Controllo digitale

Analisi di sistemi a tempo discreto nel dominio della trasformata Z
Parte 1: modelli ingresso-uscita

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Introduzione

Ci occupiamo ora di porre a frutto quanto visto finora circa le proprietà della trasformata Z per completare e semplificare l'analisi dei sistemi a tempo discreto espressi mediante un modello ingresso-uscita (cioè, una equazione alle differenze) o un modello in variabili di stato.

Ci occuperemo preliminarmente dei modelli ingresso-uscita. Svilupperemo come punto di partenza una procedura sistematica che consente, mediante pochi semplici passaggi, di determinare la risposta libera e forzata di un modello ingresso-uscita a tempo discreto. Si ricorderà come il problema della determinazione della risposta forzata era stato lasciato in sospeso.

Successivamente introdurremo il fondamentale concetto di Funzione di Trasferimento per un modello ingresso-uscita a tempo discreto. Tale strumento ci consentirà di effettuare numerosi e fondamentali passi in avanti in merito alla analisi ed al progetto dei sistemi di controllo digitale.

I medesimi risultati saranno sviluppati quindi con riferimento a sistemi a tempo discreto espressi in variabili di stato.

Analisi di modelli ingresso-uscita a tempo discreto nel dominio della trasformata Z

Risposta libera e risposta forzata

Partiamo da un modello ingresso-uscita espresso nella forma standard all'indietro

$$a_n\, y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + a_0\, y(k-n) =$$
$$b_m\, u(k-n+m) + b_{m-1}\, u(k-n+m-1) + \ldots + b_0\, u(k-n)$$

Affrontiamo con una strategia differente il problema di determinare l'espressione analitica della sequenza di uscita $y(k)$, declinato come segue:

Problema:

Assegnate le condizioni iniziali: $y(-1)$ $y(-2)$ … $y(-n)$

Nota la sequenza causale di ingresso $\mathrm{u}(k)$ per $k \geq 0$

Determinare $y(k)$ per $k \geq 0$

Procediamo applicando l'operatore della trasformata Z a tutti i termini che compaiono nella equazione alle differenze

$$a_n\, y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + a_0\, y(k-n) =$$
$$b_m\, u(k-n+m) + b_{m-1}\, u(k-n+m-1) + \ldots + b_0\, u(k-n)$$

Circa il primo termine alla sinistra dell'uguale si avrà, banalmente

$$\mathcal{Z}[a_n y(k)] = a_n Y(z)$$

Per caratterizzare in maniera adeguata tutti i termini che coinvolgono i valori «ritardati» della sequenza di ingresso e uscita, ricorriamo alla relativa proprietà della trasformata Z, che stabilisce che, per una generica sequenza $f(k)$

$$\mathcal{Z}\{f(k-h)\} = z^{-h} f(z) + \sum_{i=0}^{h-1} f(i-h) z^{-i}$$

Applicando tale proprietà a tutti i termini che coinvolgono la sequenza di uscita ritardata fino ad n passi si ottengono le seguenti relazioni

$$\mathcal{Z}[a_{n-1}y(k-1)] = a_{n-1}(z^{-1}Y(z) + y(-1))$$

$$\mathcal{Z}[a_{n-2}y(k-2)] = a_{n-2}(z^{-2}Y(z) + y(-1)z^{-1} + y(-2))$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{Z}[a_0y(k-n)] = a_0(z^{-n}Y(z) + y(-1)z^{-(n-1)} + y(-2)z^{-(n-2)} + ... + y(-n))$$

Combinando fra loro le relazioni finora ricavate, e raccogliendo a fattor comune Y(z), è possibile esprimere il membro sinistro della equazione alle differenze nella forma seguente

$$Y(z)\left[a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_1z^{-n+1} + a_0z^{-n}\right] - \bar{Q}_y(z)$$

$$Y(z)\left[a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}\right] - \bar{Q}_y(z)$$

in cui $\bar{Q}_y(z)$ è un polinomio che dipende dai coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e dalle condizioni iniziali $y(-1), y(-2), \ldots, y(-n)$ avente la seguente espressione compatta:

$$\bar{Q}_y(z) = -\sum_{j=0}^{n-1} z^{-j} \sum_{i=1}^{n-j} a_{n-i-j}\, y(-i)$$

Applicando la medesima procedura al membro destro della equazione alle differenze, che contiene i termini dipendenti dalla sequenza di ingresso, si ottengono relazioni molto più semplici rispetto a quelle ricavate poc'anzi in quanto a differenza della sequenza di uscita, che in istanti negativi possiede condizioni iniziali $y(-1), y(-2), \ldots, y(-n)$ potenzialmente non nulle, la sequenza di ingresso è causale, cioè identicamente nulla per $k < 0$

Circa il primo termine alla destra dell'uguale si avrà:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[b_m u(k-(n-m))] &= b_m\left(z^{-(n-m)}U(z) + \underbrace{u(-1)}_{0}\,z^{-(n-m)+1} + \ldots + \underbrace{u(-(n-m))}_{0}\right) \\ &= b_m z^{-(n-m)}U(z)\end{aligned}$$

Ed analogamente, per tutti i termini successivi, ricaviamo:

$$\mathcal{Z}[b_{m-1}u(k-(n-m+1))] = b_{m-1}z^{-(n-m+1)}U(z)$$

$$\mathcal{Z}[b_1u(k-(n-1))] = b_1z^{-(n-1)}U(z)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{Z}[b_0u(k-n)] = b_0z^{-n}U(z)$$

Possiamo quindi sostituire ad ogni elemento della equazione alle differenze la sua trasformata Z, ottenendo la seguente relazione che coinvolge le trasformate Z delle sequenza di uscita e di ingresso e termini addizionali di natura polinomiale.

$$\boxed{\begin{aligned} &Y(z)\left[a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_1z^{-n+1} + a_0z^{-n}\right] - \bar{Q}_y(z) = \\ &\qquad = U(z)\left[b_mz^{-(n-m)} + b_{m-1}z^{-(n-m+1)} + \ldots + b_1z^{-(n-1)} + b_0z^{-n}\right] \end{aligned}}$$

Per rendere la precedente equazione più facilmente manipolabile moltiplichiamone i membri destro e sinistro per il fattore z^n in modo che tutti i polinomi coinvolti siano espressi in funzione di potenze di z con esponente positivo

Si ottiene:

$$Y(z)\left[a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0\right] - Q_y(z) = \\ = U(z)\left[b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0\right]$$

in cui il polinomio $Q_y(z)$, dopo alcuni passaggi, assume la seguente forma compatta

$$Q_y(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j z^{n-j}, \quad \gamma_j = -\sum_{i=1}^{n-j} a_{n-i-j} y(-i)$$

Si noti come nella equazione sia ora comparso il polinomio caratteristico associato alla equazione alle differenze

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

Definiamo anche:

$$N(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0$$

A partire dalle precedenti relazioni e definizioni, si può determinare in forma esplicita la trasformata Z della soluzione dell'equazione alle differenze nella forma seguente

$$Y(z)P(z) - Q_y(z) = U(z)N(z) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y(z) = \frac{N(z)}{P(z)}U(z) + \frac{Q_y(z)}{P(z)}}$$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

$$N(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0$$

$$Q_y(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j z^{n-j}, \quad \gamma_j = -\sum_{i=1}^{n-j} a_{n-i-j} y(-i)$$

Per determinare la soluzione della equazione alle differenze è sufficiente sostituire nella precedente relazione la Z-trasformata U(z) della sequenza di ingresso, e procedere successivamente al calcolo della antitrasformata di Y(z) per ottenere $y(k)$

Si noti come il primo termine tiene conto degli effetti della sequenza di ingresso, mentre il secondo termine tiene conto del contributo alla risposta delle condizioni iniziali.

$$Y(z) = \frac{N(z)}{P(z)}U(z) + \frac{Q_y(z)}{P(z)}$$

Risulta pertanto immediato associare il primo termine alla trasformata Z della risposta forzata, ed il secondo termine alla trasformata Z della risposta libera:

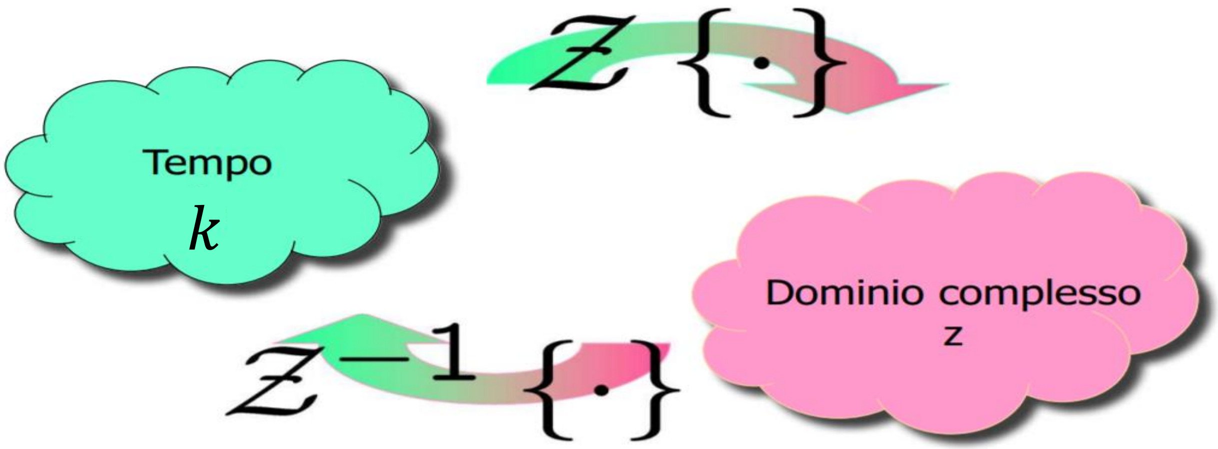
$$Y_f(z) = \frac{N(z)}{P(z)}U(z)$$

$$Y_\ell(z) = \frac{Q_y(z)}{P(z)}$$

Applicando la trasformata inversa separatamente ai due termini determiniamo la risposta forzata $y_f(k)$ e la risposta libera $y_\ell(k)$

Applicando opportune proprietà aggiuntive della trasformata Z si possono analizzare importanti proprietà della risposta libera o forzata senza bisogno di determinarla in forma analitica.

La Z-trasformata è un operatore funzionale invertibile, che consente di analizzare e risolvere equazioni alle differenze mediante operazioni puramente algebriche svolte nel dominio complesso della variabile z.



E' possibile ad esempio, e sarà una operazione che svolgeremo di frequente nel contesto dei sistemi di controllo, determinare il valore di regime della riposta attraverso il teorema del valore finale.

Esempio Si risolva l'equazione alle differenze

$$y(k) - 3y(k-1) + 2y(k-2) = u(k)$$

con condizioni iniziali

$$y(-1) = 12 \qquad y(-2) = 3$$

ed ingresso (sequenza forzante nota) pari a

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$$

Determiniamo i vari polinomi che intervengono nella espressione della Z trasformata Y(z) della soluzione

$$Y(z) = \frac{N(z)}{P(z)}U(z) + \frac{Q_y(z)}{P(z)}$$

$$y(k) - 3y(k-1) + 2y(k-2) = u(k) \qquad y(-1) = 12 \qquad y(-2) = 3$$

$P(z) = z^2 - 3z + 2$ (polinomio caratteristico)

$N(z) = z^2$

$$Q_y(z) = z\big[\big(3y(-1) - 2y(-2)\big)z - 2y(-1)\big] = 6z(5z-4)$$

La sequenza forzante può essere riscritta come

$$u(k) = 0.5[(-1)^k + 1]\delta_{-1}(k)$$

la cui Z-trasformata è

$$U(z) = 0.5 \cdot \left[\frac{z}{z+1} + \frac{z}{z-1}\right] = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

La Z-trasformata dell'uscita ha pertanto la forma

$$Y(z) = \frac{N(z)}{P(z)} \mathrm{U(z)} + \frac{Q_y(z)}{P(z)} = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \cdot \frac{z^2}{(z+1)(z-1)} + \frac{6z(5z-4)}{z^2 - 3z + 2}$$

$$Y_f(z) = \frac{z^2}{z^2-3z+2} \cdot \frac{z^2}{(z+1)(z-1)} = \frac{z^4}{(z-2)(z-1)^2\,(z+1)}$$ risposta forzata

$$Y_\ell(z) = \frac{6z(5z-4)}{z^2 - 3z + 2} = \frac{30z^2 - 24z}{(z-2)(z-1)}$$ risposta libera

Antitrasformando si ottiene

$$y_f(k) = 2.66\,(2)^k - 1.75\,\delta_{-1}(k) - 0.5\,k\,\delta_{-1}(k) + 0.08\,(-1)^k$$

$$y_\ell(k) = 36\,(2)^k - 6\,\delta_{-1}(k)$$

Analisi di modelli ingresso-uscita a tempo discreto nel dominio della trasformata Z

Funzione di trasferimento

Nella relazione che definisce la trasformata Z della risposta forzata

$$Y_f(z) = \frac{N(z)}{P(z)} U(z)$$

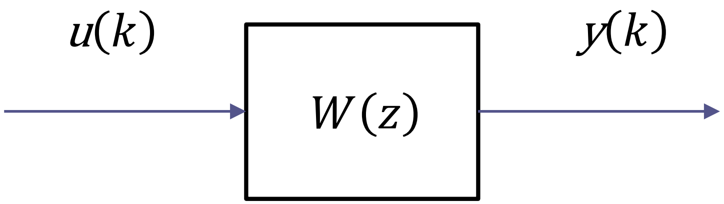
il rapporto di polinomi

$$W(z) = \frac{N(z)}{P(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$$

viene definito **funzione di trasferimento** del sistema a tempo discreto descritto dalla equazione alle differenze

Tale rapporto di polinomi risulta dunque essere il rapporto fra la trasformata Z della sequenza di uscita (della sua componente forzata, in realtà) e la trasformata Z della sequenza di ingresso sotto l'ipotesi che il sistema abbia **condizioni iniziali nulle**, ed è **indipendente dalla particolare forma dell'ingresso**

E’ possibile pertanto rappresentare il legame ingresso-uscita di un sistema a tempo discreto mediante un blocco, al quale viene associata la funzione di trasferimento W(z) del sistema, nel quale «entra» la sequenza di ingresso e dal quale «fuoriesce» la sequenza di uscita.



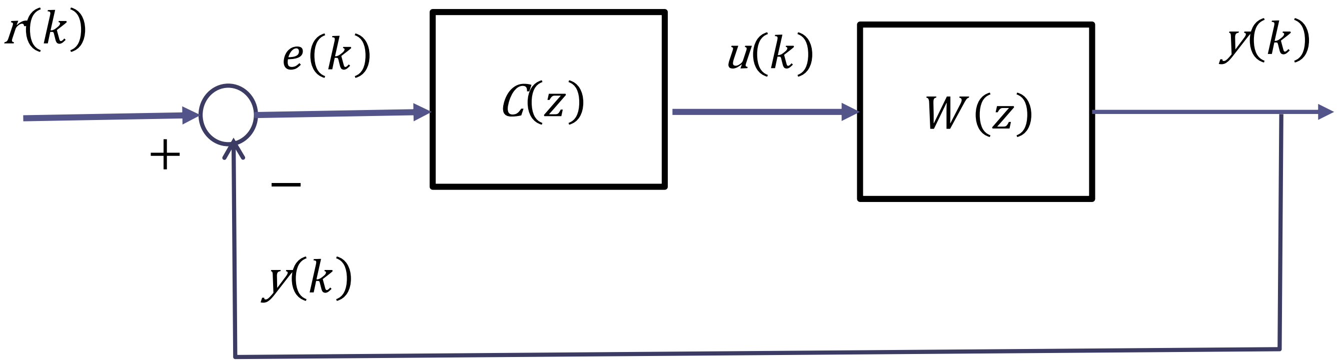
Il legame fra la funzione di trasferimento la rappresentazione ingresso-uscita di un sistema a tempo discreto è biunivoco ed immediato

$$\boxed{W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} & a_n\, y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + a_0\, y(k-n) = \\ & \qquad b_m\, u(k-n+m) + b_{m-1}\, u(k-n+m-1) + \ldots + b_0\, u(k-n) \end{aligned}$$

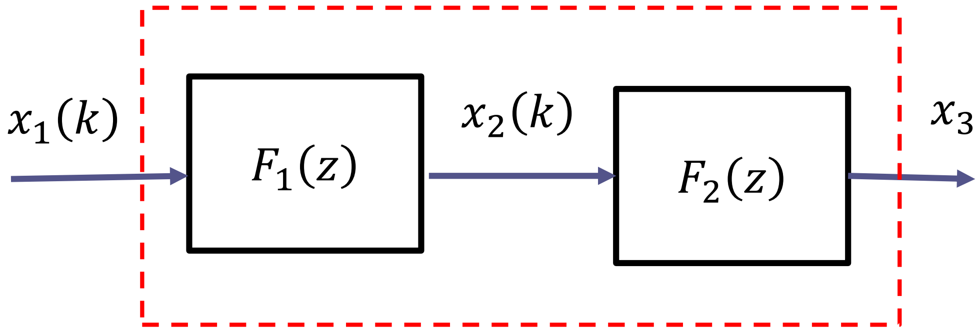
I sistemi di controllo digitali possono pertanto essere rappresentati dal seguente schema a blocchi

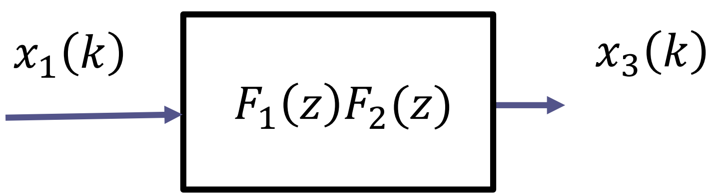


L'algebra degli schemi a blocchi è analoga rispetto al caso a tempo continuo, valgono pertanto le stesse regole di manipolazione.

Composizione serie

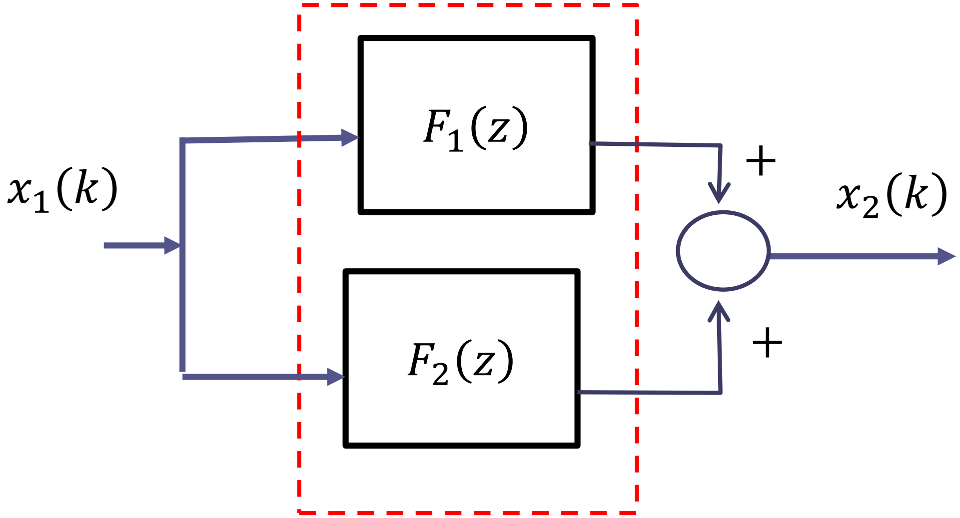
Alla cascata fra due blocchi F1(z) ed F2(z) si associa un blocco equivalente avente come funzione di trasferimento il prodotto fra le due

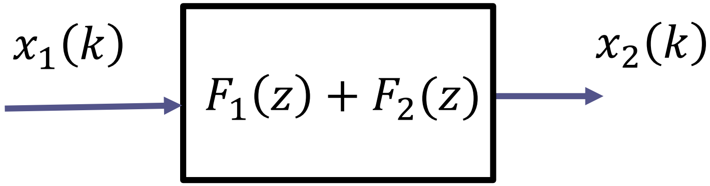




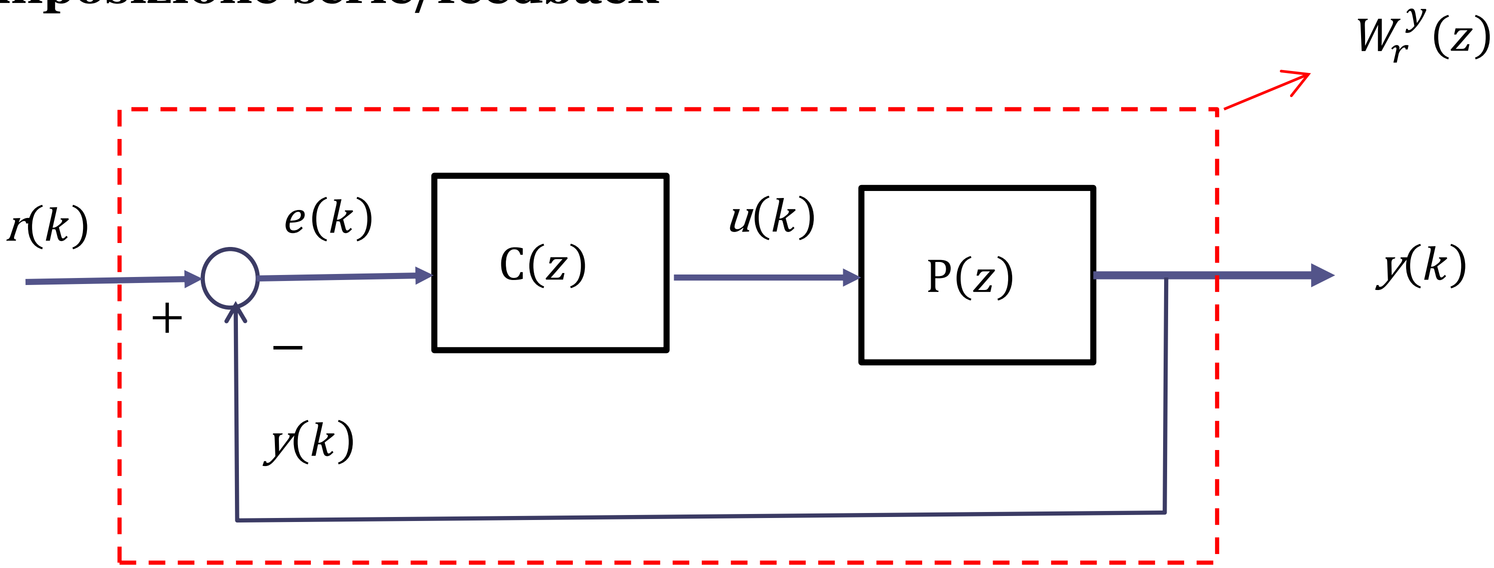
Composizione parallelo

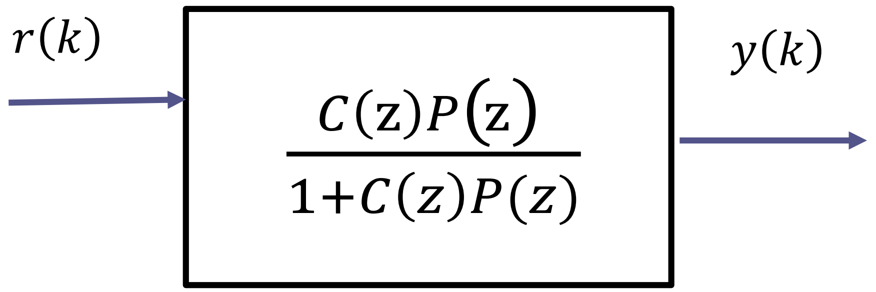
Al parallelo fra due blocchi F1(z) ed F2(z) si associa un blocco equivalente avente come funzione di trasferimento la somma fra le due





Composizione serie/feedback

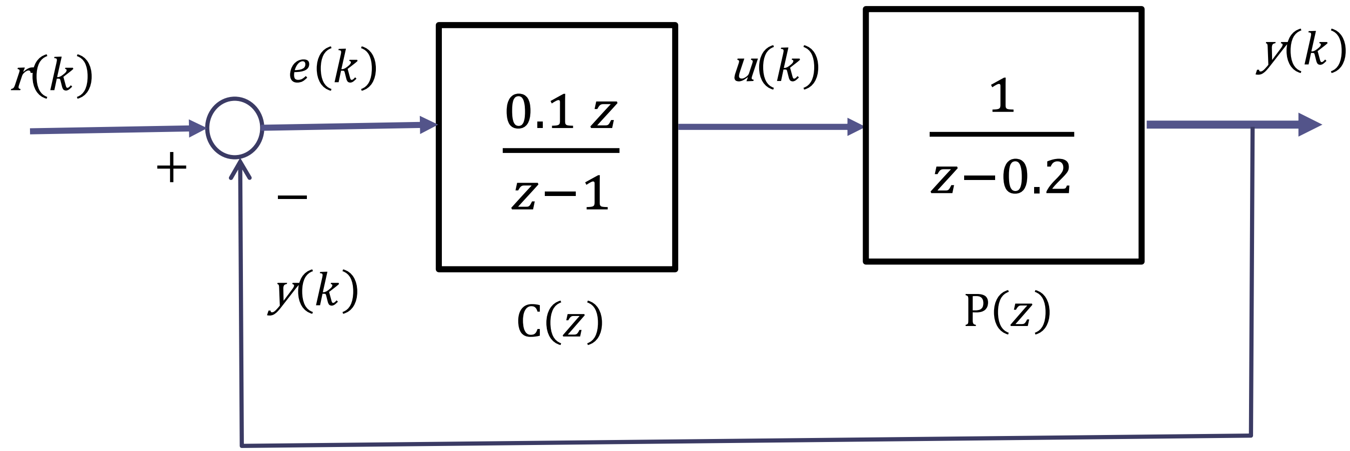




$$W_r^y(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)}$$

Funzione di trasferimento **a ciclo chiuso** fra il set point e l'uscita

Esempio



Discutiamo e analizziamo il sistema di controllo in figura.

Il processo P(z) da controllare è descritto da un modello del primo ordine:

$$y(k) - 0.2y(k-1) = u(k-1)$$

Il controllore C(z) elabora ad ogni istante discreto il seguente algoritmo ricorsivo di tipo integrale

$$\mathrm{u}(k) - u(k-1) = 0.1e(k)$$

Integratore digitale

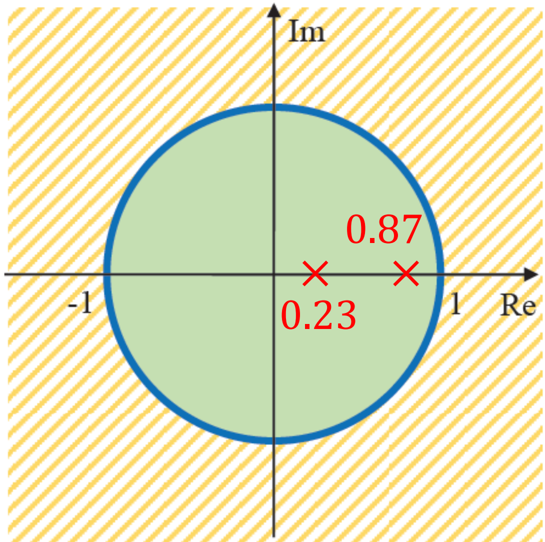
La funzione di trasferimento a ciclo chiuso $W_r^y(z)$ fra il set point e l'uscita vale

$$W_r^y(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)P(z)}{1+C(z)P(z)} = \frac{\left(\frac{0.1\,z}{z-1}\right)\left(\frac{1}{z-0.2}\right)}{1+\left(\frac{0.1\,z}{z-1}\right)\left(\frac{1}{z-0.2}\right)} = \frac{0.1z}{z^2-1.1z+0.2} = \frac{0.1z}{(z-0.23)(z-0.87)}$$

Il legame fra il set-point e l'uscita è pertanto rappresentabile nella forma seguente

$$r(k) \longrightarrow \boxed{\frac{0.1z}{(z-0.23)(z-0.87)}} \longrightarrow y(k)$$

Il sistema di controllo è asintoticamente stabile a ciclo chiuso



Distribuzione poli zeri del sistema **a ciclo chiuso**

Vogliamo analizzare il comportamento della sequenza di uscita in risposta ad un set-point $r(k)$ costante di ampiezza Y^d.

$$\mathrm{r}(k) = Y^d \delta_{-1}(k) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{R}(z) = \frac{Y^d z}{z-1}$$

La trasformata Z dell'uscita sarà

$$Y(z) = W_r^y(z)R(z) = \frac{C(\mathrm{z})P(\mathrm{z})}{1 + C(z)P(z)}R(z) = \frac{0.1z}{(z-0.23)(z-0.87)}\frac{Y^d z}{z-1}$$

Applichiamo il teorema del valore finale per determinare, se esiste, il valore finito del $\lim_{k\to\infty} y(k)$

Che risultato vorremmo idealmente ottenere ?

Teorema del valore finale

Si consideri una sequenza $x(k)$ sequenza $X(z)$ tale che i poli della $X(z)$ (cioè le radici del polinomio a denominatore di $X(z)$) hanno modulo inferiore ad uno ad eccezione di un eventuale polo semplice in $z = 1$.

Allora esiste finito il $\lim_{k\to\infty} x(k)$, ed il suo valore è il seguente

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{Z\to 1}(z-1)X(z)}$$

Verifichiamo se le ipotesi sono soddisfatte.

Notiamo come $Y(z)$ abbia due poli reali interni al disco unitario (rispettivamente pari a 0.23 e 0.87) in aggiunta al polo semplice in $z = 1$.

$$Y(z) = W_r^y(s)R(s) = \frac{0.1Y^d z^2}{(z-0.23)(z-0.87)(z-1)}$$

L'ipotesi di applicabilità del teorema del valore finale è soddisfatta, e vale pertanto

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{0.1Y^d z^2}{z^2-1.1z+0.2} = Y^d$$

Abbiamo dimostrato come nel sistema di controllo in esame l'uscita converga a regime verso il valore constante del set-point. E' una proprietà desiderata nei sistemi di controllo.

Si ricorderà come nei sistemi di controllo a tempo continuo le condizioni necessarie e sufficienti affinché l'uscita tendesse asintoticamente al valore costante del set-point sono le seguenti.

1 Il sistema a ciclo chiuso deve essere asintoticamente stabile

2 La FdT a ciclo aperto (costituita dalla serie fra il regolatore ed il sistema da controllare) deve contenere almeno un polo in s=0

Nei sistemi di controllo a tempo discreto tali condizioni si declinano come segue:

1 Il sistema a ciclo chiuso deve essere asintoticamente stabile

2 La FdT a ciclo aperto deve contenere almeno un polo in z=1

Tali condizioni possono essere ricavate sulla base del Principio del modello interno (che vedremo), e sono entrambe soddisfatte nel sistema di controllo oggetto del presente esempio.

Si noti che la condizione 1 corrisponde, nel caso dei sistemi di controllo a tempo discreto, alla richiesta che i poli della FdT fra il set point e l'uscita abbiano modulo strettamente minore di 1, mentre nei sistemi di controllo a tempo continuo si richiedeva che la FdT fra il set point e l'uscita dovesse avere tutti i poli a parte reale negativa.

Ora chiediamoci con quale andamento transitorio l'uscita converge verso il valore del set-point. Ci interessa in particolare determinare se il transitorio sarà monotono oppure oscillatorio, e anche comprendere se la convergenza sarà «lenta» oppure «veloce».

Possiamo calcolare analiticamente la sequenza di uscita antitrasformando la Y(z)

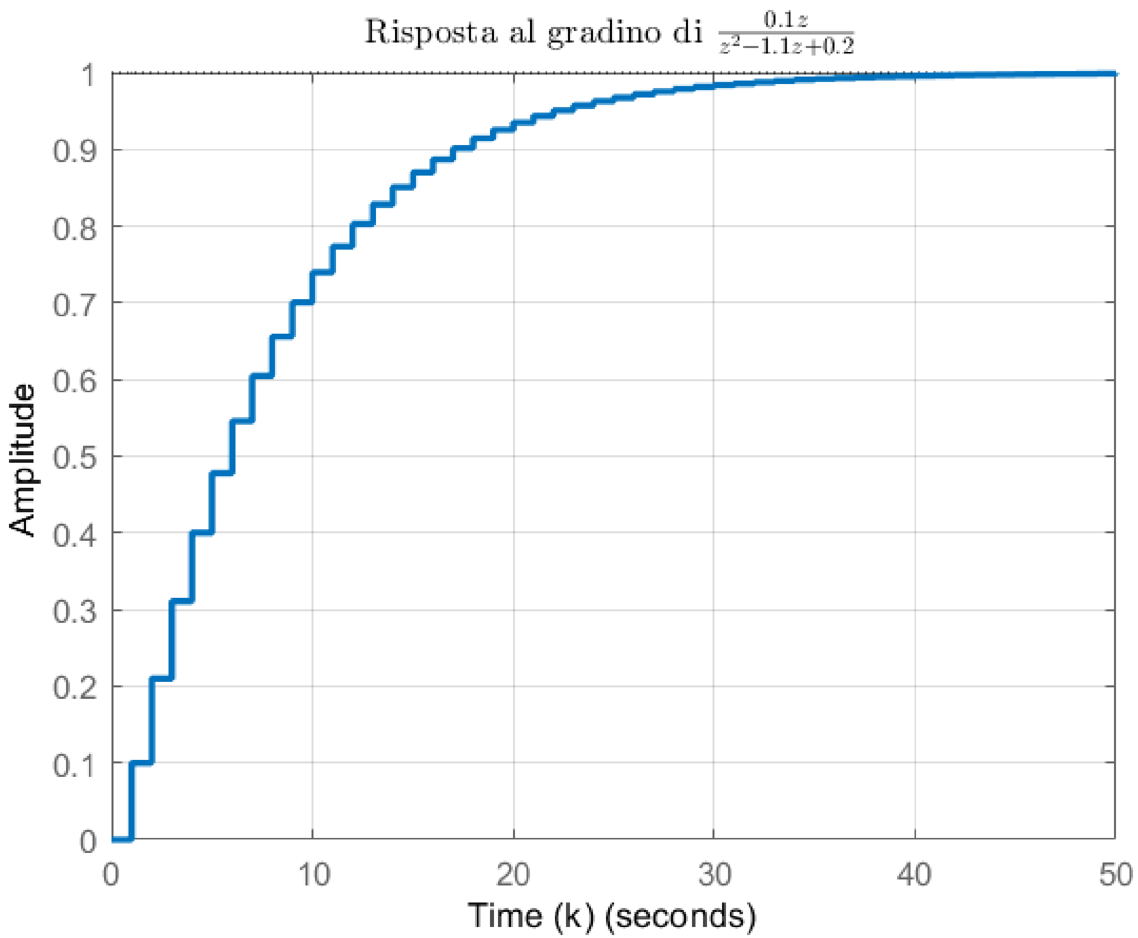
$$\mathrm{y}(k) = \mathbb{Z}^{-1}\left\{\frac{0.1Y^d z^2}{(z-0.23)(z-0.87)(z-1)}\right\}$$

Sviluppiamo i conti per $Y^d = 1$, considerando cioè un set point a gradino unitario. Vale comunque la proprietà di linearità e la risposta che si ottiene quando Y^d è diverso da 1 può essere ottenuta moltiplicando per Y^d la risposta al gradino unitario.

$$y(k) = \delta_{-1}(k) - 1.04(0.87)^k + 0.04(0.23)^k$$

La risposta è una combinazione lineare fra i modi aperiodici stabili associati ai poli della FdT a ciclo chiuso ed il modo costante associato all'ingresso costante.

```
G=tf([0.1 0],[1 -1.1 0.2],1)
step(G)
title('Risposta al gradino di $\frac{0.1 z}{z^2-1.1z+0.2}$','interpreter','latex')
xlabel('Time (k)'),grid
```

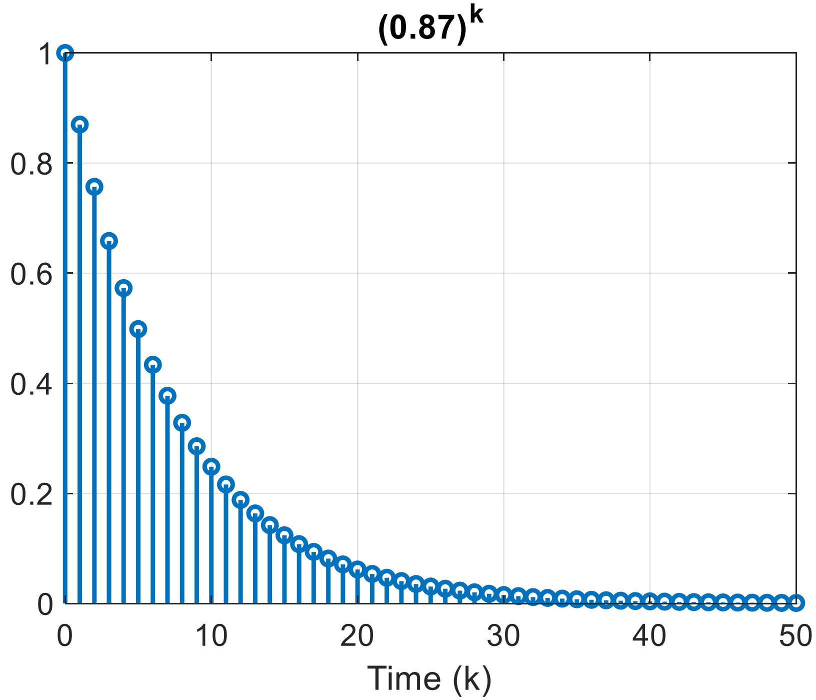


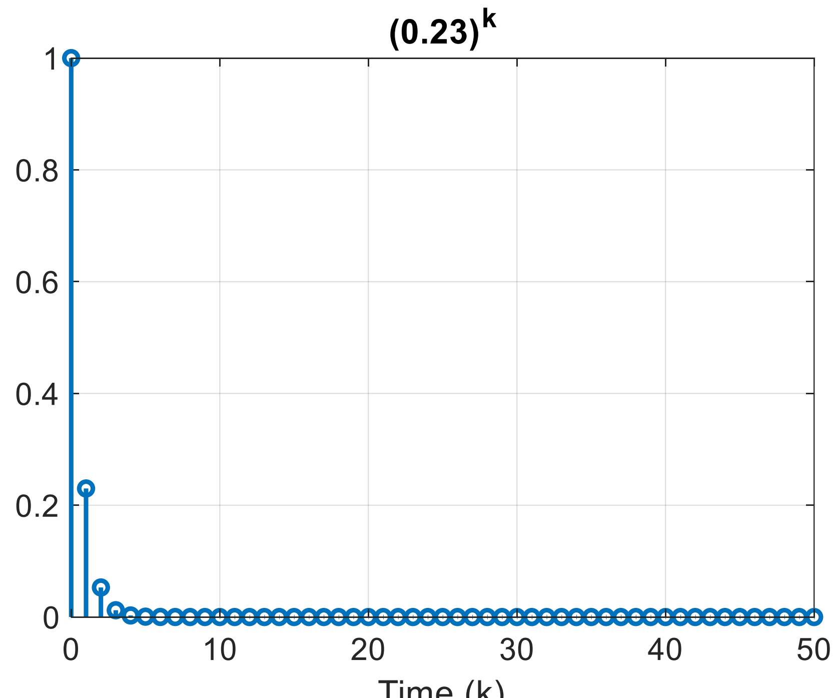
Riguardiamo l'andamento della risposta

$$y(k) = \delta_{-1}(k) - 1.04(0.87)^k + 0.04(0.23)^k$$

La rapidità di convergenza verso il valore di regime dipende dalla rapidità con cui si estinguono i due modi stabili $(0.87)^k$ e $(0.23)^k$

Qual è fra i due modi quello più «lento» ad estinguersi ?



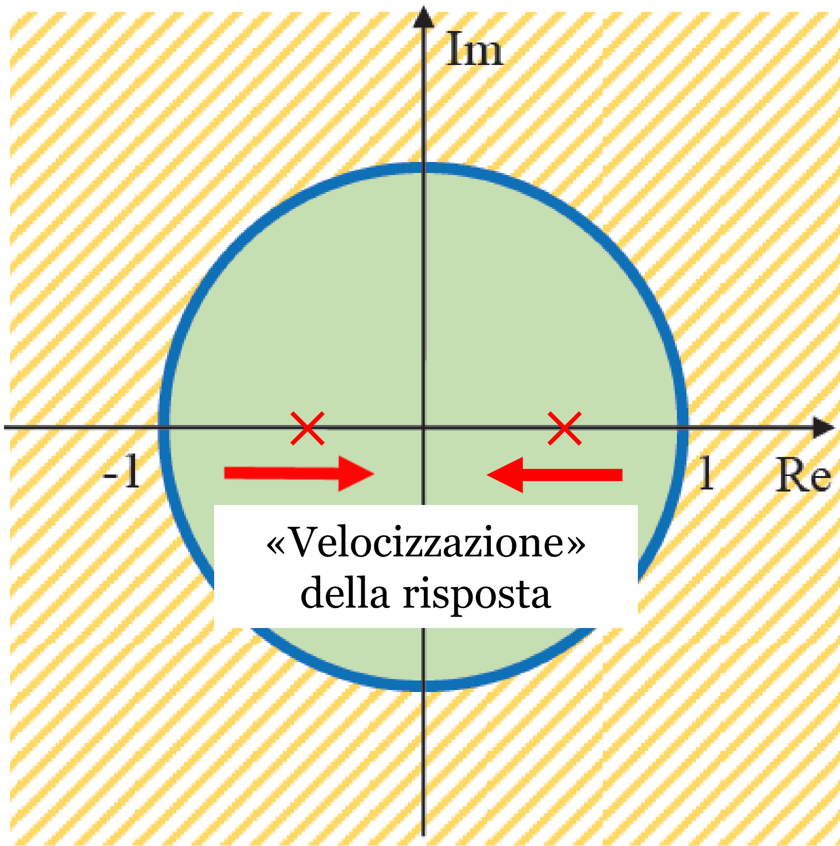


Script Matlab per la creazione dei grafici della slide precedente

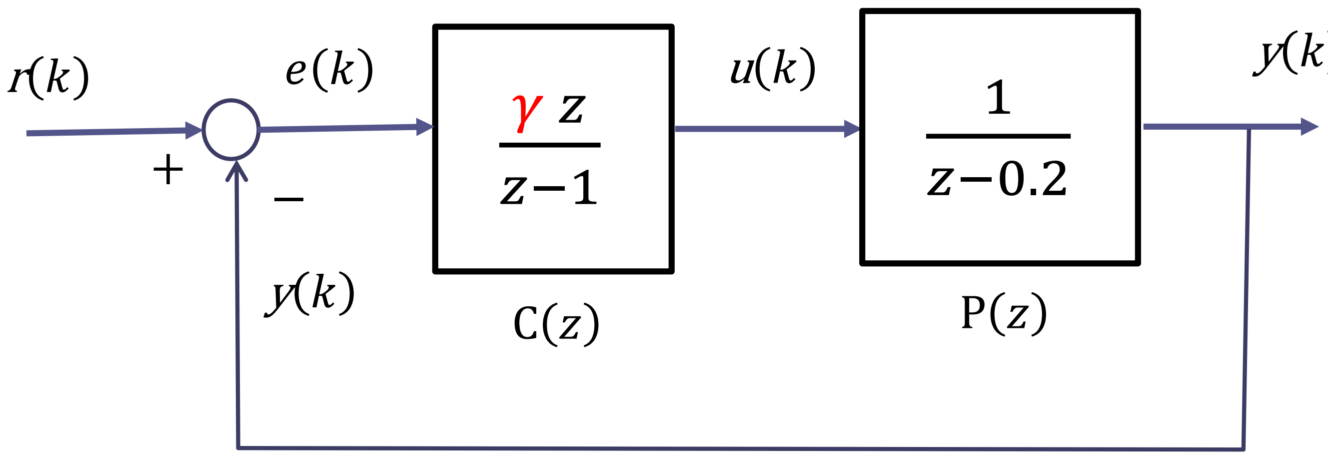
```
k=0:50
figure(1)
stem(k,(0.87).^k,'LineWidth',2)
xlabel('Time (k)'),grid
title('(0.87)^k','FontSize',14)
set(gca,'FontSize',14)

figure(2)
stem(k,(0.23).^k,'LineWidth',2)
xlabel('Time (k)'),grid
title('(0.23)^k','FontSize',14)
set(gca,'FontSize',14)
```

Appare pertanto chiaro come il maggiore «responsabile» della velocita di risposta ottenuta sia il modo associato al polo in z=0.87.

Se riuscissimo a fare in modo, mediante una diversa scelta del controllore, che i poli della FdT a ciclo chiuso abbiamo un modulo inferiore (siano cioè più vicini all'origine) otterremmo una risposta più rapida nel convergere verso il valore di regime .



Proviamo ad assegnare un valore diverso γ al guadagno del controllore, e chiediamoci se dal punto di vista della velocita della risposta (tempo di assestamento) le cose possono migliorare.



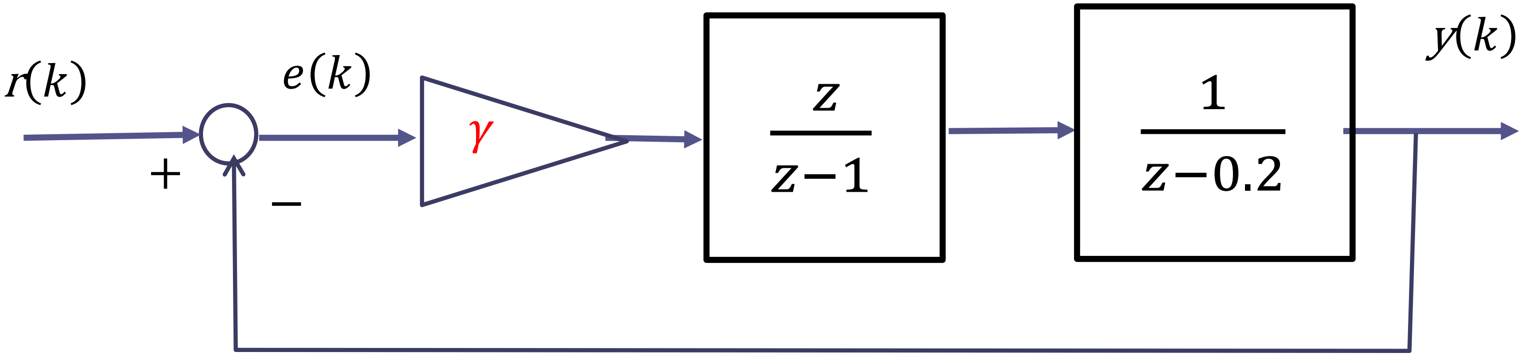
Il nuovo polinomio caratteristico della FdT a ciclo chiuso risulta essere

$$P_{car}(z) = (z-1)(z-0.2) + \gamma z$$

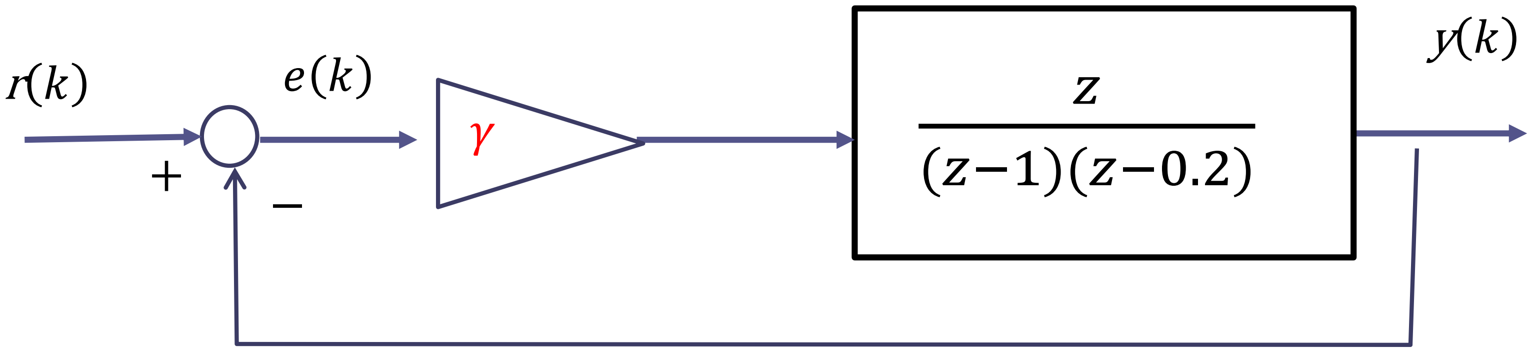
Esiste uno strumento per mezzo del quale si possa predire facilmente come il guadagno γ del controllore influenzi le posizioni dei poli della FdT a ciclo chiuso ?

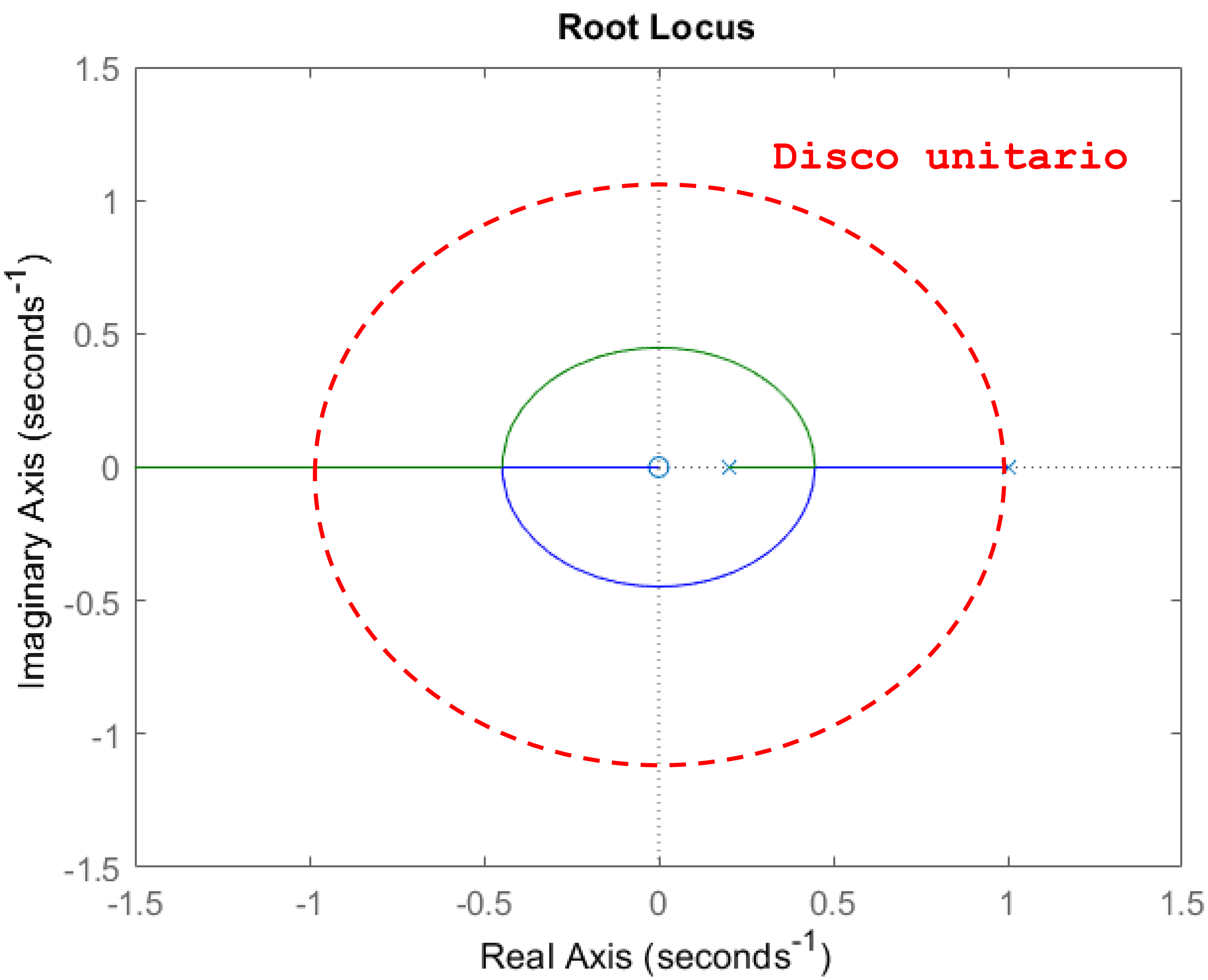
Il **LUOGO DELLE RADICI**

Il luogo delle radici si traccia con regole completamente analoghe a quanto visto per i sistemi di controllo a tempo continuo, ma semplicemente **si interpreta in maniera diversa** alla luce del diverso significato fra le posizioni dei poli nelle FdT a tempo continuo e a tempo discreto.

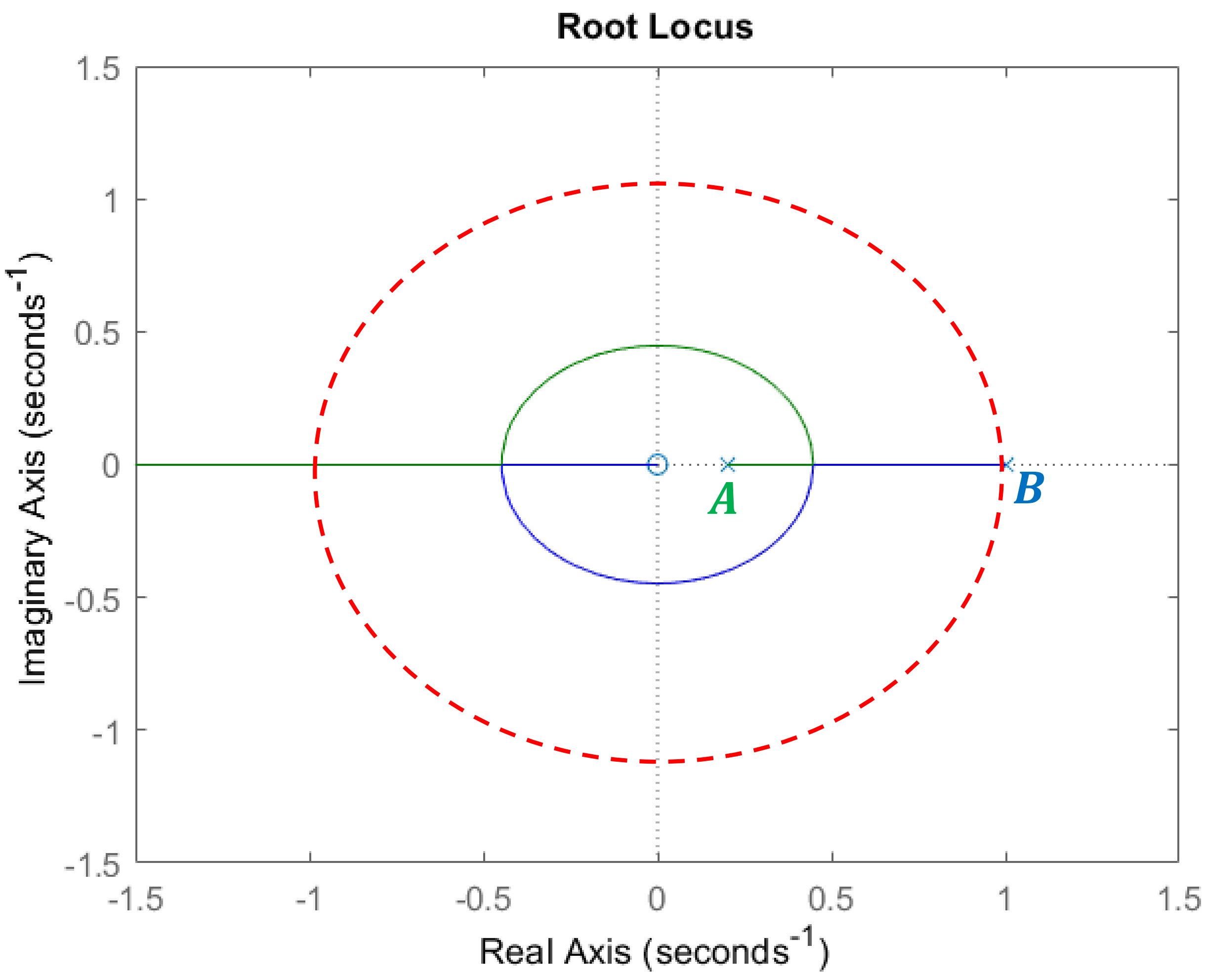


Schema equivalente

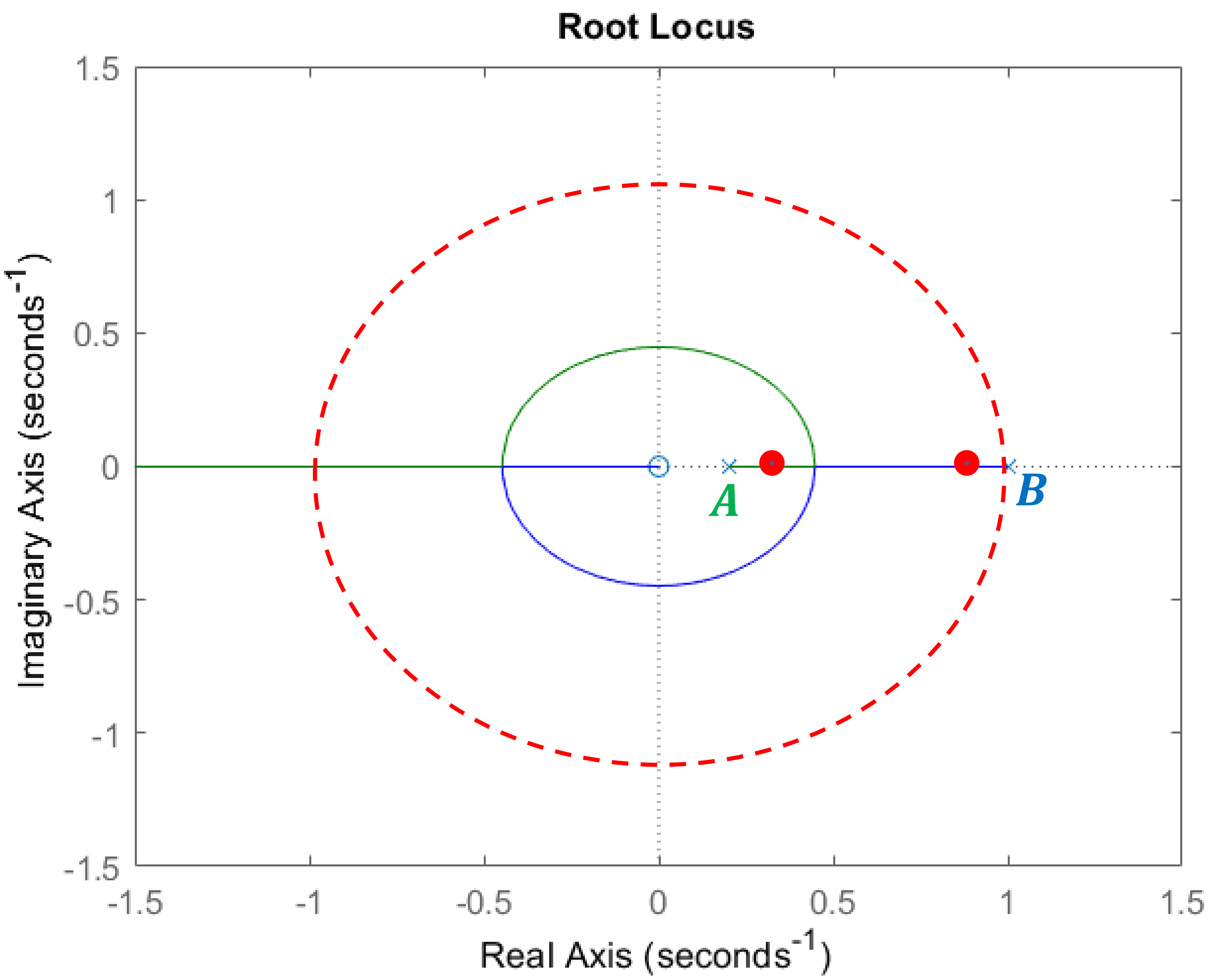




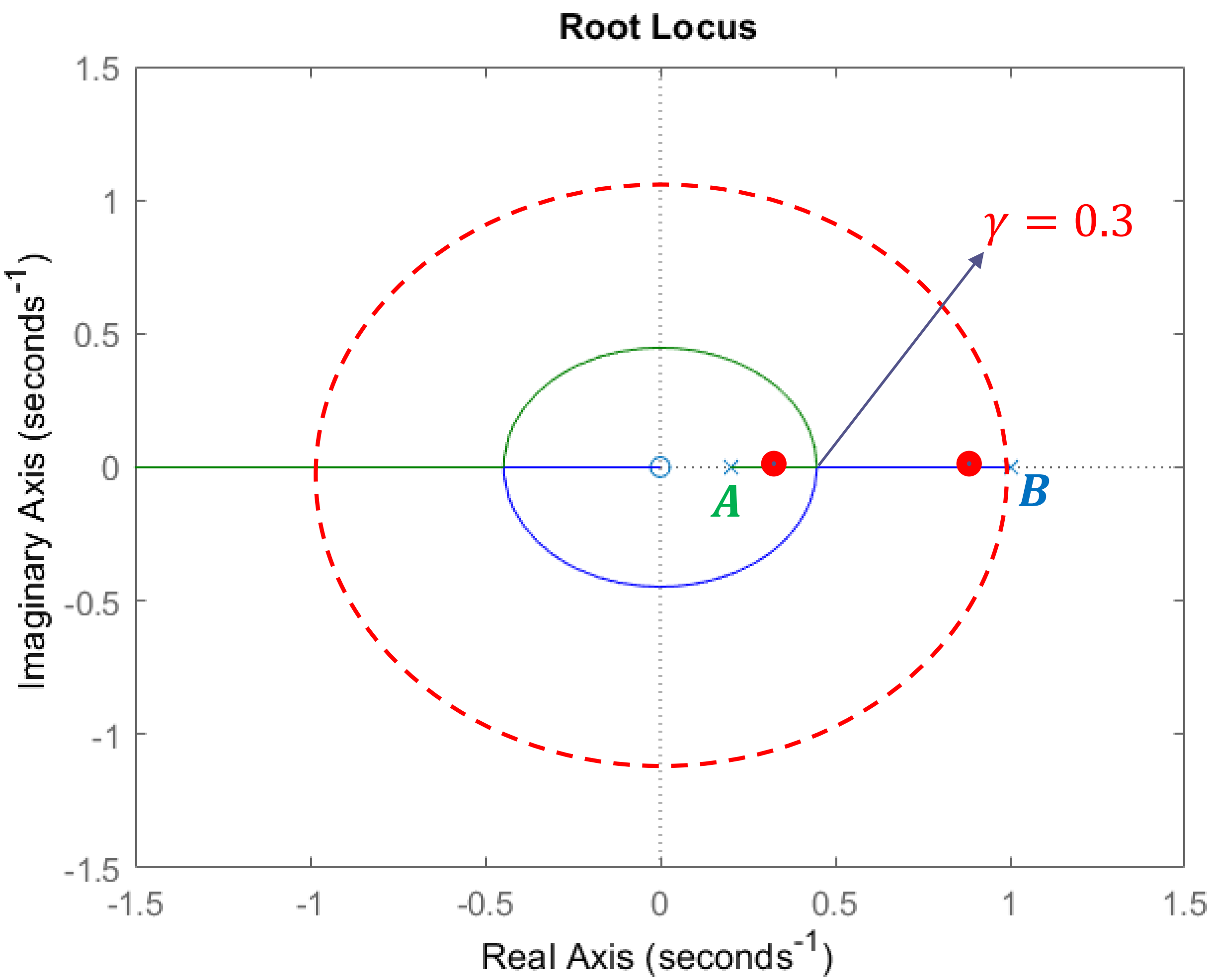

```
L=tf([1 0],poly([1 0.2]))
rlocus(L)
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
```



A ***B*** Punti di partenza dei due rami del luogo delle radici (sono i poli della FdT a ciclo aperto)

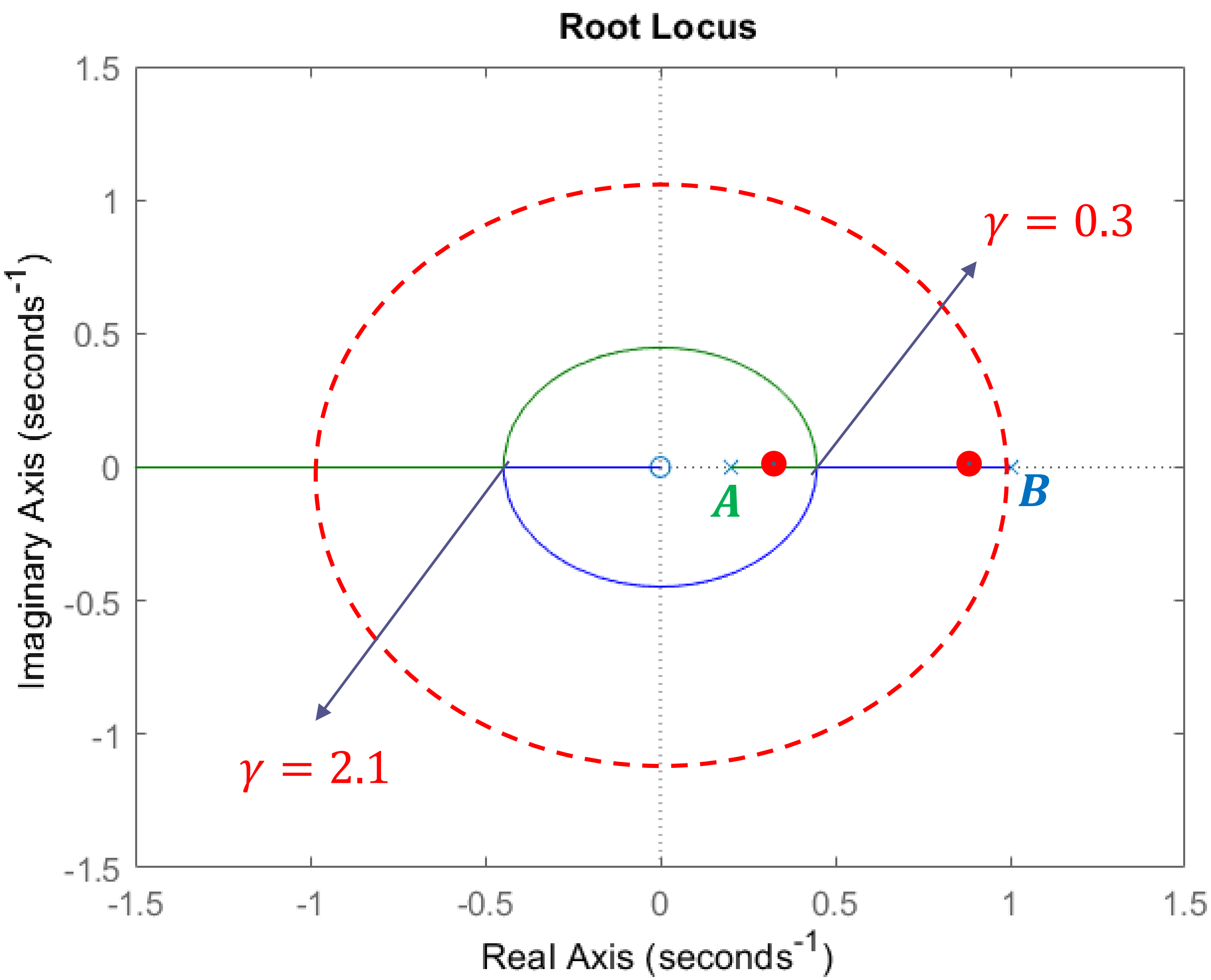


 Posizione dei poli corrispondente al valore $\gamma = 0.1$

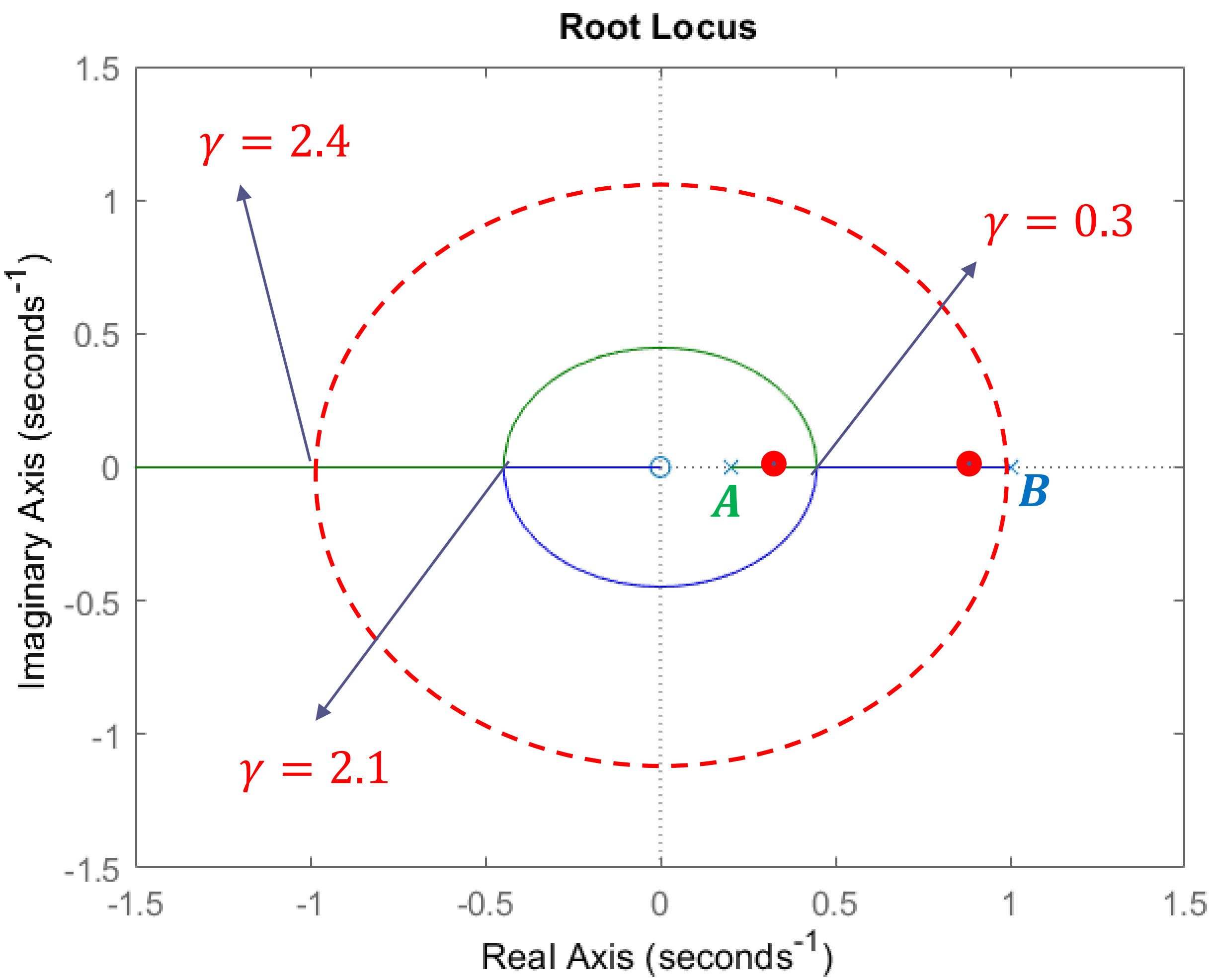


$\gamma = 0.3$ Primo punto doppio

● Posizione dei poli corrispondente al valore $\gamma = 0.1$

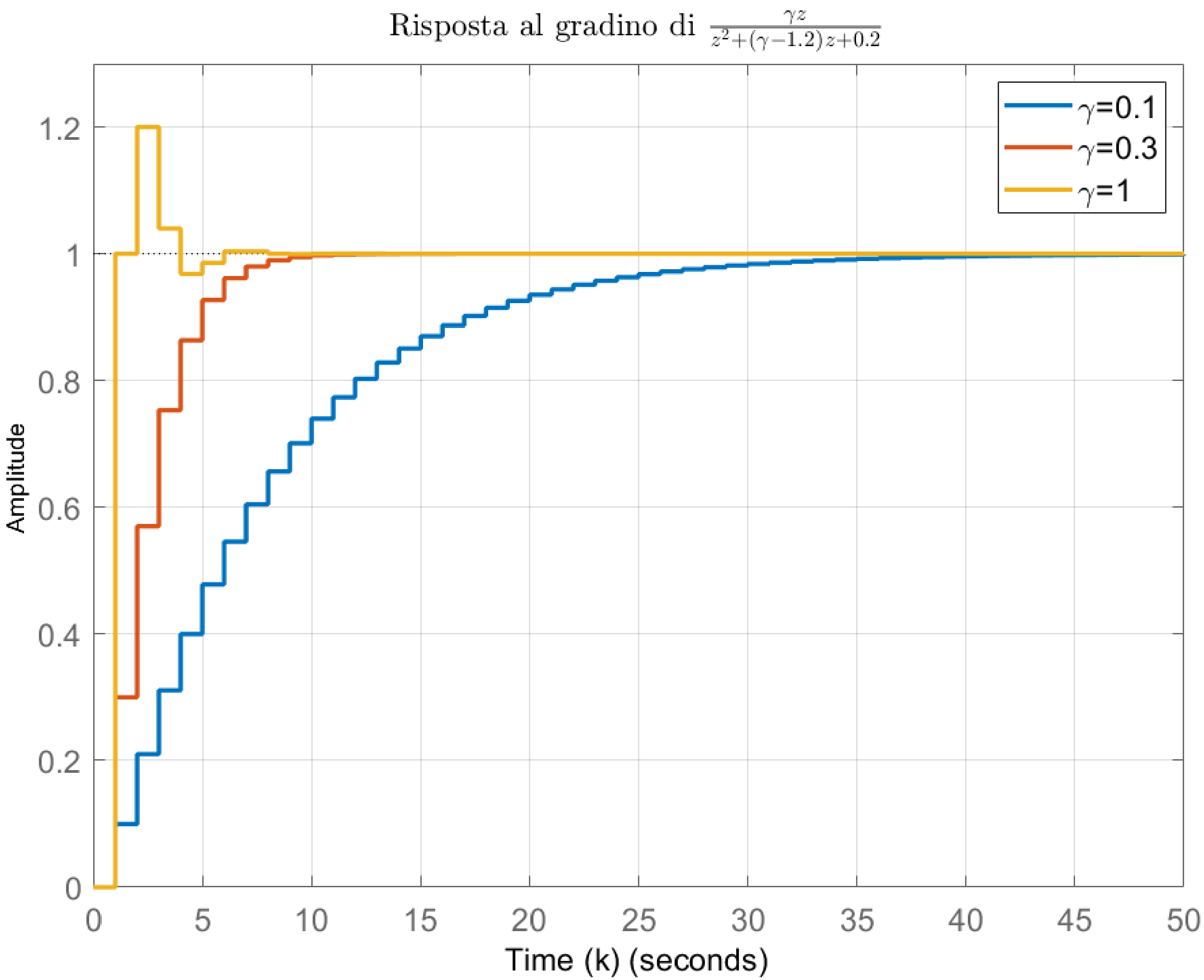


$\gamma = 2.1$ Secondo punto doppio

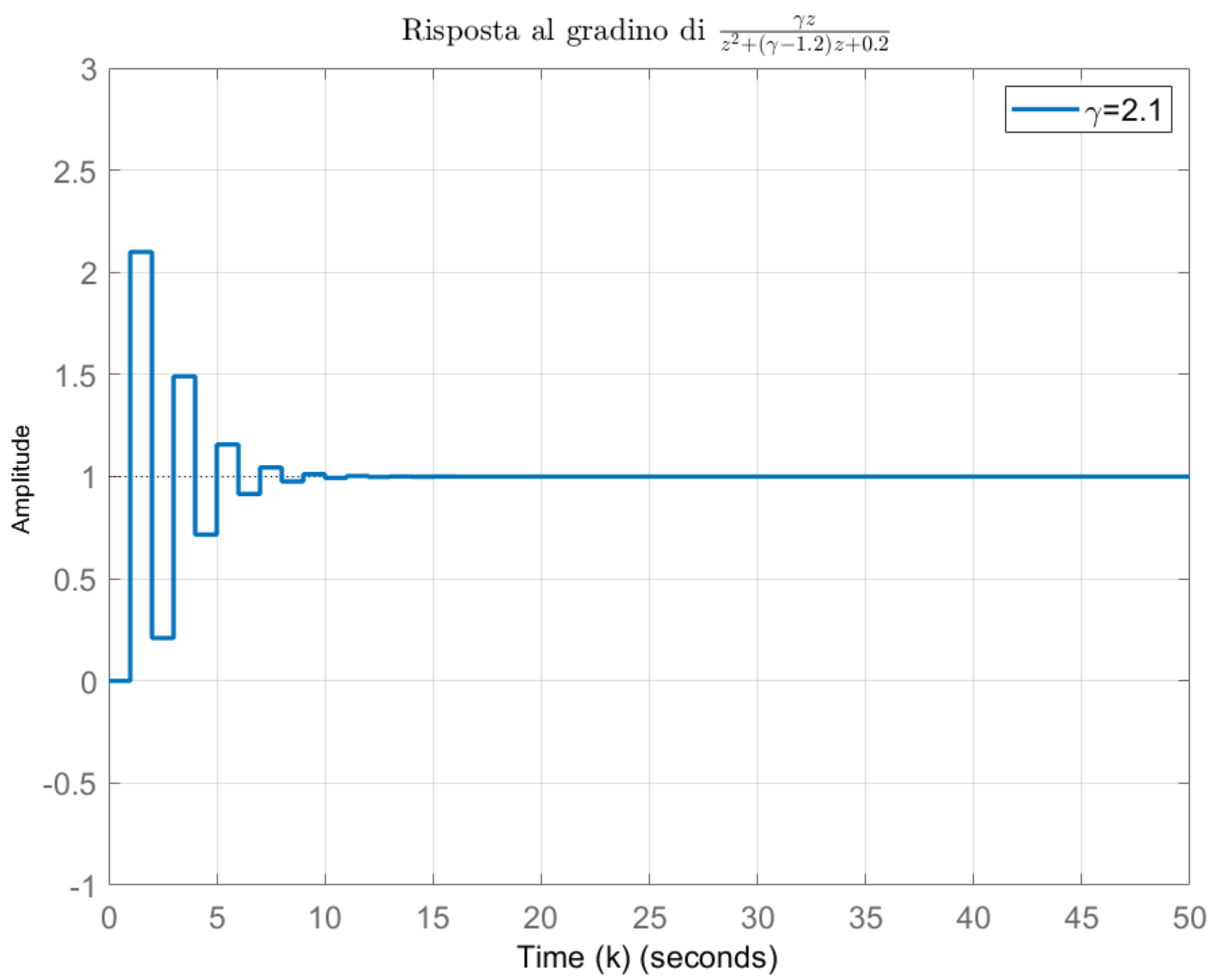


$\gamma = 2.1$ Secondo punto doppio

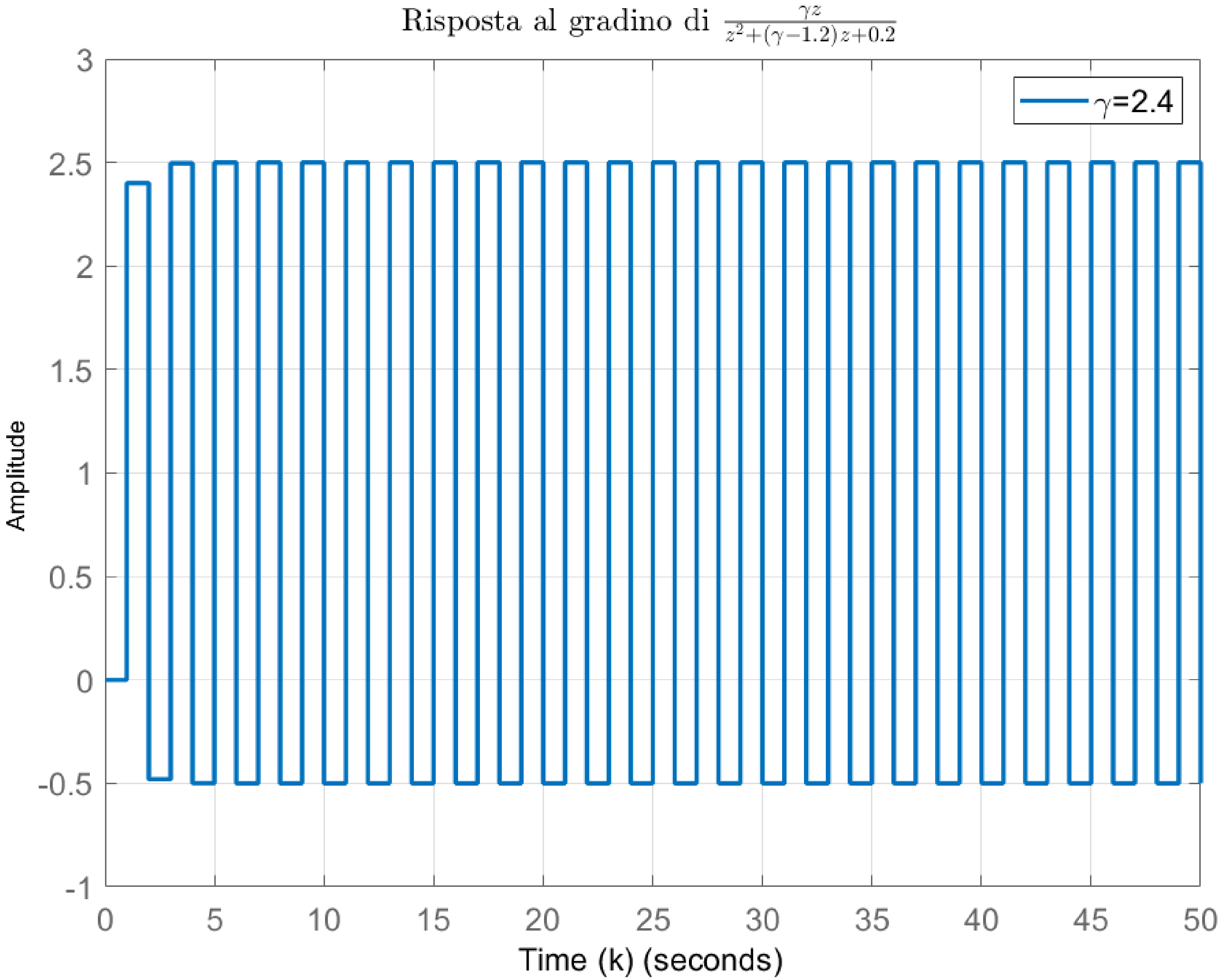
$\gamma = 2.4$ Valore di guadagno in corrispondenza del quale si attraversa la frontiera del disco unitario. Per valori superiori il sistema a ciclo chiuso diventa instabile


Risposta al gradino di $\frac{\gamma z}{z^2+(\gamma-1.2)z+0.2}$
γ=0.1
γ=0.3
γ=1
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
Time (k) (seconds)

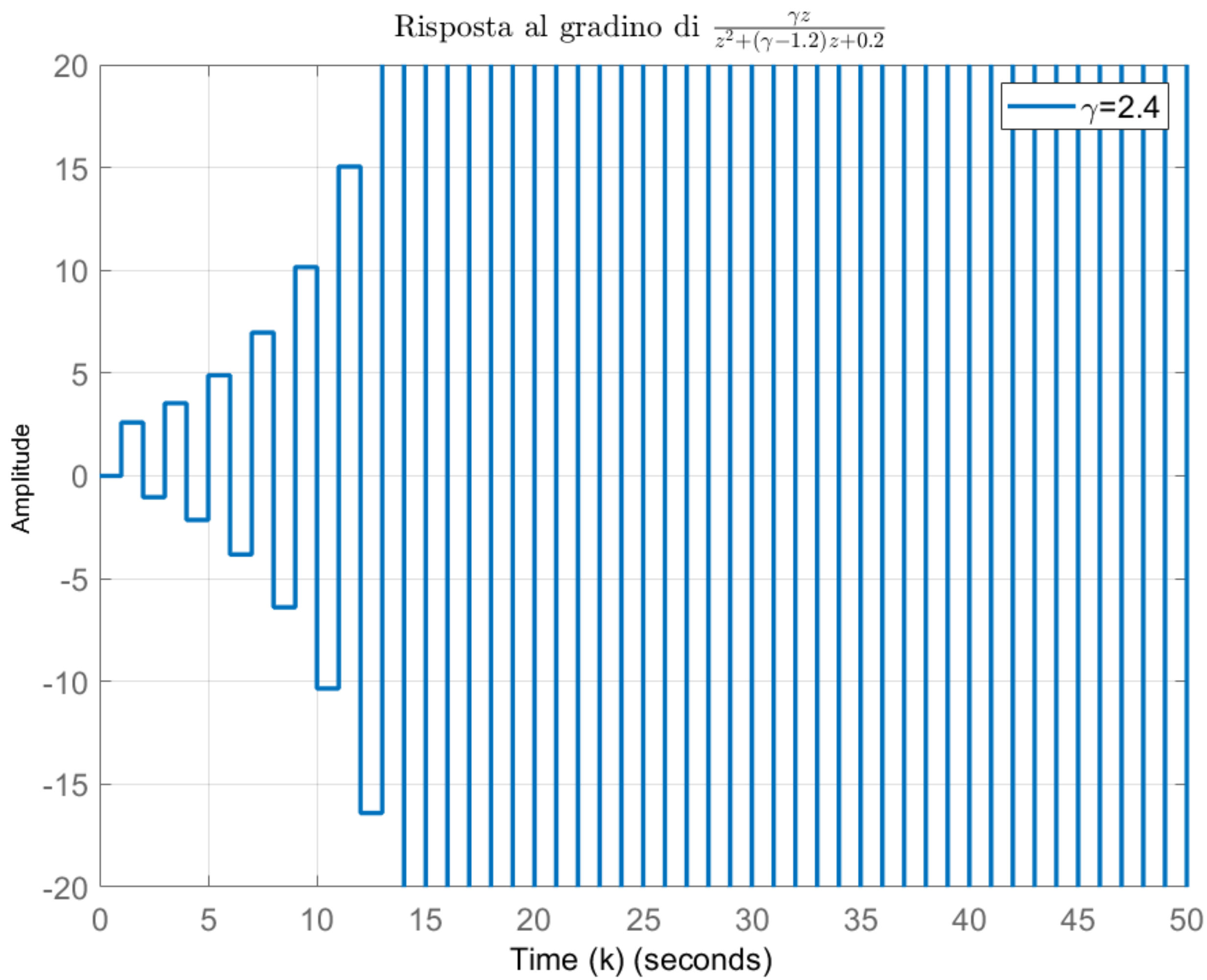
$\gamma = 2.1$


Risposta al gradino di $\frac{\gamma z}{z^2+(\gamma-1.2)z+0.2}$
γ=2.1
Amplitude
Time (k) (seconds)
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

$\gamma = 2.4$


Risposta al gradino di $\frac{\gamma z}{z^2+(\gamma-1.2)z+0.2}$
γ=2.4
Amplitude
Time (k) (seconds)
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

$\gamma = 2.6$



Risposta al gradino di $\frac{\gamma z}{z^2+(\gamma-1.2)z+0.2}$
γ=2.4
Amplitude
Time (k) (seconds)
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50