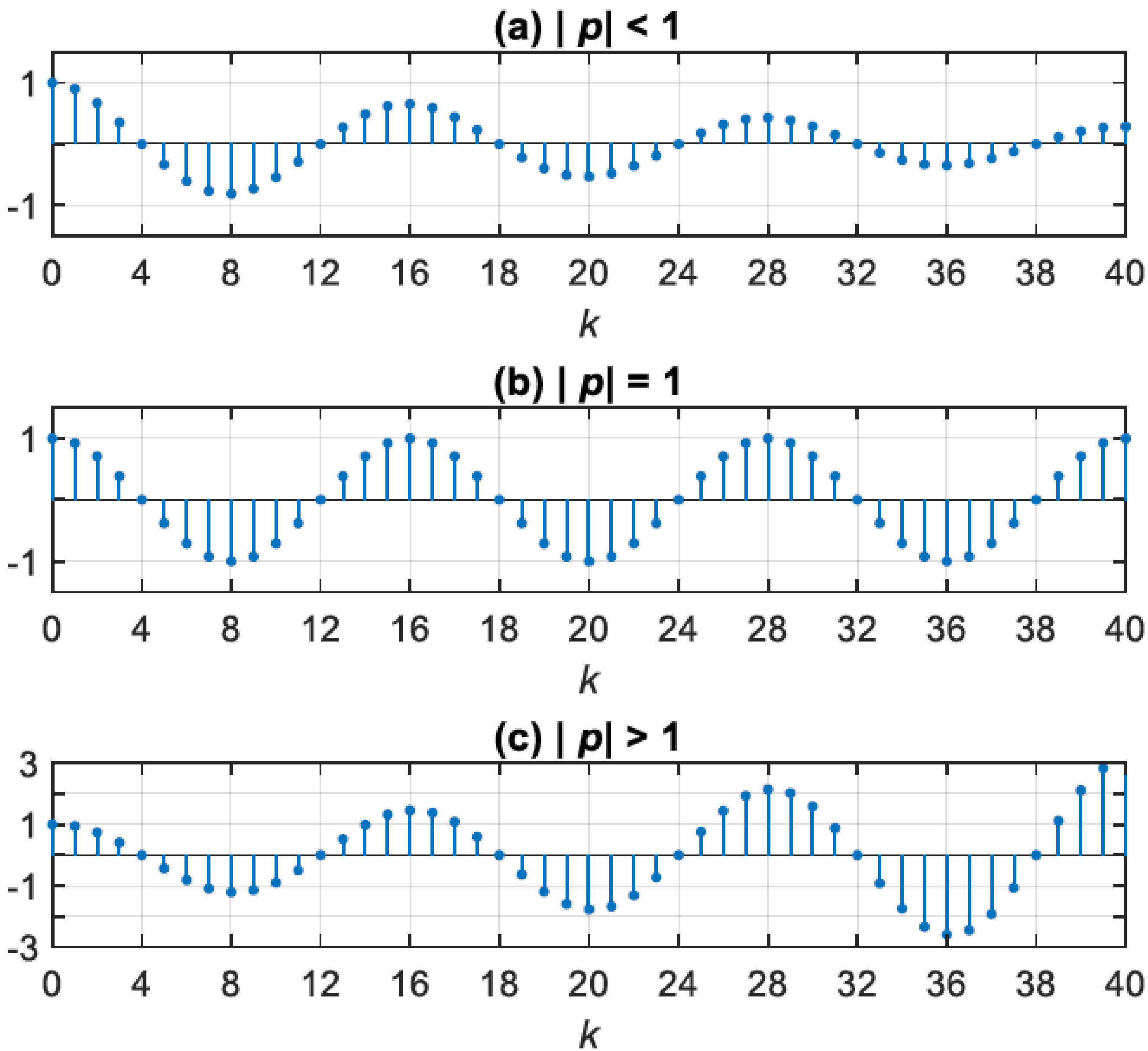
# Modi pseudoperiodici

Ci si può limitare a studiare solo il modo della forma $k^h|p|^k\cos(\theta k)$ essendo il modo $k^h|p|^k\sin(\theta k)$ sostanzialmente identico (a meno di uno sfasamento).

Il modo pseudoperiodico più semplice ha ordine $h = 0$ e vale $|p|^k\cos(\theta k)$

A seconda del valore assunto dal modulo $|p|$ della radice $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i possibili comportamenti del modo $|p|^k\cos(\theta k)$ sono i seguenti:

- $|p| < 1$: il modo tende a zero (stabile);
- $|p| = 1$: il modo coincide con la funzione coseno discreto (al limite di stabilità);
- $|p| > 1$: il modo ha ampiezza sempre crescente (instabile).




Stabile

Limite di stabilità

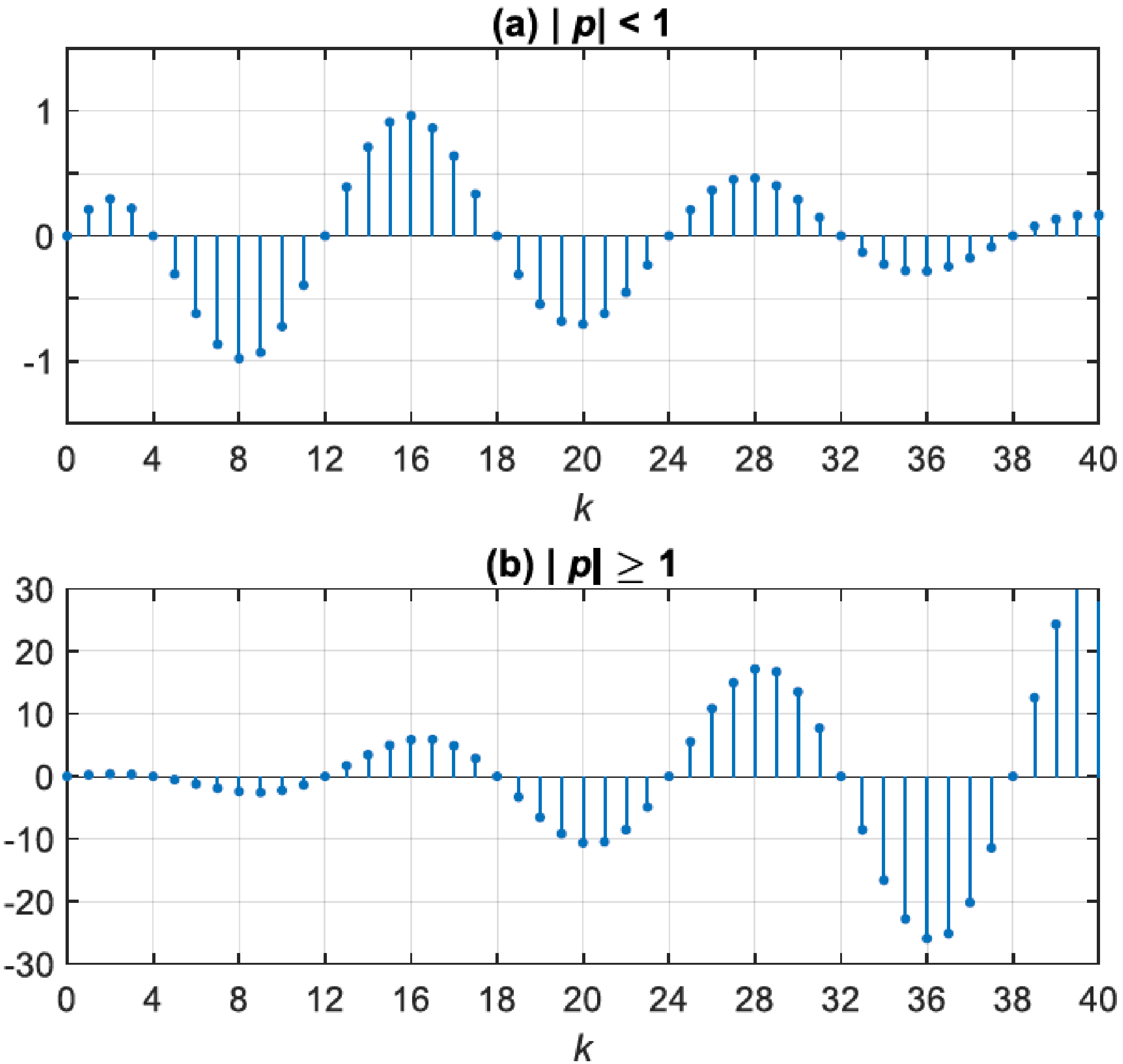
Instabile

Qualora la radice complessa $p$ abbia molteplicità $\nu > 1$, saranno anche presenti dei modi aperiodici di ordine $h = 1,2, \dots, \nu$-1 che assumono la forma $k^h|p|^k \cos(\theta k)$

A seconda del valore assunto dalla radice $p \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, i possibili comportamenti del modo $k^h p^k \cos(\theta k)$ con $h \geq 1$ sono i seguenti:

- $|p| < 1$: il modo tende a zero (stabile);
- $|p| \geq 1$: il modo ha ampiezza sempre crescente (instabile).

Analizziamo gli andamenti temporali della sequenza nei due casi, limitandoci al valore $h = 1$ in quanto gli andamenti per valori di $h$ superiori sono qualitativamente equivalenti




Stabile

Instabile

# Regione di stabilità

Sulla base dell'analisi dei modi che caratterizzano un sistema a tempo discreto possiamo concludere quanto segue.

Tutti i modi associati a radici di modulo $|p| < 1$ sono stabili.

Tutti i modi associati a radici di modulo $|p| > 1$ sono instabili.

I modi associati a radici di modulo $|p| = 1$ e molteplicità unitaria sono al limite di stabilità

I modi associati a radici di modulo $|p| = 1$ e molteplicità maggiore di uno sono in parte al limite di stabilità e in parte instabili

È dunque possibile partizionare il piano complesso in tre regioni

La regione all'interno del cerchio unitario (in verde in figura), detta regione di stabilità contiene le radici di modulo minore di 1:
ad esse competono modi tutti stabili, indipendentemente dalla loro molteplicità.

I punti sul cerchio unitario (in blu in figura) sono le radici di modulo unitario: ad esse competono modi semplici al limite di stabilità e modi di ordine superiore (che sono presenti quando la radice ha molteplicità maggiore di uno) instabili.

La regione all'esterno del cerchio unitario (in giallo in figura), detta regione di instabilità contiene le radici di modulo maggiore di 1: ad esse competono modi tutti instabili indipendentemente dalla loro molteplicità