

## 9 DIPOLO ELEMENTARE

Con il termine *dipolo elementare* si indica una sorgente di estensione spaziale molto piccola (rispetto a  $\lambda$ ), costituita da una densità di corrente orientata in una unica direzione, e costante con essa.

Assumiamo l'asse  $z$  lungo la direzione della densità di corrente. Allora anche la corrente  $I$  sarà rivolta lungo  $z$ , e sarà costante in un tratto  $\Delta z$  pari alla lunghezza del dipolo elementare. La *ampiezza* della sorgente sarà data dal prodotto  $I\Delta z$ .

Per spiegare l'uso del termine *dipolo* per tale sorgente, notiamo che la corrente  $\mathbf{J}$  può essere ottenuta come corrente che scorre all'esterno di un filo, ovvero di un cilindretto di *C.E.P.* lungo  $\Delta z$  e di raggio molto più piccolo della lunghezza, purchè alle due estremità del filo siano posti due *serbatoi di cariche*, ad esempio due dischi metallici di raggio piccolo rispetto a  $\lambda$  ma grande rispetto a  $\Delta z$ , che formino le due armature di un condensatore in grado di accumulare cariche. Con tale condensatore, è possibile che la corrente sul filo sia costante, anzichè annullarsi alle estremità. Se confrontiamo le due situazioni di Fig. 1, notiamo che nella figura a sinistra la corrente (che scorre verticalmente sul filo) deve necessariamente annullarsi alle due estremità del filo. Invece la presenza dei due dischi nel dipolo elementare riportato a destra evita che, alle estremità della parte verticale, la corrente debba annullarsi. Poichè il filo è poi molto corto, possiamo applicare i principi di Kirchhoff, concludendo che la corrente è costante su tutto il filo.

Applichiamo l'equazione di continuità alla regione tratteggiata di Fig. 2, che contiene l'armatura superiore del condensatore. Sia  $Q$  la carica immagazinata nella armatura, e  $I$  la corrente nel dipolo elementare, che entra nella regione tratteggiata. Si ha allora

$$j\omega Q + (-I) = 0$$

da cui segue

$$Q = \frac{I}{j\omega}$$

La carica accumulata nella armatura nel *DT* vale

$$q(t) = |Q| \cos(\omega t + \phi)$$

essendo  $\phi$  la fase di  $Q$ .

Sull'altra armatura la carica sarà pari a  $-q(t)$ . Si ha quindi un dipolo elettrico *oscillante*, di momento, nel *DT*, pari a  $q(t)\Delta z$ , e quindi, nel *DF*, dato da

$$P = Q \Delta z = \frac{1}{j\omega} I \Delta z \quad (21)$$

Ovviamente le armature devono accumulare questa carica  $q(t)$  senza produrre una d.d.p. apprezzabile. Occorre quindi un condensatore di capacità elevata (che non sarebbe ottenibile con un semplice filo, senza armature).

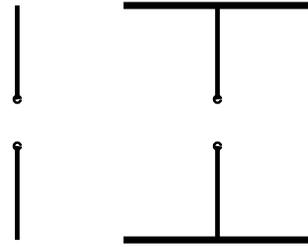


Fig 1: Filo (a sinistra) e dipolo elementare (a destra)

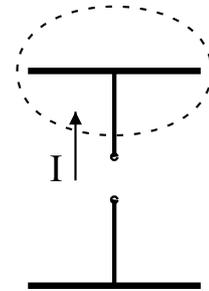


Fig 2: Equazione di continuità

## 10 CAMPO DI UN DIPOLO ELEMENTARE

In un sistema di riferimento sferico, il campo nel punto  $\mathcal{P} = (r, \theta, \varphi)$ , prodotto da un dipolo elementare di ampiezza  $I\Delta z$ , parallelo ed equiverso all'asse  $z$  e posto nell'origine è<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} E_r &= j \frac{\zeta I\Delta z}{2\lambda r} \left[ \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right] e^{-j\beta r} 2 \cos \theta \\ E_\theta &= j \frac{\zeta I\Delta z}{2\lambda r} \left[ 1 + \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right] e^{-j\beta r} \sin \theta \\ H_\varphi &= j \frac{I\Delta z}{2\lambda r} \left[ 1 + \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} \sin \theta \end{aligned} \quad (22)$$

Queste espressioni valgono in tutto lo spazio (fatta eccezione per il punto in cui si trova il dipolo), ma sono abbastanza complesse, soprattutto da interpretare. Tuttavia tali espressioni si possono semplificare nei due casi di punto campo  $\mathcal{P}$  lontano dal dipolo,  $\beta r \gg 1$  o vicino al dipolo  $\beta r \ll 1$ . Ovviamente, nei punti a distanza intermedia tra queste, va necessariamente usata l'espressione completa (22).

Se  $\beta r \gg 1$  si possono trascurare, nelle parentesi quadre della (22), tutti i termini rispetto a 1, e quindi anche  $E_r$  rispetto a  $E_\theta$ .

In tal caso il campo diventa

$$\begin{aligned} E_\theta &= j \frac{\zeta I\Delta z}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \sin \theta \\ H_\varphi &= j \frac{I\Delta z}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \sin \theta = \frac{1}{\zeta} E_\theta \end{aligned} \quad (23)$$

ovvero i campi variano con  $\mathbf{r}$  allo stesso modo, e sono entrambi ortogonali alla direzione radiale (campi trasversi).

In termini vettoriali, dalla (23) segue

$$\mathbf{E} = \zeta \mathbf{H} \times \mathbf{i}_r \quad (24)$$

La presenza del fattore  $e^{-j\beta r}$  mostra che il campo di un dipolo elementare si propaga, e si propaga in direzione radiale. Infatti, nel  $DT$ , tale fattore diventa

$$\operatorname{Re} \left[ e^{-j\beta r} e^{j\omega t} \right] = \cos(\beta r - \omega t)$$

ovvero identifica una onda che viaggia in direzione radiale (dal dipolo verso l'infinito).

Il campo (23) è quindi una onda sferica, con superfici equifase e equiampiezza sferiche.

---

<sup>1</sup> Le stesse espressioni in termini di momento di dipolo  $P = I\Delta z/j\omega$  si ottengono sostituendo il primo fattore delle espressioni seguenti con

$$\begin{aligned} j \frac{\zeta I\Delta z}{2\lambda r} &= j \frac{\zeta j\omega P}{2\lambda r} = -\frac{\zeta\omega P}{2\lambda r} = -\frac{\beta^2 P}{4\pi\epsilon_0 r} \\ j \frac{I\Delta z}{2\lambda r} &= j \frac{j\omega P}{2\lambda r} = -\frac{\omega P}{2\lambda r} = -\frac{\beta^2 \omega P}{4\pi\sqrt{\epsilon_0\mu_0} r} \end{aligned}$$

Se però osserviamo il campo (23) solo in una regione limitata dello spazio, le superfici sferiche equifase e equiampiezza sono indistinguibili da superfici piane. Infatti una sfera di raggio  $R$  grande risulta indistinguibile dal suo piano tangente, se osservata in una zona di dimensioni piccole rispetto a  $R$ . Ne segue che in una zona limitata dello spazio l'onda sferica (23) è indistinguibile da una onda piana, in quanto non solo ha superfici equifase e equiampiezza piane, ma vale anche la (24), che è la relazione tra i campi di una onda piana. Ovviamente, come si vede dalla (24), l'onda piana viaggia in direzione radiale (nel punto di osservazione).

Poichè vale la sovrapposizione degli effetti, anche il campo di più dipoli, ovvero il campo di una qualunque distribuzione di correnti<sup>1</sup>, purchè di estensione spaziale limitata, ha, per  $\beta r \rightarrow \infty$ , le stesse proprietà del campo di un dipolo. In particolare tale campo è una onda piana che viaggia verso l'infinito, e inoltre devono valere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r|\mathbf{E}| < \infty \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r|\mathbf{H}| < \infty \quad (25)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(\mathbf{E} - \zeta \mathbf{H} \times \mathbf{i}_r) = 0$$

Le (25), e in particolare l'ultima di queste, prendono il nome di condizioni di Sommerfeld, o condizioni di radiazione all'infinito. Il significato fisico di queste condizioni è che, all'infinito, sia  $\mathbf{E}$ , sia  $\mathbf{H}$  devono essere infinitesime almeno del primo ordine, mentre la differenza  $\mathbf{E} - \zeta \mathbf{H} \times \mathbf{i}_r$  deve esserlo di ordine superiore al primo<sup>2</sup>.

Passando al caso di campo vicino  $\beta r \ll 1$ , allora nella parentesi quadra possiamo trascurare tutti i termini rispetto all'ultimo, e porre anche  $e^{-j\beta r} \simeq 1$ .

Le (22) diventano allora

$$\begin{aligned} E_r &= j \frac{\zeta I \Delta z}{2\lambda r} \left( \frac{1}{j\beta r} \right)^2 2 \cos \theta \\ E_\theta &= j \frac{\zeta I \Delta z}{2\lambda r} \left( \frac{1}{j\beta r} \right)^2 \sin \theta \\ H_\varphi &= j \frac{I \Delta z}{2\lambda r} \left( \frac{1}{j\beta r} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (26)$$

Si vede immediatamente che, nelle (26), il campo  $\mathbf{E}$  ed il campo  $\mathbf{H}$  vanno all'infinito (per  $r \rightarrow 0$ ) in modo diverso, e in particolare il campo magnetico è un infinito di ordine inferiore. Tuttavia, non è possibile confrontare direttamente i due campi, che hanno unità di misura diverse. Tuttavia, se consideriamo il campo lontano (o quello di una onda piana), notiamo che, per esso  $|\mathbf{E}| = |\zeta \mathbf{H}|$ . D'altra parte, una onda piana esiste in assenza di sorgenti, e quindi è ciascun campo che produce l'altro. Possiamo quindi concludere che, in una onda piana, i due campi hanno la stessa "grandezza". Pertanto, il modo *giusto* di confrontare campo elettrico e magnetico è di confrontare  $|\mathbf{E}|$  e  $|\zeta \mathbf{H}|$ .

Per il campo vicino di un dipolo elementare si ha

---

<sup>1</sup> Una qualunque distribuzione di correnti può sempre essere decomposta nella sovrapposizione di dipoli elementari

<sup>2</sup> In realtà andrebbe anche aggiunto che le componenti radiali dei campi  $E_r$  ed  $H_r$  devono essere di ordine superiore al primo.

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\zeta\mathbf{H}|} = \frac{\sqrt{\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}}{\sin\theta} \frac{1}{\beta r} = \frac{\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}}{\sin\theta} \frac{1}{\beta r}$$

Il primo fattore è maggiore di 1, ed il secondo è molto maggiore di 1. Ne segue che vicino a un dipolo

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\zeta\mathbf{H}|} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{E}| \gg |\zeta\mathbf{H}|$$

e quindi il campo è essenzialmente elettrico (il campo magnetico è, entro certi limiti, trascurabile).

Se esprimiamo il campo elettrico della (26) in termini di momento di dipolo  $P = I\Delta z/j\omega$ , si ottiene

$$\begin{aligned} E_r &= j \frac{\zeta j\omega P}{2\lambda r} \frac{-1}{(\beta r)^2} 2\cos\theta = \frac{1}{2r^3} \frac{1}{\lambda\beta} \frac{\zeta\omega}{\beta} P 2\cos\theta = \frac{1}{4\pi r^3} \frac{1}{\varepsilon_0} P 2\cos\theta \\ E_\theta &= j \frac{\zeta j\omega P}{2\lambda r} \frac{-1}{(\beta r)^2} \sin\theta = \frac{1}{2r^3} \frac{1}{\lambda\beta} \frac{\zeta\omega}{\beta} P \sin\theta = \frac{1}{4\pi r^3} \frac{1}{\varepsilon_0} P \sin\theta \end{aligned} \quad (27)$$

essendo  $\lambda\beta = 2\pi$  e

$$\zeta \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

Le espressioni (27) del campo di un dipolo elementare oscillante a frequenza  $\omega$  sono analoghe<sup>3</sup> a quelle del campo elettrostatico di un dipolo costante. Va però tenuto presente che queste ultime sono valide a qualunque distanza, mentre le (27) esprimono il campo del dipolo oscillante solo se  $\beta r \ll 1$  ovvero se  $r \ll \lambda$ . Questo conferma che, per regioni di dimensioni piccole rispetto a  $\lambda$ , è possibile usare le leggi dei campi statici, e quindi i principi di Kirchhoff.

---

<sup>3</sup> Naturalmente le (27) esprimono il campo, oscillante a frequenza  $\omega$ , di un dipolo oscillante  $p(t) = P_0 \cos\omega t$ , e non quelle di un dipolo costante. Tuttavia, se consideriamo il campo (27) nel  $DT$  otteniamo

$$\mathbf{E} = \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3} [2\cos\theta\mathbf{i}_r + \sin\theta\mathbf{i}_\theta] \cos\omega t$$

Quest'ultima espressione è valida sia per  $\omega = 0$  qualunque sia  $r$ , sia per  $\omega \neq 0$ , e  $r \ll \lambda$ .

## 11 DIPOLO CORTO

Un dipolo elementare è di difficile realizzazione, a causa delle capacità terminali.

Dato che l'andamento del campo di un dipolo dipende essenzialmente dal fatto che la corrente è concentrata in una regione molto piccola rispetto a  $\lambda$  (e dalla direzione della corrente stessa), conviene quindi esaminare se una sorgente costituita solo dai due fili verticali (quindi senza condensatore) sia utilizzabile come dipolo, ovviamente nella ipotesi che la sua lunghezza  $2\ell$  sia molto piccola rispetto a  $\lambda$ .

La struttura che consideriamo è riportata in Fig. 1.

Sappiamo che in regioni piccole rispetto a  $\lambda$  possiamo utilizzare i principi di Kirchhoff. Nel nostro caso questi ci dicono che  $I(\ell) = I(0)$ , e poichè  $I(\ell)$  è necessariamente nulla, allora anche la corrente sulla antenna è nulla. Quindi, apparentemente, una tale sorgente non funziona.

In realtà, i principi di Kirchhoff sono una ottima approssimazione, ma sempre una approssimazione. E una approssimazione non è utilizzabile quando il risultato approssimato è nullo.

Pertanto, essendo  $I(0) = I_A \neq 0$ , ci sarà una corrente non nulla sulla antenna. Essendo comunque l'antenna molto piccola tale corrente (non potendo essere costante) varierà linearmente con  $z$ :

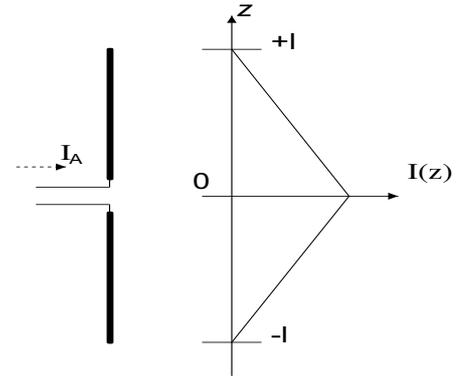


Fig 1: Geometria e corrente di un dipolo corto

$$I(z) = I_A \left( 1 - \frac{|z|}{\ell} \right) \quad (28)$$

Conseguenza di questo fatto è che vi sarà una carica accumulata lungo l'antenna. Se consideriamo un tratto  $\Delta z$  posto alla ascissa  $z$ , su di esso vi sarà una carica  $q(z) \Delta z$ . Per calcolarla consideriamo l'equazione di continuità della carica:

$$\text{corrente uscente} = -\frac{d}{dt} \text{carica contenuta}$$

che nel  $DF$ , e nel nostro caso, diventa

$$I(z + \Delta z) + [-I(z)] = -j\omega q(z) \Delta z \quad (29)$$

Risolvendo per la carica, e usando la (28), si ha

$$q(z) = \frac{1}{\Delta z} \frac{1}{-j\omega} \frac{dI(z)}{dz} \Delta z = \frac{1}{-j\omega} \frac{-I_A}{\ell} \quad (30)$$

La carica  $q(z)$  e quella  $q(-z)$  costituiscono un dipolo di momento  $2zq(z)$ . Il momento totale di dipolo sarà quindi

$$P_{tot} = \int_0^\ell 2zq(z) dz = \frac{I_A}{j\omega\ell} \int_0^\ell 2z dz = \frac{I_A}{j\omega\ell} 2 \frac{\ell^2}{2} = \frac{I_A \ell}{j\omega} \quad (31)$$

L'espressione di  $P_{tot}$  è simile a quella (21) del momento di dipolo di un dipolo elementare, ma il fattore geometrico coinvolto è la **metà** della lunghezza totale della sorgente. Ciò in

quanto la carica, per un dipolo corto, è distribuita lungo tutta la sorgente, e non concentrata alle estremità.

Il campo di un dipolo corto è quindi lo stesso di un dipolo elementare (se la corrente ha la stessa direzione), a patto di usare come ampiezza della sorgente  $I_A \ell$ .

## 12 POTENZA IRRADIATA DA UN DIPOLO

La potenza attiva irradiata da un dipolo (corto o elementare) può essere calcolata come flusso della parte reale del vettore di Poynting su una superficie qualunque che racchiude il dipolo <sup>1</sup>.

Convienne allora utilizzare una sfera di raggio  $R_0$  posta in campo lontano del dipolo.

In tal caso, infatti, il campo (punto per punto) è una onda piana che si propaga verso l'infinito in direzione  $\mathbf{i}_r$ , e quindi risulta

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\zeta} |\mathbf{E}_\infty|^2 \mathbf{i}_r \quad (32)$$

essendo  $\mathbf{E}_\infty$  il campo elettrico del dipolo calcolato a grande distanza.

Sostituendo l'espressione (26) del campo a grande distanza si ha

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\zeta} \frac{\zeta^2 |I|^2 h^2}{4\lambda^2 R_0^2} \sin^2 \theta \mathbf{i}_r \quad (33)$$

dove si è indicato con  $h$  la lunghezza del dipolo elementare oppure la semilunghezza nel caso di un dipolo corto.

Risulta  $dS = R_0^2 d\Omega = R_0^2 \sin \theta d\theta d\phi$  e quindi la potenza irradiata vale

$$\begin{aligned} P_{irr} &= \oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_r dS = \oint \frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2 R_0^2} \sin^2 \theta R_0^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2} \oint \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2} \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Possiamo esprimere la potenza irradiata come

$$P_{irr} = \frac{1}{2} \frac{2\pi\zeta}{3} |I|^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \quad (34)$$

da cui notiamo che la potenza, oltre ad essere proporzionale a  $|I|^2$ , aumenta al crescere di  $\frac{h}{\lambda}$ .

Possiamo anche esprimere la potenza irradiata in termini di momento di dipolo  $P$ . Essendo  $j\omega P = Ih$ , si trova sostituendo

$$P_{irr} = \frac{1}{2} \frac{2\pi\zeta}{3} \omega^2 |P|^2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

---

<sup>1</sup> La superficie può essere qualunque in quanto non vi è nè dissipazione, nè sorgenti all'esterno del dipolo

Ora  $\frac{1}{\lambda} = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi c}$ , essendo  $c$  la velocità della luce nel vuoto. Sostituendo

$$P_{irr} = \frac{1}{2} \frac{\zeta}{6\pi c^2} \omega^4 |P|^2 = \frac{1}{2} \frac{8\pi^3 \zeta c^2}{3} \frac{1}{\lambda^4} |P|^2 \quad (35)$$

La dipendenza della potenza irradiata dalla frequenza è del tipo  $\omega^4$ , ovvero  $\lambda^{-4}$ . Questa dipendenza è, ad esempio, responsabile del colore azzurro del cielo. La luce solare polarizza le molecole d'aria (con  $|P|$  costante), trasformandole in dipoli elettrici che reirradiano. La potenza reirradiata nel blu,  $\lambda = 400 \text{ nm}$ , è 16 volte più grande di quella reirradiata nel rosso,  $\lambda = 800 \text{ nm}$ , e quindi nella luce diffusa verso la terra è presente solo la prima.

### 13 POTENZA DISSIPATA ED EFFICIENZA DI IRRADIAZIONE

Da un punto di vista pratico sembrerebbe che, per irradiare con un dipolo una certa potenza, si possa scegliere in modo arbitrario  $|I|$  e  $h$ , col vincolo che il prodotto resti costante. In realtà le antenne, specie a bassa frequenza, sono realizzate con materiali non ideali: si ha quindi una dissipazione per effetto Joule, proporzionale a  $|I|^2$ . L'efficienza di radiazione  $\eta$ , definita da

$$\eta = \frac{\text{Potenza irradiata}}{\text{Potenza irradiata} + \text{Potenza dissipata}} \quad (36)$$

risulta quindi tanto maggiore quanto più piccola è la corrente. Questo è uno dei motivi che spinge a scegliere il valore di  $h$  il più grande possibile, compatibilmente con i vincoli realizzativi.

Per calcolare la potenza dissipata da un dipolo di raggio  $R$  conducibilità  $\sigma$ , dobbiamo considerare la struttura del dipolo, e in particolare se il filo da cui è costituito è pieno o vuoto (ovvero è un tubo). Qui ci limiteremo al caso di filo pieno. Si può allora utilizzare la potenza dissipata (e la resistenza) calcolate tenendo conto dell'effetto pelle. In particolare, si è trovato che la resistenza per unità di lunghezza vale<sup>1</sup>

$$R_{RF} = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{2\pi R \delta} \quad (37)$$

essendo  $\delta$  la profondità di penetrazione nel materiale di cui è costituito il dipolo stesso.

Poiché la corrente sul dipolo vale

$$I(z) = I_A \left(1 - \frac{|z|}{\ell}\right) \quad (38)$$

la potenza dissipata è data da

$$P_D = \frac{1}{2} R_{RF} \int_{-\ell}^{\ell} |I(z)|^2 dz \quad (39)$$

Sostituendo la (38) segue (usando la simmetria dell'integrando)

---

<sup>1</sup> L'espressione è stata trovata per un filo di sezione circolare. Tuttavia l'espressione della potenza dissipata e della resistenza si possono facilmente generalizzare (tenendo conto di come sono state ricavate) a sezioni regolari diverse, semplicemente sostituendo a  $2\pi R$  il perimetro della sezione.

$$\begin{aligned}
P_D &= \frac{1}{2} R_{RF} |I_A|^2 \int_{-\ell}^{\ell} \left(1 - \frac{|z|}{\ell}\right)^2 dz = \frac{1}{2} R_{RF} |I_A|^2 2 \int_0^{\ell} \left(1 - \frac{2z}{\ell} + \frac{z^2}{\ell^2}\right)^2 dz \\
&= R_{RF} |I_A|^2 \left[\ell - \frac{\ell^2}{\ell} + \frac{\ell^3}{3\ell^2}\right] = R_{RF} |I_A|^2 \frac{\ell}{3}
\end{aligned} \tag{40}$$

Sostituendo  $R_{RF}$  da (37) segue infine

$$P_D = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{2\pi R\delta} \frac{\ell}{3} |I_A|^2 = \frac{1}{6\pi} \frac{\ell}{\sigma\delta R} |I_A|^2 \tag{41}$$

La (41) mostra che la potenza dissipata cresce linearmente con  $\ell$  ( e non quadraticamente, come la potenza irradiata). L'efficienza di irradiazione vale quindi, da (36)

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \frac{2\pi\zeta}{3} |I_A|^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2}{\frac{1}{2} \frac{2\pi\zeta}{3} |I_A|^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 + \frac{\ell}{6\pi\sigma\delta R} |I_A|^2} = \frac{\frac{2\pi\zeta}{3} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2}{\frac{2\pi\zeta}{3} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 + \frac{\ell}{3\pi\sigma\delta R}} = \frac{2\pi\zeta \ell}{2\pi\zeta \ell + \frac{\lambda^2}{\pi\sigma\delta R}}$$

avendo usato (34,41). L'efficienza é, come atteso, una funzione decrescente della lunghezza  $2\ell$  del dipolo .

## 14 ANDAMENTO DEL CAMPO DI UN DIPOLO CORTO

Le normative italiane e internazionali impongono dei limiti al campo diffuso dell'ambiente, a protezione della salute. Questi limiti<sup>1</sup> riguardano tutte le grandezze di interesse, ovvero

---

<sup>1</sup> Nella lettura dei testi normativi va ricordato che i limiti sono sempre riferiti al valore efficace delle grandezze elettriche, anche a radiofrequenza. Questa convenzione é, per la RF, utilizzata solo in questo caso. Pertanto, in questo paragrafo, supporremo di aver tradotto i limiti di legge in limiti sul campo massimo.

$|\mathbf{E}|$ ,  $|\mathbf{H}|$  e  $|\mathbf{S}|$ . Questi limiti sono da verificare normalmente in campo vicino o intermedio (in campo lontano sono in genere largamente verificati), e poiché molte sorgenti, specie a bassa frequenza, sono modellabili come un dipolo (elementare o corto), allora conviene vedere più da vicino l'andamento del campo vicino di un dipolo<sup>2</sup>.

I campi del dipolo sono dati dalle equazioni (22). Conviene però esprimere tali campi in funzione della potenza irradiata (un parametro usabile anche per dipoli elementari e, soprattutto, per sorgenti approssimabili con dipoli. Dalla (34) segue

$$P_i = \frac{4\pi}{3} \frac{\zeta |I|^2 \ell^2}{4\lambda^2}$$

e quindi i campi possono essere espressi come

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}|^2 &= \left[ \frac{\zeta |I| \ell}{2\lambda r} \right]^2 \left[ \left| \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right|^2 4 \cos^2 \theta + \left| 1 + \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right|^2 \sin^2 \theta \right] \\ &= \left[ \frac{3\zeta P_i}{4\pi r^2} \right] \left\{ \left[ \left( \frac{1}{\beta r} \right)^2 + \left( \frac{1}{\beta r} \right)^4 \right] 4 \cos^2 \theta + \left[ \left( \frac{1}{\beta r} \right)^2 + \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 r^2} \right)^2 \right] \sin^2 \theta \right\} \\ |\mathbf{H}|^2 &= \left[ \frac{|I| \ell}{2\lambda r} \right]^2 \left| 1 + \frac{1}{j\beta r} \right|^2 \sin^2 \theta \\ &= \left[ \frac{3 P_i}{4\pi \zeta r^2} \right] \left[ 1 + \left( \frac{1}{\beta r} \right)^2 \right] \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (42)$$

Moltiplichiamo e dividiamo per  $\beta^2$  e poniamo  $X = 1/(\beta r)^2$ , in modo da avere una distanza normalizzata. Segue allora

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}|^2 &= \left[ \frac{3\zeta P_i}{4\pi} \right] \beta^2 X \left\{ [X + X^2] 4 \cos^2 \theta + [X + (1 - X)^2] \sin^2 \theta \right\} \\ &= \left[ \frac{3\zeta P_i}{4\pi} \right] \beta^2 \left\{ X^3 (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + X^2 (4 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + X \sin^2 \theta \right\} \\ |\mathbf{H}|^2 &= \left[ \frac{3 P_i}{4\pi \zeta} \right] \beta^2 X [1 + X] \sin^2 \theta = \left[ \frac{3 P_i}{4\pi \zeta} \right] \beta^2 [X^2 + X] \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (43)$$

Fissata la direzione  $\theta$ ,  $|\mathbf{H}|^2$  é chiaramente una funzione crescente di  $X$ , ovvero il campo magnetico si riduce di ampiezza al crescere di  $r$ . Analogo comportamento ha  $|\mathbf{E}|^2$ , anche se la

---

<sup>2</sup> In realtà vi sono anche molte sorgenti modellabili come un dipolo *magnetico*, ma vedremo più avanti che gli andamenti del campo di quest'ultimo hanno lo stesso andamento.

analisi é piú complessa<sup>3</sup>.

Allo stesso modo é immediato vedere che, fissato  $X$  (ovvero  $r$ ),  $|\mathbf{H}|^2$  é una funzione crescente di  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Per quanto riguarda invece  $|\mathbf{E}|^2$ , fissato  $X$ , la derivata della prima delle (43) rispetto a  $\theta$  vale

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} |\mathbf{E}|^2 &= \left[ \frac{3\zeta P_i}{4\pi} \right] \beta^2 X \left\{ -4 [X + X^2] 2 \cos \theta \sin \theta + [X + (1 - X)^2] 2 \sin \theta \cos \theta \right\} \\ &= \left[ \frac{3\zeta P_i}{4\pi} \right] \beta^2 X \left\{ -3X^2 - 5X + 1 \right\} 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (44)$$

Questa derivata si annulla, oltre che per  $X = 0$ , anche nell'unico zero positivo di  $-3X^2 - 5X + 1$ , ovvero in  $X = 0.18$ . Si trova che per  $X > 0.18$  (corrispondente a  $r < 0.375 \lambda$ ) la derivata (44) é negativa, ovvero  $|\mathbf{E}|^2$  é decrescente per  $\theta \in (0, \pi/2)$  ed ha il massimo in  $\theta = 0$ . Invece per  $X < 0.18$ , (corrispondente a  $r > 0.375 \lambda$ ) il modulo del campo elettrico é crescente ed ha un massimo in  $\theta = \pi/2$ .

Queste considerazioni ci aiutano a trovare la distanza minima  $R_E$  oltre la quale possiamo garantire che il campo elettrico é minore di un valore limite  $E_L$ .  $R_E$  é quindi definito come il piú piccolo  $r_E$  tale che

$$|\mathbf{E}(r > r_E)| \leq E_L \quad \forall \theta, \phi \quad (45)$$

Poiché il campo elettrico é decrescente con  $r$ , la (45) é equivalente a

$$\max_{\theta} |\mathbf{E}(R_E)| = E_L \quad (46)$$

in cui il massimo é calcolato sull'intervallo di interesse.

La (46) é una equazione di terzo grado. Per discuterne la soluzione conviene per prima cosa riscriverla come

$$\left\{ X^3 (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + X^2 (4 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + X \sin^2 \theta \right\} = \left( \frac{E_L^2}{\left[ \frac{3\zeta P_i}{4\pi} \right] \beta^2} \right) = e_L^2 \quad (47)$$

In particolare, in campo vicino ( $\beta r \ll 1$  ovvero  $X \gg 1$ ) possiamo usare le espressioni (26) per i campi. Questo equivale a sostituire alla (47) la

$$X^3 (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = X^3 (3 \cos^2 \theta + 1) = e_L^2 \quad (48)$$

---

<sup>3</sup> Se calcoliamo la derivata di  $|\mathbf{E}|^2$  rispetto a  $X$ , fissato  $\theta$ , si ha

$$\left[ \frac{3\zeta P_i}{4\pi} \right] \beta^2 \left\{ 3X^2 (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2X (4 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta \right\}$$

Questa derivata puó avere radici reali positive solo se il secondo coefficiente é negativo (*Teorema di Cartesio*), ovvero per  $\sin^2 \theta > 0.8$ , ma allora il suo discriminante

$$\begin{aligned} (4 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 - 3 (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sin^2 \theta &= (4 - 5 \sin^2 \theta)^2 - 3 (4 - 3 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta = \\ 25 \sin^4 \theta - 40 \sin^2 \theta + 16 - 12 \sin^2 \theta + 9 \sin^4 \theta &= 34 \sin^4 \theta - 52 \sin^2 \theta + 16 \end{aligned}$$

é negativo e le radici sono complesse.

per la quale la equazione (46) é di soluzione immediata.

In Fig. 1 é riportato l'errore relativo su  $X$  dovuto all'uso della (48) al posto della equazione corretta (47). Si vede che per  $e_L > 30$ , la (48) fornisce un errore inferiore al 5%. Se si accetta un errore del 10%, allora la (48) é utilizzabile per  $e_L > 10$ .

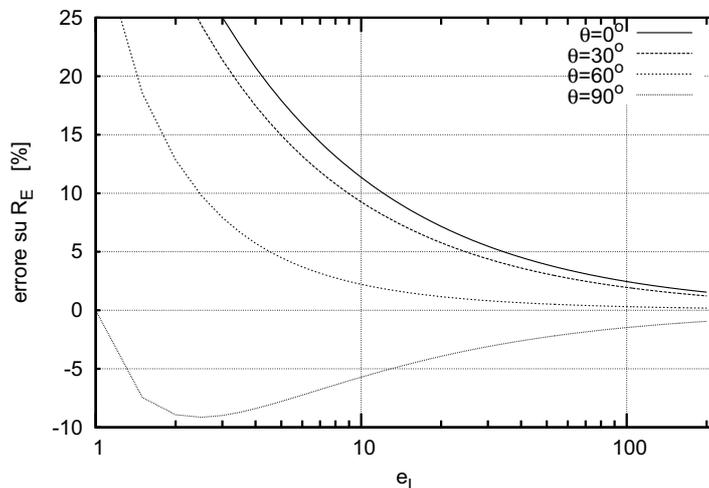


Fig. 1: Errore relativo nell'uso della (48).

In maniera analoga, se  $X$  é abbastanza piccolo (quindi in campo lontano, ma non solo), possiamo sostituire la (47) con

$$\{X^2 (4 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + X \sin^2 \theta\} = e_L^2 \quad (49)$$

eliminando il termine con  $X^3$  e ottenendo quindi una equazione di secondo grado.

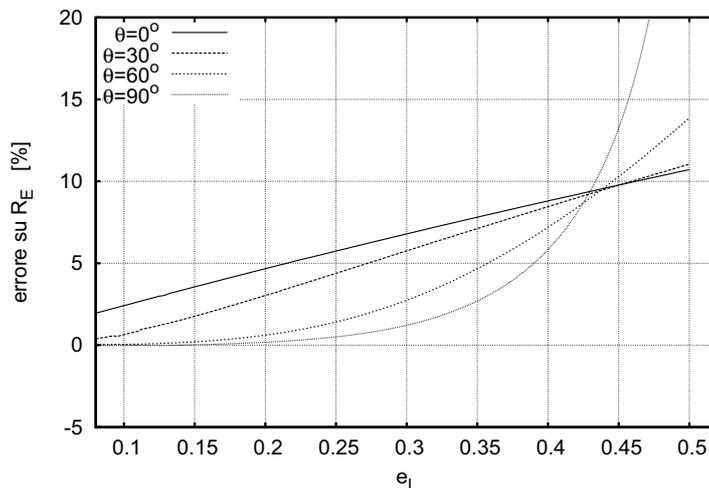


Fig. 2: Errore relativo nell'uso della (49).

In Fig. 2 é riportato l'errore relativo su  $X$  dovuto all'uso della (49) al posto della equazione corretta (47). Si vede che per  $e_L < 0.2$ , la (49) fornisce un errore inferiore al 5%. Se si accetta un errore del 10%, allora la (49) é utilizzabile per  $e_L < 0.4$ .

Per valori di  $e_L$  intermedi occorre risolvere l'equazione completa (47). In Fig. 3 é riportata la soluzione di tale equazione per alcuni valori di  $\theta$ . Per gli altri valori é comunque possibile interpolare.

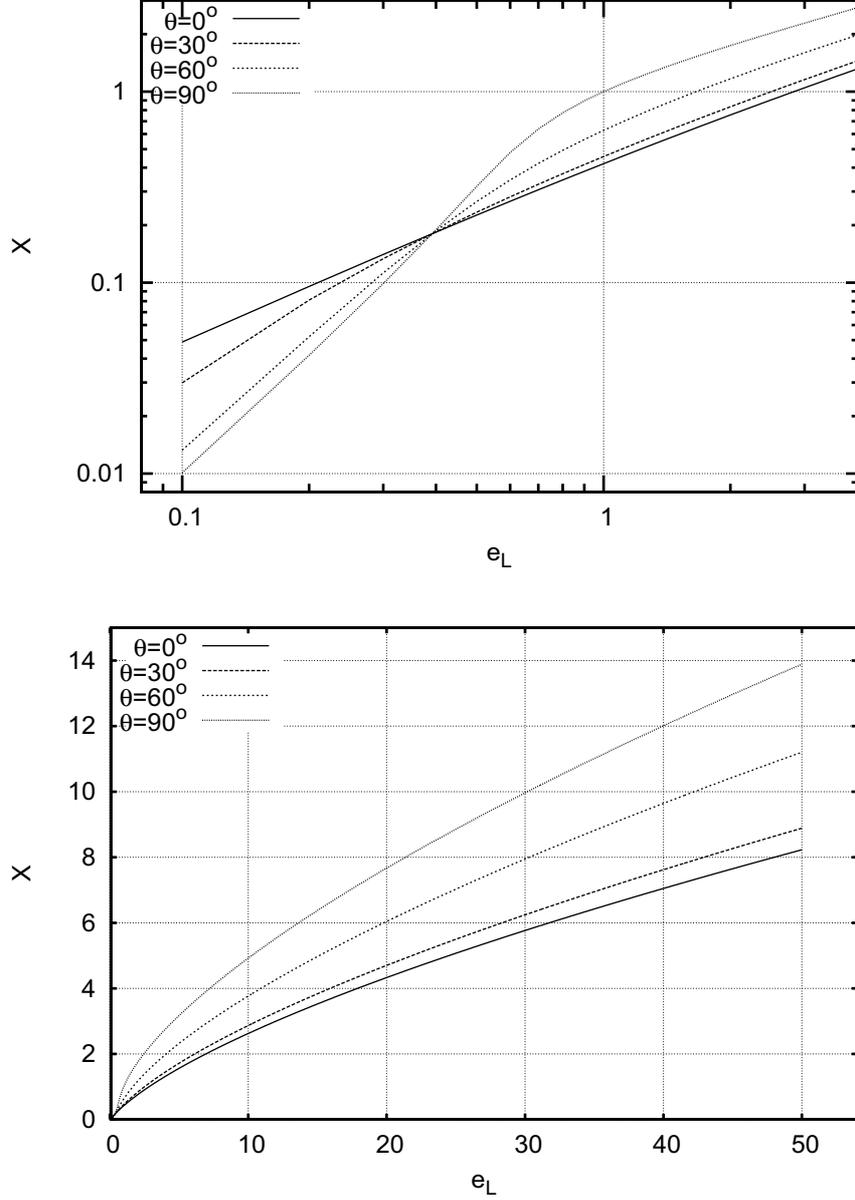


Fig. 3: Soluzione della (47).

Discorso simile, ma molto piú semplice, vale per il campo magnetico. La distanza minima  $R_H$  oltre la quale possiamo garantire che il campo magnetico é minore di un valore limite  $H_L$  si trova risolvendo l'equazione di secondo grado

$$\left[ \frac{3P_i}{4\pi\zeta} \right] \beta^2 [X^2 + X] = H_L^2 \quad (50)$$

Per quanto riguarda invece la densità di potenza, poichè il relativo limite è pari a  $(E_L H_L)/2$ , questo è sempre rispettato, se lo sono quelli sui campi elettrico e magnetico. Infatti si ha

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{2} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*| \leq \frac{1}{2} |\mathbf{E}| |\mathbf{H}| \leq \frac{1}{2} E_L H_L$$

## 15 ANTENNE – ALTEZZA EFFICACE

Il dipolo corto è il più semplice caso di *antenna* effettivamente realizzabile. Una antenna è un dispositivo che, se opportunamente alimentato, produce un campo elettromagnetico nello spazio.

Le forme possibili delle antenne sono le più svariate. Per i nostri scopi, comunque, le proprietà che ci interessano sono solo due:

- Ogni antenna ha una porta di ingresso per alimentarla. Se attraverso tale porta viene fatta scorrere una corrente  $I_A$ , l'antenna produce nello spazio un campo elettromagnetico (*effetto*) il cui valore è, in ogni punto, proporzionale alla corrente di alimentazione  $I_A$  (*causa*), in quanto, in elettromagnetismo, le relazioni causa–effetto sono lineari.
- Ogni antenna ha una dimensione massima. Per valutarla numericamente si può considerare la minima sfera che include completamente la antenna, e assegnare come dimensione della antenna il diametro  $D$  di tale sfera.

Dalle condizioni all'infinito cui deve soddisfare un campo elettromagnetico segue che tale campo, a distanza  $r$  dalla antenna sufficientemente grande, deve avere un andamento del tipo

$$\frac{e^{-j\beta r}}{r}$$

con  $r$ , mentre non ci sono vincoli sulla variazione con  $\theta, \phi$ . Tenendo anche conto che il campo deve essere localmente una onda piana, possiamo scrivere il campo di **qualsunque** antenna, alimentata da una corrente  $I_A$  nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= j \frac{\zeta I_A}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \mathbf{h}(\theta, \phi) \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\zeta} \mathbf{i}_r \times \mathbf{E} \end{aligned} \tag{51}$$

in cui il parametro  $\mathbf{h}(\theta, \phi)$  è caratteristico della singola antenna e fornisce le proprietà direzionali della antenna stessa, ovvero come il campo varia rispetto alle direzioni angolari  $\theta, \phi$ . Inoltre  $\mathbf{h}$  indica anche l'orientazione del campo elettrico. Sempre dalle proprietà del campo lontano, risulta che  $\mathbf{h}$  deve essere ortogonale a  $\mathbf{i}_r$ ,

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_r = 0$$

Il parametro  $\mathbf{h}(\theta, \phi)$  ha le dimensioni di una lunghezza, e si chiama *altezza efficace* della antenna. Per un dipolo elementare di lunghezza  $\Delta z$ , confrontando (51) con (26) risulta

$$\mathbf{h}(\theta, \phi) = \Delta z \sin \theta \mathbf{i}_\theta \quad (52)$$

e per un dipolo corto di lunghezza  $2\ell$

$$\mathbf{h}(\theta, \phi) = \ell \sin \theta \mathbf{i}_\theta \quad (53)$$

Le altezze efficaci (e quindi i campi) di tali antenne sono indipendenti da  $\phi$  per la simmetria delle antenne stesse.

Le espressioni (51) sono state ricavate dalle proprietà del campo all'infinito. In realtà esse valgono (con ottima approssimazione) nella zona lontana della antenna (detta anche zona di Fraunhofer) caratterizzata dal verificarsi di **tutte** le seguenti condizioni per la distanza  $r$  tra il punto-campo e la antenna

$$\beta \left[ r - \frac{D}{2} \right] \gg 1 \quad r \gg \frac{D}{2} \quad r > \frac{2D^2}{\lambda}$$

che possiamo riscrivere, per avere tutte valutazioni quantitative (e con errori paragonabili), come

$$\left[ r - \frac{D}{2} \right] > \frac{10}{\beta} = \frac{5\lambda}{\pi} \quad r > 5D \quad r > \frac{2D^2}{\lambda}$$

Naturalmente, al variare della frequenza e della dimensione della antenna, il *collo di bottiglia* sarà una o l'altra di esse.

Convieni allora considerare, in un diagramma, tutte le possibili condizioni. Il diagramma può essere in due dimensioni in quanto ciò che conta sono  $r/\lambda$  e  $D/\lambda$ . Le relazioni precedenti diventano allora

$$\frac{r}{\lambda} > \frac{1}{2} \frac{D}{\lambda} + \frac{5}{\pi} \quad \frac{r}{\lambda} > 5 \frac{D}{\lambda} \quad (54)$$

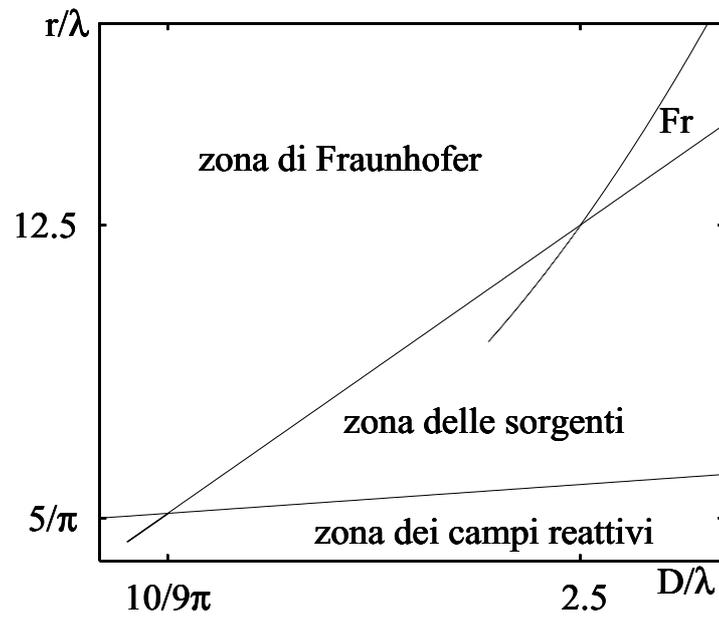
$$\frac{r}{\lambda} > 2 \left( \frac{D}{\lambda} \right)^2 \quad (55)$$

ciascuna di queste condizioni divide il diagramma  $r/\lambda$  in funzione di  $D/\lambda$  riportato in Fig. 1 in due regioni. I confini di tali regioni sono due rette per le condizioni (54), e un arco di parabola per la condizione (55).

La zona di Fraunhofer è quella in alto a sinistra. La restante parte viene detta di campo vicino, ed è divisa in due regioni. Quella in cui non vale la prima delle condizioni (54) viene detta zona dei campi reattivi. Si può infatti verificare che al di fuori di questa zona le densità di energia elettrica e magnetica sono uguali, mentre in questa zona sono diversi, e quindi vi è flusso di potenza reattiva. La zona intermedia è detta *zona delle sorgenti* perchè in essa la sorgente non viene vista come puntiforme ma estesa, benchè il flusso di potenza sia puramente reale.

Nella Fig. 1 è poi evidenziata anche un'altra zona, che esiste solo per sorgenti grandi, ed è indicata con Fr. Tale zona è detta di Fresnel, ed in essa il campo ha tutte le caratteristiche della zona lontana, salvo il fatto che l'onda e', anche localmente, sferica.

Il campo in zona lontana è quello che viene generalmente considerato per i collegamenti radio. L'interesse per la zona vicina è cresciuto solo di recente in quanto i limiti normativi sulle esposizioni della popolazione vanno essenzialmente verificati nella zona delle sorgenti, in quanto, per le antenne che tipicamente si usano nelle aree urbane, il campo nella zona di Fraunhofer è molto più basso dei limiti stessi. La zona dei campi reattivi è invece molto piccola. Per le



*Fig. 1: Regioni di campo lontano e campo vicino.*

antenne per telefonia cellulare, ad esempio, tale zona termina a 2-3 metri dalla antenna, una zona in cui l'accesso della popolazione è normalmente interdetto. Il campo in tale zona, quindi, interessa soprattutto per chi si occupa della manutenzione degli impianti.