Controllo digitale

Stabilità dei Sistemi a tempo discreto

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Precisazioni sul concetto di stabilità

I sistemi dinamici lineari tempo invarianti possono essere distinti in tre categorie

Sistemi dinamici asintoticamente stabili - AS

Sistemi dinamici stabili (semplicemente stabili) - SS

Sistemi dinamici instabili - I

Una FdT $F(z)$ viene detta asintoticamente stabile se tutti i suoi poli sono strettamente contenuti all'interno del disco unitario

$$u(k) \longrightarrow \boxed{F(z)} \longrightarrow y(k)$$

Un sistema dinamico asintoticamente stabile è tale che se riceve un ingresso nullo ($u(k) = 0$) la variabile di uscita tende asintoticamente a zero, mentre se viene applicato in ingresso un segnale costante ($u(k) = U^*$) l'uscita tende asintoticamente verso un valore costante ($y(k) \rightarrow Y^*$ per $k \rightarrow \infty$)

Si dimostra con facilità mediante il teorema del valore finale che la risposta y(k) di un sistema a tempo discreto F(z) asintoticamente stabile al gradino di ingresso $u(k) = U^*$ converge al valore costante di regime

$$Y^* = U^* \cdot F(1)$$

Le proprietà di AS, SS, I dipendono <u>esclusivamente dalla posizione dei poli nel piano</u>

Sistemi dinamici asintoticamente stabili - AS

Hanno tutti i poli strettamente contenuti all'interno del disco unitario

Sistemi dinamici semplicemente stabili - SS

Hanno uno o più poli semplici sul perimetro del disco unitario

Non hanno poli esterni al disco unitario

Sistemi dinamici instabili - I

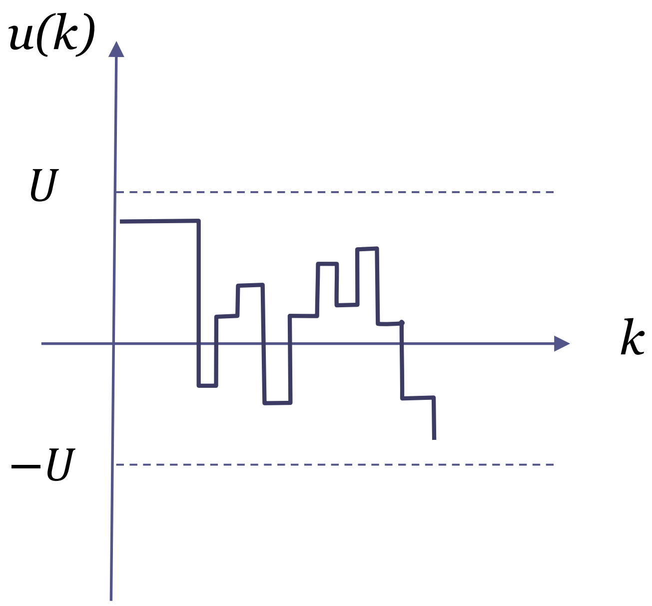
Hanno almeno un polo esterno al disco unitario oppure uno o piu poli multipli sul perimetro del disco unitario

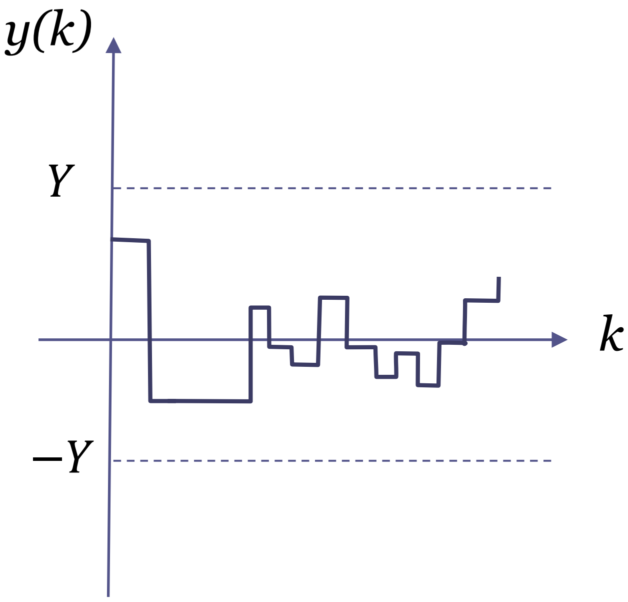
Sistemi dinamici asintoticamente stabili - AS

Con ingresso nullo ($u(k) = 0$) la variabile di uscita tende asintoticamente a zero ($y(k) \to 0 \quad per\ k \to \infty$)

Con ingresso costante ($u(k) = U^*$) l'uscita tende asintoticamente verso un valore costante ($y(k) \to Y^* \quad per\ k \to \infty$, con $Y^* = U^* \cdot F(1)$)

Con ingresso limitato ($|u(k)| \leq U$) la variabile di uscita si mantiene sempre limitata ($|y(k)| \leq Y$)





Sistemi dinamici semplicemente stabili - SS

Con ingresso nullo ($u(k) = 0$) la variabile di uscita si mantiene sempre limitata ($|y(k)| \leq Y$)

Sistemi dinamici instabili - I

Con ingresso limitato ($|u(k)| \leq U$) la variabile di uscita generalmente diverge ($|y(k)| \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$) eccetto che in corrispondenza di determinate e specifiche condizioni iniziali e sequenza di ingresso

Esempio

$y(k+1) = 2y(k) + u(k)$ *Sistema instabile* $P_{car}(z) = z - 2$

$y(0) = -1 \qquad u(k) = \delta_{-1}(k)$

$y(1) = 2y(0) + u(0) = -2 + 1 = -1$

$y(2) = 2y(1) + u(1) = -2 + 1 = -1$

$y(3) = 2y(2) + u(2) = -1$

$\Rightarrow \quad y(k) = -1 \quad \forall\, k \geq 0$

Qualunque condizione iniziale diversa da $\mathbf{y(0) = -1}$ conduce ad una soluzione che diverge per $\boldsymbol{k \to \infty}$

Abbiamo già incontrato in precedenza un simile fenomeno nel contesto di un esempio in cui si mise in evidenza come particolari condizioni iniziali possono «occultare» il modo instabile nella riposta di un sistema dinamico

Guadagno statico e guadagno generalizzato di una funzione di trasferimento a tempo discreto

Si consideri un sistema dinamico avente FdT $F(z)$, e sia h il numero dei suoi poli in $z = 1$. Si definisce guadagno statico (per semplicità «guadagno») di F(z) la quantità costante

$$\mu = \left[(z-1)^h F(z)\right]_{z=1}$$

Se $h > 0$ si parla di **guadagno generalizzato**

Esempi

$$F_1(z) = \frac{z+1}{(z-0.5)(z+0.8)} \qquad h = 0 \qquad \mu = F(1) = 2.22$$

$$F_2(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+0.5)} \qquad h = 1 \qquad \mu = \left[\frac{2z}{(z+0.5)}\right]_{z=1} = \frac{4}{3}$$

guadagno generalizzato

Verifica della stabilità

Presentiamo criteri algebrici per la verifica della stabilità di sistemi dinamici a tempo discreto.

Tali criteri sono delle procedure di analisi polinomiale che ci consentono di determinare se un polinomio assegnato abbia tutte le radici interne al disco unitario oppure no

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$$

Tali criteri possono essere applicati al polinomio caratteristico per la verifica della stabilità asintotica di un sistema a tempo discreto.

Ne illustriamo due:

Criterio di Jury

Metodo della trasformazione bilineare

Criterio di Jury

Il Criterio di Jury e un criterio algebrico in grado di stabilire se le radici di un polinomio assegnato sono tutte con modulo minore di uno (polinomio «*Jury-stabile*»).

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0 \qquad a_n > 0$$

Si basa sulla costruzione di una tabella, e sulla verifica di determinate relazioni fra gli elementi di questa tabella. Costituisce una controparte del criterio di Routh-Hurwitz per sistemi a tempo discreto.

Vi sono **tre condizioni necessarie** preliminari che possono essere verificate senza costruire la tabella e che, ove non siano sodisfatte, ci permettono di concludere che il polinomio in esame **non è** sicuramente Jury-stabile, e quindi la costruzione della tabella diventa inutile

1. $|a_0| < a_n$
2. $P(1) > 0 \quad \Rightarrow \quad a_n + a_{n-1} + \cdots a_1 + a_0 > 0$
3. $(-1)^n P(-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(-1) = \begin{cases} > 0, & se\ n\ \grave{e}\ pari \\ < 0, & se\ n\ \grave{e}\ dispari \end{cases}$

Se n=2, le precedenti condizioni necessarie 1-3 sono anche sufficienti

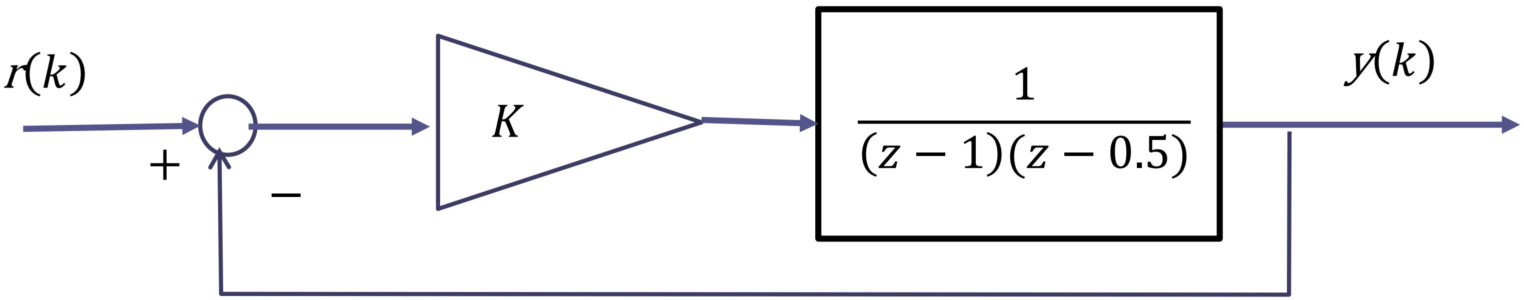
Il polinomio di grado 2 $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ con $a_2 > 0$ è Jury-stabile se e solo se

1. $|a_0| < a_2$
2. $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 > 0$
3. $P(-1) = a_2 - a_1 + a_0 > 0$

Es. $P(z) = (z + 0.5)(z - 0.7) = z^2 - 0.2z - 0.35$ $\quad a_2 = 1 \quad a_1 = -0.2 \quad a_0 = -0.35$

1. $|a_0| < a_2$ $\quad |-0.35| < 1 \quad OK$
2. $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 > 0$ $\quad 1 - 0.2 - 0.35 = 0.45 > 0 \quad OK$
3. $P(-1) = a_2 - a_1 + a_0 > 0$ $\quad 1 + 0.2 - 0.35 = 0.85 > 0 \quad OK$

Esercizio: Analizzare al variare di K > 0 la stabilità del seguente sistema in retroazione



$$P_{car}(z) = (z-1)(z-0.5) + \mathrm{K} = z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} + K \qquad a_2 = 1 \qquad a_1 = -\frac{3}{2} \qquad a_0 = \frac{1}{2} + K$$

1. $|a_0| < a_2$ $\qquad \left|\frac{1}{2} + K\right| < 1 \qquad -\frac{3}{2} < K < \frac{1}{2}$

2. $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 > 0$ $\qquad 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + K = K > 0 \qquad K > 0$

3. $P(-1) = a_2 - a_1 + a_0 > 0$ $\qquad 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + K = 3 + K > 0 \qquad K > -3$

Il sistema in retroazione è as. stabile a ciclo chiuso se $\boldsymbol{0 < K < \frac{1}{2}}$ $\qquad \boldsymbol{K_{cr} = \frac{1}{2}}$

La tabella di Jury si costruisce «a coppie di righe», secondo la seguente procedura

$$
\begin{array}{l|cccccc}
riga\ 1 & \boxed{a_0} & \boxed{a_1} & a_2 & \dots & \boxed{a_{n-1}} & \boxed{a_n} \\
riga\ 2 & \boxed{a_n} & \boxed{a_{n-1}} & a_{n-2} & \dots & \boxed{a_1} & \boxed{a_0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|cccc}
riga\ 3 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\
riga\ 4 & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0
\end{array}
$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix} \qquad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix} \qquad b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-2} \\ a_n & a_2 \end{vmatrix} \qquad \cdots \qquad b_{n-1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

La prima colonna dei minori è sempre la stessa. La seconda colonna invece «scorre» da destra verso sinistra

Espressione del termine generico b_i

$$b_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{vmatrix} \qquad i = 1,2, \dots, n-1$$

La costruzione delle righe 5 e 6 a partire dagli elementi delle due righe precedenti avviene con le medesime «regole» adottate per costruire le righe 3 e 4 a partire dalle prime due

$$
\begin{array}{l|cccccc}
riga\ 1 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\
riga\ 2 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc}
riga\ 3 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\
riga\ 4 & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|cccc}
riga\ 5 & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\
riga\ 6 & c_{n-2} & c_{n-1} & \dots & c_0
\end{array}
$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix} \qquad c_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{vmatrix} \qquad \dots \qquad c_{n-2} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} \end{vmatrix}$$

Ci si ferma quando la riga corrente contiene tre elementi (riga 2n-3)

Ci si ferma quando la riga che si inserisce contiene tre elementi (riga 2n-3)

$$
\begin{array}{l|lllll}
riga\ 1 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\
riga\ 2 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \\
riga\ 3 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & \\
riga\ 4 & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 & \\
riga\ 5 & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & \\
riga\ 6 & c_{n-2} & c_{n-1} & \dots & c_0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
riga\ \text{2n-5} & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \\
riga\ \text{2n-4} & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \\
riga\ \text{2n-3} & q_0 & q_1 & q_2 & &
\end{array}
$$

Terminata la costruzione della tabella, vado a imporre che in tutte le righe dispari il valore assoluto del primo elemento sia strettamente maggiore del valore assoluto dell'ultimo elemento

$$|b_0| > |b_{n-1}| \qquad |c_0| > |c_{n-2}| \qquad \dots \qquad |p_0| > |p_3| \qquad |q_0| > |q_2|$$

Riepilogando:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0 \qquad a_n > 0$$

1. $|a_0| < a_n$
2. $P(1) > 0 \Rightarrow a_n + a_{n-1} + \cdots a_1 + a_0 > 0$
3. $(-1)^n P(-1) > 0 \Rightarrow P(-1) = \begin{cases} > 0, & se\ n\ \text{è}\ pari \\ < 0, & se\ n\ \text{è}\ dispari \end{cases}$

La verifica delle condizioni 1-3 si fa prima di costruire la tabella.

4 $|b_0| > |b_{n-1}|$

5 $|c_0| > |c_{n-2}|$

$\vdots \qquad \vdots$

$|p_0| > |p_3|$

$|q_0| > |q_2|$

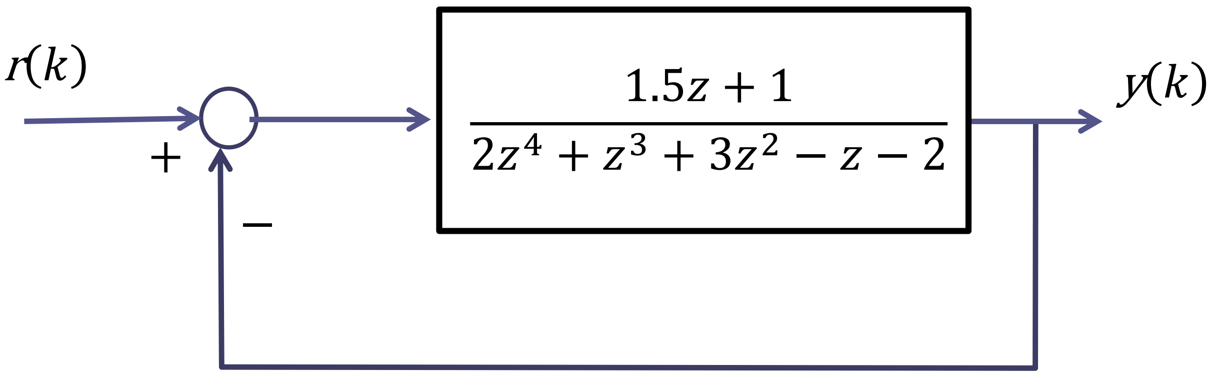
riga 1	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_n
riga 2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_0
riga 3	b_0	b_1	$\dots$	b_{n-1}	
riga 4	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_0	
riga 5	c_0	c_1	...	c_{n-2}	
riga 6	c_{n-2}	c_{n-1}	...	c_0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
riga 2n-5	p_0	p_1	p_2	p_3	
riga 2n-4	p_3	p_2	p_1	p_0	
riga 2n-3	q_0	q_1	q_2		

$$b_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{vmatrix}$$

$$c_i = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-i} \\ b_{n-1} & b_i \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

Esempio: Analizzare la stabilità del seguente sistema in retroazione



La FdT a ciclo chiuso è:

$$W_r^y(z) = \frac{\dfrac{1.5z+1}{2z^4+z^3+3z^2-z-2}}{1+\dfrac{1.5z+1}{2z^4+z^3+3z^2-z-2}} = \frac{1.5z+1}{2z^4+z^3+3z^2+0.5z-1}$$

Applichiamo il Criterio di Jury al polinomio caratteristico

$$P_{car}(z) = 2z^4+z^3+3z^2+0.5z-1$$

$P_{car}(z) = 2z^4 + z^3 + 3z^2 + 0.5z - 1$ $\qquad a_0 = -1,\ a_1 = 0.5,\ a_2 = 3,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2$

Verifichiamo preliminarmente le condizioni necessarie

1. $|a_0| < a_4$ $\qquad |1| < 2$ $\qquad \color{red}{OK}$
2. $P_{car}(1) > 0$ $\qquad 2 + 1 + 3 + 0.5 - 1 = 5.5 > 0$ $\qquad \color{red}{OK}$
3. $(-1)^4 P_{car}(-1) = P_{car}(-1) > 0$ $\qquad 2 - 1 + 3 - 0.5 - 1 = 2.5 > 0$ $\qquad \color{red}{OK}$

Costruiamo la Tabella di Jury

Le prime due righe contengono i coefficienti del polinomio

$$\begin{array}{l|ccccc} riga\ 1 & -1 & 0.5 & 3 & 1 & 2 \\ riga\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0.5 & -1 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|ccccc}
riga\ 1 & -1 & 0.5 & 3 & 1 & 2 \\
riga\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0.5 & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|cccc}
riga\ 3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\
riga\ 4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0
\end{array}
$$

Determiniamo le due righe successive

$$b_0 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad b_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{vmatrix} = -2.5$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9 \qquad b_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$
\begin{array}{l|ccccc}
riga\ 1 & -1 & 0.5 & 3 & 1 & 2 \\
riga\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0.5 & -1 \\
\hline
riga\ 3 & -3 & -2.5 & -9 & -2 & \\
riga\ 4 & -2 & -9 & -2.5 & -3 &
\end{array}
$$

Dobbiamo proseguire perché la terza e quarta riga hanno 4 elementi

$$
\begin{array}{l|ccccc}
riga\ 1 & -1 & 0.5 & 3 & 1 & 2 \\
riga\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0.5 & -1 \\
\hline
riga\ 3 & -3 & -2.5 & -9 & -2 & \\
riga\ 4 & -2 & -9 & -2.5 & -3 & \\
\hline
riga\ 5 & c_0 & c_1 & c_2 & &
\end{array}
$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \qquad c_1 = \begin{vmatrix} -3 & -9 \\ -2 & -2.5 \end{vmatrix} = -10.5 \qquad c_2 = \begin{vmatrix} -3 & -2.5 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} = 22$$

Poiché la riga 5 ha 3 elementi, la costruzione della Tabella è terminata

Passiamo alla verifica delle condizioni aggiuntive (in tutte le righe dispari il valore assoluto del primo elemento deve essere strettamente maggiore del valore assoluto dell’ultimo elemento)

$riga\ 1$	-1	0.5	3	1	2
$riga\ 2$	2	1	3	0.5	-1
$riga\ 3$	-3	-2.5	-9	-2	
$riga\ 4$	-2	-9	-2.5	-3	
$riga\ 5$	5	-10.5	22		

Condizione per la riga 3 $|-3| > |-2|$ *OK*

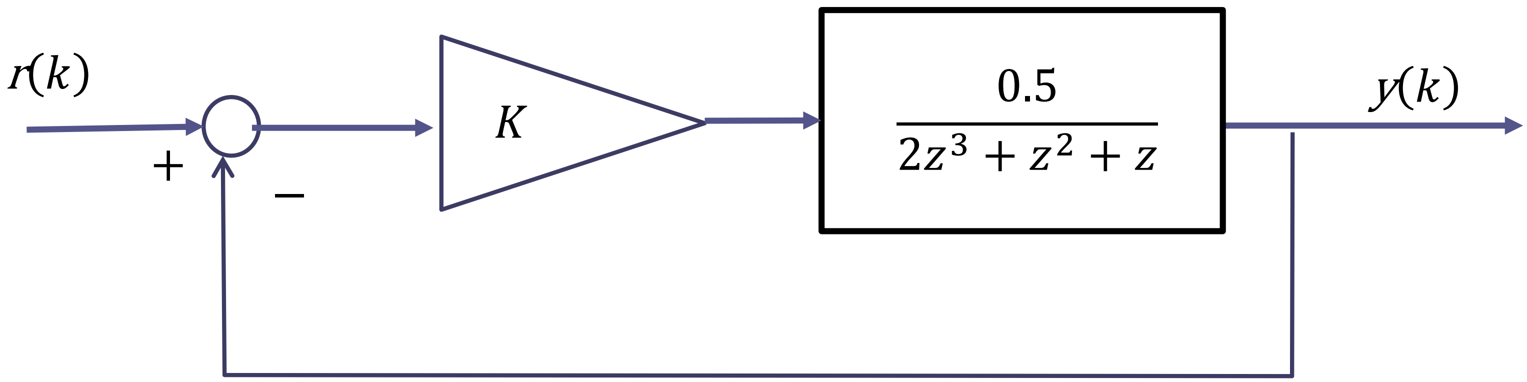
Condizione per la riga 5 $|5| > |22|$ ***NO***

Il polinomio caratteristico $P_{car}(z) = 2z^4 + z^3 + 3z^2 + 0.5z - 1$ ha almeno una radice con modulo maggiore di 1, quindi il sistema in retroazione è instabile a ciclo chiuso

```
poliWry =

  -0.1523 + 1.3063i
  -0.1523 - 1.3063i
  -0.6442 + 0.0000i
   0.4488 + 0.0000i
```

Esercizio: Analizzare al variare di K > 0 la stabilità del seguente sistema in retroazione



Soluzione: $0 < K < 4$

Metodo della trasformazione bilineare

Si basa su una sostituzione di variabile da applicare al polinomio $P(z)$ che viene trasformato in un rapporto fra polinomi al numeratore del quale si applica il criterio di Routh Hurwitz

Trasformazione bilineare $z = \dfrac{1+w}{1-w}$ Trasformazione inversa $w = \dfrac{z-1}{z+1}$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$$

$$\Downarrow$$

$$P(w) = a_n \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-1} + \cdots a_1 \left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_0 = \frac{Q(w)}{(1-w)^n}$$

La trasformazione bilineare mappa il disco unitario nel semipiano sinistro. Si ha pertanto

$P(z)$ ha tutte le radici interne al disco unitario	$\Leftrightarrow$	Q(w) ha tutte le radici a parte reale negativa

Esempio Analizzare la stabilità secondo Jury del polinomio P(z)

$$P(z) = z^3 + 2z^2 + z + 1$$

$$\Big\downarrow \; z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$P(z) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + 2\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \left(\frac{1+w}{1-w}\right) + 1 = \frac{w^3 - 3w^2 - w - 5}{(1-w)^2}$$

Per determinare se P(z) è Jury-stabile, si applica il criterio di Routh Hurwitz al polinomio Q(w) $= w^3 - 3w^2 - w - 5$. Il responso è negativo in quanto il polinomio Q(w) non soddisfa la condizione necessaria del criterio di Routh, che stabilisce che tutti i coefficienti del polinomio devono essere di segno concorde