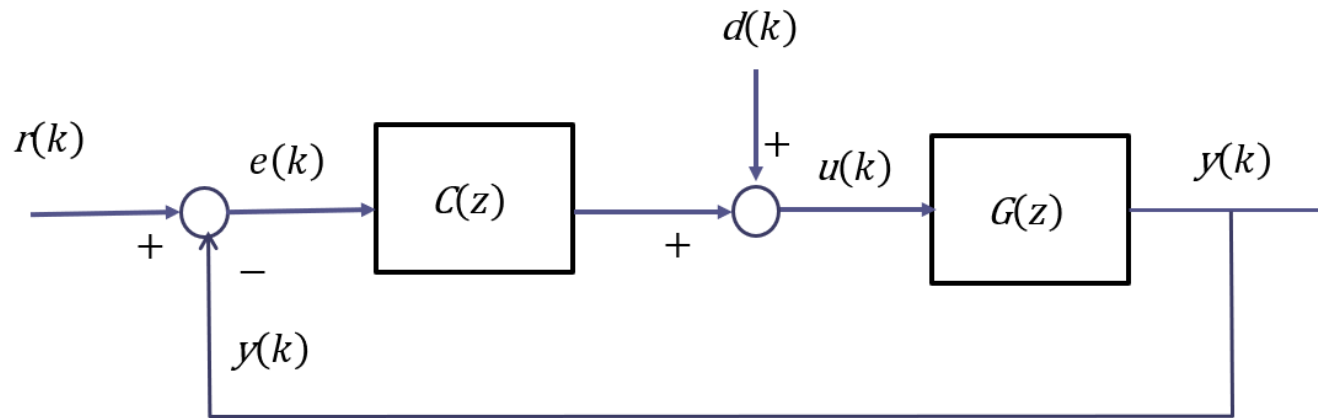


Controllo digitale

Comportamento a regime dei sistemi di controllo a tempo discreto – Parte 2

Ing. Alessandro Pisano
`apisano@unica.it`

Sistemi di controllo di tipo uno



Lo schema in retroazione in Figura viene detto di **tipo 1** se **nel regolatore, oppure nel processo, è presente un polo in $z = 1$**

I due casi sono equivalenti per quanto concerne la risposta al set-point, ma conducono a **comportamenti differenti per quanto concerne la risposta al disturbo.**

Sistemi di controllo di tipo uno

Comportamento a regime in risposta ad un **set-point costante** $r(k) = R^*$

In un sistema di controllo di tipo 1 sottoposto ad un set-point costante $r(k) = R^* = \text{cost.}$ vale, in assenza di disturbo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = R^*$$

La formula sopraripotata vale unicamente nel caso in cui il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

Il valore di regime dell'uscita coincide con il valore del set-point costante indipendentemente dai guadagni di regolatore e processo.

Sistemi di controllo di tipo uno

Comportamento a regime in risposta ad un **disturbo costante** $d(k) = D^*$

In un sistema di controllo di tipo 1 sottoposto ad un disturbo costante $d(k) = D^* = \text{cost.}$ valgono, in assenza di set point, le seguenti proprietà:

Se il polo in $z=1$ è contenuto nel regolatore si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 0$$

Se invece il polo in $z=1$ è contenuto nel processo si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \frac{D^*}{\mu_C}$$

Se il polo in $z=1$ è contenuto nel regolatore il sistema di controllo è in grado di operare la reiezione completa a regime di un disturbo costante. Il valore di regime dell'uscita dovuto alla sola presenza del disturbo è pari a zero indipendentemente dall'ampiezza D del disturbo e dai guadagni di regolatore e processo

Se invece il polo in $z=1$ è contenuto nel processo, il disturbo altera il valore di regime dell'uscita. L'entità di tale effetto indesiderato dipende dal solo guadagno del regolatore, e non anche dal guadagno del processo come avveniva nei sistemi di controllo di tipo zero.

Sistemi di controllo di tipo uno

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di **set-point costante e disturbo costante**

Il principio di sovrapposizione degli effetti ci consente di affermare che in un sistema di controllo di tipo uno soggetto simultaneamente ad un set point costante di ampiezza R^* e ad un disturbo costante di ampiezza D^* il valore di regime dell'uscita sarà

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = R^*$$

Se il polo in $z=1$ è contenuto nel regolatore

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = R^* + \frac{D^*}{\mu_C}$$

Se il polo in $z=1$ è contenuto nel processo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = R^*$$

Se il polo in $z=1$ è contenuto nel regolatore

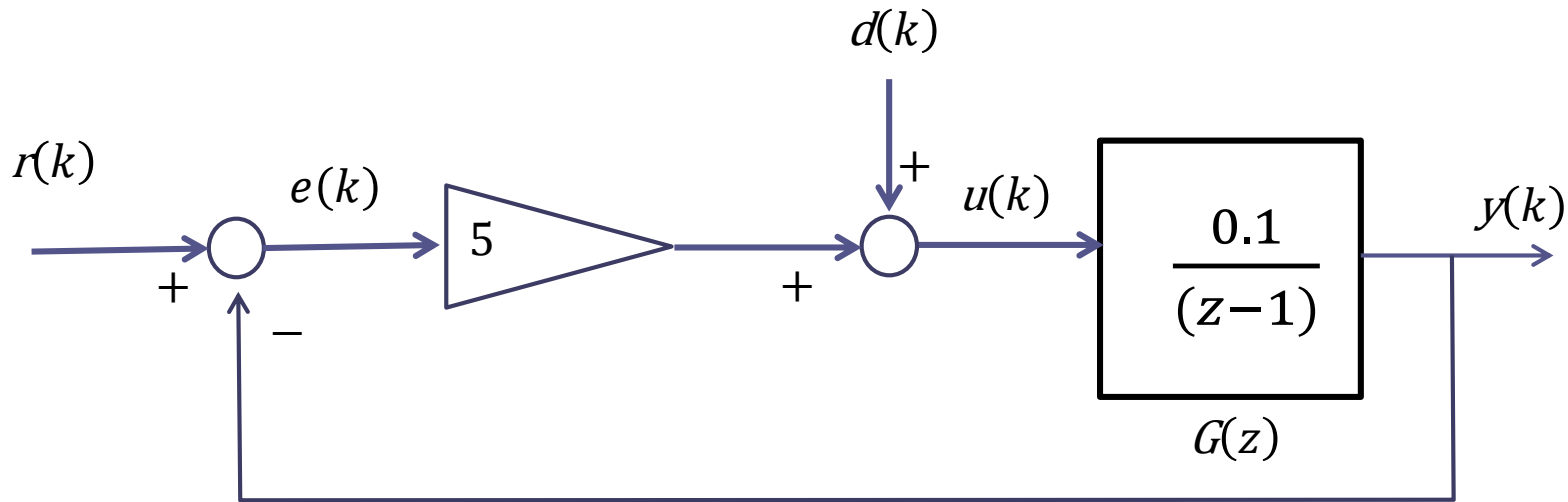
Tale relazione stabilisce una importante proprietà di **precisione statica robusta**

La relazione si conserva difatti indipendentemente dall'intervento di un disturbo costante di ampiezza sconosciuta, oltre che dai guadagni, e dalla struttura dinamica (poli e zeri), del regolatore e del processo

Essa è unicamente garantita dalla presenza del polo in $z=1$ nel regolatore (**e dalla concomitante stabilità a ciclo chiuso**).

E' uno dei motivi della ampia diffusione dei regolatori PI.

Esempio



Determinare il comportamento dell'uscita a regime per

$$r(k) = 3\delta_{-1}(k) \quad d(k) = 0.5 \delta_{-1}(k)$$

E' un sistema di controllo di tipo uno, in cui il polo nell'origine si trova nel processo. Abbiamo visto come il comportamento a regime dipenda unicamente dai valori dei **guadagni** di regolatore e processo.

Il controllore ha guadagno $\mu_C = 5$.

Il processo ha guadagno (generalizzato) $\mu_G = [(z-1)G(z)]_{z=1} = 0.1$

Verifichiamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso

$$P_{car}(z) = z - 1 + 0.5 = z - 0.5 \quad \text{Ok}$$

Abbiamo visto come in un sistema di controllo di tipo 1 in cui il polo in $z=1$ è contenuto nel processo sotto l'effetto di set-point e disturbo entrambi costanti si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = R^* + \frac{D^*}{\mu_C}$$

Nella relazione figurano il guadagno μ_C del controllore e le ampiezze R^* e D^* del set point e del disturbo, entrambi costanti, che nel presente esercizio valgono

$$\mu_C = 5$$

$$R^* = 3$$

$$D^* = 0.5$$

Si ha quindi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \boxed{3} + \boxed{0.1} = 3.1$$

Componente dovuta al disturbo

Componente dovuta al set-point

Ricaviamo tale risultato senza ricorrere alla formula risolutiva

Contributo del set-point

FdT set-point uscita:

$$W_r^y(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{5 \cdot 0.1}{(z-1)} = \frac{0.5}{z-0.5}$$

Trasformata Z dell'uscita:

$$Y_r(z) = W_r^y(z)R(z) = \frac{0.5}{z-0.5} \cdot \frac{3z}{z-1}$$

Teorema del valore finale:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_r(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y_r(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.5 \cdot 3z}{z-0.5} = 3$$

Si poteva arrivare al risultato anche moltiplicando il guadagno della funzione di trasferimento fra il set-point e l'uscita (che è sempre **unitario nei sistemi di controllo di tipo 1**) per l'ampiezza del set point

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_r(k) = 3 \cdot W_r^y(1) = 3$$

Contributo del disturbo

FdT disturbo uscita:

$$W_d^y(z) = \frac{G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{\frac{0.1}{(z-1)}}{1 + \frac{5 \cdot 0.1}{(z-1)}} = \frac{0.1}{z-0.5}$$

Trasformata Z dell'uscita:

$$Y_d(z) = W_d^y(z)D(z) = \frac{0.1}{z-0.5} \cdot \frac{0.5z}{z-1}$$

Teorema del valore finale:

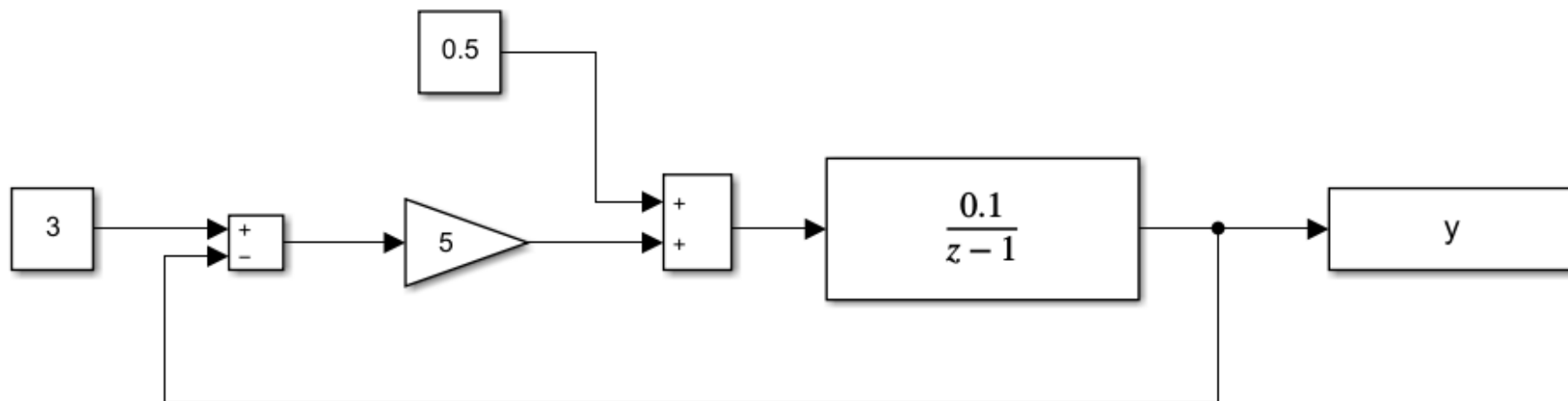
$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_d(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y_d(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.05z}{z-0.5} = \mathbf{0.1}$$

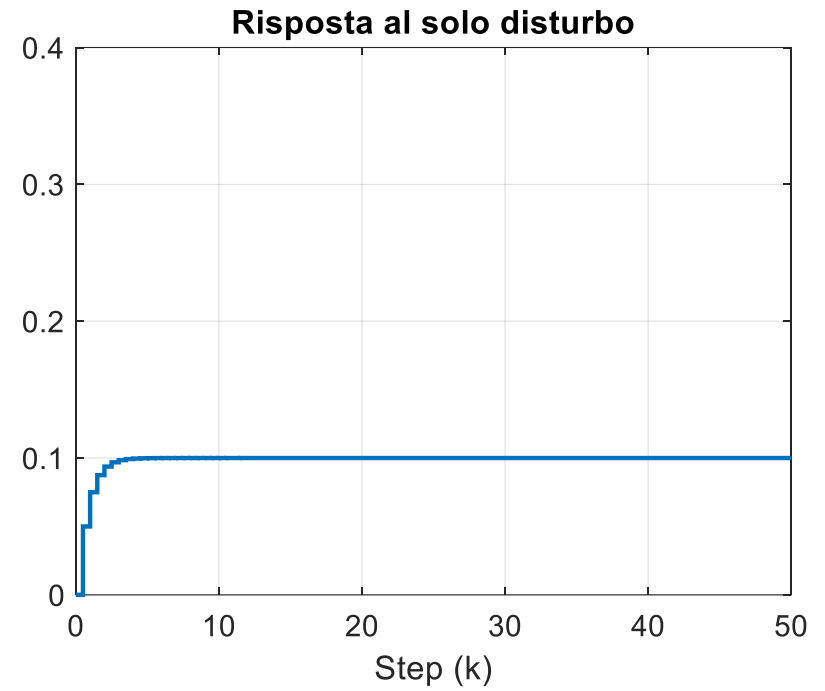
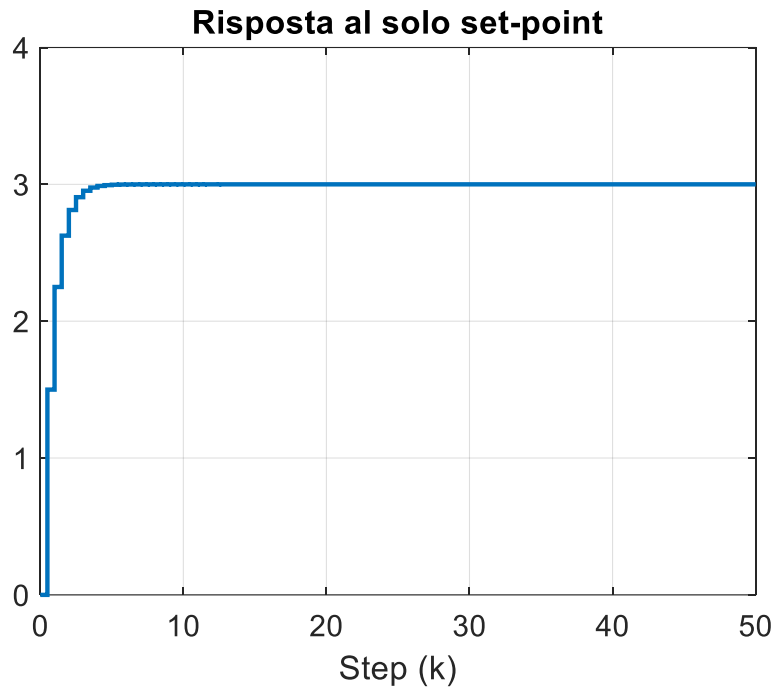
Si poteva anche impiegare direttamente il guadagno $W_d^y(1)$ della FdT fra il set-point e l'uscita (pari a 0.2), attraverso la relazione

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_d(k) = 0.5 \cdot W_d^y(1) = 0.5 \cdot 0.2 = \mathbf{0.1}$$

che sfrutta il fatto che in un sistema dinamico asintoticamente stabile soggetto ad un ingresso costante l'uscita tende asintoticamente al valore costante dato dal prodotto fra l'ampiezza dell'ingresso ed il guadagno della FdT

Verifichiamo mediante simulazione i risultati ottenuti







Sistemi di controllo di tipo 1 con set-point a rampa

Consideriamo il comportamento di un sistema di controllo di **tipo uno** soggetto ad un **set-point a rampa**

$$r(k) = T_c \Gamma k \delta_{-1}(k)$$

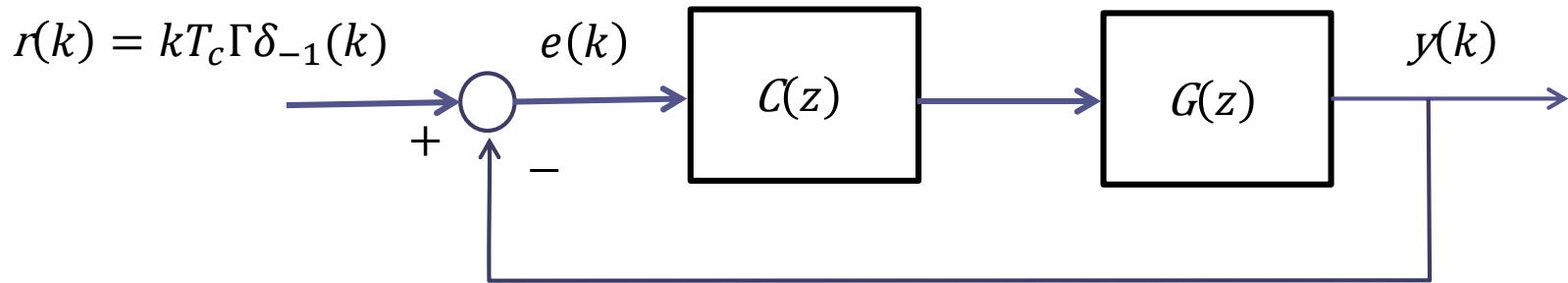
con **disturbo posto pari a zero**.

N.B. La sequenza $r(k)$ considerata è ottenuta campionando con periodo T_c il segnale a tempo continuo $r(t) = \Gamma t \delta_{-1}(t)$ avente pendenza costante pari a Γ

La sua trasformata Z è $R(z) = T_c \Gamma \frac{z}{(z-1)^2}$

L'uscita del sistema a ciclo chiuso tenderà a divergere per k che tende ad infinito, poiché anche il set-point tende a divergere. Quindi, per l'analisi del comportamento a regime **non possiamo applicare il teorema del valore finale all'uscita**.

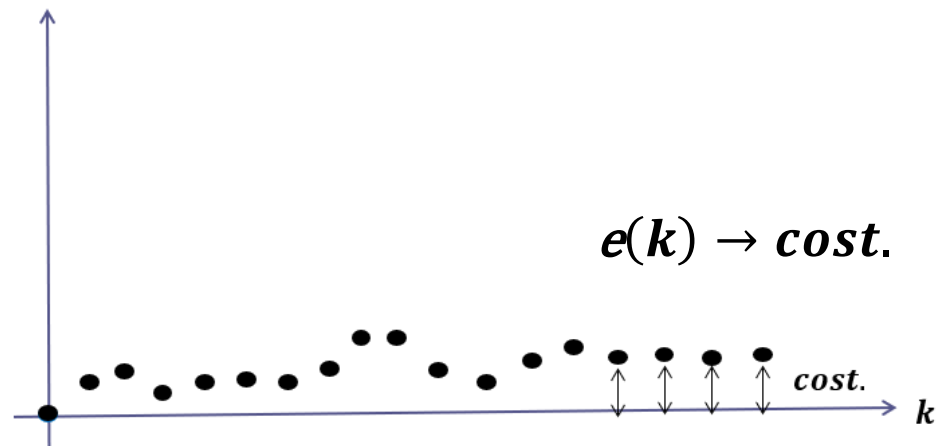
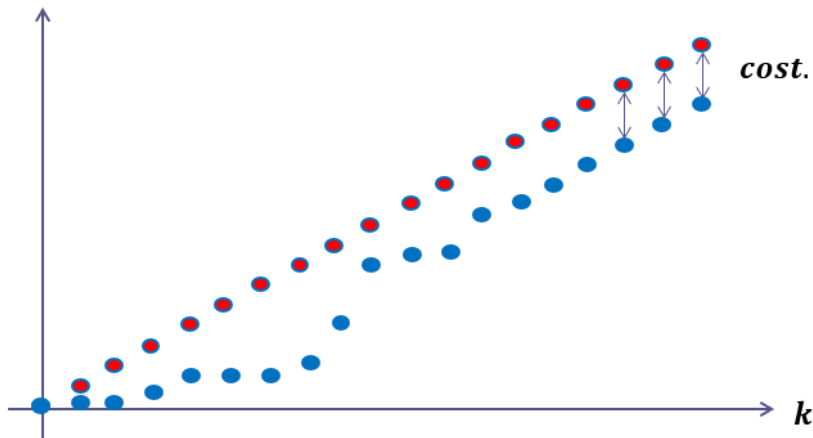
Sistema di **tipo 1** con set-point a rampa



Evoluzioni **qualitative** delle sequenze di riferimento $r(k)$, uscita $y(k)$, ed errore $e(k)$

$r(k)$ $y(k)$

$$e(k) = r(k) - y(k).$$



Sistemi di controllo di tipo uno con set-point a rampa

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un set-point a rampa $r(k) = kT_c\Gamma\delta_{-1}(k)$ (e disturbo nullo).

Si dimostra che **la sequenza di errore** $e(k) = r(k) - y(k)$ **tende asintoticamente ad un valore costante** avente il seguente valore

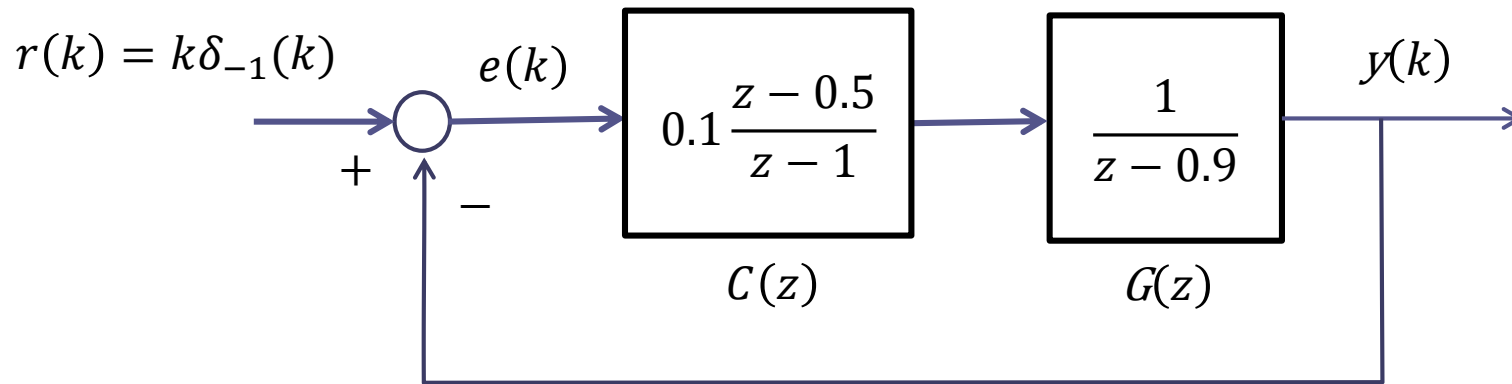
$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \frac{T_c\Gamma}{\mu_C\mu_G}$$

in cui μ_C è il guadagno (eventualmente generalizzato) del controllore $C(z)$ mentre μ_G è il guadagno (eventualmente generalizzato) del processo $G(z)$

La formula soprariportata implica che l'evoluzione di regime dell'uscita coincide con il set-point a meno di una differenza costante

$$y^{regime}(k) = r(k) - \frac{T_c\Gamma}{\mu_C\mu_G} = kT_c\Gamma - \frac{T_c\Gamma}{\mu_C\mu_G}$$

Ci limitiamo, per semplicità, a mostrare il soddisfacimento della relazione fornita nell'ambito di un caso concreto ($T_c = 0.5$, $\Gamma = 2$)



Verifichiamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso.

$$P_{car}(z) = (z - 1)(z - 0.9) + 0.1(z - 0.5) = z^2 - 1.8z + 0.85$$

Le radici del polinomio caratteristico sono $p_{1,2} = 0.9 \pm 0.2j$, il cui modulo vale 0.92

guadagno (generalizzato) del controllore $\mu_C = (z - 1)C(z) \Big|_{z=1} = 0.05$

guadagno del processo $\mu_G = G(1) = 10$

Mostriamo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \frac{1}{\mu_C \mu_G} = \frac{1}{0.5} = 2$$

Applichiamo il teorema del valore finale alla sequenza di errore $e(k)$

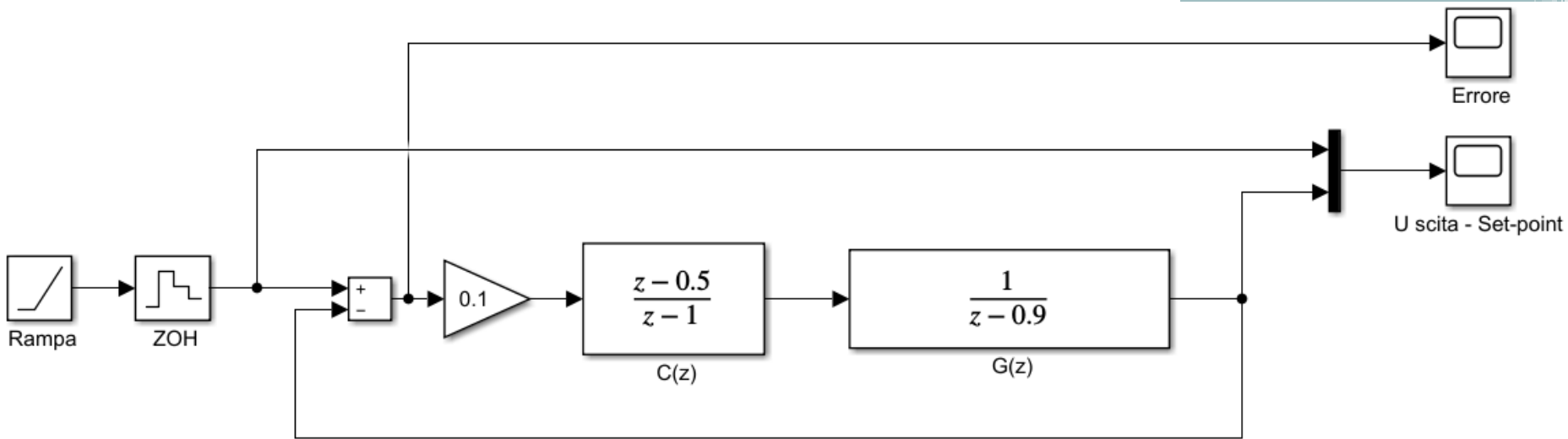
$$\begin{aligned} E(z) = W_r^e(z)R(z) &= \frac{1}{1 + C(z)G(z)} \cdot R(z) \\ &= \frac{1}{1 + 0.1 \frac{z - 0.5}{(z - 1)(z - 0.9)}} \cdot R(z) \\ &= \frac{(z - 1)(z - 0.9)}{(z - 1)(z - 0.9) + 0.1(z - 0.5)} \cdot R(z) \\ &= \frac{(z - 1)(z - 0.9)}{(z - 1)(z - 0.9) + 0.1(z - 0.5)} \cdot \frac{z}{(z - 1)^2} \\ &= \frac{(z - 0.9)}{(z - 1)(z - 0.9) + 0.1(z - 0.5)} \cdot \frac{z}{(z - 1)} \end{aligned}$$

$$E(z) = \frac{(z - 0.9)}{(z - 1)(z - 0.9) + 0.1(z - 0.5)} \cdot \frac{z}{(z - 1)}$$

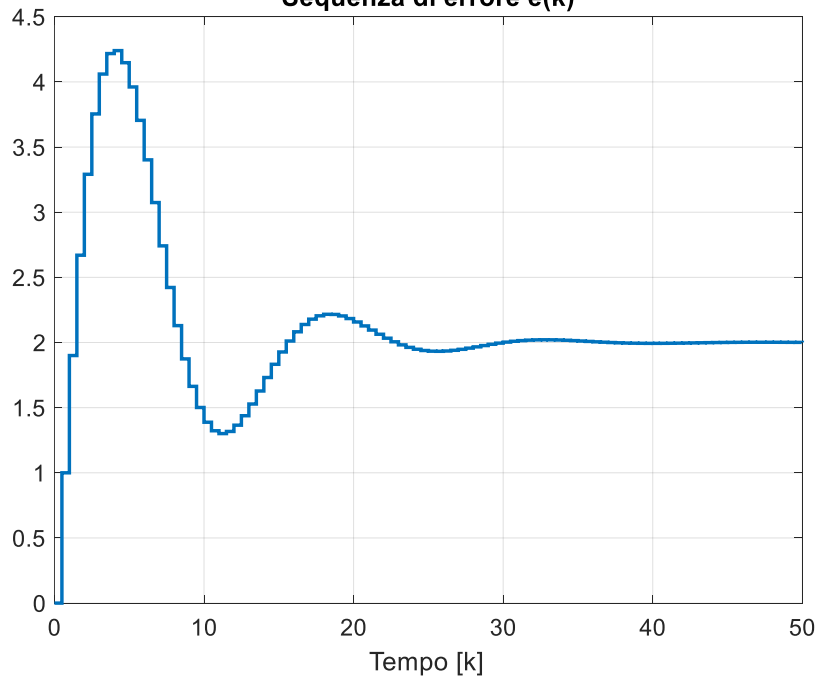
$E(z)$ ha come poli le radici del polinomio caratteristico $(z - 1)(z - 0.9) + 0.1(z - 0.5)$, che abbiamo visto essere interne al disco unitario, più un polo semplice in $z = 1$.

E' quindi soddisfatta l'ipotesi di applicabilità del teorema del valore finale, che garantisce che la sequenza $e(k)$ converge verso un valore finito, e che tale valore è

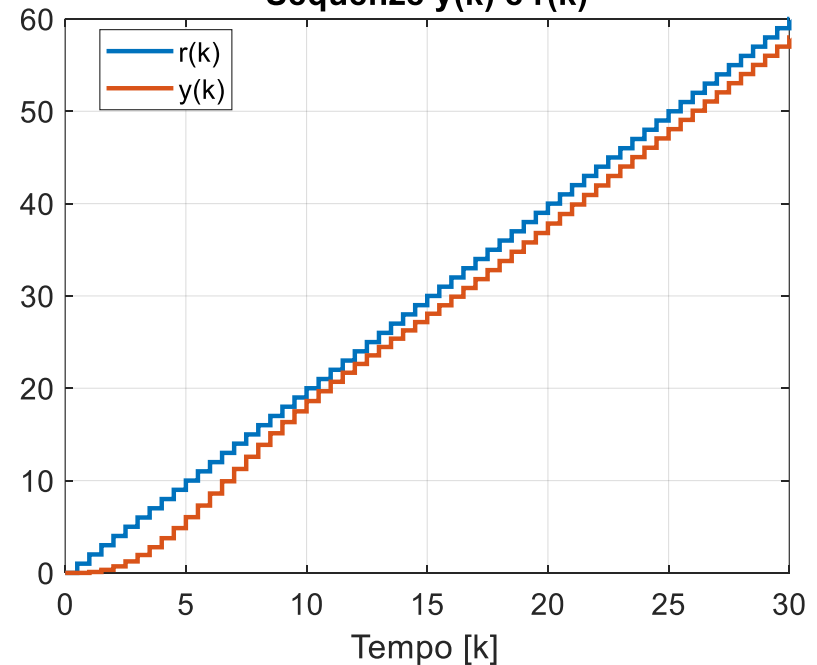
$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(z - 0.9)}{(z - 1)(z - 0.9) + 0.1(z - 0.5)} \\ &= \frac{(1-0.9)}{0.1(1-0.5)} = 2 \end{aligned}$$



Sequenza di errore e(k)



Sequenze y(k) e r(k)



Principio del modello interno

Un principio di validità generale che caratterizza in maniera semplice e compatta il comportamento **a regime** dei sistemi di controllo per quanto concerne le proprietà di **inseguimento del set-point** e di **reiezione dei disturbi**

Introduciamo una terminologia:

diremo che una Funzione di Trasferimento “**contiene il modello**” di un certo segnale $x(k)$ se fra i poli della FdT vi sono tutti i poli della Trasformata zeta $X(z)$ del segnale

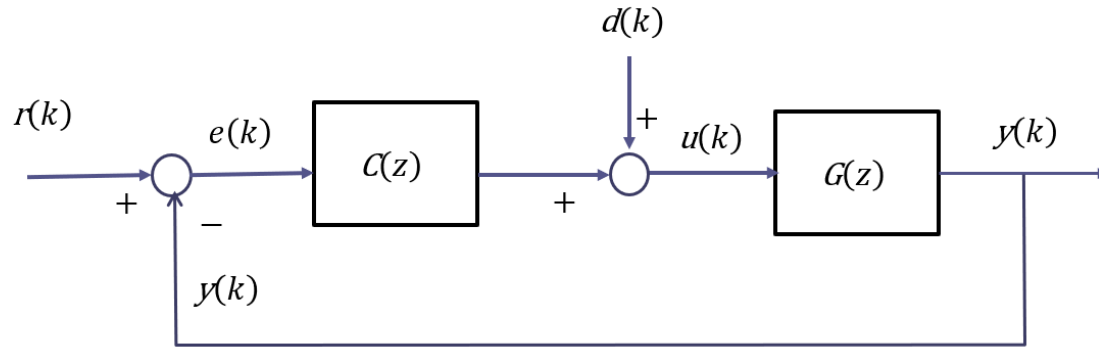
Esempi:

Una FdT “contiene il modello” di un segnale **costante** $x(k) = C = cost.$ se fra i suoi poli è presente almeno un polo in $z=1$

Una FdT “contiene il modello” di un segnale **a rampa** $x(k) = Ck$ ($C = cost$) se fra i suoi poli sono presenti almeno due poli in $z=1$

Una FdT «contiene il modello» di un segnale **sinusoidale** $x(k) = X \cos(\theta k + \phi)$ se fra i suoi poli sono inclusi i due poli complessi coniugati $e^{j\theta}$ ed $e^{-j\theta}$. Deve quindi essere presente a denominatore il termine $(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta}) = z^2 - 2\cos(\theta)z + 1$

I due seguenti enunciati si applicano al sistema in Figura nell'ipotesi che questo sia **asintoticamente stabile a ciclo chiuso**



Enunciato 1 (*inseguimento del riferimento*).

L'uscita $y(k)$ ottenuta con un riferimento $r(k)$ qualunque (e con disturbo $d(k)$ nullo) converge asintoticamente al set-point se e solo se la **FdT a ciclo aperto** $C(z)G(z)$ contiene il modello del riferimento

Enunciato 2 (*reiezione del disturbo*).

L'uscita $y(k)$ ottenuta con un disturbo $d(k)$ qualunque (e con riferimento $r(k)$ nullo) converge a zero se e solo se la **FdT del regolatore** $C(z)$ contiene il modello del disturbo.

I due enunciati implicano, come caso particolare, una buona parte delle proprietà dimostrate nelle sezioni precedenti

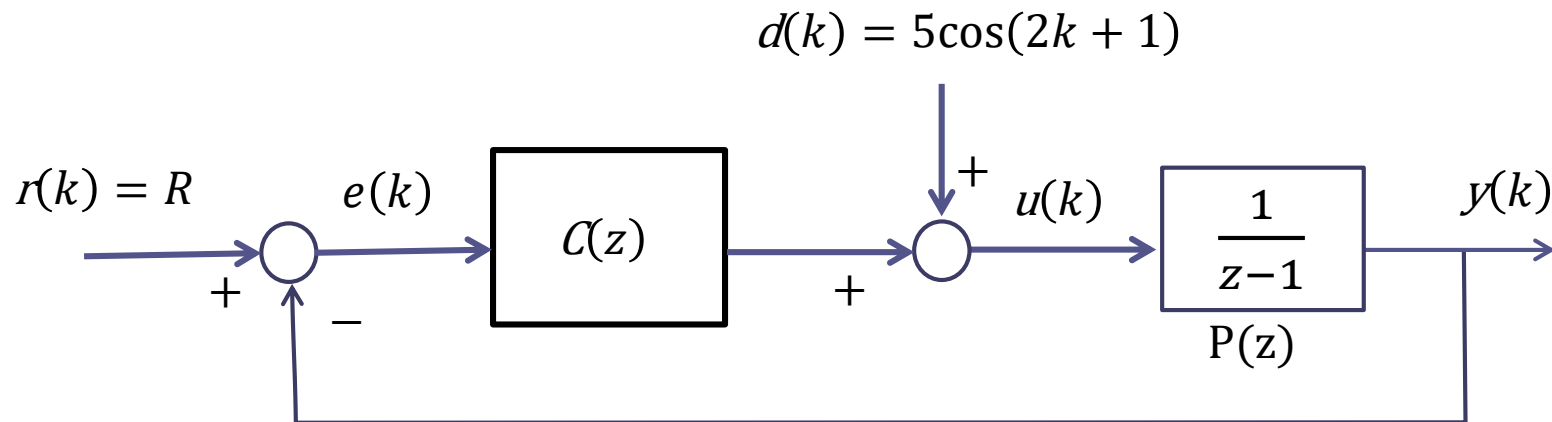
Ad esempio, la reiezione di un disturbo costante è garantita se e solo se il regolatore $C(z)$ contiene un polo in $z = 1$

La capacità di «inseguire» asintoticamente un set-point a rampa (avere cioè l'uscita che tende asintoticamente a sovrapporsi alla rampa di set-point) è garantita se e solo se nella FdT a ciclo aperto $C(z)G(z)$ sono presenti almeno due poli in $z = 1$ (sistema di tipo 2)

E' errore frequente concludere che un certo sistema in retroazione possiede determinate proprietà di precisione a regime basandosi sulla sola presenza del necessario numero di poli in $z = 1$ e **trascurando di verificare la stabilità a ciclo chiuso**. Tale omissione conduce a conclusioni del tutto errate circa il comportamento del sistema.

Esempio

Si consideri il sistema di controllo in retroazione in Figura, con un processo del primo ordine asintoticamente stabile ed un disturbo sinusoidale



Si desidera progettare un regolatore $C(z)$ che garantisca che il valore di regime dell'uscita $y(k)$ coincida con il valore costante del set-point a fronte della presenza del disturbo sinusoidale di **frequenza nota** e ampiezza e fase sconosciute.

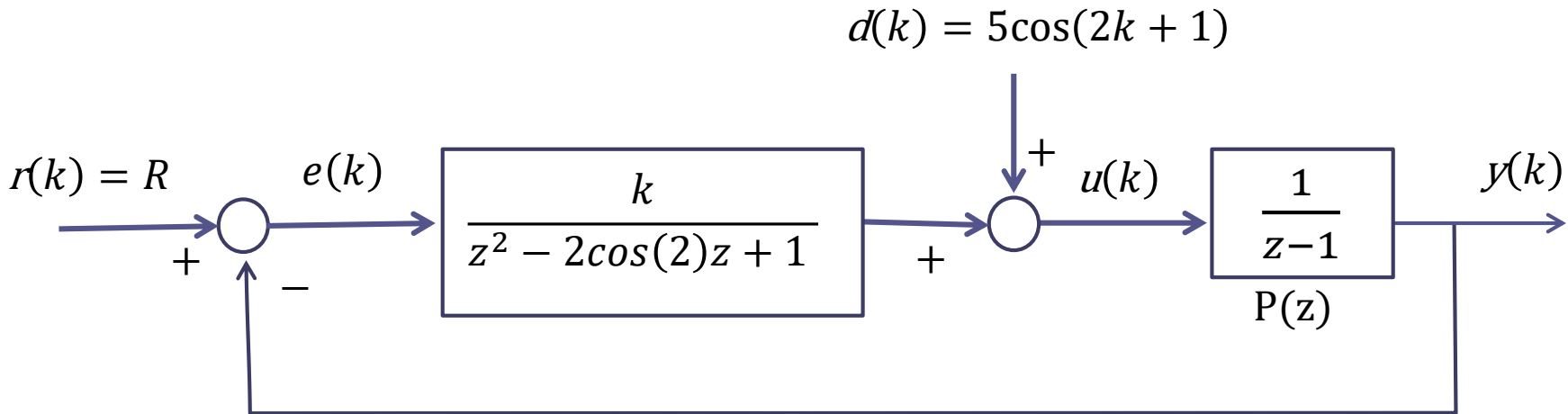
Il principio del modello interno sancisce come per risolvere il presente esercizio devono essere verificate le seguenti proprietà:

1. Per garantire l'inseguimento del set-point, la FdT a ciclo aperto deve contenere il modello di un segnale costante, cioè un polo in $z = 1$, che è **già presente** per effetto del processo $P(z) = \frac{2}{z-1}$
2. Per garantire la reiezione del disturbo sinusoidale, il regolatore deve contenere il modello del segnale disturbante $d(k) = 5\cos(2k + 1)$, cioè una **coppia di poli complessi coniugati** $z_{1,2} = e^{\pm j2}$ che corrispondono ad un fattore a denominatore della forma $(z - e^{j2})(z - e^{-j2}) = z^2 - 2\cos(2)z + 1$
3. Il sistema a ciclo chiuso deve essere asintoticamente stabile

Ricerchiamo pertanto, come primo tentativo. un regolatore nella forma

$$C(z) = \frac{k}{z^2 - 2\cos(2)z + 1}$$

Dobbiamo verificare se esiste un intervallo di valori del guadagno k che garantisca la stabilità del sistema a ciclo chiuso



Verifichiamo la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo. Il polinomio caratteristico della FdT a ciclo chiuso è:

$$P_{car}(z) = (z^2 - 2\cos(2)z + 1)(z - 1) + k$$

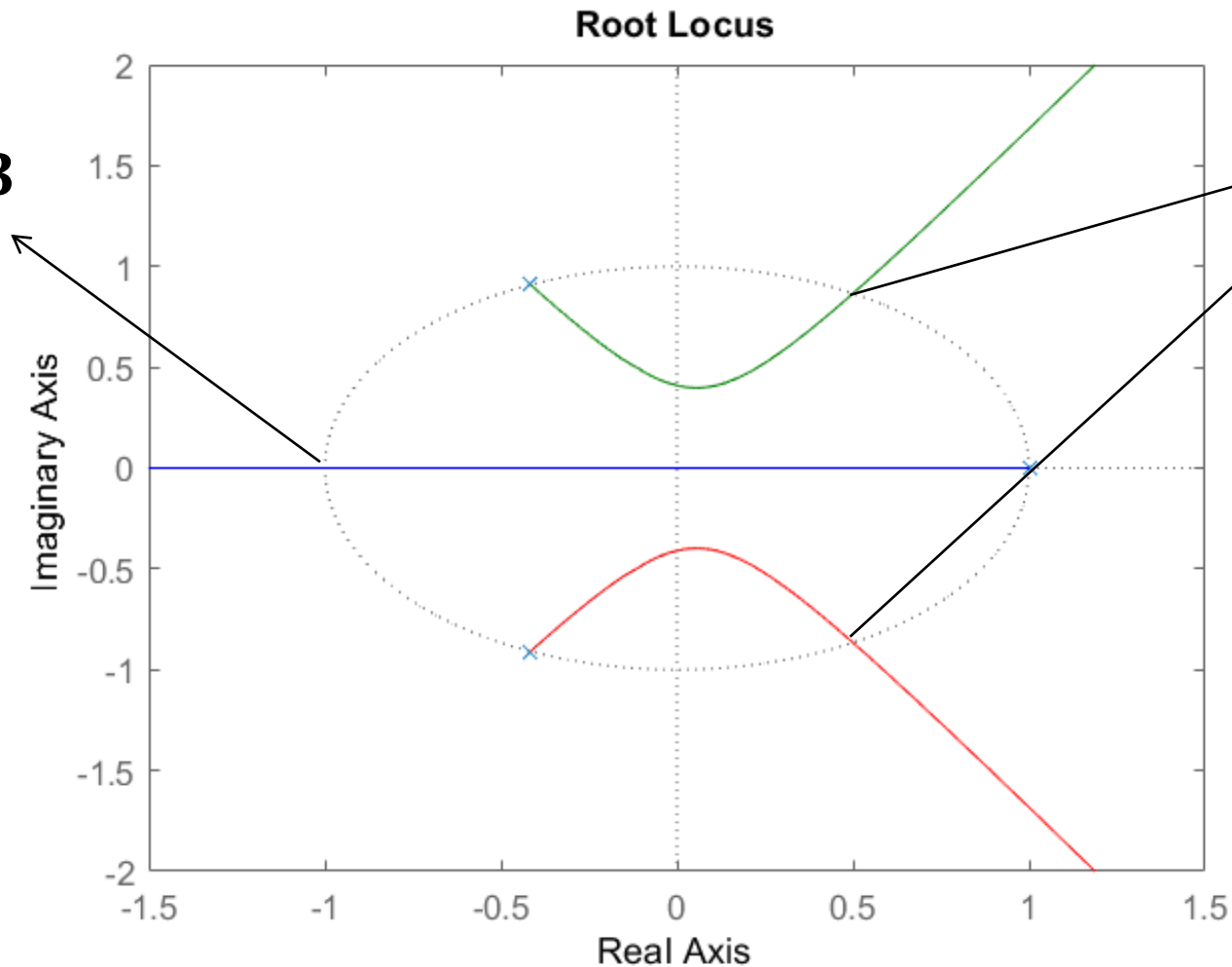
Una possibile strada è applicare il Criterio di Jury al polinomio caratteristico $P_{car}(z)$ per determinare i vincoli sul parametro k che garantiscano che abbia tutte le radici all'interno del disco unitario

Procediamo usando Matlab, in particolare il luogo delle radici

```
P=tf(1,[1 -1],-1);  
C=tf(1,[1 -2*cos(2) 1],-1);  
rlocus(C*P)  
axis([-1.5 1.5 -2 2])
```

$$0 < k < k_{cr} = 1.83$$

$k = 2.33$

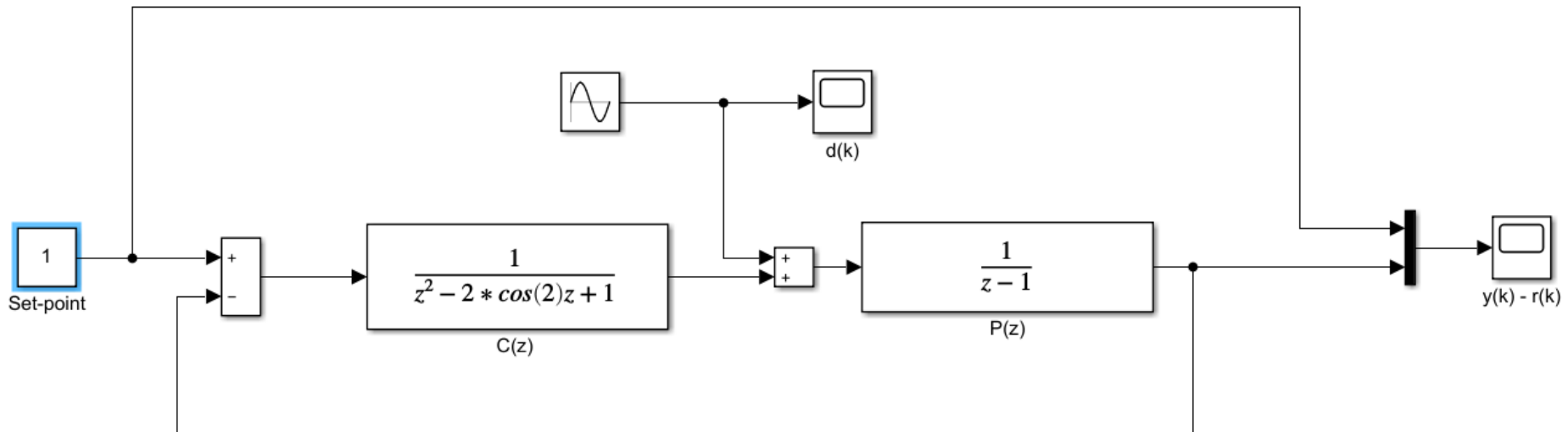


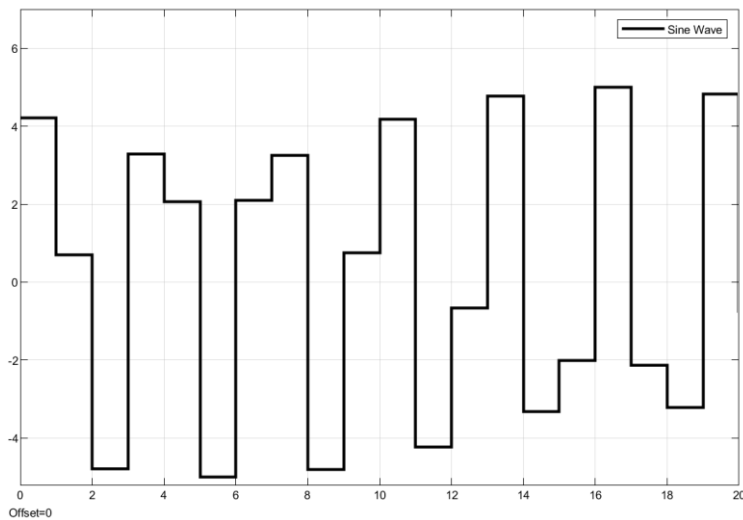
$k = 1.83$

L'analisi mediante il luogo delle radici ci ha rivelato come il presente esercizio sia risolto dal controllore

$$C(z) = k \frac{1}{z^2 - 2\cos(2)z + 1} \quad 0 < k < k_{cr} = 1.83$$

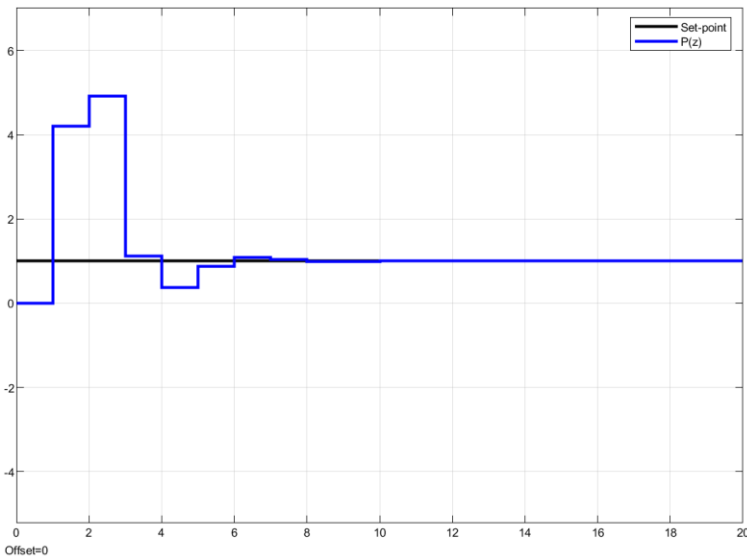
Verifichiamolo mediante simulazione utilizzando per il guadagno k il valore unitario, che rientra nel campo di valori che assicurano la stabilità a ciclo chiuso





$$d(k) = 5\cos(2k + 1)$$

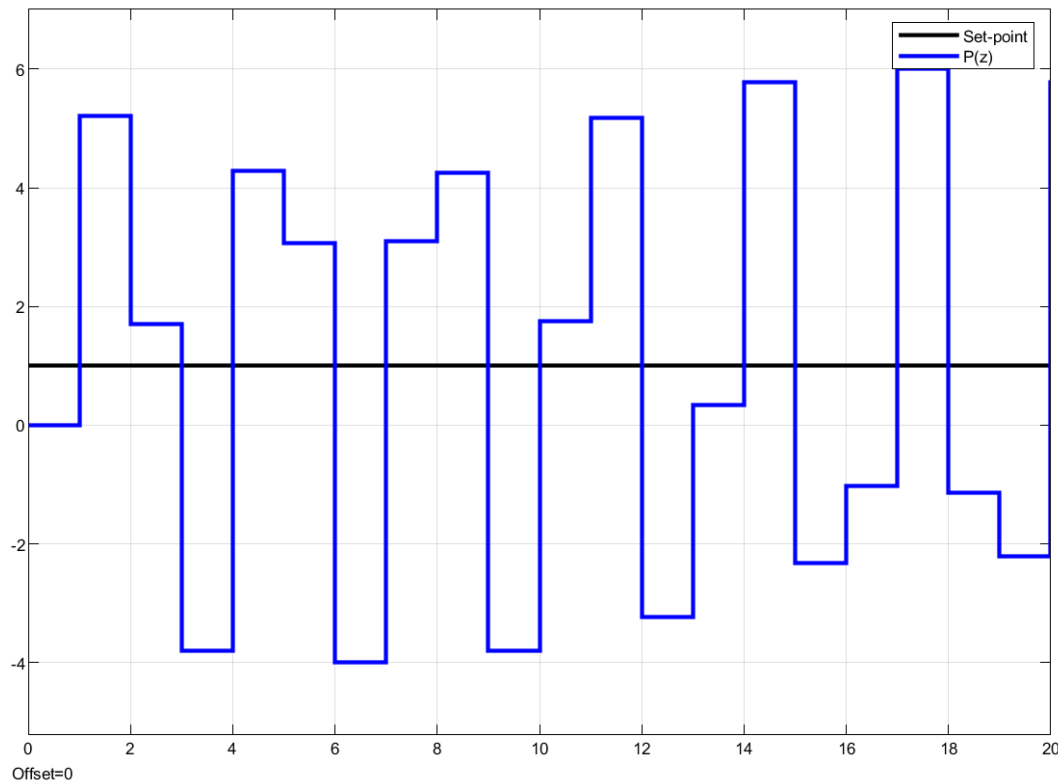
Andamento del segnale disturbante



Sequenza di uscita (curva blu) e set-point (curva nera).

Il regolatore opera la reiezione del disturbo e l'uscita converge come desiderato al valore costante del set-point.

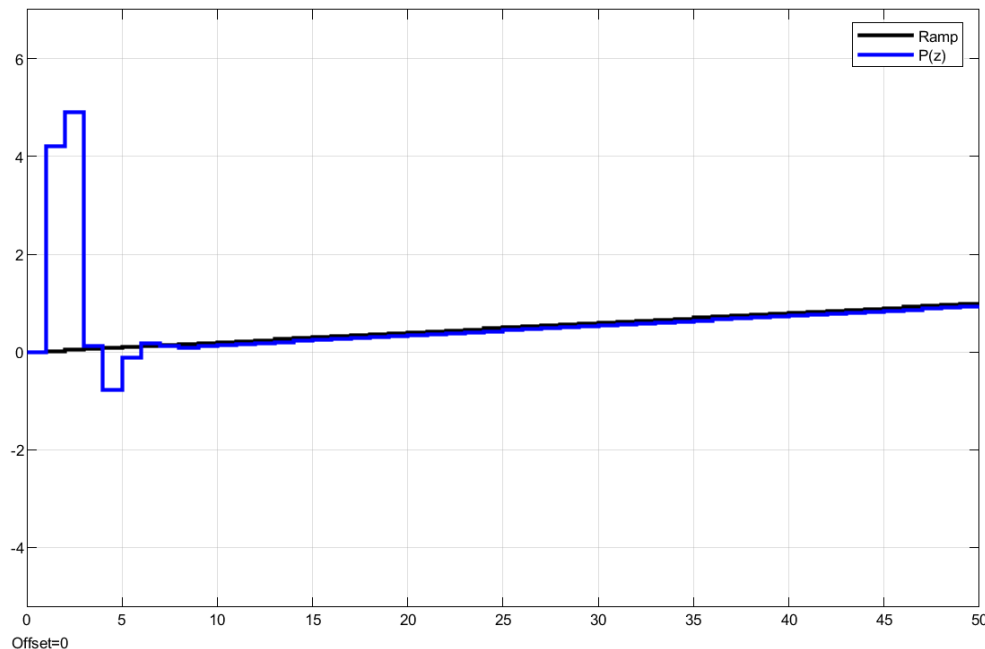
Indaghiamo le prestazioni del sistema di controllo impiegando il regolatore $C(z) = 1$, che non soddisfa i requisiti imposti dal Principio del modello interno. L'uscita mostra oscillazioni dovute all'effetto del disturbo.



Sequenza di uscita (curva blu) e set-point (curva nera). impiegando il regolatore $C(z) = 1$

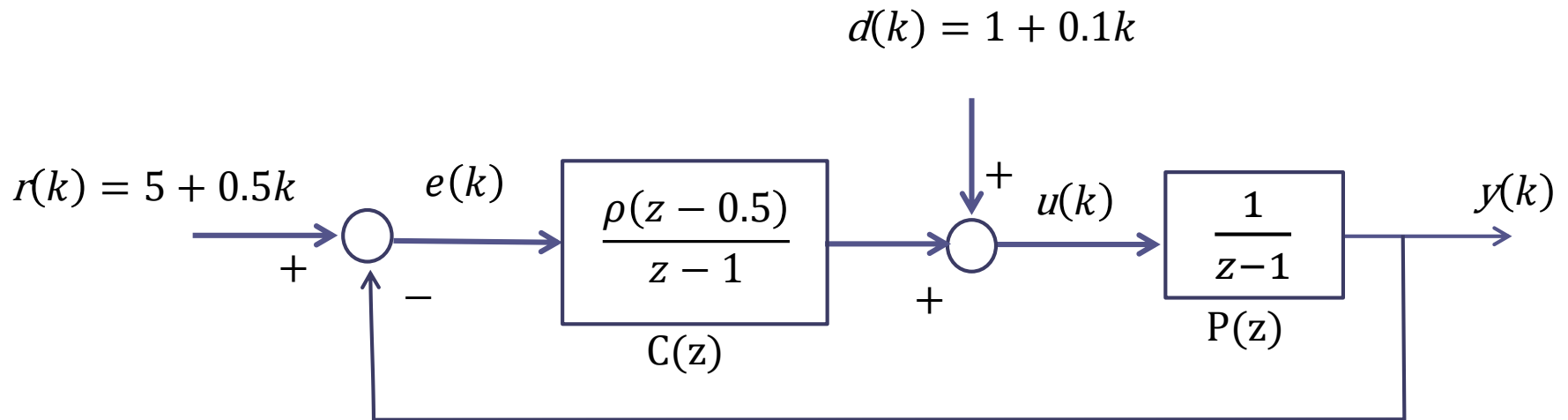
Nota. Se il set-point, o il disturbo, variano in maniera **sufficientemente lenta** le proprietà di precisione statica e reiezione del disturbo continuano a essere qualitativamente soddisfatte.

Per chiarire meglio questo aspetto, una lenta deriva del set-point in un sistema di controllo di tipo uno da luogo ad una corrispondente analoga deriva per l'uscita, con il mantenimento, a regime, della relazione $y(k) \approx r(k)$ anche a fronte di ampie, purché **lente**, escursioni del set-point, con un andamento qualitativo simile a quello seguente ottenuto impiegando lo schema di simulazione di quest'ultimo esercizio.



Esempio

Analizzare l'evoluzione a regime del seguente sistema di controllo al variare del guadagno k del controllore



Sistema di controllo di **tipo 2** con un polo in $z = 1$ nel regolatore ed un polo in $z = 1$ nel processo.

Analizziamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Ricordiamo la seguente espressione compatta del polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso in funzione dei polinomi a numeratore e denominatore del controllore $C(z)$ e del processo $G(z)$

$$P_{car}(z) = N_C(z)N_G(z) + D_C(z)D_G(z)$$

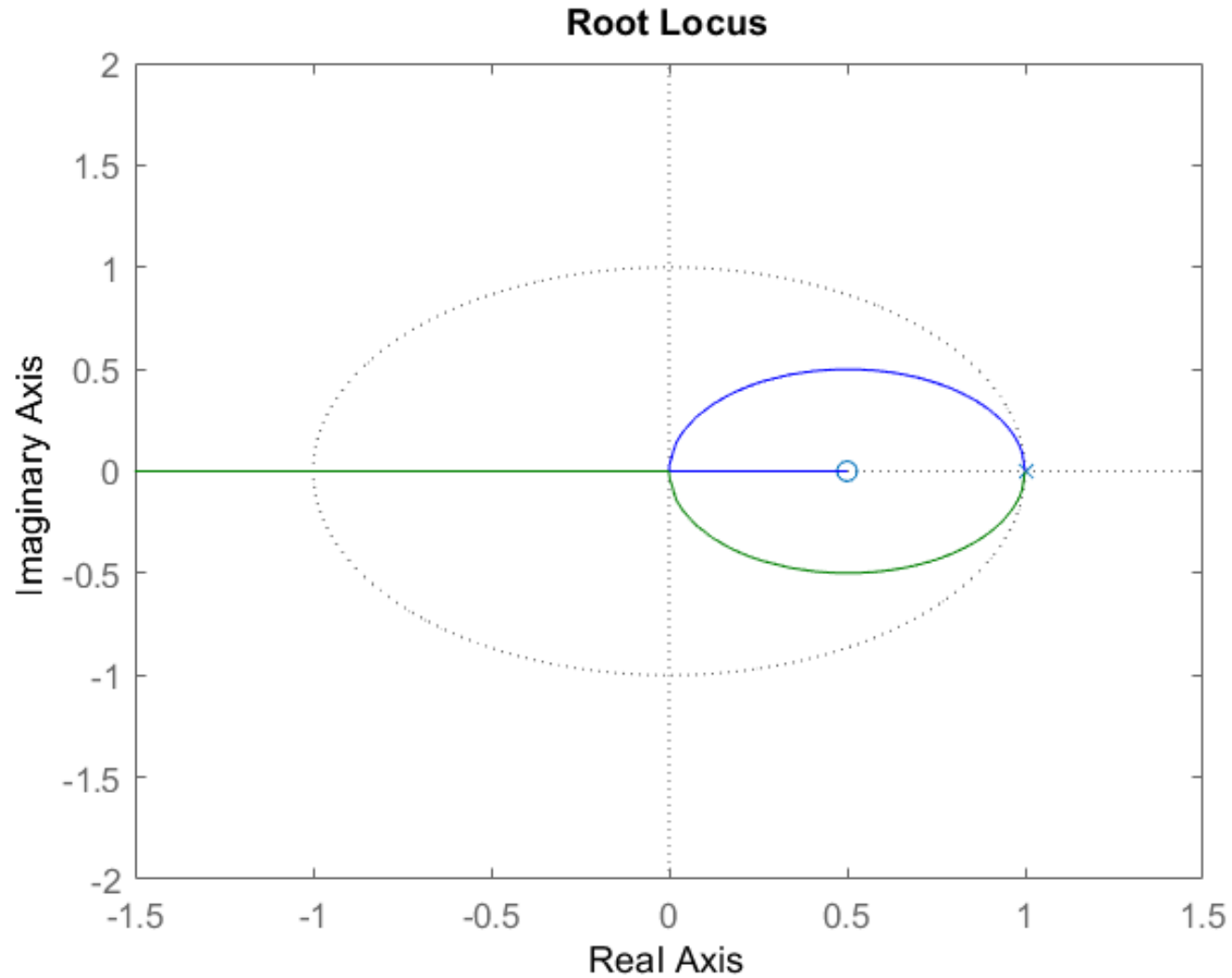
Per il sistema di controllo in esame si ottiene

$$\begin{aligned} P_{car}(z) &= (z - 1)^2 + \rho(z - 0.5) \\ &= z^2 + (\rho - 2)z + 1 - 0.5\rho \end{aligned}$$

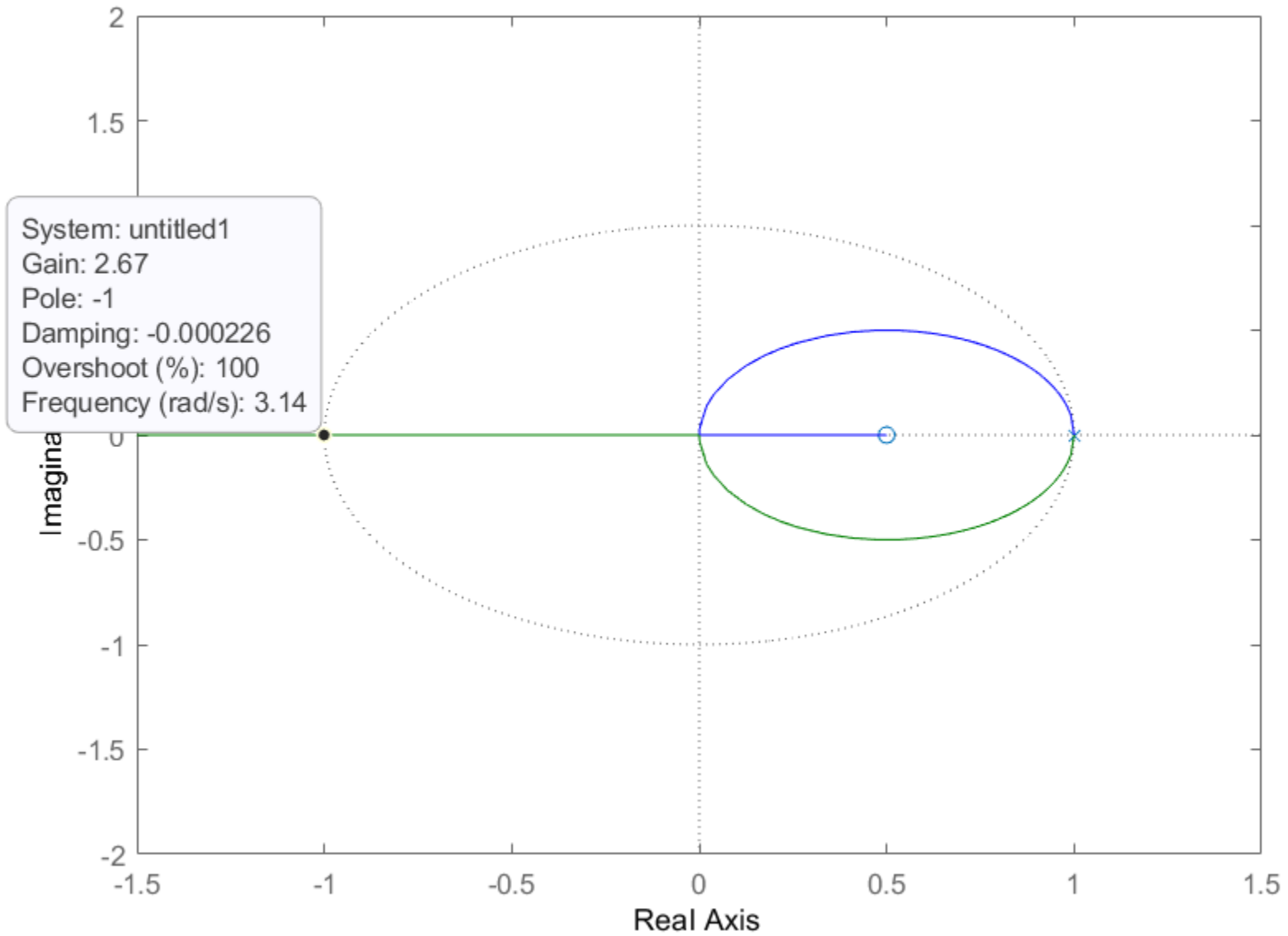
Il polinomio caratteristico risulta essere Jury-stabile nell'intervallo di valori del guadagno

$$0 \leq \rho \leq 2.67$$

```
P=tf(1,[1 -1],-1);  
C=tf([1 -0.5],[1 -1],-1);  
rlocus(C*P)  
axis([-1.5 1.5 -2 2])
```



Root Locus



Il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile per $0 \leq \rho < 2.67$

Analizziamo mediante il principio del modello interno (abbinato al principio di sovrapposizione degli effetti) il comportamento a regime per $0 \leq \rho < 2.67$ conseguente alle diverse componenti del set-point e del disturbo

Componente costante del set point $r(k) = 5$

Poiché nella FdT a ciclo aperto (la cascata fra il controllore ed il processo) è presente un polo in $z = 1$ (in realtà ne sono presenti due) la componente costante del set point viene riprodotta esattamente a regime

$$y(k) \rightarrow 5$$

Componente a rampa del set point $r(k) = 0.5 k$

Poiché nella FdT a ciclo aperto è presente il modello del set-point a rampa (costituito dai due poli in $z = 1$) la componente a rampa del set point viene riprodotta esattamente a regime

$$y(k) \rightarrow 0.5 k$$

Componente costante del disturbo $d(k) = 1$

Poiché **nel regolatore** è presente un polo in $z = 1$, l'effetto sull'uscita della componente costante del disturbo viene completamente azzerato a regime

$$y(k) \rightarrow 0$$

Componente a rampa del disturbo $d(k) = 0.1 k$

Il **regolatore** contiene solo un polo in $z = 1$, e pertanto non contiene il modello del disturbo a rampa. Il relativo comportamento a regime va pertanto analizzato mediante strumenti alternativi. Utilizziamo il teorema del valore finale per verificare se la componente a rampa del disturbo induce un valore di regime costante

FdT disturbo
uscita:

$$W_d^y(z) = \frac{G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1 + \frac{\rho(z-0.5)}{(z-1)^2}} = \frac{z-1}{(z-1)^2 + \rho(z-0.5)}$$

$$= \frac{z-1}{z^2 + (\rho-2)z + 1 - 0.5\rho}$$

Trasformata Z
dell'uscita:

$$Y_d(z) = W_d^y(z)D(z) = \frac{z-1}{z^2 + (\rho-2)z + 1 - 0.5\rho} \cdot \frac{0.1z}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{1}{z^2 + (\rho-2)z + 1 - 0.5\rho} \cdot \frac{0.1z}{z-1}$$

La condizione di applicabilità del teorema del valore finale è soddisfatta

Teorema del
valore finale:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_d(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y_d(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.1z}{z^2 + (\rho-2)z + 1 - 0.5\rho}$$

$$= \frac{0.2}{\rho}$$

Il risultato ottenuto per il valore di regime dell'uscita a fronte del disturbo a rampa può essere inquadrato nell'ambito di una formula più generale

In un sistema di controllo di tipo 2 con un polo in $z=1$ nel regolatore ed un polo in $z=1$ nel processo, il valore di regime dell'uscita in risposta ad un disturbo a rampa $d(k) = \Gamma k$ vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_d(k) = \frac{\Gamma}{\mu_C}$$

Γ = pendenza della rampa

μ_C = guadagno generalizzato del controllore

Nell'esercizio in esame:

guadagno generalizzato del controllore $\mu_C = (z - 1)C(z) \Big|_{z=1} = 0.5\rho$

pendenza della rampa

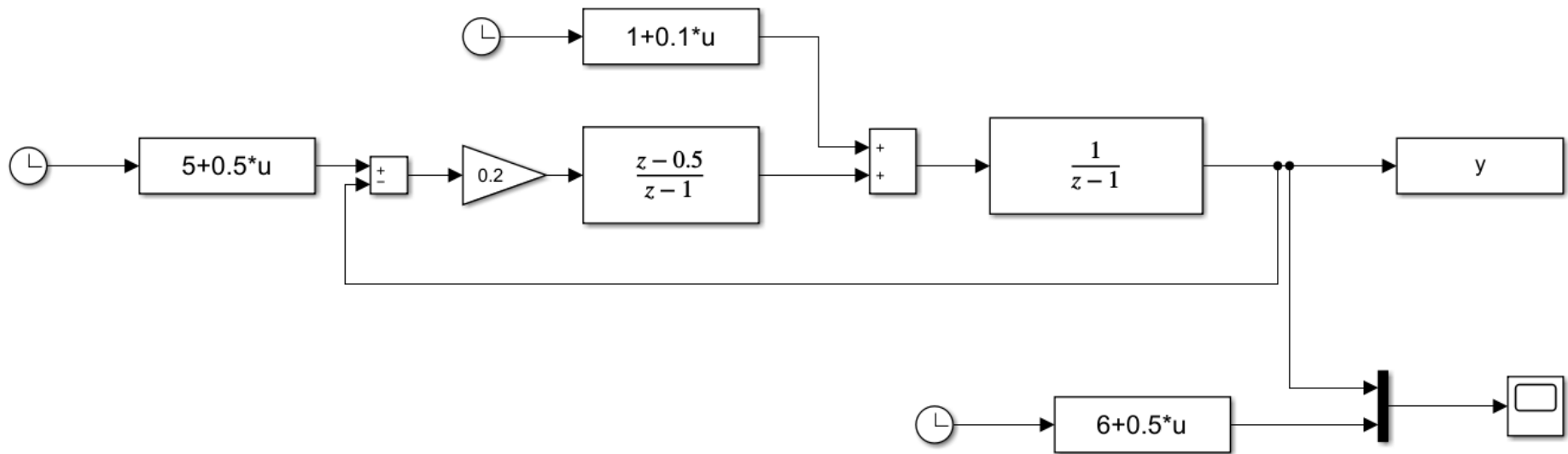
$$\Gamma = 0.1$$

Si riottiene quindi il risultato $\lim_{k \rightarrow \infty} y_d(k) = \frac{0.1}{0.5 \rho} = \frac{0.2}{\rho}$

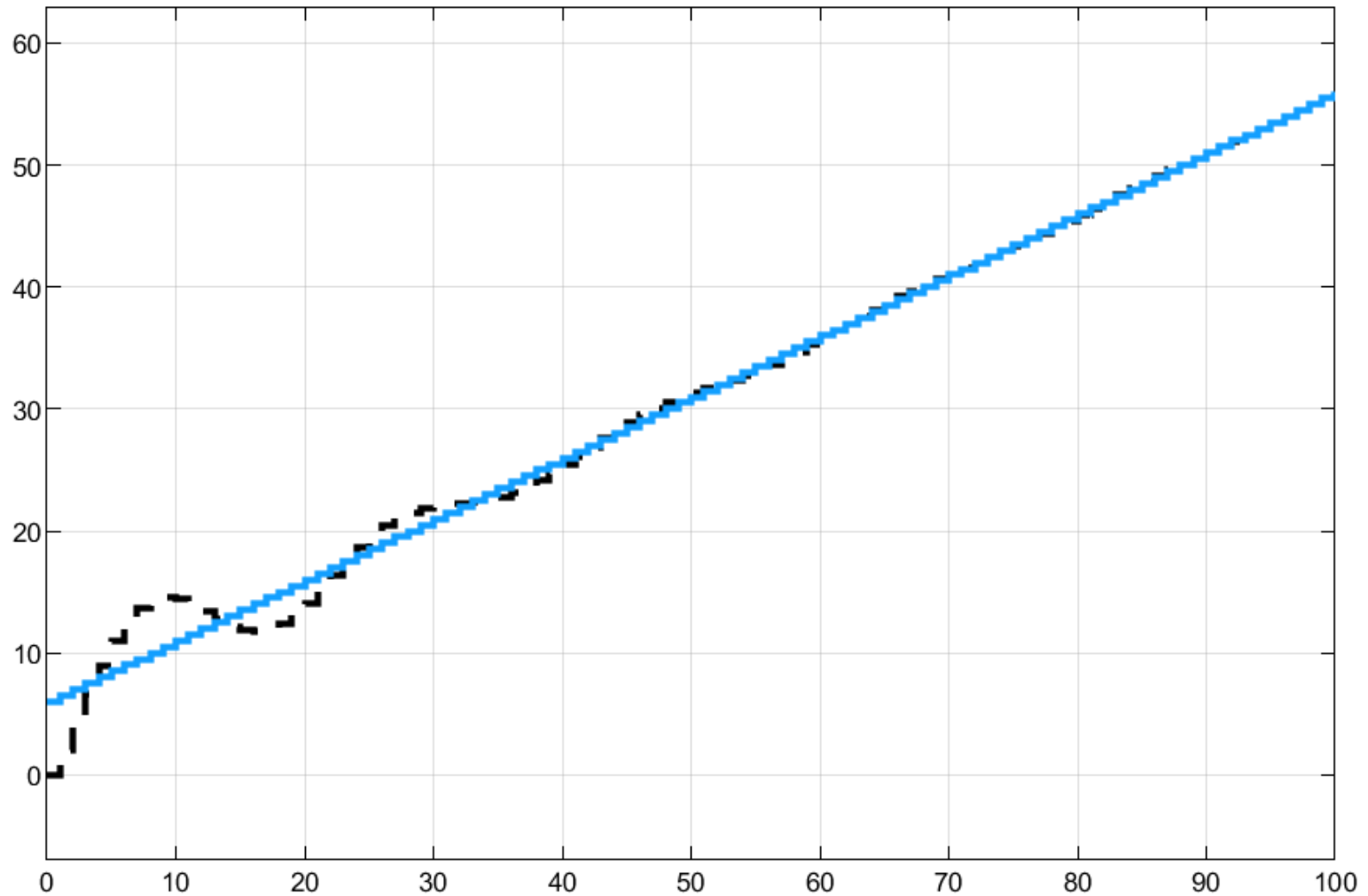
Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, ricaviamo il comportamento complessivo di regime dell'uscita conseguente alla applicazione delle due componenti del set-point e delle due componenti del disturbo

$$y(k) \rightarrow 5 + \frac{0.2}{\rho} + 0.5k$$

Verifichiamo mediante simulazione

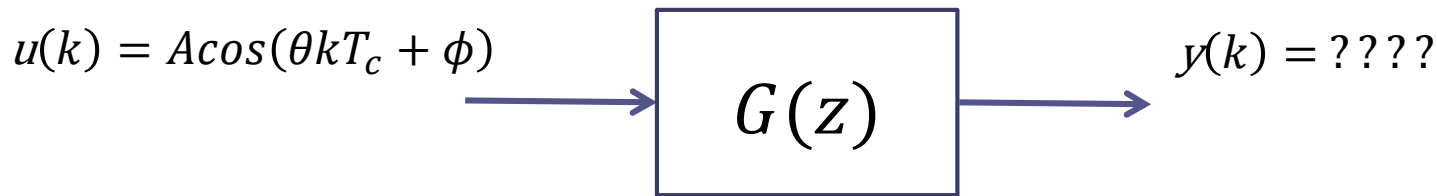


La curva nera tratteggiata è l'uscita del processo, la curva continua blu è il profilo di regime che abbiamo calcolato mediante analisi teoriche



Risposta armonica

L'**analisi armonica** di un sistema dinamico asintoticamente stabile consiste nello studio della risposta **a transitorio esaurito** quando in ingresso al sistema viene applicata una sequenza sinusoidale



La soluzione di tale problema si basa sulla **funzione di risposta armonica**

La funzione di risposta armonica è una funzione a valori complessi che si calcola a partire dalla $G(z)$ operando la **sostituzione $z = e^{j\theta T_c}$**

$$G(e^{j\theta T_c}) = G(z) \Big|_{z=e^{j\theta T_c}}$$

La definizione di funzione di risposta armonica si fonda su una proprietà caratteristica dei sistema lineari stazionari asintoticamente stabili

Tale proprietà sancisce che se si applica in ingresso ad un sistema lineare stazionario e asintoticamente stabile un segnale $u(k) = A \cos(\theta k T_c + \phi)$, come mostrato nella slide precedente, una volta **esaurito il transitorio** l'uscita varia anche essa con legge cosinusoidale, con la **medesima pulsazione del segnale di ingresso** ma con **diverse ampiezza e fase**

$$y(k) = Y(\theta) \cos(\theta k T_c + \phi + \varphi(\theta))$$

L'ampiezza della sequenza sinusoidale in uscita, e lo sfasamento addizionale rispetto alla sequenza sinusoidale in ingresso, risultano dipendere dalla pulsazione θ della sequenza di ingresso. La funzione di risposta armonica del sistema a tempo discreto caratterizza esattamente queste relazioni, ed è definita infatti come segue

$$G(e^{j\theta T_c}) = |G(e^{j\theta T_c})| e^{j\angle G(e^{j\theta T_c})}$$

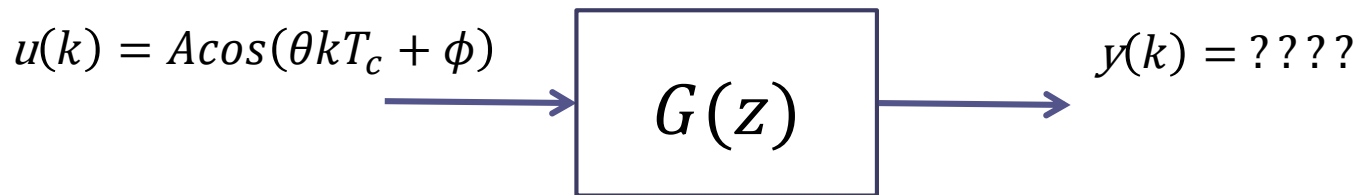
$$|G(e^{j\theta T_c})| = \frac{Y(\theta)}{A}$$

$$\angle G(e^{j\theta T_c}) = \varphi(\theta)$$

Si dimostra con dei passaggi matematici che omettiamo come la funzione di risposta armonica si determini a partire dalla $G(z)$ operando la **sostituzione** $z = e^{j\theta T_c}$ introdotta in precedenza

$$G(e^{j\theta T_c}) = G(z) \Big|_{z=e^{j\theta T_c}}$$

Quindi, tornando al problema originario,



Si avrà, **a regime**:

$$y(k) = A |G(e^{j\theta T_c})| \cos(\theta k T_c + \phi + \angle G(e^{j\theta T_c}))$$

La proprietà è ovviamente generalizzabile a somme di sinusoidi in ingresso con diversa frequenza applicando il principio di sovrapposizione degli effetti

La funzione di risposta armonica di un sistema a tempo discreto è una funzione **trascendente**

$$G(z) \Big|_{z=e^{j\theta}} = G(e^{j\theta T_c})$$

Esempio:

$$G(z) = \frac{1}{z - 0.8} \quad \rightarrow \quad G(e^{j\theta T_c}) = \frac{1}{e^{j\theta T_c} - 0.8}$$

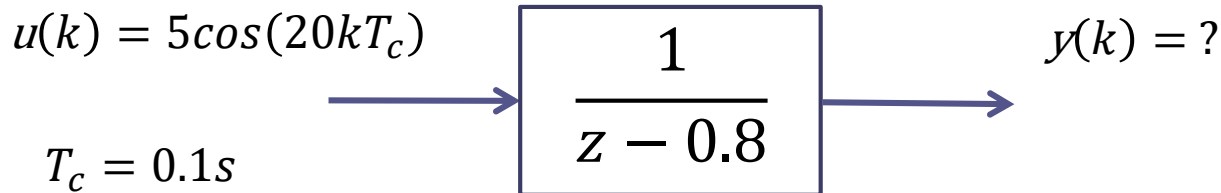
La costruzione dei relativi **diagrammi di Bode**, che graficano la dipendenza del modulo e della fase di $G(e^{j\theta T_c})$ dalla pulsazione θ risulta essere particolarmente laboriosa.

In particolare, i metodi «asintotici» sviluppati per il tracciamento dei diagrammi di Bode delle funzioni di risposta armonica per sistemi a tempo continuo **non sono più applicabili**.

Diventa quindi fondamentale l'impiego di un software di calcolo.

Matlab fornisce la funzione **dbode** per la visualizzazione di tali diagrammi.

Esempio



Il processo $G(z) = \frac{1}{z-0.8}$ è asintoticamente stabile, quindi possiamo applicare i risultati visti

$$\begin{aligned}
 u(k) &= 5\cos(20kT_c) \\
 u(k) &= A\cos(\theta T_c k + \phi)
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 A &= 5 & \theta T_c &= 2 & \phi &= 0
 \end{aligned}$$

$$y(k) = A |G(e^{j\theta T_c})| \cos(\theta k T_c + \phi + \angle G(e^{j\theta T_c})) = 5 |G(e^{j2})| \cos(2k + \angle G(e^{j2}))$$

Leggiamo i valori di modulo e fase $|G(e^{j2T_c})|$ e $\angle G(e^{j2T_c})$ dai diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica a tempo discreto.

Si presti attenzione al fatto che i diagrammi di Bode dei moduli riportano in ordinata il valore di $|G(e^{j\theta T_c})|$ **espresso in dB**

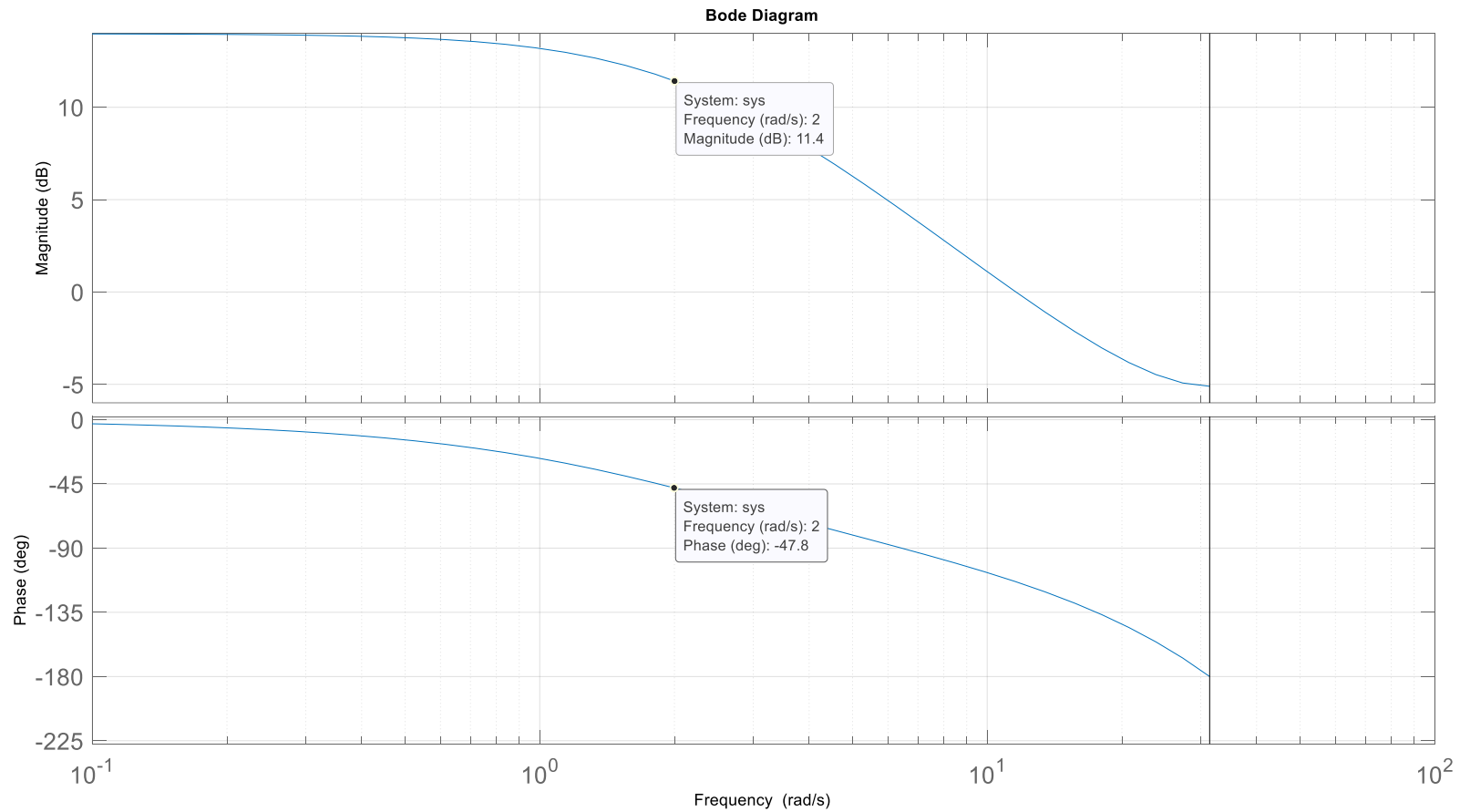
$$|G(e^{j\theta T_c})|_{dB} = 20 \log_{10} |G(e^{j\theta T_c})|$$

$$|G(e^{j\theta T_c})| = 10^{\frac{|G(e^{j\theta T_c})|_{dB}}{20}}$$

$ G(e^{j\theta T_c}) _{dB}$	$ G(e^{j\theta T_c}) $
40	100
20	10
0	1
-20	0.1
-40	0.01

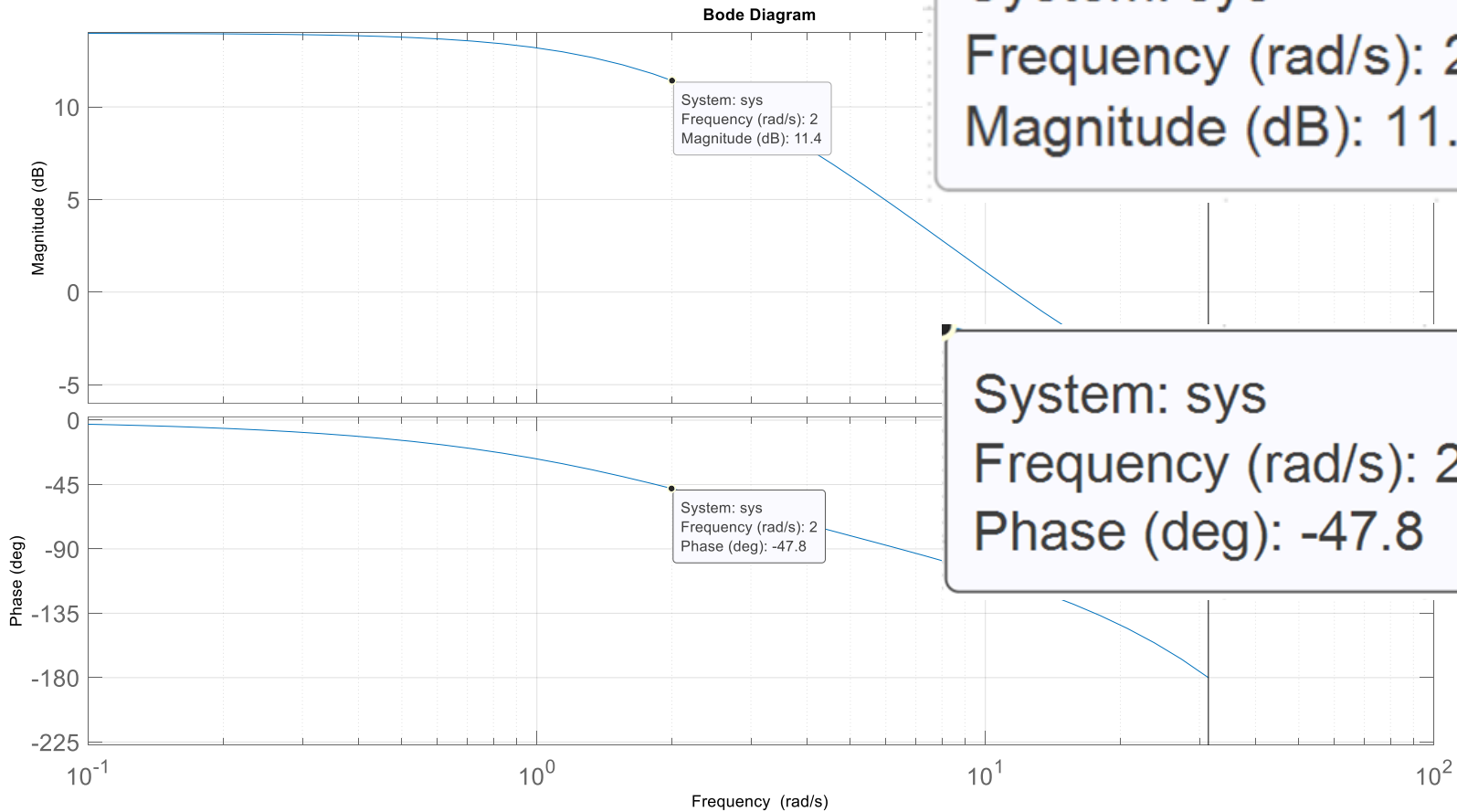
Dovremo anche operare la conversione della fase da gradi in radianti.

```
dbode(1, [1 -0.8], 0.1), grid
```



Il diagramma viene tracciato fino alla pulsazione $\omega_c/2 = \pi/T_c$


```
dbode(1, [1 -0.8], 0.1), grid
```



System: sys

Frequency (rad/s): 2

Magnitude (dB): 11.4

System: sys

Frequency (rad/s): 2

Phase (deg): -47.8

Convertiamo il valore dei moduli da dB a valore naturale

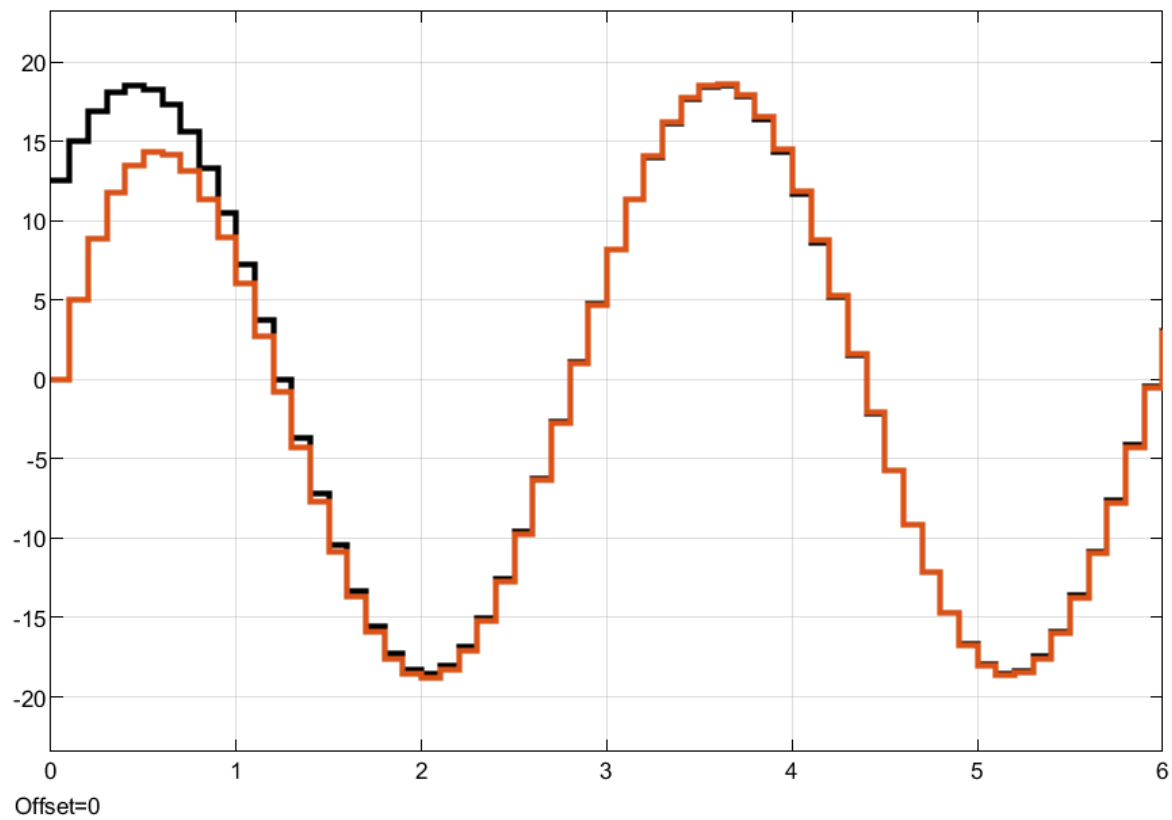
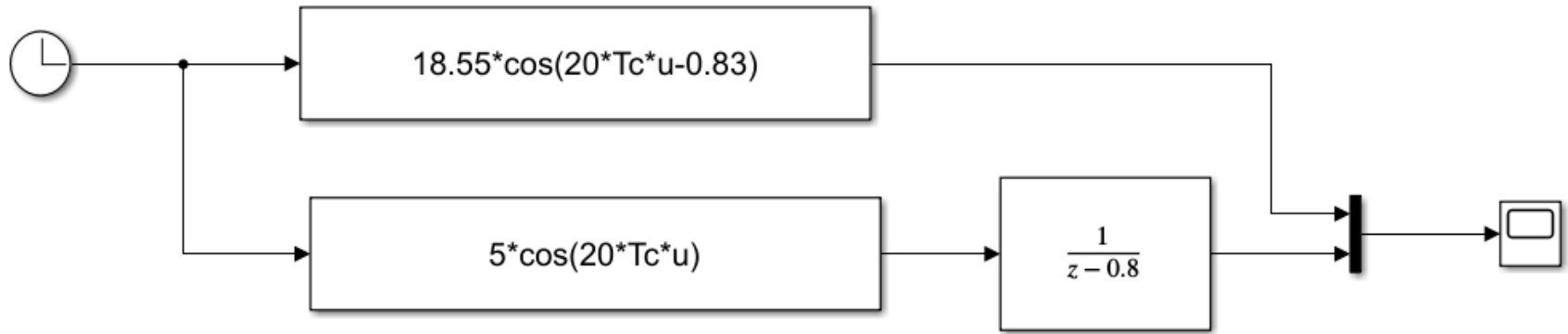
$$|G(e^{j2})|_{dB} = 11.4 \quad |G(e^{j2})| = 10^{\frac{|G(e^{j2})|_{dB}}{20}} = 10^{\frac{11.4}{20}} = 3.71$$

Convertiamo il valore della fase da gradi in radianti

$$\angle G(e^{j2})|_{rad} = \frac{2\pi}{360} \angle G(e^{j2})|_{deg} = -\frac{2\pi}{360} 47.8 = -0.83 \text{ rad}$$

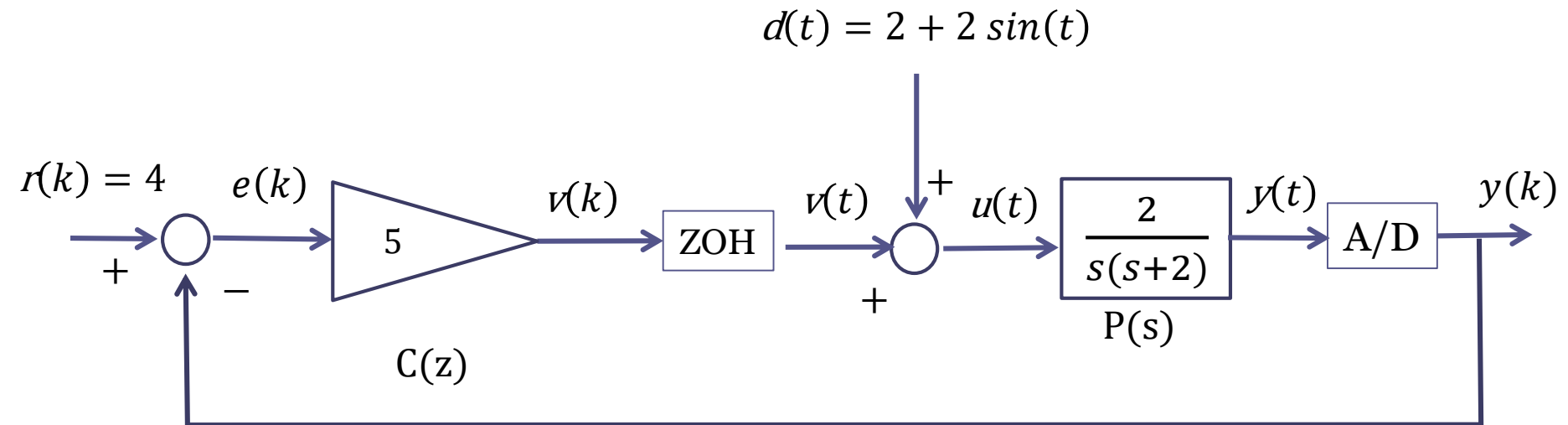
La sinusoide in ingressi verrà quindi **A REGIME amplificata di un fattore 3.71**, e **ritardata di 0.83 radianti**

$$\begin{aligned} y(k) &= A |G(e^{j\theta T_c})| \cos(\theta k T_c + \phi + \angle G(e^{j\theta T_c})) & A &= 5 & \theta T_c &= 2 \\ &= 5 \cdot 3.71 \cos(0.2k - 0.83) = 18.55 \cos(2k - 0.83) \end{aligned}$$



Esempio

Analizzare l'evoluzione a regime del seguente sistema di controllo



sotto l'ipotesi in cui i convertitori A/D, D/A ed il controllore operino con un periodo di campionamento pari a $T_c = 0.05$ s

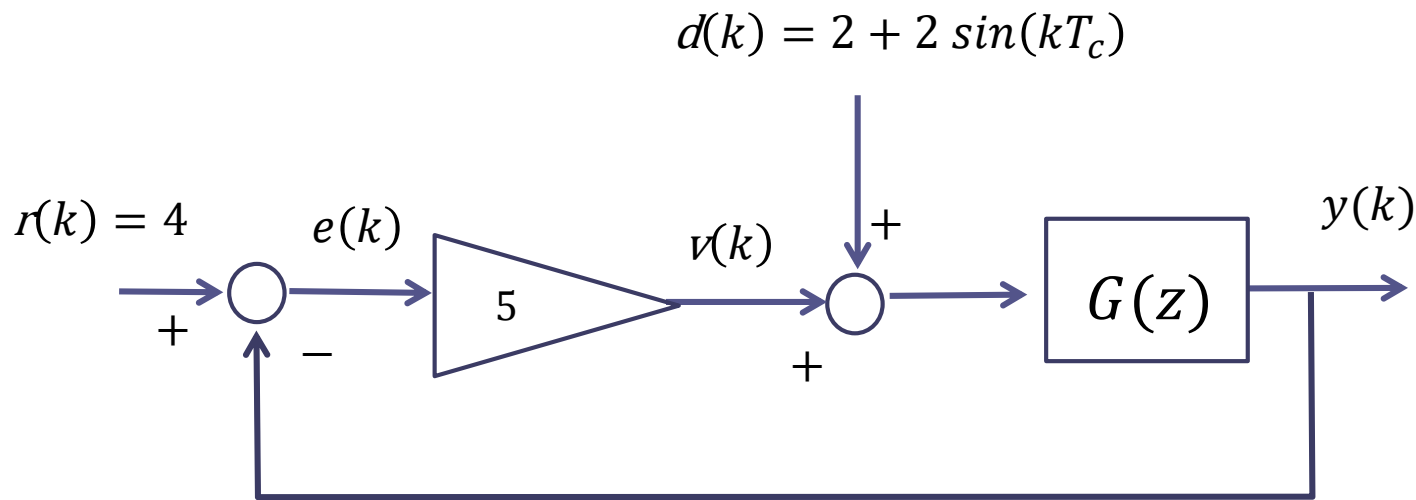
Come primo passo, costruiamo un modello equivalente del sistema di controllo mediante funzioni di trasferimento discrete.

Ricordiamo come grazie alla presenza del ricostruttore ZOH a monte del sistema, è possibile definire senza alcun problema una funzione di trasferimento discreta che mette in relazione la sequenza $v(k)$ in uscita dal controllore con la sequenza $y(k)$ ottenuta campionando l'uscita del processo. Ciò è reso possibile dal fatto che il segnale $v(t)$ è un segnale costante a tratti.

La presenza del disturbo $d(t)$, che non è un segnale costante a tratti, rende impossibile determinare una rappresentazione a tempo discreto in grado di descrivere esattamente il comportamento dell'uscita negli istanti di campionamento.

Possiamo però ricavare un sistema discretizzato «approssimato», che sarà tanto più accurato quanto più è lenta la variazione del disturbo fra due istanti di campionamento successivi

Sistema discretizzato **approssimato**



$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{P(s)}{s} \right) \right]_{t=kT_c} \right\}$$

$$= \frac{0.002419z + 0.002339}{z^2 - 1.9048z + 0.9048} = \frac{0.002419(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048)}$$

$P = \text{tf}(2, [1 \ 2 \ 0]);$
 $T_c = 0.05;$
 $G = \text{c2d}(P, T_c)$

Sistema di controllo di **tipo 1** con il polo in $z=1$ situato nel processo $G(z)$

Analizziamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Per il sistema di controllo in esame si ottiene

$$P_{car}(z) = z^2 - 1.9048z + 0.9048 + 5 \cdot (0.002419z + 0.002339)$$

$$= z^2 - 1.893z + 0.9165 \quad a_2 = 1 \quad a_1 = -1.893 \quad a_0 = 0.9165$$

1. $|a_0| < a_2$ $|0.9165| < 1$ *OK*
2. $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 > 0$ $1 - 1.893 + 0.9165 = 0.023 > 0$ *OK*
3. $P(-1) = a_2 - a_1 + a_0 > 0$ $1 + 1.893 + 0.9165 = 3.809 > 0$ *OK*

Il polinomio caratteristico risulta essere Jury-stabile. I poli a ciclo chiuso sono

$$p_{1,2} = 0.9464 \pm 0.144j \quad |p_{1,2}| = 0.957 < 1$$

Analizziamo mediante il **Principio del Modello Interno** (abbinato al principio di sovrapposizione degli effetti) il comportamento a regime conseguente alle diverse componenti del set-point e del disturbo

Componente costante del set point $r(k) = 4$

Poiché nella FdT a ciclo aperto è presente un polo in $z = 1$, sulla base del primo enunciato del PMI la componente costante del set point viene riprodotta esattamente a regime

$$PMI \rightarrow y(k) \rightarrow 4$$

Componente costante del disturbo $d(k) = 2$

Poiché il regolatore non contiene il modello di un segnale costante, il PMI non ci è di aiuto in questa analisi.

La formula ricavata in sede di analisi per il valore di regime della risposta ad un **disturbo costante** $d(k) = D^*$ di sistemi di tipo 1 con polo in $z=1$ contenuto nel processo è

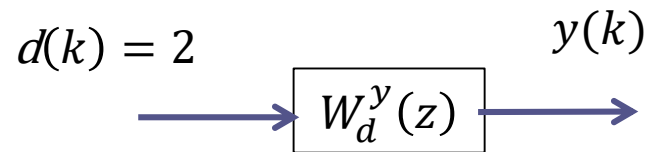
$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \frac{D^*}{\mu_C} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$D^* = 2$	Ampiezza del disturbo
$\mu_C = 5$	Guadagno del controllore

Ricaviamo il medesimo risultato senza impiegare la formula.

La Funzione di trasferimento fra il disturbo e l'uscita è

$$W_d^y(z) = \frac{0.002419(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048)} = \frac{0.002419(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048) + 5 \cdot 0.002419(z + 0.9672)}$$



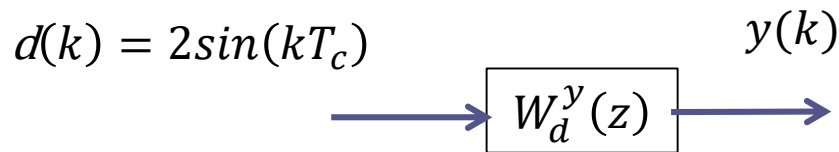
La FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita è $W_d^y(z)$ è asintoticamente stabile a ciclo chiuso. Il valore di regime dell'uscita è pertanto pari al prodotto fra l'ampiezza del disturbo ed il guadagno $W_d^y(1)$ della FdT disturbo-uscita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 2 \cdot W_d^y(1) = 2 \cdot \frac{1}{5} = 0.4$$

Componente sinusoidale del disturbo $d(k) = 2\sin(kT_c)$

Poiché il regolatore non contiene il modello di un segnale sinusoidale con pulsazione $\theta = 30$ e passo di campionamento $T_c = 0.05$ s, il PMI non ci è di aiuto in questa analisi.

Dobbiamo invece applicare il concetto di risposta armonica, sfruttando la rappresentazione equivalente



In base a quanto visto in precedenza, l'evoluzione **di regime** della sequenza di uscita sarà

$$\begin{aligned}
 y(k) &= 2|G(e^{jT_c})| \cos(kT_c + \angle G(e^{jT_c})) \\
 &= 2|G(e^{j0.05})| \cos(k0.05 + \angle G(e^{j0.05}))
 \end{aligned}$$

```

Wdy = @(z) 0.002419*(z+0.9672)/((z-1)*(z-0.9048)+5*0.002419*(z+0.9672))
MOD=abs(Wdy(exp(j*Tc)))
PHASE=angle(Wdy(exp(j*Tc)))

```

Mediante il precedente script, calcoliamo direttamente i valori di modulo e fase della funzione di risposta armonica discreta

MOD =
0.2182

PHASE =
-0.2172



$$|G(e^{j0.05})| = 0.2182$$

$$\angle G(e^{j0.05}) = -0.2172 \text{ rad}$$



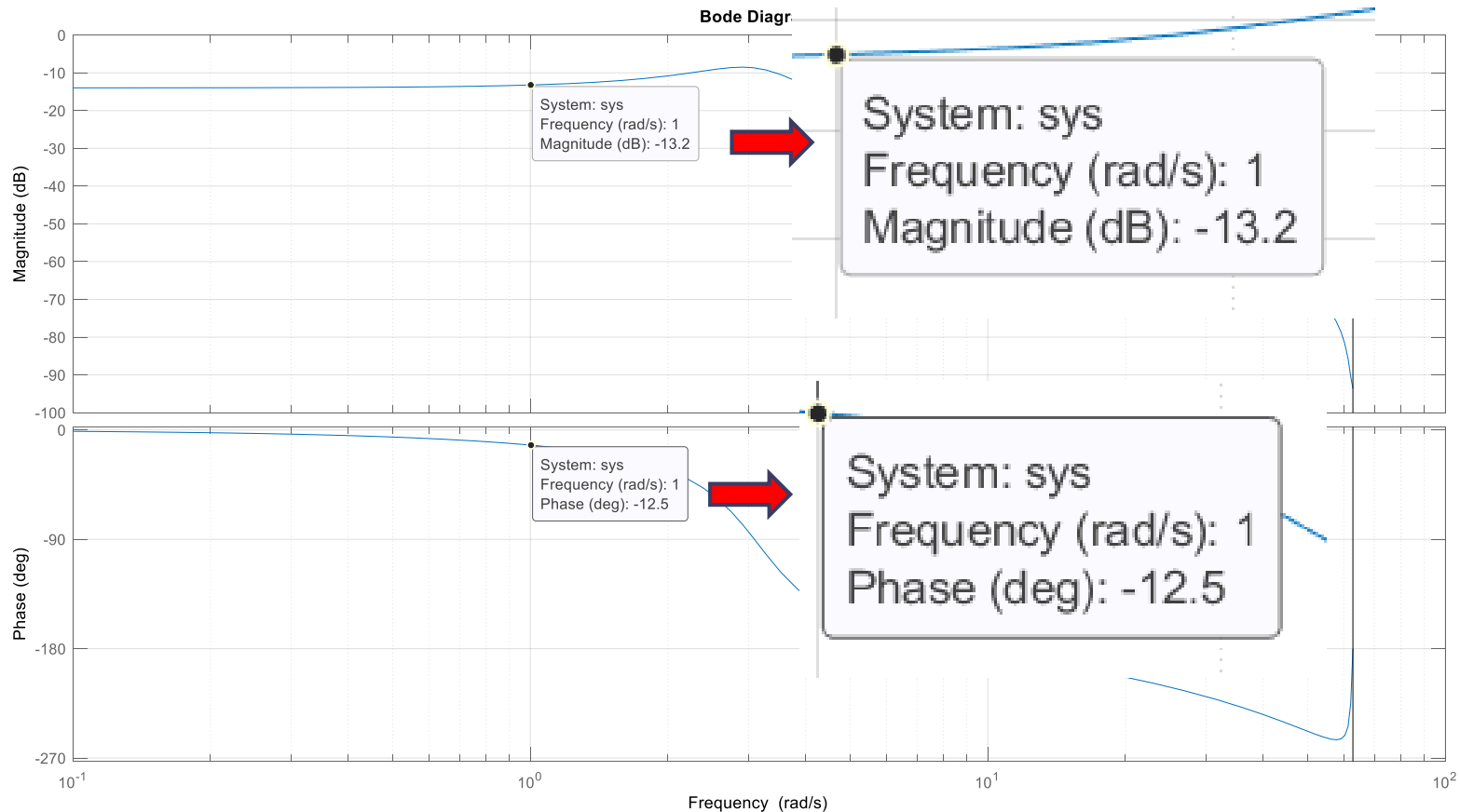
$$y(k) = 0.4364 \cos(k0.05 - 0.2172)$$

```
z=tf('z',Tc)
```

```
Wdysym = 0.002419*(z+0.9672)/((z-1)*(z-0.9048)+5*0.002419*(z+0.9672))
```

```
[numWdys denWdys]=tfdata(Wdysym,'v')
```

```
dbode(numWdys,denWdys,Tc)
```



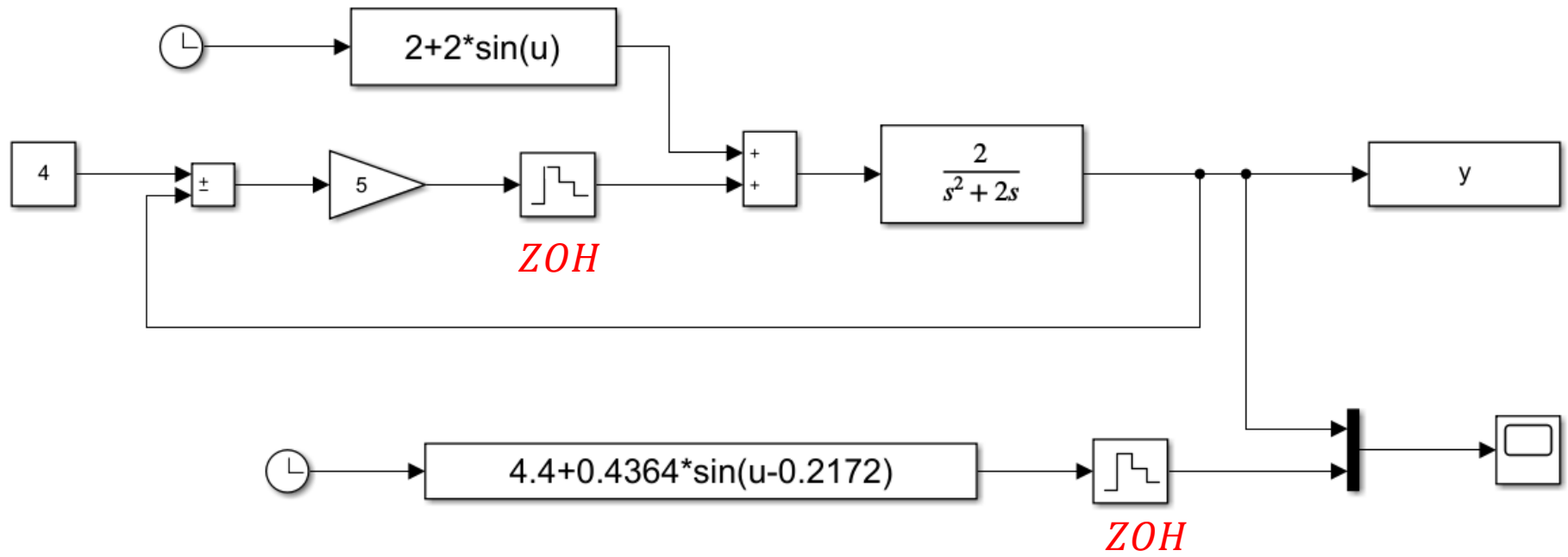
$$10^{-\frac{13.2}{20}} = 0.218$$

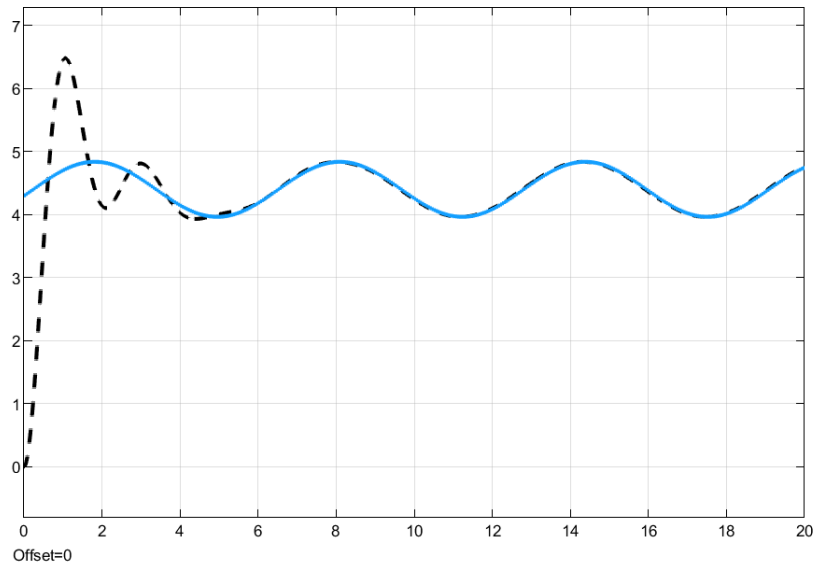
$$\frac{12.5 \cdot 2\pi}{360} = 0.217 \text{ rad}$$

Sommando fra loro i tre contributi alla evoluzione dell'uscita, otteniamo l'espressione complessiva della evoluzione **di regime** della sequenza di uscita

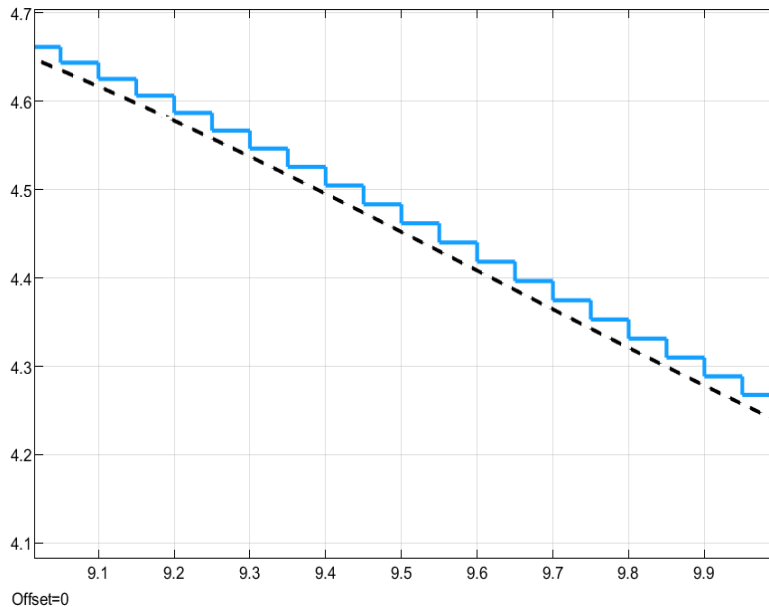
$$y(k) = 4.4 + 0.4364\cos(k0.05 - 0.2172)$$

Verifichiamo mediante Simulink i risultati ottenuti

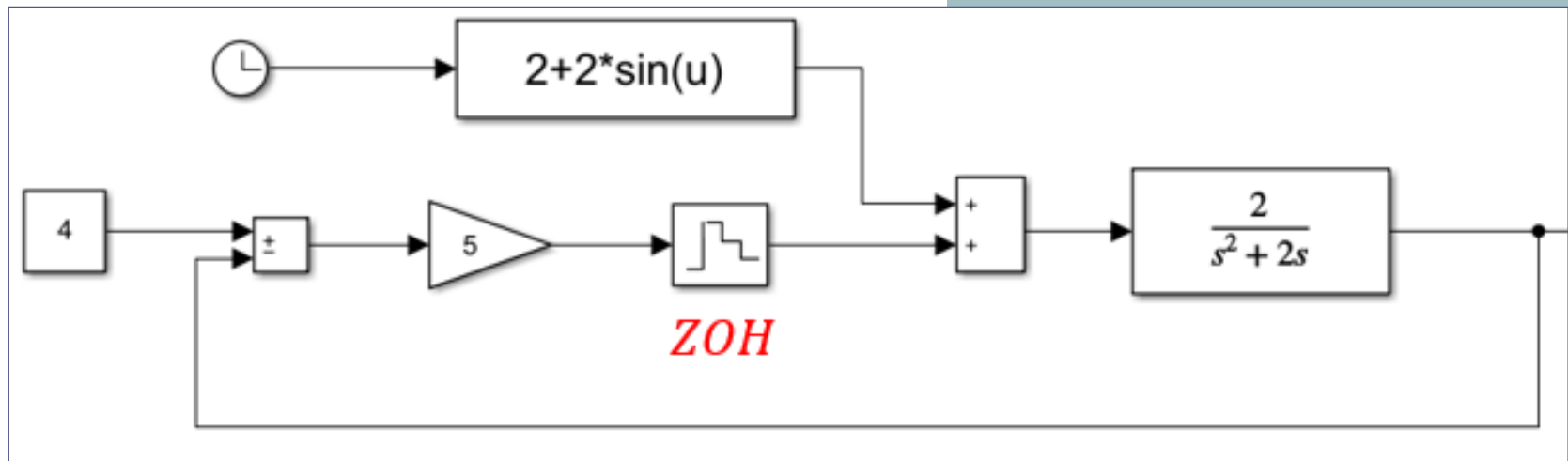




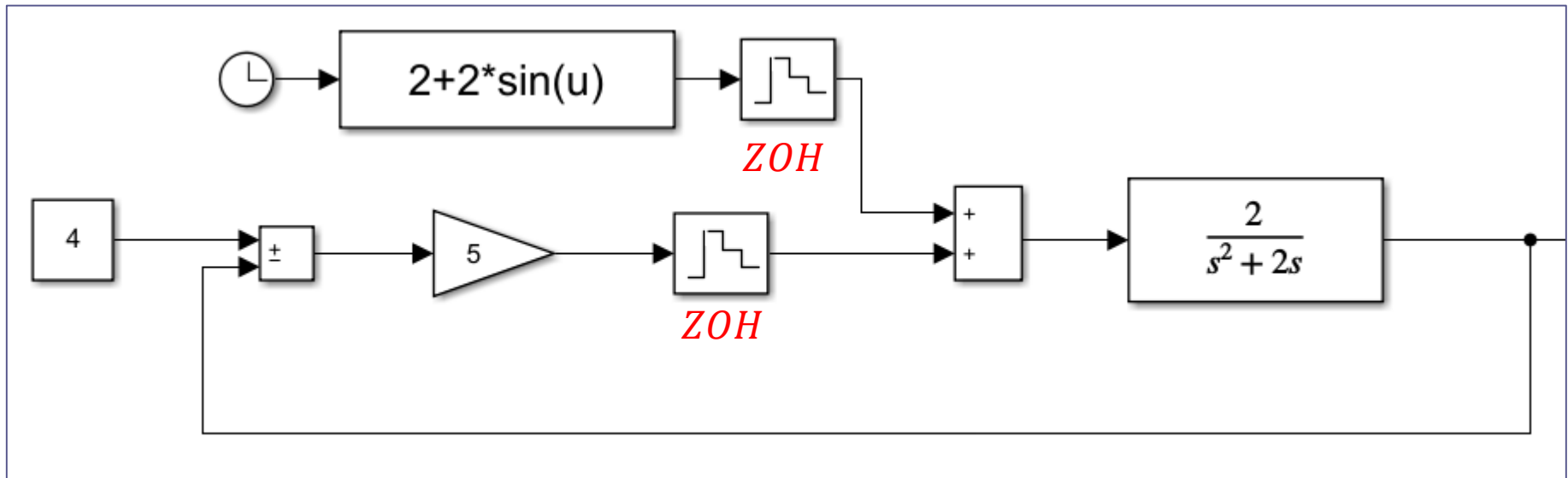
Confronto fra l'uscita del processo determinata mediante Simulink (curva tratteggiata) e la curva calcolata mediante analisi teoriche (curva continua).,



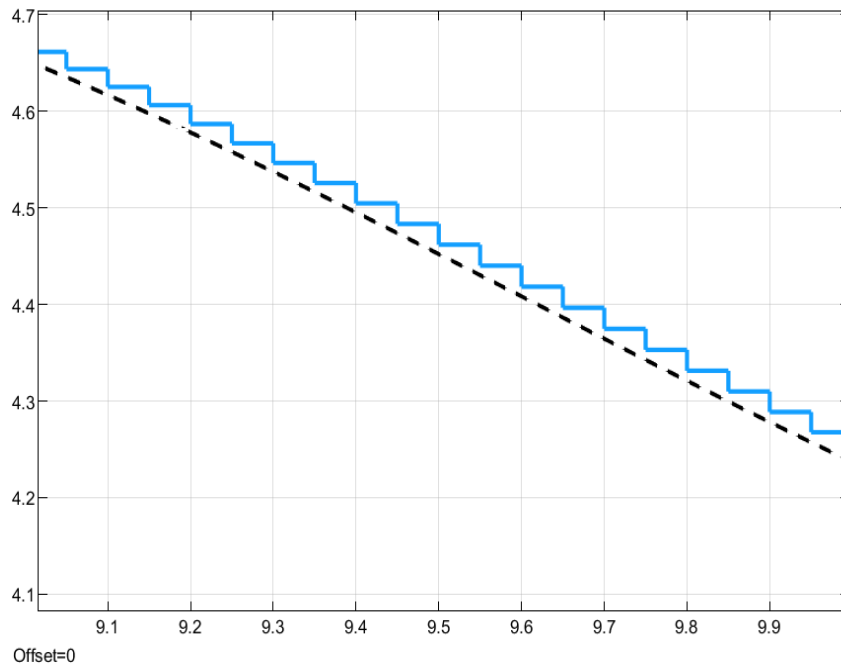
Zoom sull'intervallo temporale fra gli istanti 9 e 10



Osserviamo una lieve discrepanza fra i risultati simulativi e le previsioni teoriche, dovuta al fatto che **il segnale disturbante non è costante a tratti**. Rendiamolo tale inserendo un ulteriore blocco ZOH,



Risultati con disturbo che varia fra istanti di campionamento adiacenti (schema in alto nella slide precedente)



Risultati con disturbo costante a tratti (schema in basso nella slide precedente)

