Controllo digitale

Analisi di sistemi a tempo discreto nel dominio della trasformata Z
Parte 2: modelli in variabili di stato

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Analisi di modelli a tempo discreto in variabili di stato nel dominio della trasformata Z

Risposta libera e risposta forzata

Ora applichiamo i metodi di analisi basati sulla trasformata Z anche ai modelli in variabili di stato. Gli obiettivi sono i medesimi che abbiamo perseguito per i modelli ingresso-uscita: ricavare in forma analitica la risposta libera e forzata del modello, e definirne, se possibile, la funzione di trasferimento.

Modello in variabili di stato:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \quad && \text{Equazione di stato} \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) && \text{Trasformazione di uscita} \end{aligned}$$

vettore degli ingressi — vettore di stato — vettore delle uscite

$$\boldsymbol{u}(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_p(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p, \qquad \boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_q(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^q.$$

Determinammo a suo tempo in forma numerica le risposte libera e forzata dello stato e dell'uscita:

$$\boldsymbol{x}(k) = \underbrace{\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}(0)}_{\boldsymbol{x}_\ell(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{A}^{k-1-i} \boldsymbol{B} \boldsymbol{u}(i)}_{\boldsymbol{x}_f(k)}$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}(0)}_{\boldsymbol{y}_\ell(k)} + \underbrace{\boldsymbol{C}\sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{A}^{k-1-i} \boldsymbol{B} \boldsymbol{u}(i) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)}_{\boldsymbol{y}_f(k)}$$

In seguito, grazie allo sviluppo di Sylvester della matrice di transizione dello stato, siamo stati in grado di determinare in forma analitica la sola risposta libera.

Ora seguiamo un approccio differente, che transita per il dominio della variabile Z, per risolvere in maniera semplice il problema della determinazione della evoluzione temporale delle componenti libera e forzata di stato e uscita.

Applicando l'operatore di Z-trasformata alla Equazione di stato ed alla Trasformazione di uscita si ottiene (applicando al termine $\boldsymbol{x}(k+1)$ il teorema dello scorrimento a sinistra):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{aligned}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

$$\begin{aligned} z\boldsymbol{X}(z) - z\boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z) \\ \boldsymbol{Y}(z) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(z) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{z}) &= z\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{U}(z) \\ \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{U}(z) \end{aligned}$$

Elaborando tali relazioni è possibile esplicitare le trasformate Z dello stato e dell'uscita

$$\boldsymbol{X}(z) = z\,(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)$$

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}\left(z\,(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)\right) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(z)$$

Il termine $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ viene detto **Matrice Risolvente**

$$\boldsymbol{X}(z) = z\,(zI - \boldsymbol{A})^{-1}\,x(0) + (zI - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)$$

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}\left(z\,(zI - \boldsymbol{A})^{-1}\,x(0) + (zI - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)\right) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(z)$$

Risulta immediato individuare nella precedenti espressioni i termini dipendenti dalle condizioni iniziali, quindi associati alla evoluzione libera, ed i termini dipendenti dall’ingresso, associati pertanto alla evoluzione forzata

evoluzione libera dello stato $$\boldsymbol{X}_{\ell}(z) = z\,(zI - \boldsymbol{A})^{-1}\,x(0)$$

evoluzione forzata dello stato $$\boldsymbol{X}_{f}(z) = (zI - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)$$

evoluzione libera dell’uscita $$\boldsymbol{Y}_{\ell}(z) = \boldsymbol{C}\left((zI - \boldsymbol{A})^{-1}\,x(0)\right)$$

evoluzione forzata dell’uscita $$\boldsymbol{Y}_{f}(z) = \boldsymbol{C}\left((zI - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{U}(z)$$

Dopo aver determinato, secondo le espressioni precedentemente riportate, le trasformate Z della evoluzione libera e forzata dello stato e dell'uscita, è possibile, mediante antitrasformata, calcolare per via analitica le corrispondenti espressioni in funzione del tempo.

Poniamo a confronto le espressioni della risposta libera determinata mediante analisi nel dominio del tempo discreto:

$$\boldsymbol{x}_\ell(k) = \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}(0)$$

e l'espressione appena ricavata per mezzo delle proprietà della trasformata Z:

$$\boldsymbol{x}_\ell(k) = \boldsymbol{Z}^{-1}\{z(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)\} = \boldsymbol{Z}^{-1}\{z(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\}\boldsymbol{x}(0)$$

Operatore trasformata inversa Z

Ovviamente tali espressioni devono coincidere, e tale eguaglianza ci fornisce una rappresentazione/metodo di calcolo alternativo della matrice di transizione dello stato

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{Z}^{-1}\{z(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\}$$

Analisi di modelli a tempo discreto in variabili di stato nel dominio della trasformata Z

Funzione di trasferimento

Dalla espressione della evoluzione forzata dell'uscita:

$$Y_f(z) = C\left((zI - A)^{-1} B + D\right) U(z)$$

determiniamo anche in maniera immediata la funzione di trasferimento in funzione delle matrici del modello in variabili di stato

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}) = \frac{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{z})}{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})} = \boldsymbol{C}\left[(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\right]$$

Nel caso, molto frequente nella pratica, in cui l'ingresso non intervenga nella trasformazione di uscita (cioè $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$) si avrà

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}) = \frac{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{z})}{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})} = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

Esempio Si consideri il modello a tempo discreto in variabili di stato

$$x_1(k+1) = 2\,x_1(k) + x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = -x_2(k) + u(k)$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u(k) = \delta_{-1}(k)$$

$$y(k) = 2\,x_1(k)$$

Determinare l'evoluzione libera e forzata dello stato e dell'uscita.

Rappresentiamo in forma matriciale le equazioni del modello

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Numero di variabili di stato (ordine del sistema): $n = 2$

Numero di ingressi: $p = 1$

Numero di uscite: $q = 1$

Le matrici del modello sono pertanto le seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

La matrice di stato è triangolare superiore

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

I suoi autovalori coincidono pertanto con gli elementi diagonali ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$), e desumiamo quindi come il sistema in esame sia instabile. Ci attendiamo quindi che la risposta al gradino unitario diverga

Calcoliamo la matrice risolvente $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$

$$z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} z-2 & -1 \\ 0 & z+1 \end{bmatrix} \Rightarrow (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{(z+1)(z-2)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 0 & z-2 \end{bmatrix}$$

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z-2)} & \dfrac{1}{(z+1)(z-2)} \\ 0 & \dfrac{1}{(z+1)} \end{bmatrix}$$

Inversa di una matrice 2x2:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{det(M)} adj\,(M^T) = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

da cui **l’evoluzione libera dello stato**:

$$\boldsymbol{X}_\ell(z) = \begin{bmatrix} x_{1,\ell}(k) \\ x_{2,\ell}(k) \end{bmatrix} = z(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{x}(0) = z\begin{bmatrix} \frac{1}{(z-2)} & \frac{1}{(z+1)(z-2)} \\ 0 & \frac{1}{(z+1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z}{(z+1)(z-2)} \\ \frac{z}{(z+1)} \end{bmatrix}$$

Dalla matrice :

$$z(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} \frac{z}{(z-2)} & \frac{z}{(z+1)(z-2)} \\ 0 & \frac{z}{(z+1)} \end{bmatrix}$$

si può risalire, mediante trasformata inversa, alla matrice di transizione dello stato

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{Z}^{-\mathbf{1}}\{z(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}}\} = \boldsymbol{Z}^{-\mathbf{1}}\left\{\begin{bmatrix} \frac{z}{(z-2)} & \frac{z}{(z+1)(z-2)} \\ 0 & \frac{z}{(z+1)} \end{bmatrix}\right\} = \boldsymbol{Z}^{-\mathbf{1}}\left\{\begin{bmatrix} \frac{z}{(z-2)} & -\frac{1}{3}\frac{z}{(z+1)} + \frac{1}{3}\frac{z}{(z-2)} \\ 0 & \frac{z}{(z+1)} \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k & -\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{1}{3}2^k \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}\delta_{-1}(k)$$

Si verifica facilmente come lo sviluppo di Sylvester di $\boldsymbol{A}^k$ conduca al medesimo risultato

Calcolo della matrice di transizione dello stato mediante il Symbolic Math Toolbox di Matlab

Calcolo diretto di A^k

```
A = [ 2 1; 0 -1 ];

syms k
assume(k,'integer')

Atok = simplify(A^k)
```

Definizione di una variabile simbolica k ristretta al campo dei valori interi

Calcolo della matrice A^k e successiva semplificazione

Si ottiene:

```
Atok =

[ 2^k, 2^k/3 - (-1)^k/3]
[   0,           (-1)^k]
```

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} (2)^k & -\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{1}{3}(2)^k \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \delta_{-1}(k)$$

Calcolo della matrice di transizione dello stato mediante il Symbolic Math Toolbox di Matlab

Calcolo mediante antitrasformata Z della matrice $F(z) = z(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$

```
syms z k
Fz = [ z/(z-2)      z/((z+1)*(z-2));
        0     z/(z+1)];
Atok1 =iztrans(Fz,k)

A = [ 2 1; 0 -1 ];
Atok2 =iztrans(z*inv(z*eye(2)-A),k)
```

Si ottiene:

```
Atok1 =

[ 2^k, 2^k/3 - (-1)^k/3]
[   0,           (-1)^k]


Atok2 =

[ 2^k, 2^k/3 - (-1)^k/3]
[   0,           (-1)^k]
```

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} (2)^k & -\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{1}{3}(2)^k \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \delta_{-1}(k)$$

Abbiamo determinato le trasformate Z della evoluzione libera delle 2 variabili di stato

$$X_{1,\ell}(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$$

$$X_{2,\ell}(z) = \frac{z}{(z+1)}$$

La trasformata Z della evoluzione libera dell'uscita si calcola facilmente a partire da quella dello stato applicando la (Z trasformata della) trasformazione in uscita $\boldsymbol{Y}_\ell(z) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_\ell(z) + \boldsymbol{D}u(t)$ che nel caso in esame, in cui $\boldsymbol{D} = 0$ e l'uscita una variabile scalare $y_\ell(k)$, diventa

$$\boldsymbol{Y}_\ell(z) = Y_\ell(z) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_\ell(z) = \boldsymbol{C}\begin{bmatrix} \frac{z}{(z+1)(z-2)} \\ \frac{z}{(z+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{z}{(z+1)(z-2)} \\ \frac{z}{(z+1)} \end{bmatrix} = \frac{2z}{(z+1)(z-2)}$$

Applicando direttamente la relazione $\mathrm{Y}(z) = 2\, X_1(z)$ del caso in esame si poteva immediatamente scrivere, evitando calcoli matriciali

$$Y_\ell(z) = 2X_{1,\ell}(z) = \frac{2z}{(z+1)(z-2)}$$

Apriamo una parentesi. Sviluppando in forma generale il calcolo dell'evoluzione libera per condizioni iniziali arbitrarie $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$, si ottiene dopo qualche calcolo

$$Y_\ell(z) = -\frac{2}{3}x_2(0)\frac{z}{z+1} + 2\left[x_1(0) + \frac{1}{3}x_2(0)\right]\frac{z}{(z-2)}$$

Si noti come esistono *particolari condizioni iniziali in corrispondenza delle quali il modo instabile viene «rimosso» dall'uscita. Ciò avviene nel presente caso quando*

$$x_1(0) + \frac{1}{3}x_2(0) = 0$$

Le condizioni iniziali che cancellano dall'uscita il modo instabile corrispondono all'autovettore della matrice di stato A associato all'autovalore stabile $\lambda_2 = -1$.

```
A=[2 1;0 -1];
[V,D] = eig(A)
```

```
V =

    1.0000   -0.3162
         0    0.9487


D =

     2     0
     0    -1
```

Giustifichiamo tale fatto.
Ciò che avviene in un sistema lineare espresso in variabili di stato in cui la matrice A ha autovalori reali distinti è che se il vettore delle condizioni iniziali è allineato con uno degli autovettori della matrice A, allora l'evoluzione libera resterà indefinitamente allineata con l'autovettore in tutti gli istanti successivi, ed evolverà secondo il modo che corrisponde al particolare autovalore associato

Ipotizziamo che le condizioni iniziali siano allineate con un autovettore della matrice A associato ad un autovalore λ, cioè che soddisfino la relazione

$$A \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Dall'equazione di stato

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Si mostra come anche all'istante k=1 il vettore di stato sia allineato con il medesimo autovettore in quanto vale:

$$A \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = A\,\lambda \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix}$$

Si mostra iterativamente come per qualunque valore di k il vettore di stato resti indefinitamente allineato con il medesimo autovettore

$$A\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}\qquad k=0,1,2,3,\dots\dots..$$

Ciò comporta, sulla base della equazione di stato

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

che lo stato evolva soddisfacendo, ad ogni passo, la relazione

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}\qquad k=0,1,2,3$$

Tale relazione ricorsiva può essere risolta in forma chiusa

$$\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}=\lambda^k\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}$$

Lo stato evolve pertanto indefinitamente secondo il modo λ^k associato all'autovalore λ

Ritorniamo all'esercizio. Calcoliamo l'antitrasformata di Laplace di $X_{1,\ell}(z), X_{2,\ell}(z)$ e $Y_\ell(z)$ per determinare la risposta libera dello stato e dell'uscita in funzione del tempo

$$X_{1,\ell}(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$$

$$X_{2,\ell}(z) = \frac{z}{(z+1)} \quad \Rightarrow \quad x_{2,\ell}(k) = (-1)^k$$

$$Y_\ell(z) = 2x_{1,\ell}(k) = \frac{2z}{(z+1)(z-2)}$$

Determinando lo sviluppo di Heaviside di $\frac{X_{1,\ell}(z)}{z}$ si ottiene

$$\frac{X_{1,\ell}(z)}{z} = \frac{1}{(z+1)(z-2)} = \frac{R_1}{(z+1)} + \frac{R_2}{(z-2)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{3}\frac{1}{(z-2)}$$

Esplicitando $X_{1,\ell}(z)$ si può determinare immediatamente la trasformata inversa

$$X_{1,\ell}(z) = -\frac{1}{3}\frac{z}{(z+1)} + \frac{1}{3}\frac{z}{(z-2)} \quad \Rightarrow \quad x_{1,\ell}(k) = -\tfrac{1}{3}(-1)^k\delta_{-1}(k) + \tfrac{1}{3}(2)^k\,\delta_{-1}(k)$$

$$y_\ell(k) = 2x_{1,\ell}(k) = -\frac{2}{3}(-1)^k\delta_{-1}(k) + \frac{2}{3}(2)^k\,\delta_{-1}(k)$$

Ora determiniamo **l'evoluzione forzata dello stato**

$$\boldsymbol{X_f}(z) = \begin{bmatrix} X_{1,f}(z) \\ X_{2,f}(z) \end{bmatrix} = z(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(z) = \begin{bmatrix} \frac{z}{(z-2)} & \frac{z}{(z+1)(z-2)} \\ 0 & \frac{z}{(z+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{(z-1)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z^2}{(z+1)(z-2)(z-1)} \\ \frac{z^2}{(z+1)\,(z-1)} \end{bmatrix}$$

Decomponiamo in fratti semplici la funzione $\frac{X_{1,f}(z)}{z}$, e antitrasformiamo

$$\frac{X_{1,f}(z)}{z} = \frac{z}{(z+1)(z-2)(z-1)} = \frac{R_1}{(z+1)} + \frac{R_2}{(z-2)} + \frac{R_3}{(z-1)} = -\frac{1}{6}\frac{1}{(z+1)} + \frac{2}{3}\frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}$$

$$X_{1,f}(z) = -\frac{1}{6}\frac{z}{(z+1)} + \frac{2}{3}\frac{z}{(z-2)} - \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,f}(k) = -\frac{1}{6}(-1)^k\delta_{-1}(k) + \frac{2}{3}(2)^k\,\delta_{-1}(k) - \frac{1}{2}\delta_{-1}(k)$$
$$= \left[-\frac{1}{6}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k - \frac{1}{2}\right]\delta_{-1}(k)$$

Sviluppando i conti per la seconda variabile di stato si ottiene

$$\frac{X_{2,f}(z)}{z} = \frac{z}{(z+1)\,(z-1)} = \frac{R_1}{(z+1)} + \frac{R_2}{(z-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}$$

$$X_{2,f}(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{(z+1)} + \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{2,f}(k) = \frac{1}{2}(-1)^k\delta_{-1}(k) + \frac{1}{2}\delta_{-1}(k) = \left[\frac{1}{2}(-1)^k + \frac{1}{2}\right]\delta_{-1}(k)$$

Calcolo della risposta forzata dello stato mediante il Symbolic Math Toolbox di Matlab

Calcolo mediante antitrasformata Z dei termini $X_{1,f}(z)$ e $X_{2,\ell}(z)$

```
syms z k
X1f_z=z^2/((z+1)*(z-2)*(z-1));
X2f_z=z^2/((z+1)*(z-1));

x1f_k=iztrans(X1f_z,k)
x2f_k=iztrans(X2f_z,k)
```

```
x1f_k =

(2*2^k)/3 - (-1)^k/6 - 1/2


x2f_k =

(-1)^k/2 + 1/2
```

$$x_{1,f}(k) = \left[-\frac{1}{6}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k - \frac{1}{2}\right]\delta_{-1}(k)$$

$$x_{2,f}(k) = \left[\frac{1}{2}(-1)^k + \frac{1}{2}\right]\delta_{-1}(k)$$

Ora determiniamo **l'evoluzione forzata dell'uscita**

Procediamo calcolando la funzione di trasferimento fra l'ingresso e l'uscita (forzata)

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}) = \frac{\boldsymbol{Y_f}(\boldsymbol{z})}{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})} = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z}{(z-2)} & \frac{z}{(z+1)(z-2)} \\ 0 & \frac{z}{(z+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2z}{(z+1)(z-2)}$$

La Z trasformata della componente forzata dell'uscita si determina moltiplicando la funzione di trasferimento $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z})$ per la Z trasformata $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})$ dell'ingresso

$$\boldsymbol{Y_f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{z})\ \boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}) = \frac{2z}{(z+1)(z-2)} \frac{z}{(z-1)} = \frac{2z^2}{(z+1)(z-2)(z-1)}$$

Tale risultato ovviamente è consistente con la relazione $Y_f(z) = 2X_{1,f}(z)$ e sfruttando il fatto che $X_{1,f}(z)$ è stato già determinato nelle precedenti analisi:

$$Y_f(z) = 2X_{1,f}(z) = \frac{2z^2}{(z+1)(z-2)(z-1)} \quad \Rightarrow \quad y_f(k) = \left[-\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{4}{3}(2)^k - 1\right]\delta_{-1}(k)$$

Concludiamo l'esercizio ricavando a partire dalla funzione di trasferimento l'equazione alle differenze che per il sistema in esame mette in relazione l'uscita con l'ingresso.

$$\boldsymbol{G(z)} = \frac{2z}{(z+1)(z-2)} = \frac{2z}{z^2-z-2}$$

$$\Downarrow$$

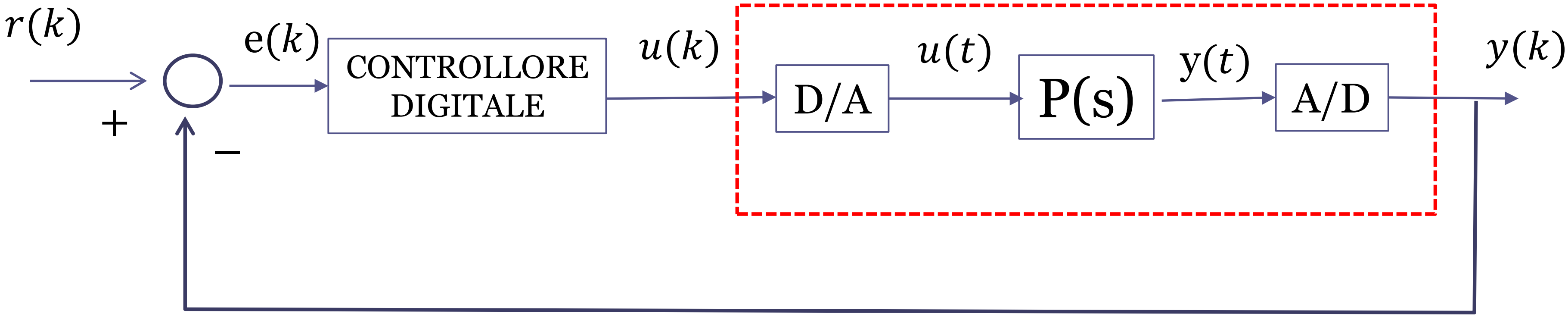
$$y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = 2u(k-1)$$

Si noti come a partire dal modello in variabili di stato la procedura di determinazione della equazione alle differenze associata sia univoca. Al contrario, ad una equazione alle differenze possono corrispondere infiniti modelli in variabili di stato che, in termini di legame ingresso-uscita, sono fra loro equivalenti ma sono basati su una scelta differente delle variabili di stato. Tra gli infiniti modelli fra loro equivalenti, ve ne sono alcuni che assumono forme particolari e che vengono detti modelli in forma «compagna». L'importanza e l'utilità di tali rappresentazioni nell'ambito del controllo saranno chiarite più avanti.

Conclusioni

I risultati ottenuti in questa dispensa ed in quella precedente, che abbiamo ricavato per completare dei ragionamento impostati in sede di analisi, saranno un fondamentale punto di partenza per affrontare e risolvere problemi di sintesi dei sistemi di controllo, come abbiamo gia parzialmente visto nel contesto di uno degli esempi trattati.

Il passo immediatamente successivo sarà quello di «raccordare» i ragionamenti e gli strumenti finora sviluppati, riferiti esclusivamente a sequenze numeriche, con il contesto reale di un sistema di controllo digitale, nell’ambito del quale coesistono segnali a tempo discreto e segnali a tempo continuo.



Svilupperemo l'analisi dei cosiddetti «sistemi a dati campionati» nei quali si tiene esplicitamente conto del fatto che il processo P(s) da controllare è un processo descritto da un modello a tempo continuo al quale viene applicato in ingresso un segnale $u(t)$ a tempo continuo ottenuto «convertendo» in formato analogico una sequenza numerica.