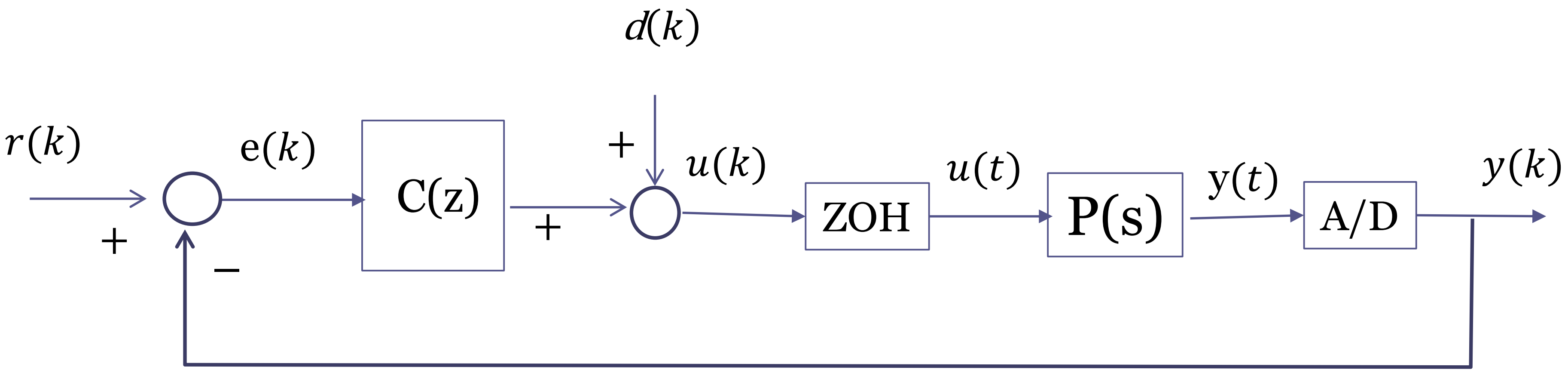
Controllo digitale

Comportamento a regime dei sistemi di controllo a tempo discreto – Parte 1

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

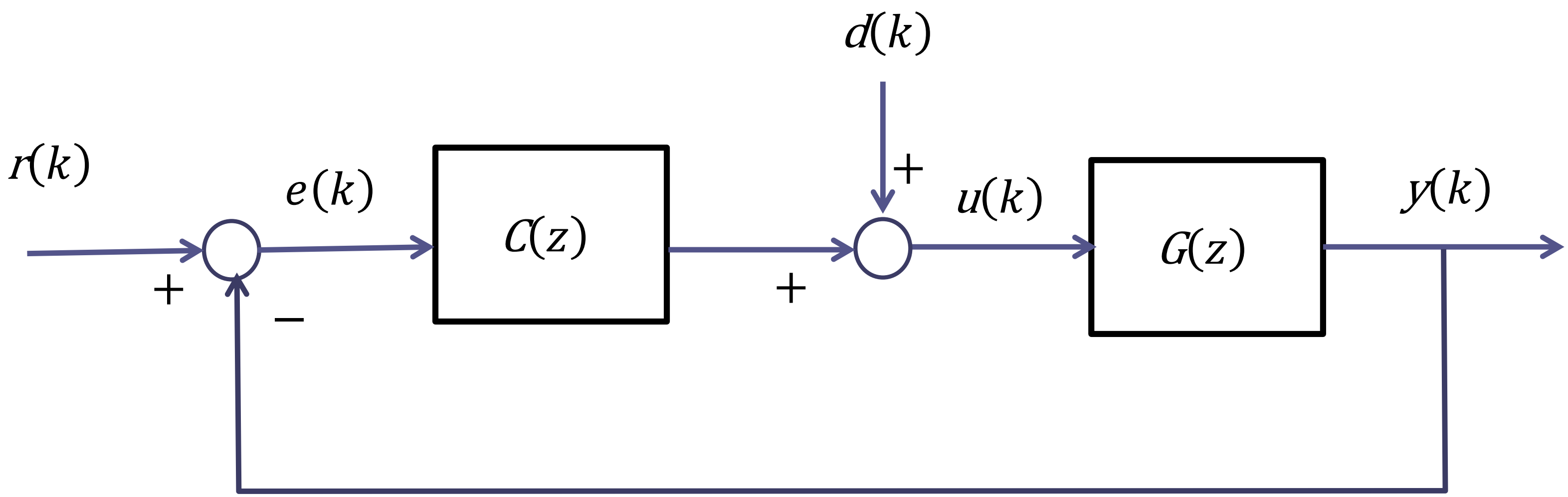
Il **comportamento a regime dei sistemi di controllo a tempo discreto** si riferisce alla analisi degli effetti **a transitorio esaurito** di ingressi/set-point e disturbi polinomiali (segnali costanti, a rampa, etc., detti anche "**canonici")** oppure ingressi e disturbi avente andamento **sinusoidale**.

Faremo riferimento a sistemi di controllo a retroazione unitaria della forma



Il segnale disturbante $d(k)$ influenza il comportamento del sistema di controllo ma la sua evoluzione temporale non è influenzabile dal progettista. Compito del sistema di controllo è pertanto non solo di garantire i comportamento desiderato per l'uscita in condizioni nominali (cioè, senza disturbo) ma anche quello di fare in modo che ove intervengano disturbi appartenenti a determinate classi di segnali (ci riferiremo in prevalenza a disturbi costanti di ampiezza sconosciuta) il loro effetto sulla variabile di uscita sia completamente compensato, o almeno attenuato in misura sufficiente.

Abbiamo visto come lo schema di riferimento risulti essere completamente equivalente al seguente

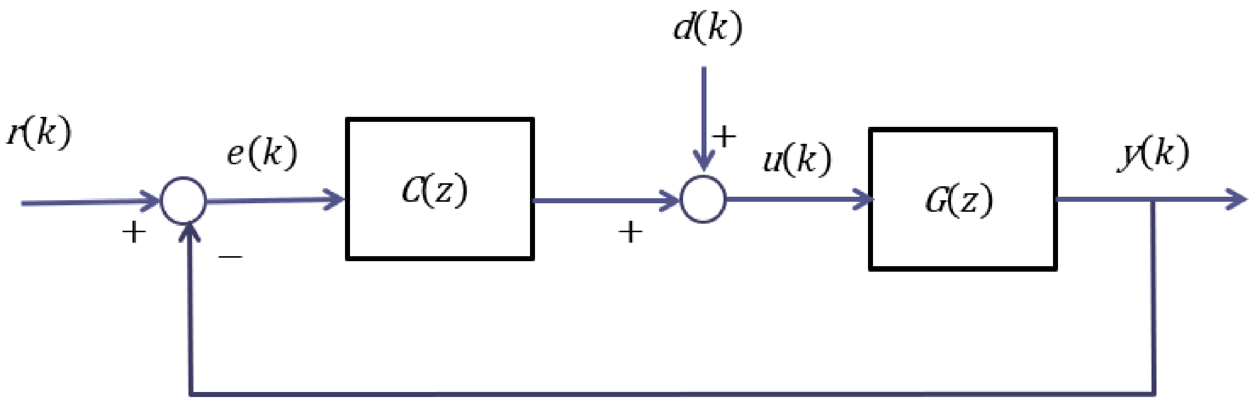


con

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathrm{Z}\left\{ \left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{P(s)}}{s} \right) \right]_{t=kT_c} \right\}$$

e svilupperemo pertanto le nostre considerazioni mediante ragionamenti interamente condotti nel dominio della variabile z

Definiamo alcune utili Funzioni di Trasferimento (FdT) a ciclo chiuso e relazioni aggiuntive associate al SdC (sistema di controllo) in esame



FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita (gia vista)

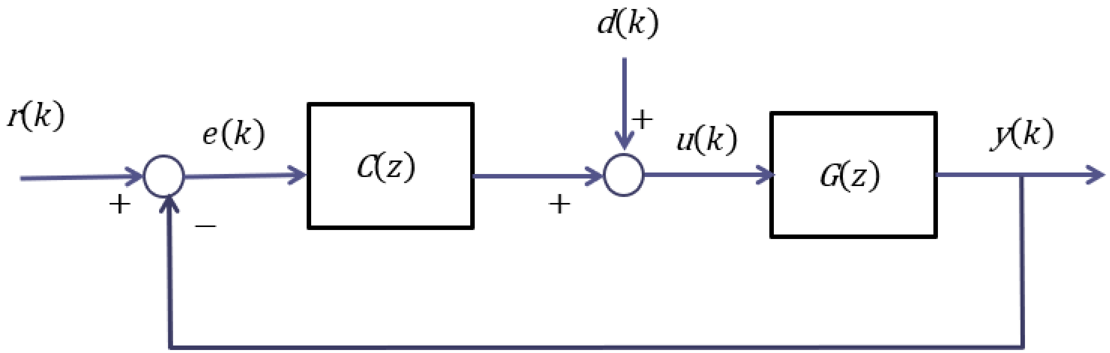
$$W_r^y(z) = \left.\frac{Y(z)}{R(z)}\right|_{d=0} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita

$$W_d^y(z) = \left.\frac{Y(z)}{D(z)}\right|_{r=0} = \frac{G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'errore

$$W_r^e(z) = \left.\frac{E(z)}{R(z)}\right|_{d=0} = \frac{1}{1 + C(z)G(z)}$$



Ricordiamo come nei sistemi lineari vale il **principio di sovrapposizione degli effetti**. Esso garantisce, con riferimento al sistema in figura, che l'evoluzione complessiva dell'uscita in presenza simultanea di un set-point e di un disturbo non nulli è determinabile sommando fra di loro l'evoluzione dell'uscita in risposta al solo set point e l'evoluzione dell'uscita in risposta al solo disturbo.

Si avrà quindi $$y(k) = y_r(k) + y_d(k)$$

$$y_r(k) = y(k)\Big|_{d=0}$$

$y_r(k)$ è l'uscita che si avrebbe in presenza del solo set-point $r(k)$, cioè ponendo nello schema $d(k) = 0$

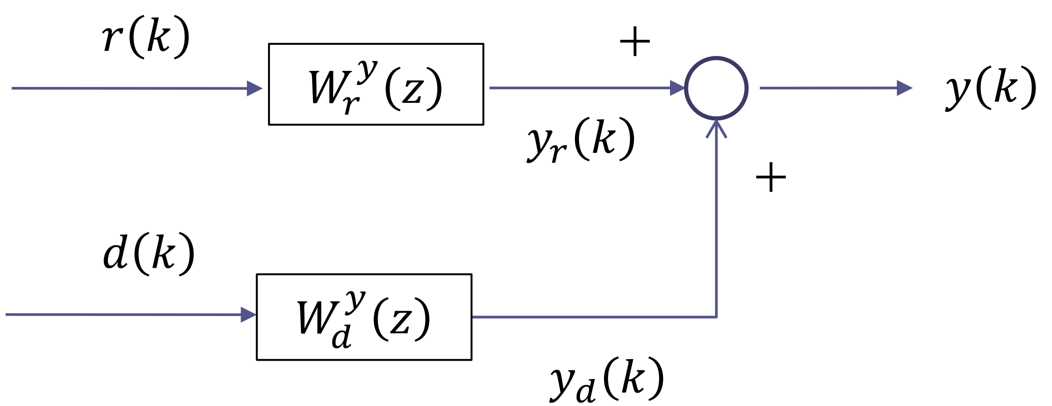
$$y_d(k) = y(k)\Big|_{r=0}$$

$y_d(k)$ è l'uscita che si avrebbe in presenza del solo disturbo $d(k)$, cioè ponendo nello schema $r(k) = 0$

Nel dominio della trasformata Z, il principio di sovrapposizione degli effetti ci dice quindi che

$$\boxed{Y(z) = W_r^y(z)R(z) + W_d^y(z)D(z)}$$

Schema equivalente



Per quanto concerne il comportamento a regime per ingressi e disturbi canonici **risulta di estremo rilievo la presenza di poli in z=1 nel controllore e/o nel processo**

E' importante sia il numero complessivo di poli in z=1 che la loro "ripartizione" tra controllore e processo

Il concetto importante e rilevante in tale contesto è quello di "**Tipo del sistema di controllo",** che approfondiremo a breve.

Tutte le considerazioni che svilupperemo in merito al comportamento a regime hanno come prerequisito essenziale che il sistema di controllo sia **asintoticamente stabile a ciclo chiuso**

Richiediamo quindi che l'equazione caratteristica:

$$1 + C(z)G(z) = 0$$

ammetta soluzioni contenute all'interno del disco unitario (esclusa la frontiera)

Se poniamo

$$C(z) = \frac{N_C(z)}{D_C(z)} \qquad G(z) = \frac{N_G(z)}{D_G(z)}$$

L'equazione caratteristica può essere espressa come

$$1 + C(z)G(z) = 1 + \frac{N_C(z)}{D_C(z)}\frac{N_G(z)}{D_G(z)} = \frac{N_C(z)N_G(z) + D_C(z)D_G(z)}{D_C(z)D_G(z)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad P_{car}(z) = N_C(z)N_G(z) + D_C(z)D_G(z)$$

Il pol. caratteristico è la somma dei prodotti fra numeratori ed i denominatori del controllore e del processo

Se il sistema di controllo risulta essere asintoticamente stabile a ciclo chiuso, sia la FdT a ciclo chiuso tra il set-point e l'uscita

$$W_r^y(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{N_C(z)N_G(z)}{N_C(z)N_G(z) + D_C(z)D_G(z)}$$

che la FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita

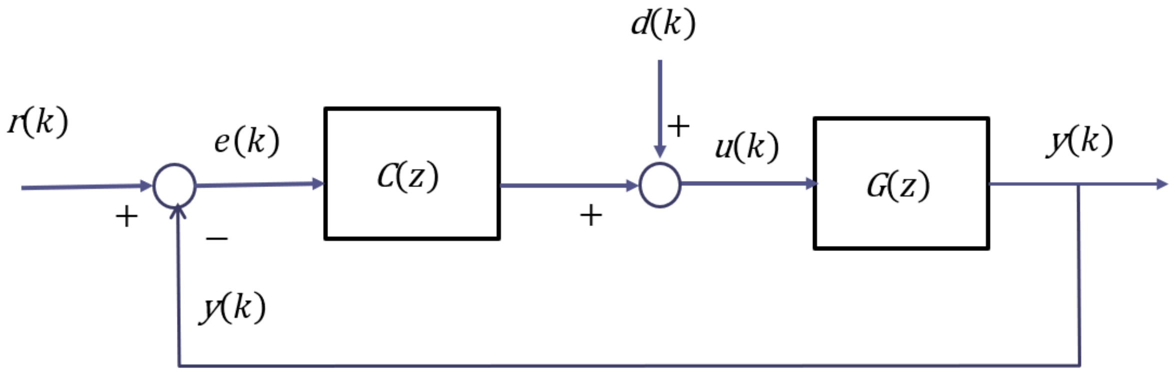
$$W_d^y(z) = \frac{G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{D_C(z)N_G(z)}{N_C(z)N_G(z) + D_C(z)D_G(z)}$$

avranno i poli contenuti all'interno del disco unitario.

Le due funzioni di trasferimento hanno infatti (a meno di eventuali cancellazioni) il medesimo polinomio caratteristico $P_{car}(z) = N_C(z)N_G(z) + D_C(z)D_G(z)$

Definizione - Tipo di un sistema di controllo digitale

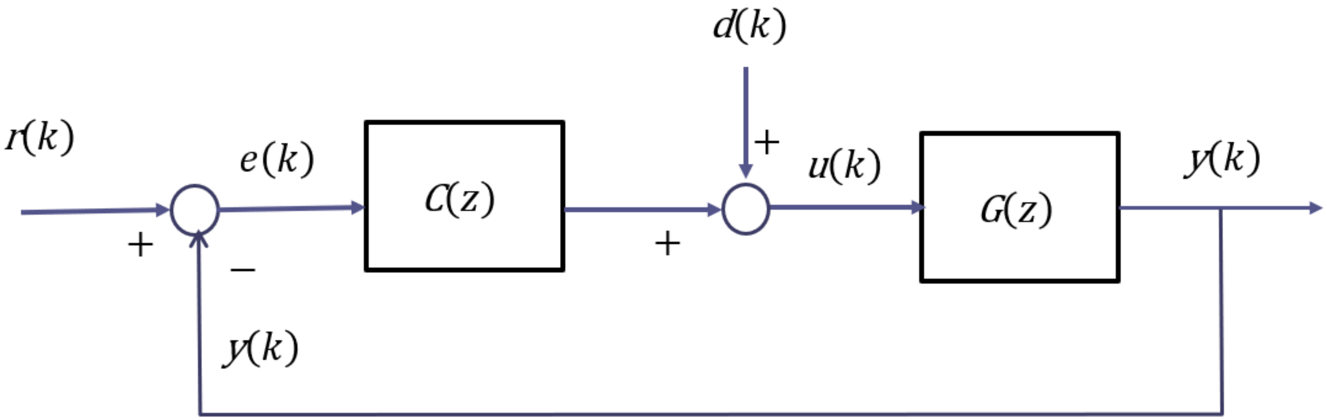
*Con riferimento al sistema di controllo in Figura, si definisce **tipo del sistema** il numero complessivo di poli in $z = 1$ presenti nel controllore $C(z)$ e nel processo $P(z)$*



Un sistema di controllo potrà pertanto essere di tipo zero, di tipo uno, di tipo due, etc.

Nella pratica raramente si eccede il tipo due e i sistemi di tipo uno sono quelli largamente più diffusi.

Sistemi di controllo di tipo zero



Né il controllore né il processo possiedono poli in $z = 1$.

Siano μ_C e μ_G i guadagni di controllore e processo

$$\mu_C = C(1) \qquad\qquad \mu_G = G(1)$$

Sistemi di controllo di tipo zero

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un set-point costante (e disturbo nullo).

$r(k) = R^* = cost. \qquad d(k) = 0$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} y(k) = R^* \frac{\mu_C \mu_G}{1+\mu_C \mu_G}}$$

Dimostrazione

$$Y(z) = W_r^y(z)R(z) = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} \cdot \frac{R^* z}{z-1}$$

Teorema del valore finale:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1} R^* \frac{C(z)G(z)z}{1+C(z)G(z)} = R^* \frac{\mu_C \mu_G}{1+\mu_C \mu_G}$$

$$\lim_{k \to \infty} y(k) = R^* \frac{\mu_C \mu_G}{1 + \mu_C \mu_G}$$

Commenti

In un sistema di controllo di tipo zero, l'uscita non converge al valore costante del set-point. E' sempre presente (anche in assenza di disturbi) un errore a regime che dipende dai guadagni di regolatore e processo (in realtà dipende in maniera aggregata dal loro prodotto). Un sistema di controllo di tipo zero non gode pertanto della cosiddetta proprietà di «Precisione Statica».

Incrementando il guadagno μ_C del controllore la precisione a regime migliora, nel senso che si riduce la differenza fra il valore di regime dell'uscita ed il valore del set-point (ciò in conseguenza del fatto che il termine $\frac{\mu_C \mu_G}{1+\mu_C \mu_G}$ tende ad 1 al crescere di μ_C)

Si presti attenzione al fatto che il guadagno del controllore non può essere aumentato a piacere, in quanto deve sempre essere garantita la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Sistemi di controllo di tipo zero

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un disturbo costante (e set-point nullo).

$$d(k) = D^* = cost. \qquad r(k) = 0$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} y(k) = D^* \frac{\mu_G}{1+\mu_C\mu_G}}$$

Dimostrazione

$$Y(z) = W_d^y(z)D(z) = \frac{G(z)}{1+C(z)G(z)} \cdot \frac{D^* z}{z-1}$$

Teorema del valore finale (la condizione di applicabilità del teorema del valore finale è soddisfatta in conseguenza del fatto che il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile)

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1} D^* \frac{zG(z)}{1+C(z)G(z)} = D^* \frac{\mu_G}{1+\mu_C\mu_G}$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} y(k) = D^* \frac{\mu_G}{1+\mu_C\mu_G}}$$

Commenti

In un sistema di controllo di tipo zero, un disturbo costante altera il valore di regime dell'uscita. L'entità di tale effetto indesiderato dipende dai guadagni di regolatore e processo.

Incrementando il guadagno μ_C del controllore la precisione a regime migliora, nel senso che si attenua l'effetto del disturbo sul valore di regime dell'uscita (ciò in conseguenza del fatto che il termine $\frac{\mu_G}{1+\mu_C\mu_G}$ tende a zero al crescere di μ_C)

Si presti attenzione al fatto che il guadagno del controllore non può essere aumentato a piacere, in quanto deve sempre essere garantita la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Sistemi di controllo di tipo zero

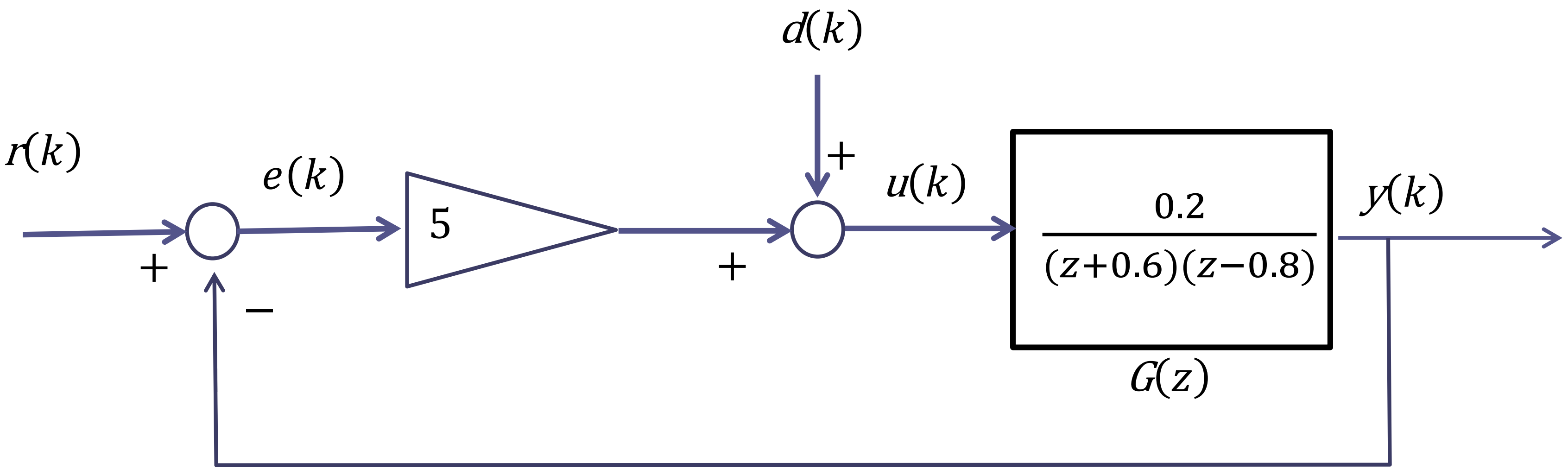
Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un set-point costante e disturbo costante

Il principio di sovrapposizione degli effetti ci consente di affermare che in un sistema di controllo di tipo zero soggetto simultaneamente ad un set point costante di ampiezza R^* e ad un disturbo costante di ampiezza D^* il valore di regime dell'uscita sarà

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} y(k) = R^* \frac{\mu_C \mu_G}{1+\mu_C \mu_G} + D^* \frac{\mu_G}{1+\mu_C \mu_G}}$$

La formula soprariportata vale unicamente nel caso in cui il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

Esempio



Determinare il comportamento dell'uscita a regime per

$$r(k) = 3\delta_{-1}(k) \qquad d(k) = 0.5\ \delta_{-1}(k)$$

E' un sistema di controllo di tipo zero. Abbiamo visto come il comportamento a regime dipenda unicamente dai valori dei guadagni di regolatore e processo.

Il controllore ha ovviamente guadagno $\mu_C = 5$.

Il processo ha guadagno $\mu_G = G(1) = 0.625$

Verifichiamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso

$$P_{car}(z) = (z + 0.6)(z - 0.8) + 1 = z^2 - 0.2z + 0.52$$

$a_2 = 1$

$a_1 = -0.2$

$a_0 = 0.52$

Il criterio di Jury fissa le seguenti condizioni necessarie e sufficienti affinché un polinomio di grado due sia Jury-stabile

1. $|a_0| < a_2$ $\quad |0.52| < 1$ $\quad OK$
2. $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 > 0$ $\quad 1 - 0.2 + 0.52 = 1.32 > 0$ $\quad OK$
3. $P(-1) = a_2 - a_1 + a_0 > 0$ $\quad 1 + 0.2 + 0.52 = 1.72 > 0$ $\quad OK$

Il sistema di controllo risulta pertanto essere asintoticamente stabile a ciclo chiuso

Nei sistemi di controllo di tipo zero con set-point e disturbo costante si ha:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} y(k) = R^* \frac{\mu_C \mu_G}{1+\mu_C\mu_G} + D^* \frac{\mu_G}{1+\mu_C\mu_G}}$$

$\mu_C = 5$ $\mu_G = 0.625$

$R^* = 3$ $D^* = 0.5$

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \boxed{2.272} + \boxed{0.075} = 2.34$$

Componente dovuta al disturbo

Componente dovuta al set-point

Ricaviamo il medesimo risultato senza ricorrere alla formula, basandoci unicamente sulla applicazione del Teorema del valore finale.
Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti valutando separatamente i contributi al valore di regime dell'uscita introdotti dal set-point e dal disturbo.

Contributo del set-point

FdT set-point uscita:

$$W_r^y(z) = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} = \frac{\frac{5\cdot 0.2}{(z+0.6)(z-0.8)}}{1+\frac{5\cdot 0.2}{(z+0.6)(z-0.8)}} = \frac{1}{z^2-0.2z+0.52}$$

Trasformata Z dell'uscita:

$$Y_r(z) = W_r^y(z)R(z) = \frac{1}{z^2-0.2z+0.52}\cdot\frac{3\,z}{z-1}$$

Teorema del valore finale:

$$\lim_{k\to\infty} y_r(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y_r(z) = \lim_{z\to 1}\frac{3z}{z^2-0.2z+0.52} = 2.272$$

Si poteva anche impiegare direttamente il guadagno $W_r^y(1)$ della FdT fra il set-point e l'uscita, attraverso la relazione:

$$\lim_{k\to\infty} y_r(k) = 3\cdot W_r^y(1) = 3\cdot 0.757 = 2.272$$

Contributo del disturbo

FdT disturbo uscita:

$$W_d^y(z) = \frac{G(\mathrm{z})}{1 + C(z)G(z)} = \frac{\frac{0.2}{(z+0.6)(z-0.8)}}{1 + \frac{5 \cdot 0.2}{(z+0.6)(z-0.8)}} = \frac{0.2}{z^2 - 0.2z + 0.52}$$

Trasformata Z dell'uscita:

$$Y_d(z) = W_d^y(z)D(z) = \frac{0.2}{z^2-0.2z+0.52} \cdot \frac{0.5\,z}{z-1}$$

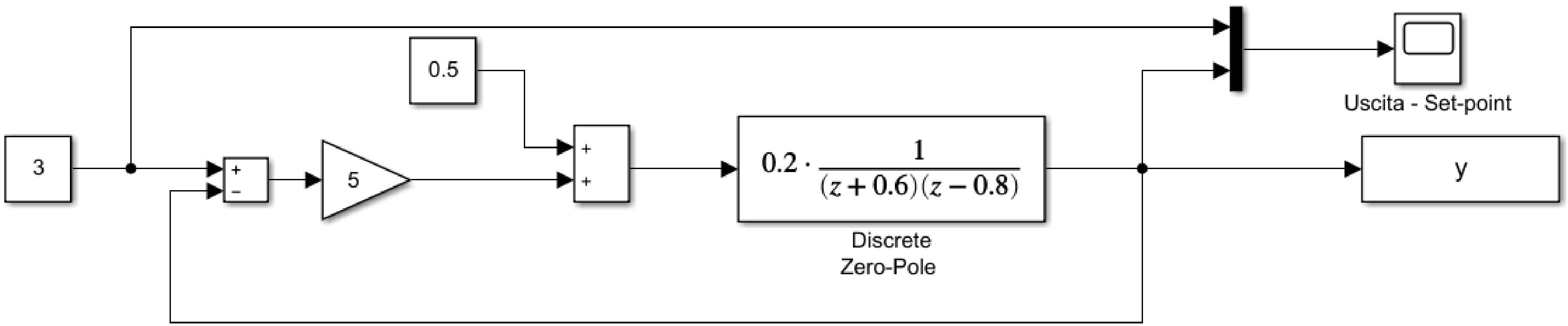
Teorema del valore finale:

$$\lim_{k\to\infty} y_d(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y_d(z) = \lim_{z\to 1}\frac{0.1z}{z^2 - 0.2z + 0.52} = 0.075$$

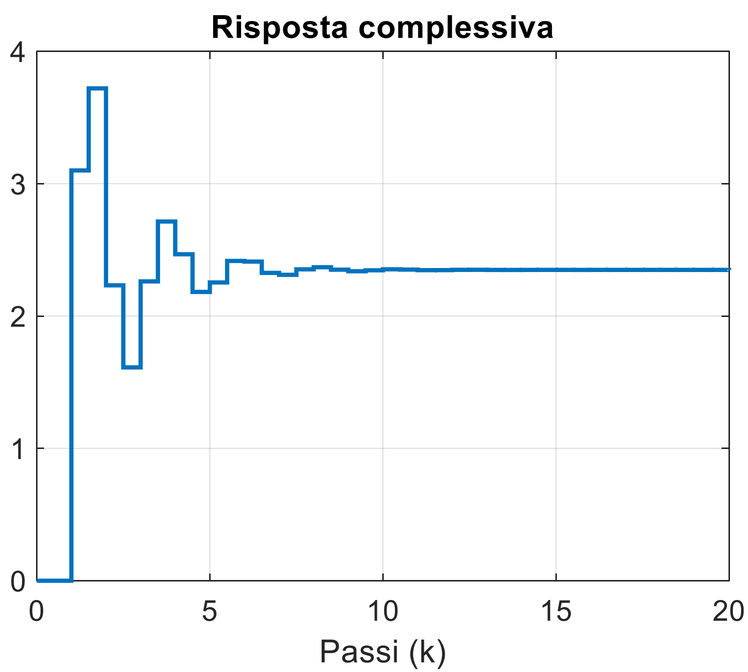
Si poteva anche impiegare direttamente il guadagno $W_d^y(1)$ della FdT fra il set-point e l'uscita, attraverso la relazione:

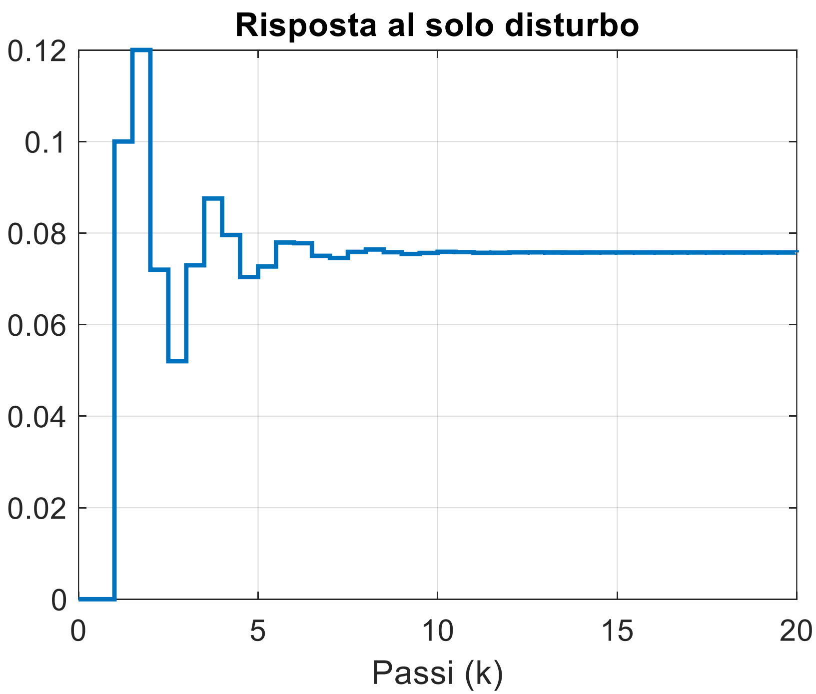
$$\lim_{k\to\infty} y_d(k) = 0.5 \cdot W_d^y(1) = 0.5 \cdot 0.151 = 0.075$$

Verifichiamo mediante simulazione i risultati ottenuti

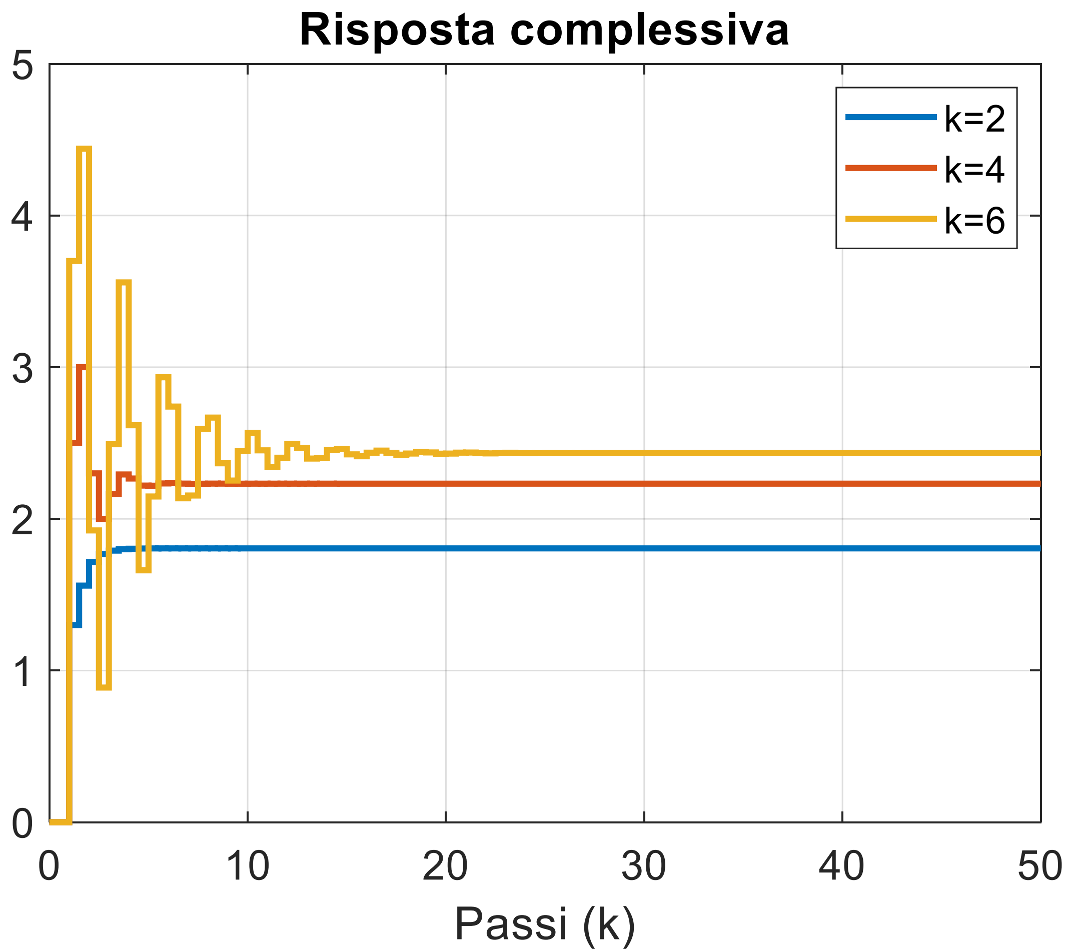


Uscita complessiva (in presenza sia del set-point che del disturbo) e uscita in presenza del solo disturbo





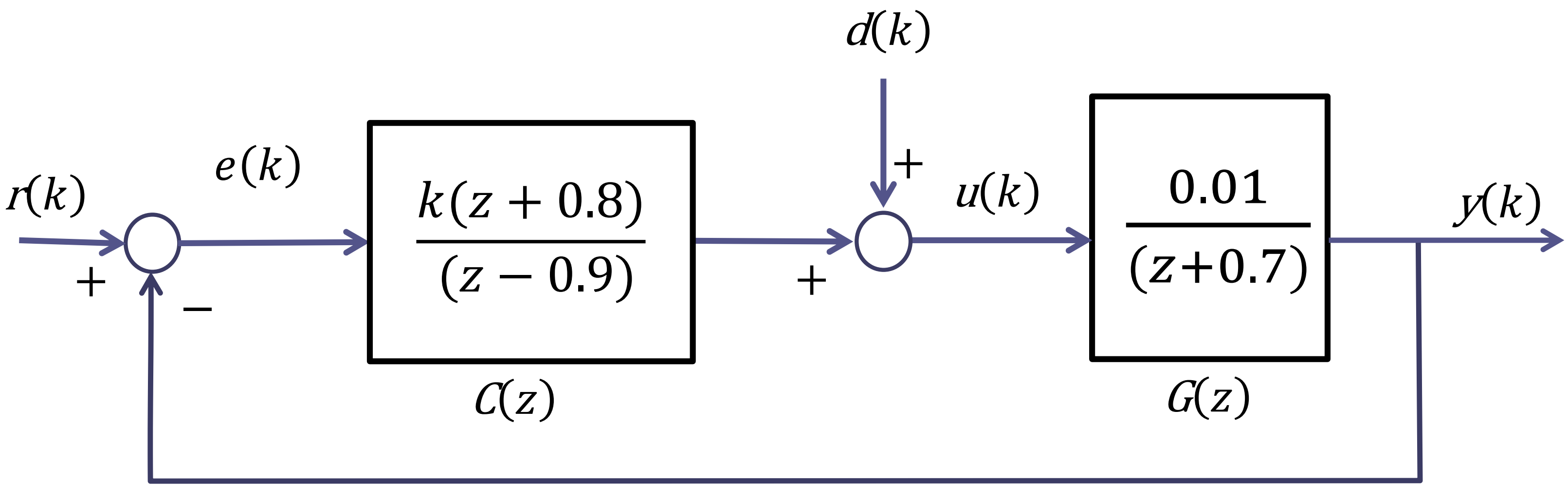
Test con diversi valori del guadagno del regolatore.



Si nota come al crescere del guadagno del regolatore migliora la precisione a regime.

Il guadagno potrà assumere al massimo il valore critico $k_{cr} = 7.42$, oltre il quale il sistema a ciclo chiuso diventa instabile

Esempio



Determinare il valore del guadagno k in modo che

S1 In assenza di disturbo, l'errore a regime in risposta ad un set-point costante non ecceda il 5% dell'ampiezza del set-point

S2 Un disturbo costante venga attenuato a regime in misura pari almeno al 99%

E' un sistema di controllo di tipo zero. Abbiamo visto come il comportamento a regime dipenda unicamente dai valori dei guadagni di regolatore e processo.

Il controllore ha guadagno $\mu_C = C(1) = 18k$

Il processo ha guadagno $\mu_G = G(1) = 0.0059$

Valutiamo preliminarmente l'intervallo di valori del guadagno k che garantisce la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo

Il polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso è:

$$P_{car}(z) = N_C(z)N_G(z) + D_C(z)D_G(z) = 0.01k(z + 0.8) + (z - 0.9)(z + 0.7)$$

$$= z^2 + (0.01k - 0.2)z + 0.008k - 0.63$$

Analizziamone la stabilita con il criterio di Jury

$$P_{car}(z) = z^2 + (0.01k - 0.2)z + 0.008k - 0.63$$

$$a_2 = 1 \qquad a_1 = (0.01k - 0.2) \qquad a_0 = 0.008k - 0.63$$

Il criterio di Jury fissa le seguenti condizioni necessarie e sufficienti affinché un polinomio di grado 2 sia Jury-stabile

1. $|a_0| < a_2$ $\qquad |0.008k - 0.63| < 1$

$$-46.25 < k < 203.75$$

2. $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 > 0$ $\qquad 1 + 0.01k - 0.2 + 0.008k - 0.63 = 0.17 + 0.018k > 0$

$$k > -9.44$$

3. $P(-1) = a_2 - a_1 + a_0 > 0$ $\qquad 1 - 0.01k + 0.2 + 0.008k - 0.63 = 0.57 - 0.002k > 0$

$$k < 285$$

Nell'intervallo di valori positivi del guadagno, il sistema è stabile a ciclo chiuso se

$$\mathbf{0 < k < 203.75}$$

S1 In assenza di disturbo, l'errore a regime in risposta ad un set-point costante non ecceda il 5% dell'ampiezza del set-point

Errore a regime per un set-point costante in assenza di disturbo vale

$$\lim_{k\to\infty} e(k) = R^* - \lim_{k\to\infty} y(k) = R^* - R^* \frac{\mu_C\mu_G}{1+\mu_C\mu_G} = \frac{R^*}{1+\mu_C\mu_G} \leq 0.05\ R^*$$

$$\frac{1}{1+\mu_C\mu_G} \leq 0.05 \qquad\qquad \mu_C\mu_G \geq 19$$

Il controllore ha guadagno $\mu_C = 18k$

Il processo ha guadagno $\mu_G = 0.0059$

$$0.106k \geq 19 \qquad\qquad \boldsymbol{k \geq 178.9}$$

La specifica S1 puo essere piu facilmente imposta garantendo che il guadagno della Funzione di trasferimento fra il set-point e l'errore sia inferiore a 0.05

$$W_r^e(z) = \frac{1}{1 + C(z)G(z)} \qquad W_r^e(1) = \frac{1}{1 + C(1)G(1)} = \frac{1}{1 + \mu_C \mu_G}$$

Si riottiene chiaramente la stessa diseguaglianza ricavata nella slide precedente

$$\frac{1}{1 + \mu_C \mu_G} \leq 0.05$$

S2 Un disturbo costante venga attenuato a regime in misura pari almeno al 99%

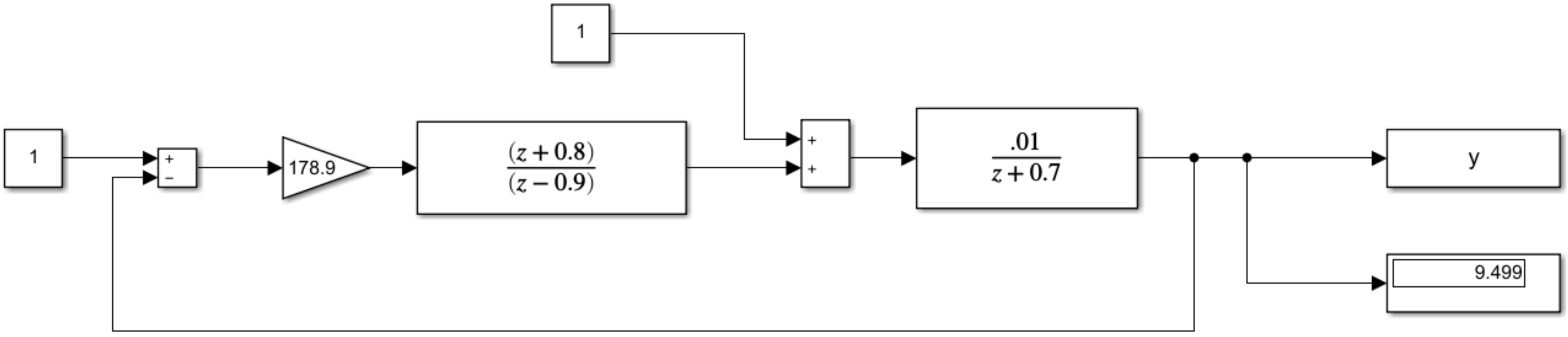
Imponiamo che il guadagno della Funzione di trasferimento fra il disturbo e l'uscita sia inferiore a 0.01

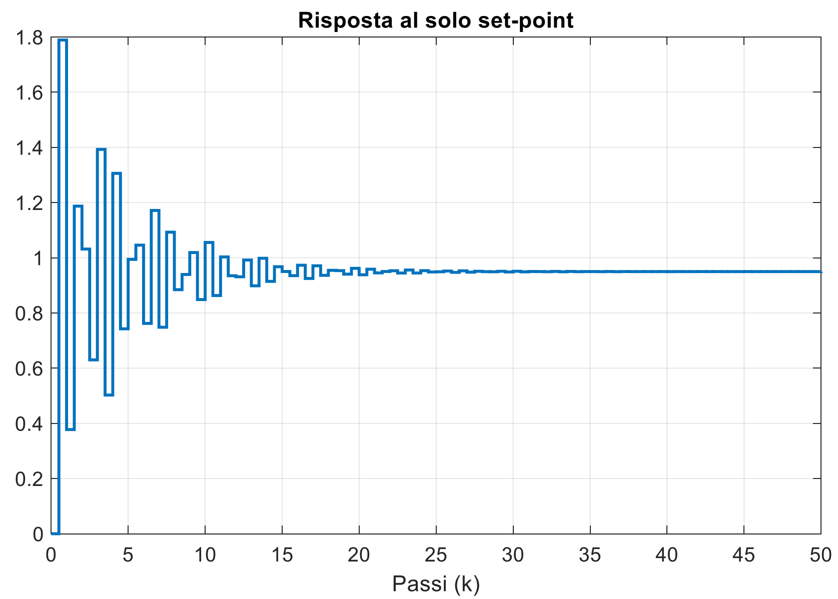
$$W_d^y(z) = \frac{G(z)}{1 + C(z)G(z)} \Rightarrow W_d^y(1) = \frac{\mu_G}{1 + \mu_C \mu_G} \leq 0.01 \Rightarrow \frac{0.0059}{1 + 0.106k} \leq 0.01$$

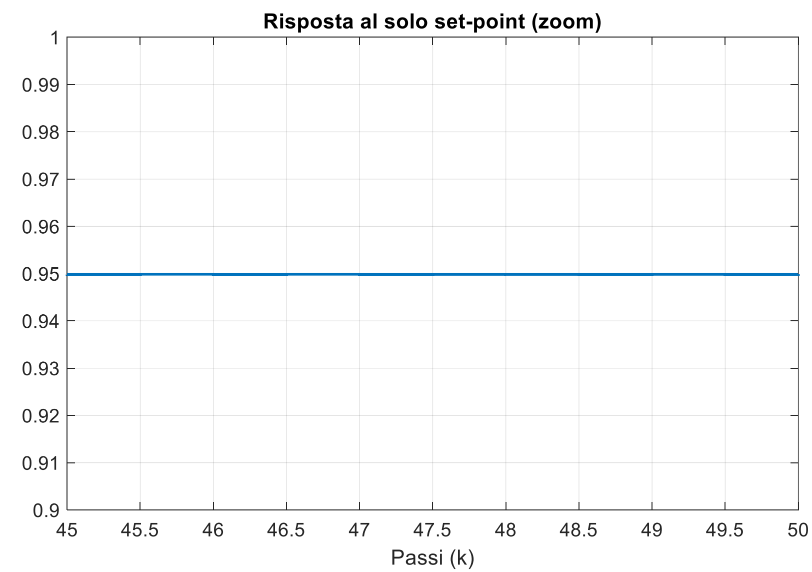
$$\Rightarrow k \geq -0.773$$

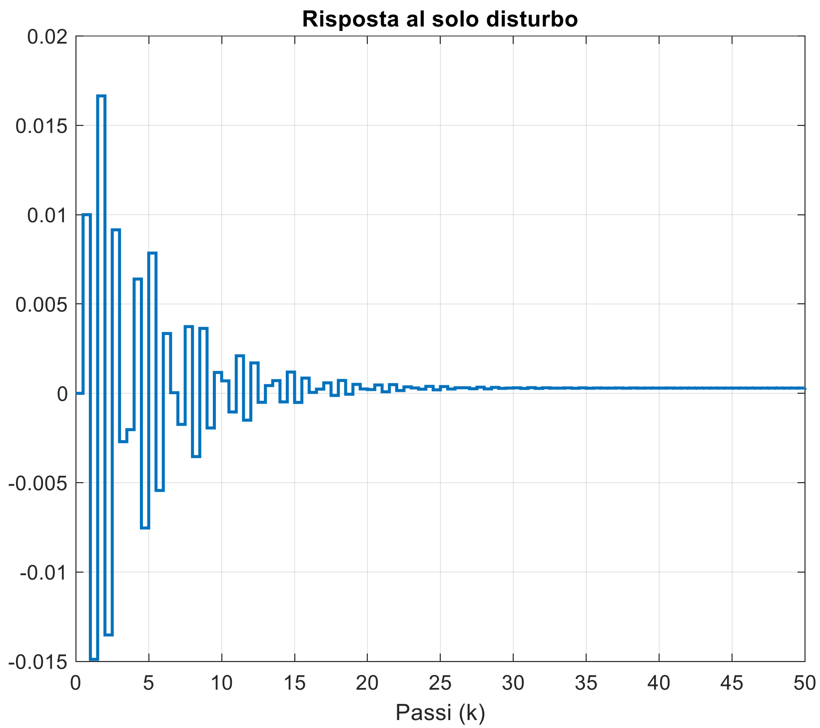
Il livello di attenuazione del disturbo previsto dalla specifica S2 è garantito da qualunque valore positivo del controllo

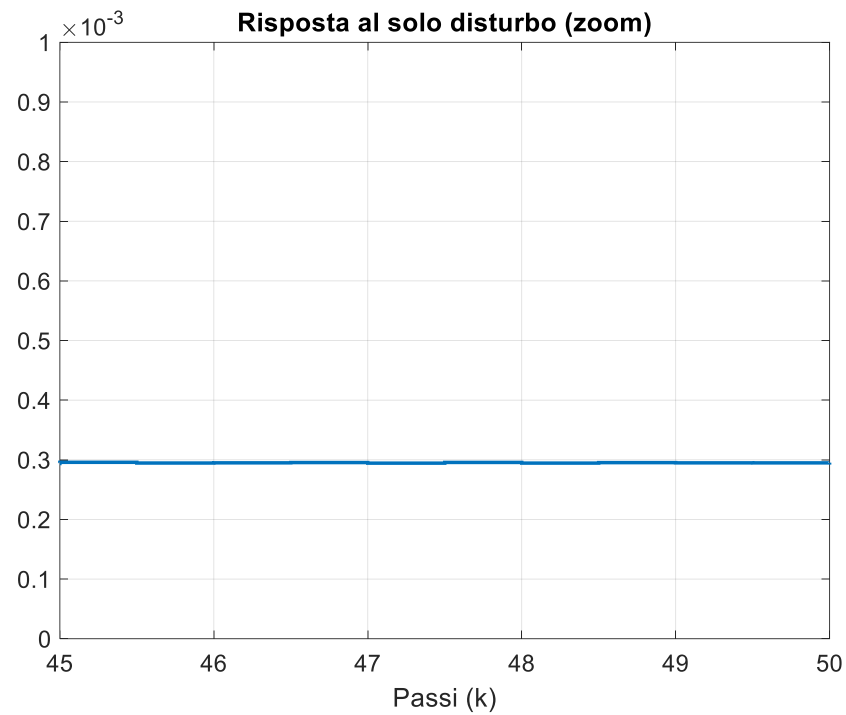
Verifichiamo mediante simulazione i risultati ottenuti








Risposta al solo disturbo
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
Passi (k)


Risposta al solo disturbo (zoom)
×10^-3
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
45
46
47
48
49
50
Passi (k)