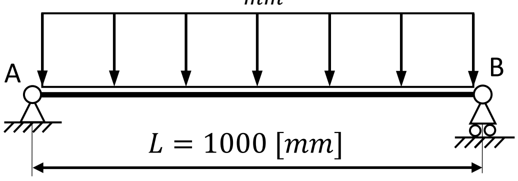
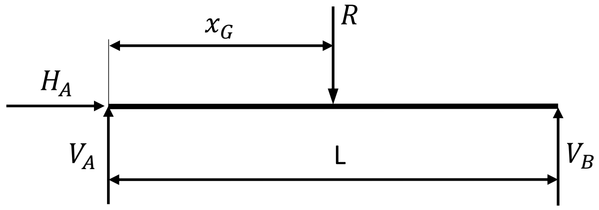
Esercizio N.1

$$q(x) = q_0 = 1\ \left[\frac{N}{mm}\right]$$





I due sistemi sono "*staticamente equivalenti*" se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} R = \int_0^L q(x)\cdot dx = q_0 \int_0^L dx = q_0 L \\ M = R\cdot x_G = \int_0^L q(x)\, x dx = q_0 \int_0^L x dx = \dfrac{q_0 L^2}{2} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo la posizione x_G della risultate R del carico distribuito:

$$x_G = \frac{M}{R} = \frac{\frac{q_0 L^2}{2}}{q_0 L} = \frac{L}{2}$$

A questo punto è possibile il calcolo delle reazioni a terra V_A e V_B.

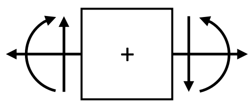
EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA.

$$\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - R = 0 \\ \sum_A M = V_B L - R x_G = 0 \end{cases}$$

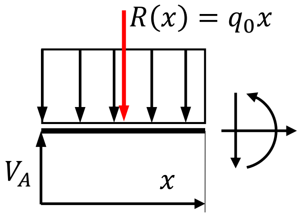
da cui ricaviamo:

1) Dalla prima equazione: $H_A = 0$
2) Dalla terza equazione: $V_B = \frac{R x_G}{L} = \frac{(q_0 L)\left(\frac{L}{2}\right)}{L} = \frac{q_0 L}{2}$
3) Dalla seconda equazione: $V_A = R - V_B = q_0 L - \frac{q_0 L}{2} = \frac{q_0 L}{2}$

EQUAZIONI DELLE AZIONI INTERNE.

Convenzione sui segni: 

A) Metodo diretto



$$\begin{cases} \sum F_x = N(x) = 0 \\ \sum F_y = T(x) - V_A + R(x) = 0 \\ \sum_x M = M(x) + R(x)\dfrac{x}{2} - V_A x = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo:

1) Dalla prima equazione: $N(x) = 0$
2) Dalla seconda equazione: $T(x) = V_A - R(x) = \frac{q_0 L}{2} - q_0 x = q_0\left(\frac{L}{2} - x\right)$
3) Dalla terza equazione: $M(x) = V_A x - R(x)\frac{x}{2} = \frac{q_0 L}{2}x - q_0\frac{x^2}{2} = \frac{q_0 x}{2}(L - x)$

B) Metodo differenziale

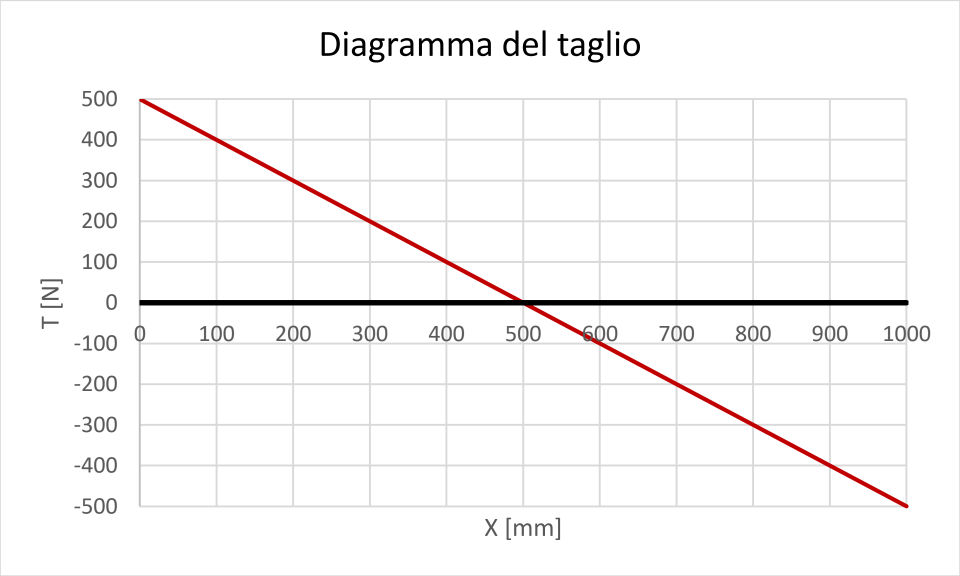
$$\frac{dT}{dx} = -q(x) \qquad \frac{dM}{dx} = T(x)$$

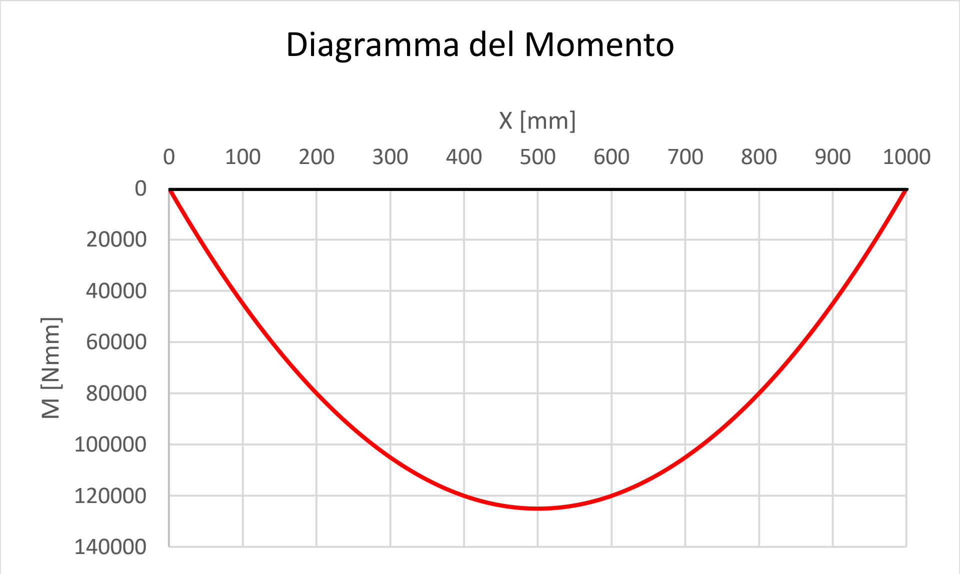
Dalla prima abbiamo:

$$T(x) = T(0) - \int_0^x q(x)dx = V_A - q_0 x = \frac{q_0 L}{2} - q_0 x = q_0\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

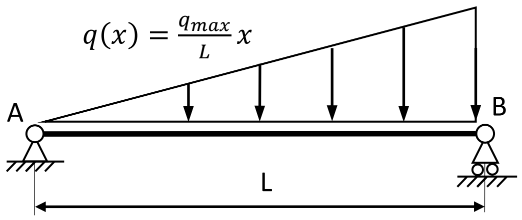
$$M(x) = M(0) + \int_0^x T(x)dx = \int_0^x q_0\left(\frac{L}{2} - x\right)dx = q_0\left(\frac{L}{2}x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{q_0 x}{2}(L - x)$$

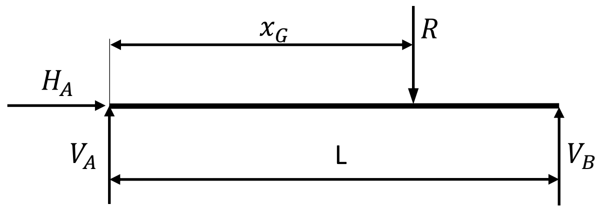
Nell'ultima equazione è stato posto $M(0) = 0$, in quanto nel punto A c'è una cerniera a terra.





Esercizio N.2





I due sistemi sono "*staticamente equivalenti*" se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} R = \int_0^L q(x) \cdot dx = \frac{q_{max}}{L} \int_0^L x \cdot dx = \frac{q_{max}}{L} \frac{L^2}{2} = \frac{q_{max} L}{2} \\ M = R \cdot x_G = \int_0^L q(x)\, x dx = \frac{q_{max}}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{q_{max}}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{q_{max} L^2}{3} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo la posizione della risultate del carico distribuito:

$$x_G = \frac{M}{R} = \frac{\frac{q_{max} L^2}{3}}{\frac{q_{max} L}{2}} = \frac{2L}{3}$$

A questo punto è possibile il calcolo delle reazioni a terra V_A e V_B.

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA.

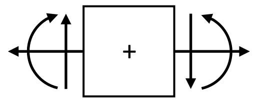
$$\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - R = 0 \\ \sum_A M = V_B L - R x_G = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo:

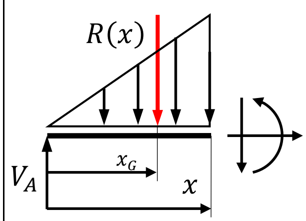
1) Dalla prima equazione: $H_A = 0$
2) Dalla terza equazione: $V_B = \frac{R x_G}{L} = \frac{\left(\frac{q_{max} L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}{L} = \frac{q_{max} L}{3}$
3) Dalla seconda equazione: $V_A = R - V_B = \frac{q_{max} L}{2} - \frac{q_{max} L}{3} = \frac{q_{max} L}{6}$

EQUAZIONI DELLE AZIONI INTERNE.

Convenzione sui segni:



A) Metodo diretto



La risultante $R(x)$ del carico che agisce nel tratto 0÷x vale:

$$R(x) = \frac{q(x) \cdot x}{2} = \frac{\frac{q_{max}}{L} \cdot x^2}{2} = \frac{x^2 \cdot q_{max}}{2L}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = N(x) = 0 \\ \sum F_y = T(x) - V_A + R(x) = 0 \\ \sum_x M = M(x) + R(x) x_G - V_A x = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo:

1) Dalla prima equazione: $N(x) = 0$
2) Dalla seconda equazione: $T(x) = V_A - R(x) = \frac{q_{max}L}{6} - \frac{x^2 \cdot q_{max}}{2L} = \frac{q_{max}L}{6}\left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$
3) Dalla terza equazione: $M(x) = V_A x - R(x)x_G = \frac{q_{max}L}{6}x - \left(\frac{x^2 \cdot q_{max}}{2L}\right)\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{q_{max}L^2}{6}\left[\frac{x}{L} - \frac{x^3}{L^3}\right]$

B) Metodo differenziale: $\frac{dT}{dx} = -q(x)$ $\frac{dM}{dx} = T(x)$

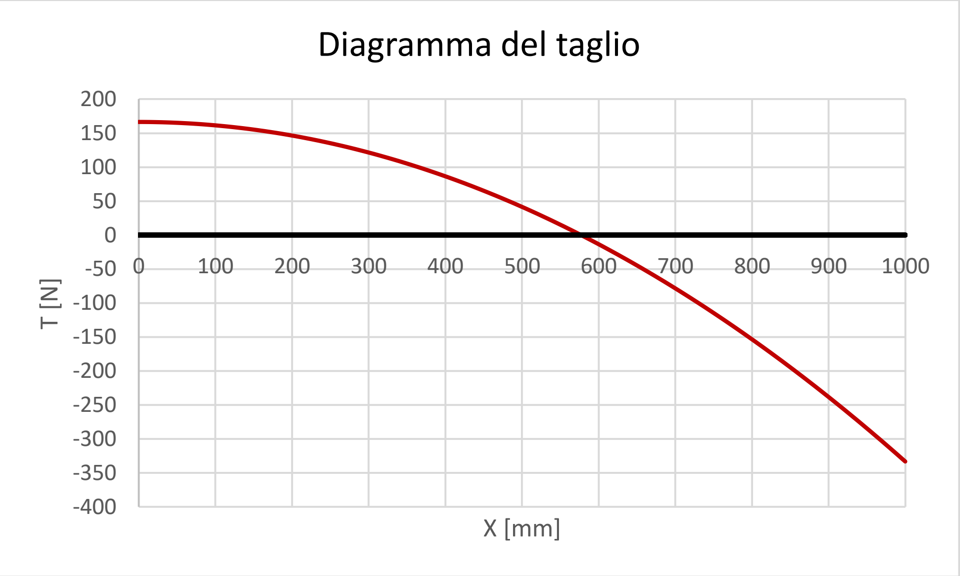
Dalla prima abbiamo:

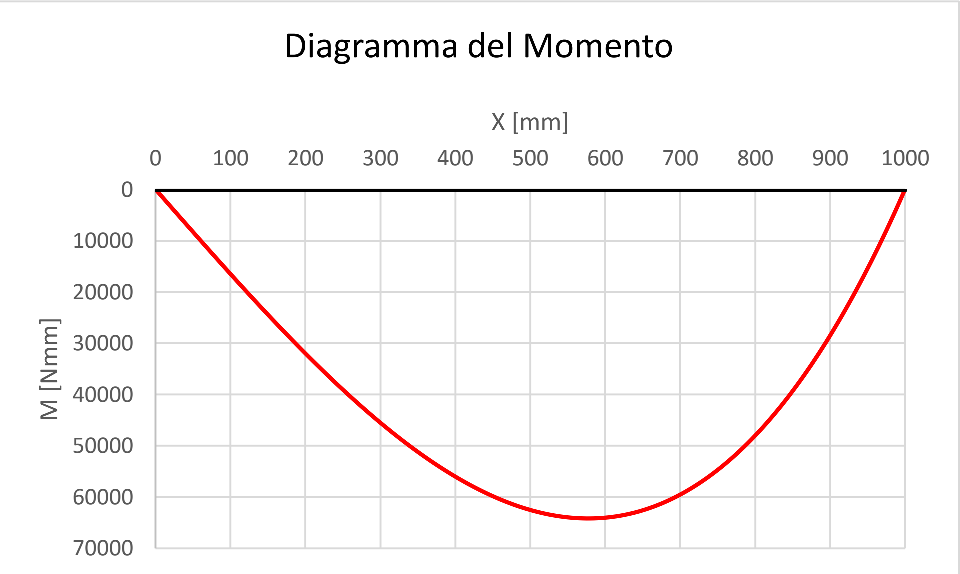
$$T(x) = T(0) - \int_0^x q(x)dx = V_A - \frac{q_{max}}{L}\int_0^x xdx = \frac{q_{max}L}{6} - \frac{q_{max}}{2L}x^2 = \frac{q_{max}L}{6}\left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$M(x) = M(0) + \int_0^x T(x)dx = \frac{q_{max}L}{6}\int_0^x \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]dx = \frac{q_{max}L}{6}\left(x - \frac{x^3}{L^2}\right) = \frac{q_{max}L^2}{6}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

Nell'ultima equazione è stato posto $M(0) = 0$, in quanto nel punto A c'è una cerniera a terra.

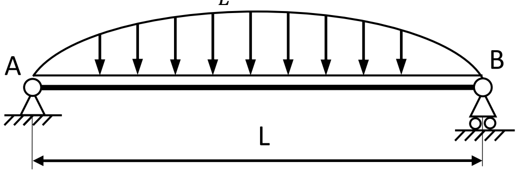
Posto $q_{max} = 1\ [\frac{N}{mm}]$ e $L = 1000\ [mm]$ i diagrammi sono i seguenti:

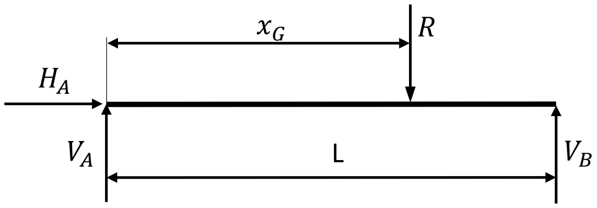




Esercizio N.3

$$q(x) = \frac{4q_{max}}{L^2}x(L-x)$$





I due sistemi sono "*staticamente equivalenti*" se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} R = \displaystyle\int_0^L q(x)\cdot dx = \frac{4q_{max}}{L^2}\int_0^L x(L-x)\cdot dx = \frac{4q_{max}}{L^2}\left(\frac{L^3}{2}-\frac{L^3}{3}\right) = \frac{2q_{max}L}{3} \\ M = R\cdot x_G = \displaystyle\int_0^L q(x)\,xdx = \frac{4q_{max}}{L^2}\int_0^L x^2(L-x)\cdot dx = \frac{4q_{max}}{L^2}\left(\frac{L^4}{3}-\frac{L^4}{4}\right) = \frac{q_{max}L^2}{3} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo la posizione della risultate del carico distribuito:

$$x_G = \frac{M}{R} = \frac{\frac{q_{max}L^2}{3}}{\frac{2q_{max}L}{3}} = \frac{L}{2}$$

A questo punto è possibile il calcolo delle reazioni a terra V_A e V_B.

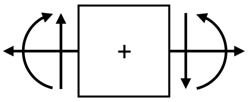
EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA: $\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - R = 0 \\ \sum_A M = V_B L - R x_G = 0 \end{cases}$

da cui ricaviamo:

1) Dalla prima equazione: $H_A = 0$
2) Dalla terza equazione: $V_B = \frac{Rx_G}{L} = \frac{\left(\frac{2q_{max}L}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right)}{L} = \frac{q_{max}L}{3}$
3) Dalla seconda equazione: $V_A = R - V_B = \frac{2q_{max}L}{3} - \frac{q_{max}L}{3} = \frac{q_{max}L}{3}$

EQUAZIONI DELLE AZIONI INTERNE.

Convenzione sui segni:



Metodo differenziale

$$\frac{dT}{dx} = -q(x) \qquad \frac{dM}{dx} = T(x)$$

Dalla prima abbiamo:

$$T(x) = T(0) - \int_0^x q(x)dx = V_A - \frac{4q_{max}}{L^2}\int_0^x x(L-x)dx = \frac{q_{max}L}{3} - \frac{4q_{max}}{L^2}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$$

Poiché nel punto A c'è una cerniera, abbiamo: $M(x=0) = 0$. Da cui:

$$M(x) = M(0) + \int_0^x T(x)dx = q_{max}\int_0^x \left[\frac{L}{3} - \frac{4}{L^2}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right]dx = q_{max}\left[\frac{L}{3}x - \frac{4}{L^2}\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right)\right]$$

Riordinando abbiamo:

$$T(x) = \frac{q_{max}}{3L^2}\left[L^3 - 6Lx^2 + 4x^3\right]$$

$$M(x) = \frac{q_{max}}{3L^2} x[L^3 - 2Lx^2 + x^3]$$

Derivando due volte l'espressione del momento abbiamo che: $\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x)$

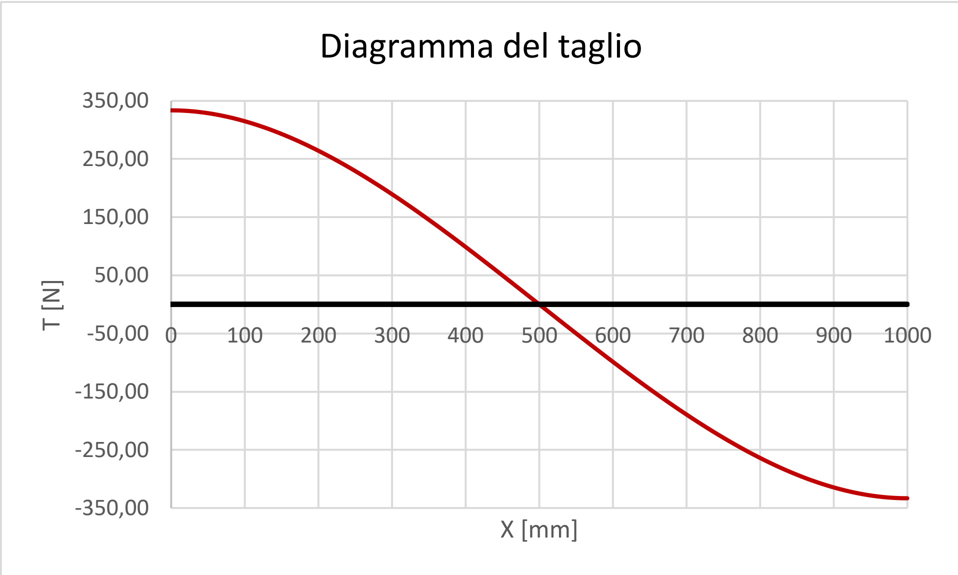
Quando $x = 0$ abbiamo: $T(x = 0) = \frac{q_{max}L}{3} = V_A$ $\quad M(x = 0) = 0$

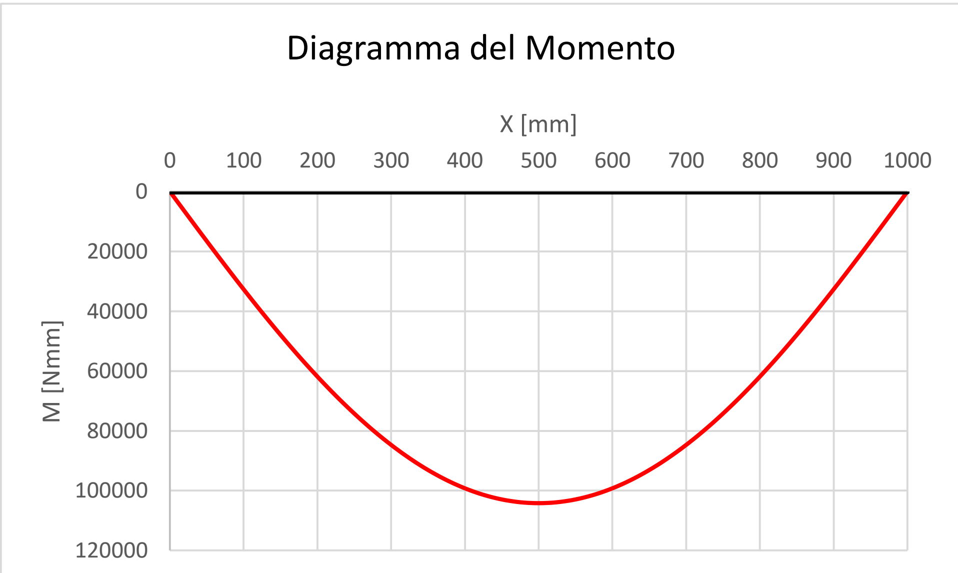
Quando $x = \frac{L}{2}$ abbiamo: $T\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{q_{max}}{6L^2}[2L^3 - 3L^3 + L^3] = 0$

$M\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{q_{max}L^2}{48}$ Valore massimo

Quando $x = L$ abbiamo: $T(x = L) = \frac{q_{max}}{3L^2}[L^3 - 6L^3 + 4L^3] = -\frac{q_{max}L}{3} = -V_B$ $\quad M(x = L) = 0$

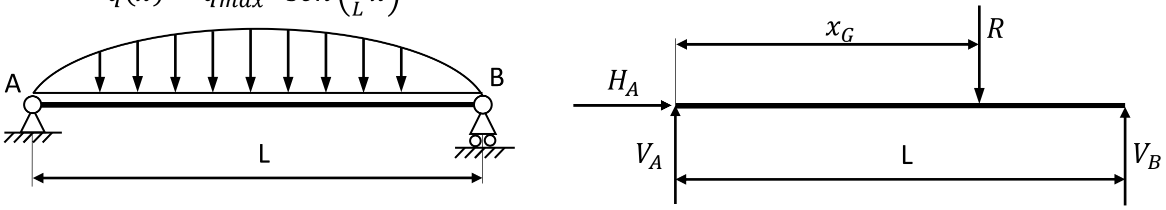
Posto $q_{max} = 1\ [\frac{N}{mm}]$ e $L = 1000\ [mm]$ i diagrammi sono i seguenti:





Esercizio N.4

$q(x) = q_{max} \cdot sen\left(\frac{\pi}{L}x\right)$



I due sistemi sono "*staticamente equivalenti*" se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} R = \int_0^L q(x) \cdot dx = q_{max} \int_0^L sen\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cdot dx = \frac{q_{max}L}{\pi}\left[-cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]_0^L = \frac{2q_{max}L}{\pi} \\ M = R \cdot x_G = \int_0^L q(x)\, xdx = q_{max} \int_0^L x \cdot sen\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cdot dx = \frac{q_{max}L^2}{\pi} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo la posizione della risultate del carico distribuito:

$$x_G = \frac{M}{R} = \frac{\frac{q_{max}L^2}{\pi}}{\frac{2q_{max}L}{\pi}} = \frac{L}{2}$$

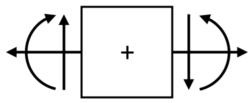
A questo punto è possibile il calcolo delle reazioni a terra V_A e V_B.

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA: $\begin{cases} \sum F_x = H_A = 0 \\ \sum F_y = V_A + V_B - R = 0 \\ \sum_A M = V_B L - R x_G = 0 \end{cases}$

da cui ricaviamo:

1) Dalla prima equazione: $H_A = 0$
2) Dalla terza equazione: $V_B = \frac{Rx_G}{L} = \frac{\left(\frac{2q_{max}L}{\pi}\right)\left(\frac{L}{2}\right)}{L} = \frac{q_{max}L}{\pi}$
3) Dalla seconda equazione: $V_A = R - V_B = \frac{2q_{max}L}{\pi} - \frac{q_{max}L}{\pi} = \frac{q_{max}L}{\pi}$

EQUAZIONI DELLE AZIONI INTERNE.

Convenzione sui segni: 

Metodo differenziale

$$\frac{dT}{dx} = -q(x) \qquad \frac{dM}{dx} = T(x)$$

Dalla prima abbiamo:

$$T(x) = T(0) - \int_0^x q(x)dx = V_A - q_{max}\int_0^x sen\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx = \frac{q_{max}L}{\pi} + \frac{q_{max}L}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\Big|_0^x = \frac{q_{max}L}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

Poiché nel punto A c'è una cerniera, abbiamo: $M(x = 0) = 0$. Da cui:

$$M(x) = M(0) + \int_0^x T(x)dx = \frac{q_{max}L}{\pi}\int_0^x cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx = q_{max}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 sen\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

Quando $x = 0$ abbiamo: $T(x = 0) = \frac{q_{max}L}{\pi} = V_A$ $M(x = 0) = 0$

Quando $x = \frac{L}{2}$ abbiamo: $T\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0$

$M\left(x = \frac{L}{2}\right) = q_{max}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2$ Valore massimo

Quando $x = L$ abbiamo: $T(x = L) = -\frac{q_{max}L}{\pi} = -V_B$ $M(x = L) = 0$

Posto $q_{max} = 1\ [\frac{N}{mm}]$ e $L = 1000\ [mm]$ i diagrammi sono i seguenti: