Controllo digitale

Campionamento e ricostruzione di segnali.

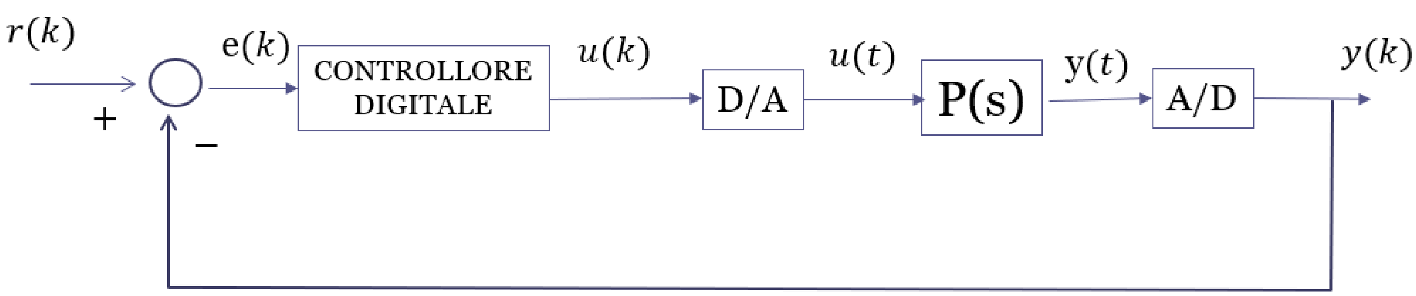
Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Introduzione

Abbiamo imparato fino ad ora ad operare su sequenze numeriche, prescindendo dal fatto che nei sistemi di controllo reali la sequenza della variabile di uscita sia ottenuta campionando un segnale a tempo continuo.

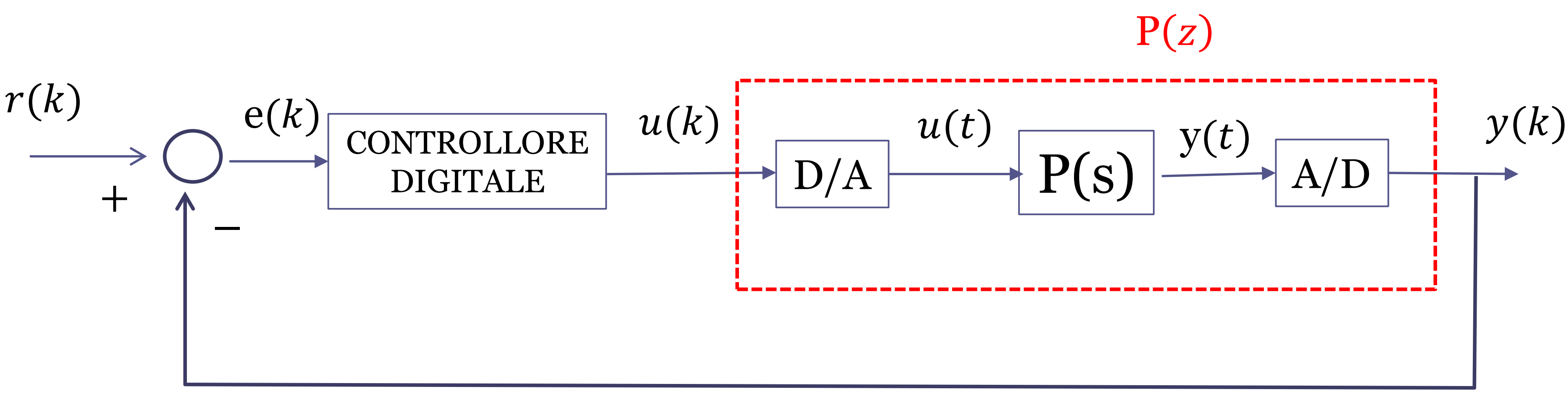
E' tempo quindi di estendere e generalizzare le rappresentazioni fino a qui impiegate per includere gli effetti del processo di campionamento.

Studiamo preliminarmente le operazioni di campionamento (conversione A/D) e ricostruzione (conversione D/A) di un segnale. Desideriamo caratterizzare tali operazioni in modo da garantire una consistente rappresentazione dei «sistemi a dati campionati» in cui coesistono segnali a tempo continuo e a tempo discreto, come il sistema di controllo in figura.



Analizzeremo nel contempo le caratteristiche spettrali dei segnali campionati e dei segnali «ricostruiti» per mezzo di conversione D/A di sequenze numeriche, onde ricavare utili indicazioni in merito ai criteri da adottare per scegliere il periodo di campionamento in un sistema di controllo digitale.

Un fondamentale risultato, che otterremo ponendo a frutto i risultati della presente dispensa, sarà in particolare la determinazione, per lo schema di controllo riportato nella seguente figura, di una funzione di trasferimento discreta $P(z)$ che metta in relazione la sequenza $u(k)$ calcolata dal controllore digitale e successivamente convertita in un segnale a tempo continuo $u(t)$ dal convertitore D/A con la sequenza $\mathrm{y}(k)$ di uscita ottenuta campionando l'uscita analogica $y(t)$ del processo $P(s)$.



Campionamento (conversione A/D)

L'operazione del campionamento, eseguita tramite un convertitore analogico-digitale (convertitore A/D, o campionatore) determina un segnale a tempo discreto a partire da un segnale a tempo continuo il cui valore viene rilevato periodicamente e convertito in formato digitale.

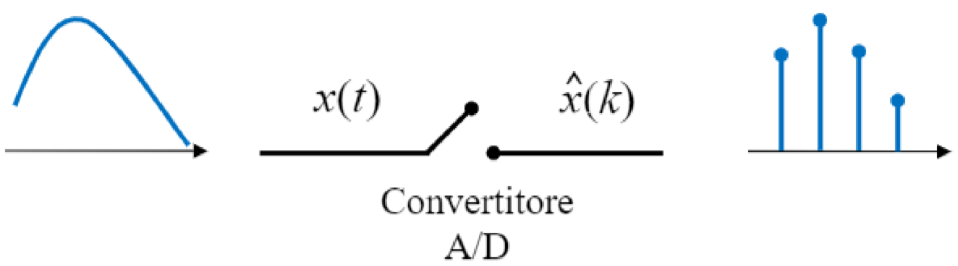
È importante osservare che il campionamento comporta necessariamente una perdita di informazione; è importante dunque studiare sotto quali condizioni tale perdita di informazione risulti accettabile

Per la piena comprensione del materiale di questa sezione sono necessarie conoscenze di base che riguardano le trasformate di Laplace, le distribuzioni (in particolare la funzione impulso di Dirac), e la rappresentazione spettrale dei segnali a tempo continuo, in particolare la serie e la trasformata di Fourier.

La distanza temporale tra due misure adiacenti è detta tempo (o periodo) di campionamento T_c, e a tale grandezza si associa anche la pulsazione di campionamento ω_c e la frequenza di campionamento f_c

Questi valori sono legati fra loro dalle relazioni

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c} \qquad\qquad f_c = \frac{1}{T_c}.$$

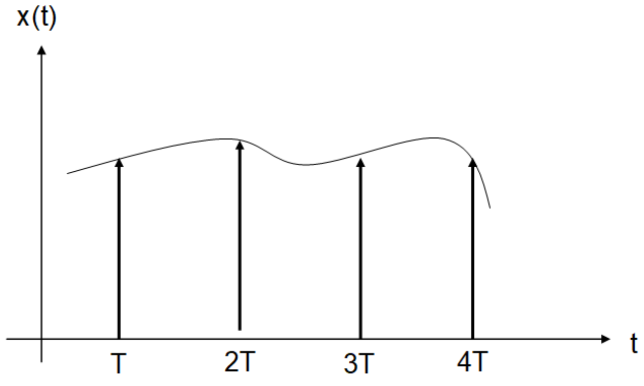


Vale la seguente relazione elementare che lega segnale continuo e discreto nel dominio del tempo fissato il tempo di campionamento T_c

$$\hat{x}(k) = x(kT_c)$$

A questi due segnali è utile associare un terzo segnale $x^*(t)$, chiamato **segnale campionato impulsivamente** che pur contenendo le stesse informazioni del segnale a tempo discreto $\hat{x}(k)$, è definito come funzione di variabile temporale continua

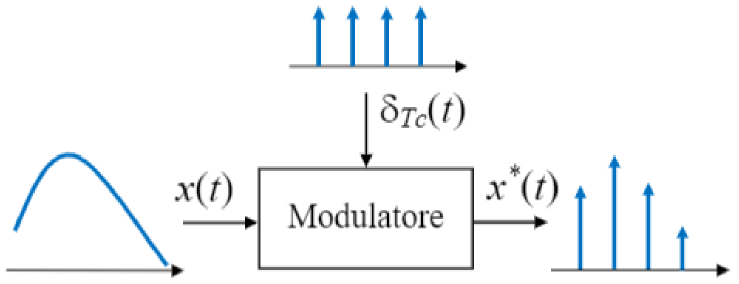
$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)\delta(t - kT_c)$$



Il segnale $x^*(t)$ può essere costruito moltiplicando il segnale $x(t)$ per un treno di impulsi equidistanziati, con spaziatura T_c

$$x^*(t) = x(t)\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_c)$$

ovvero si ottiene, come mostrato in Figura, modulando il segnale $x(t)$ attraverso una portante a treno di impulsi di Dirac distanziati di T_c



Tutti questi segnali possono essere descritti in base alle loro trasformate, che ci consentono di indagare i legami di natura spettrale che intercorrono fra di loro.

Per i segnali a tempo continuo $x(t)$ e $x^*(t)$ è possibile calcolare le trasformate di Laplace che si denotano, rispettivamente, $\mathrm{X}(s)$ e $X^*(s)$.
Per il segnale a tempo discreto $\hat{x}(k)$ è possibile calcolare la trasformate zeta che si denota $\hat{X}(z)$

Determiniamo dapprima la trasformata di Laplace del **segnale campionato impulsivamente** $x^*(t)$. Si ottiene:

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)\mathcal{L}[\delta(t - kT_c)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)e^{-kT_c s}.$$

Per ricavare tale relazione si è impiegata la seguente proprietà della Trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[\delta(t - kT_c)] = \mathcal{L}[\delta(t)]\, e^{-kT_c s} = e^{-kT_c s}$$

D'altro canto, la trasformata zeta del segnale discreto vale

$$\hat{X}(z) = \mathcal{Z}[\hat{x}(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c) z^{-k}$$

Confrontando $\hat{X}(z)$ e $X^*(s)$ $\qquad X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c) e^{-kT_c s}$

si nota come la trasformata Z del segnale a tempo discreto $\hat{x}(k)$ coincida con la trasformata di Laplace del segnale $x^*(t)$ campionato impulsivamente se si opera la sostituzione

$$\boxed{z = e^{sT_c}} \qquad \Rightarrow \qquad s = 1/T_c \ln z$$

In altri termini:

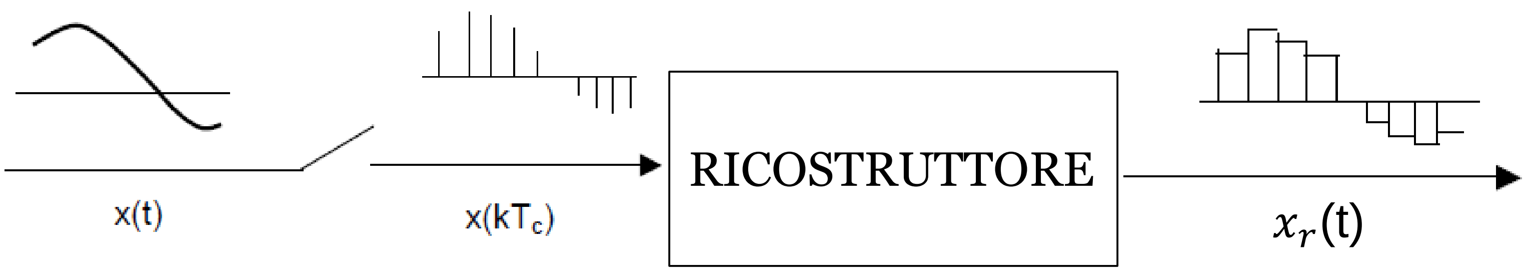
$$X^*(s) = \hat{X}(z)\,|_{z=e^{T_c s}} \qquad \text{ovvero} \qquad \hat{X}(z) = X^*(s)\,|_{s=\ln(z)/T_c}$$

La trasformata di Laplace del segnale $x^*(t)$ campionato impulsivamente è ricavabile a partire dalla trasformata Z della sequenza $\hat{x}(k)$ mediante la sostituzione $z = e^{sT_c}$

Ricostruzione (conversione D/A)

L'operazione di generazione di un segnale a tempo continuo $x_r(t)$ a partire da una sequenza a tempo discreto $x(k)$ (o, se si preferisce, a partire da un segnale campionato impulsivamente) viene chiamata «*ricostruzione*» (o «*tenuta*»)

Con riferimento alla successiva Figura, scopo del blocco ricostruttore è generare un segnale continuo $x_r(t)$ che riproduca approssimativamente il segnale continuo $x(t)$ applicato in ingresso al campionatore anche all'interno dell'intervallo $kT_c \leq t < (k+1)T_c$, intervallo in cui non si hanno informazioni circa il reale andamento della funzione continua da approssimare



Campionatore

Segnale ricostruito

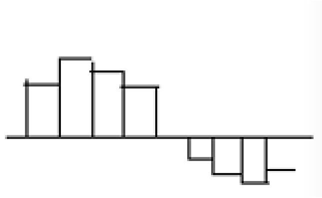
In generale, si può pensare di progettare il blocco ricostruttore in modo che effettui un'interpolazione polinomiale (di ordine *n* arbitrario) fra due campioni adiacenti.
In questo caso si parla di ricostruttore di ordine n.

Il caso piu semplice, ma anche il più usato in pratica, e costituito dal caso n = 0, che corrisponde al blocco ricostruttore detto appunto ricostruttutore di ordine zero (**ZOH**, dal termine inglese zero-order-hold).
Il ricostruttore ZOH opera una ricostruzione costante a tratti nella forma

$$x_r(t) = x(kT_c) \qquad\qquad kT_c \leq t < (k+1)T_c$$

Il segnale x_r(t) mostrato in figura nella slide precedente ha un andamento analogo a quello di un segnale ricostruito mediante uno ZOH

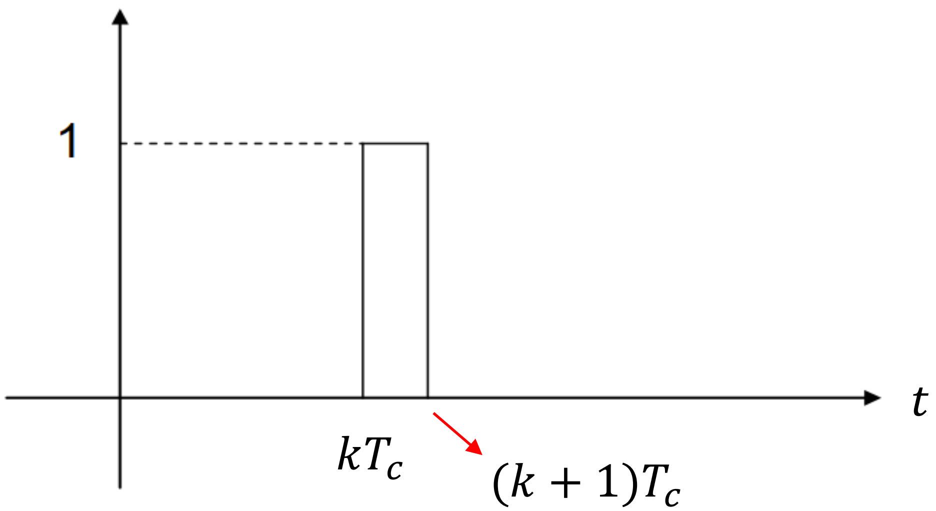
x_r(t)



Il segnale ricostruito $x_r(t)$ ha la seguente espressione analitica

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)[\delta_{-1}(t - kT_c) - \delta_{-1}(t - (k+1)T_c)]$$

Il termine $[\delta_{-1}(t - kT_c) - \delta_{-1}(t - (k+1)T_c)]$ interno alla sommatoria rappresenta il segnale



La Trasformata di Laplace del segnale ricostruito mediante ZOH è determinabile facilmente applicando le proprietà della Trasformata

$$\mathcal{L}\{x_r(t)\} = X_r(s) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)[\delta_{-1}(t-kT_c) - \delta_{-1}(t-(k+1)T_c)]e^{-st}dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)\left[\frac{e^{-kT_cs} - e^{-(k+1)T_cs}}{s}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)e^{-kT_cs}\left[\frac{1-e^{-T_cs}}{s}\right] = \left[\frac{1-e^{-T_cs}}{s}\right] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_c)e^{-kT_cs}$$

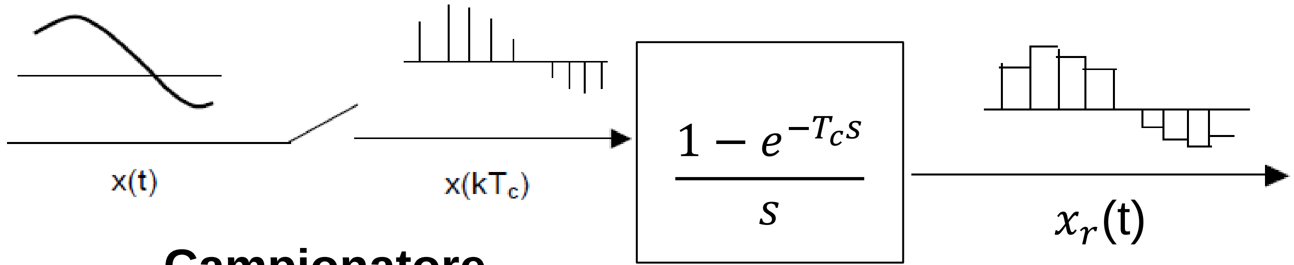
$$= \left[\frac{1-e^{-T_cs}}{s}\right] X^*(s)$$

Si nota come la TdL $X_r(s)$ del segnale ricostruito mediante ZOH sia il prodotto fra la TdL $X^*(s)$ del segnale campionato impulsivamente $x^*(t)$ ed il termine $\left[\frac{1-e^{-T_cs}}{s}\right]$

Dalla precedente relazione deriva immediatamente come sia possibile rappresentare il ricostruttore ZOH mediante un sistema dinamico avente funzione di trasferimento $G_{ZOH}(s)$ pari a

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1-e^{-T_cs}}{s}$$

Vale pertanto la seguente rappresentazione grafica



Campionatore

Ricostruttore ZOH

Segnale ricostruito

E evidente come la caratterizzazione dello ZOH mediante la funzione di trasferimento $G_{ZOH}(s)$ sia valida anche se il segnale $x(kT_c)$ in ingresso al blocco ricostruttore non viene ottenuto dal campionamento di un segnale a tempo continuo, ma è un segnale a tempo discreto $x(k)$ prodotto, ad esempio, da un microprocessore che elabora un algoritmo di controllo.

Con riferimento ai ricostruttori di ordine superiore (ricostruttore di ordine 1, o FOH, ricostruttore di ordine 2, o SOH, etc) si può sviluppare una trattazione duale che restituisce diverse e più complicate Funzioni di Trasferimento.

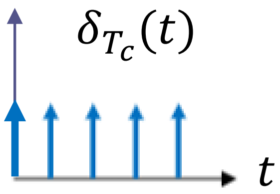
Stante il fatto che il ricostruttore ZOH è quello di gran lunga più utilizzato nella pratica, non affrontiamo l’analisi dei ricostruttori di ordine superiore.

Spettro del segnale campionato

Ricordiamo come il segnale campionato $x^*(t)$ sia stato espresso attraverso il prodotto fra il segnale originario $x(t)$ ed un treno di impulsi di Dirac equispaziati, che abbiamo chiamato $\delta_{T_c}(t)$:

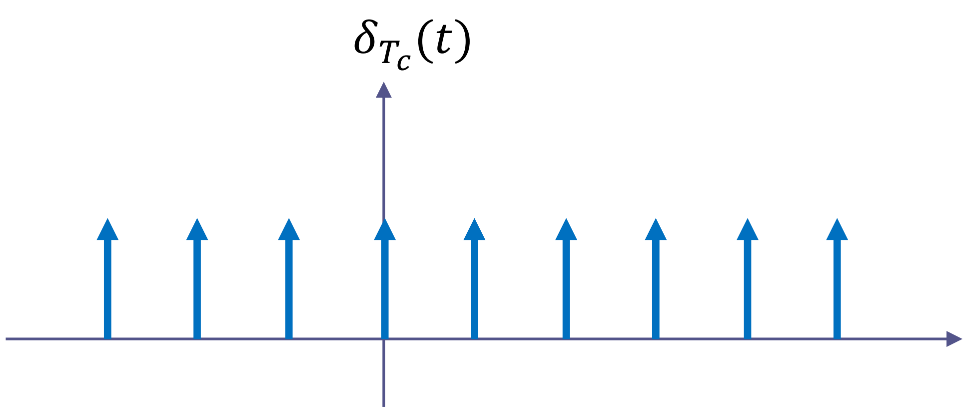
$$x^*(t) = x(t)\, \delta_{T_c}(t)$$

$$\delta_{T_c}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_c)$$



Poiché trattiamo segnali $x(t)$ causali, cioè nulli per $t \leq 0$, si può ridefinire il treno di impulsi $\delta_{T_c}(t)$ estendendo l'indice inferiore della sommatoria da zero a $-\infty$ senza effetti sul segnale campionato $x^*(t)$, che resta invariato

$$\delta_{T_c}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c)$$



Il treno di impulsi cosi ridefinito è una funzione periodica di periodo T_c, e come tale può essere espressa in serie di Fourier

$$\delta_{T_c}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_c t}. \qquad \omega_c = 2\pi/T_c$$

Si calcola facilmente come i coefficienti F_k assumano tutti lo stesso valore costante, pari all'inverso del periodo di campionamento T_c

$$F_k = \frac{1}{T_c}\int_{-\frac{T_c}{2}}^{-\frac{T_c}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT_c) e^{-jk\omega_c \tau} d\tau = \frac{1}{T_c}\int_{-\frac{T_c}{2}}^{-\frac{T_c}{2}} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{T_c}$$

In base a ciò è possibile riscrivere il segnale $x^*(t)$ come segue

$$x^*(t) = x(t)\,\delta_{T_c}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_c} e^{jk\omega_c t} = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\omega_c t}$$

e calcolarne la trasformata di Laplace in una forma alternativa rispetto a quella ricavata in precedenza

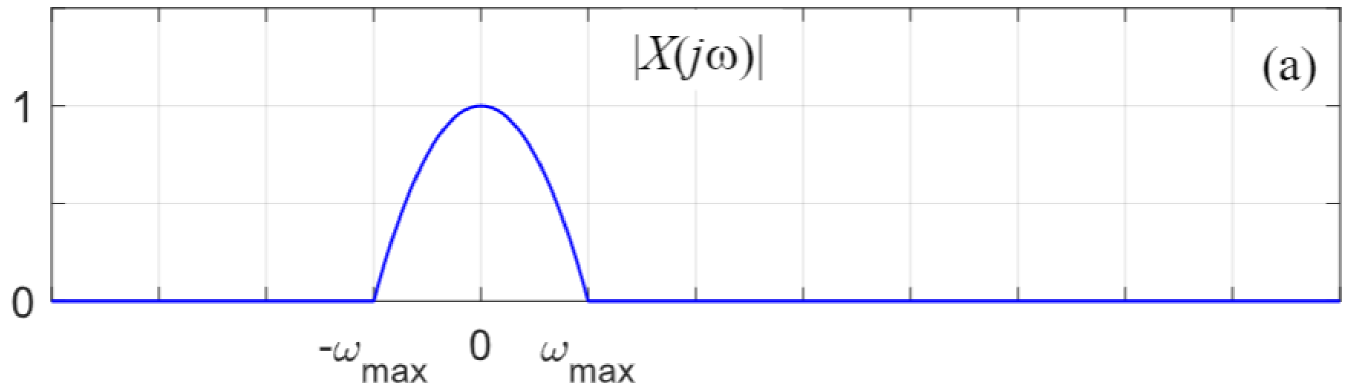
$$\boxed{X^*(s)} = \int_0^{\infty} x^*(t)e^{-st}dt = \frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} x(t)e^{-(s-jk\omega_c)t}dt = \boxed{\frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s-jk\omega_c)}$$

Da questa relazione possiamo determinare lo spettro del segnale campionato attraverso la sostituzione $s = j\omega$

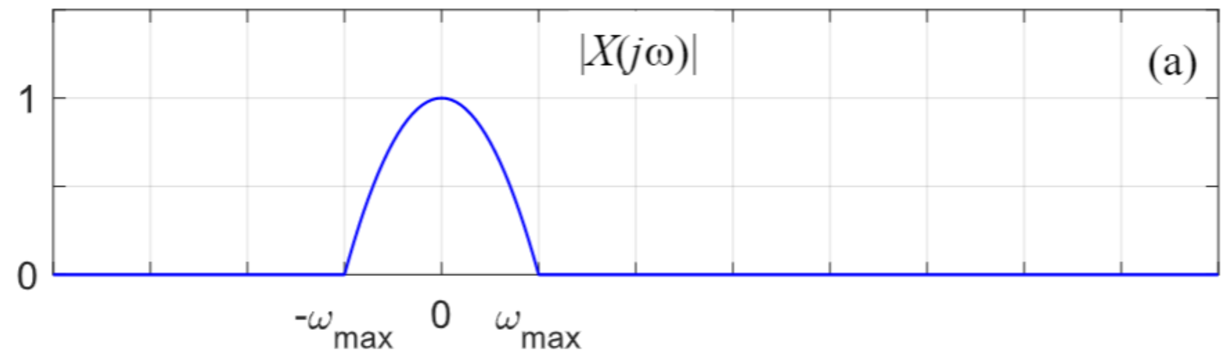
$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s-jk\omega_c) = \frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_c]$$

Tale relazione esprime il fatto che lo spettro di un segnale campionato (tramite treno di impulsi) e costituito dalla composizione (somma) fra infinite repliche dello spettro del segnale originario, centrate attorno a pulsazioni multiple della pulsazione di campionamento ω_c, ed è attenuato di un fattore $\frac{1}{T_c}$.

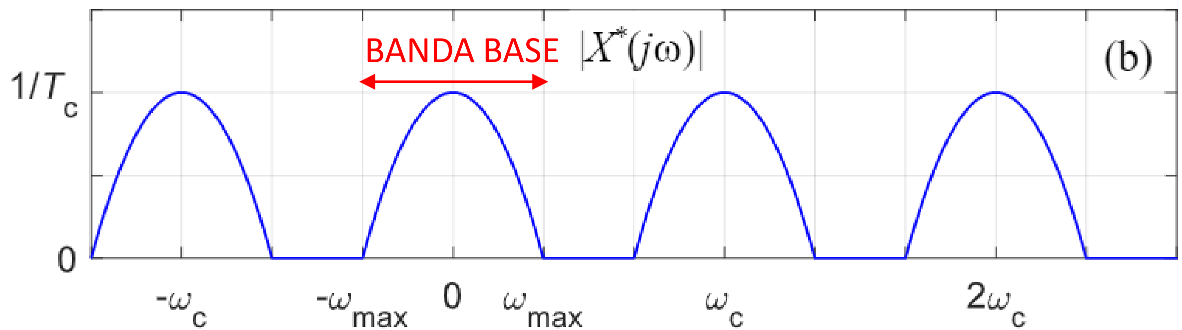
Se si considerano segnali x(t) a banda limitata, cioè segnali aventi uno spettro identicamente nullo al di fuori da una banda intorno all'origine, come nella figura seguente



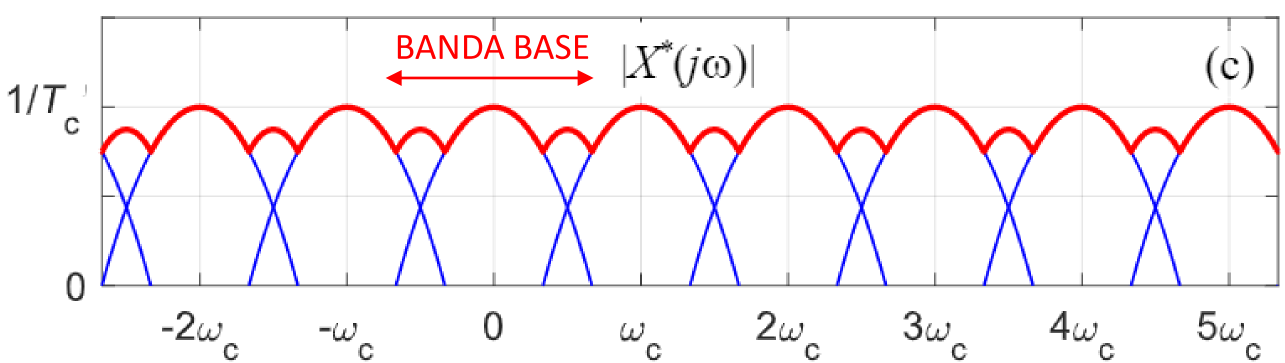
la particolare scelta del periodo di campionamento T_c (o della grandezza equivalente $\omega_c = 2\pi/T_c$) conduce a diverse situazioni in merito al fatto che le «repliche» interferiscano fra loro o no.



Spettro delle ampiezze del segnale originario



Spettro delle ampiezze del segnale campionato con pulsazione $\omega_c > 2\omega_{max}$

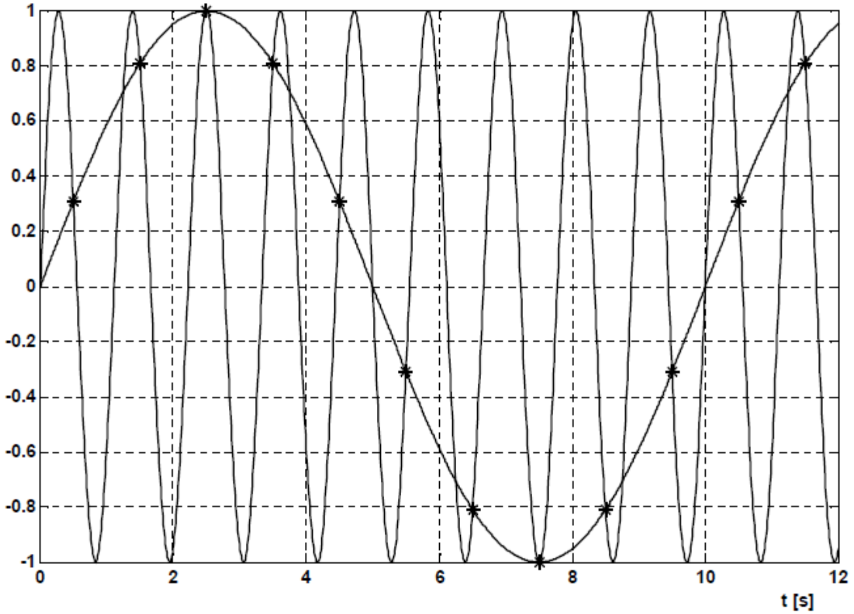


Spettro delle ampiezze (in rosso) del segnale campionato con pulsazione

$\omega_{max} < \omega_c < 2\omega_{max}$

Tale risultato si inquadra all'interno del noto **Teorema del campionamento di Nyquist-Shannon,** che fissa la minima frequenza di campionamento per un segnale a banda limitata tale da non comportare perdita di informazione a seguito del processo di campionamento ed evitare il deleterio fenomeno dell'**aliasing,** cioè l' «inquinamento» delle componenti in banda base dello spettro di un segnale campionato ad opera delle repliche

Il fenomeno dell'aliasing ha un significato rilevante nel dominio del tempo, associato al fatto che, in certe condizioni, due sinusoidi a tempo continuo di frequenza diversa possono risultare indistinguibili dopo il campionamento, nel senso che producono esattamente gli stessi campioni



Esempio di aliasing nel dominio del tempo