ANALISI LINEARE DELLE STRUTTURE

STRUTTURE - CONCETTI FONDAMENTALI

<u>Struttura</u> → si definisce struttura un corpo continuo o un insieme di corpi connessi tra loro e opportunamente vincolati, soggetti ad azioni applicate in punti diversi, in grado di trasferire i carichi.

Lo scopo dell'analisi strutturale è quello di determinare lo stato di cimento del sistema in questione in termini di distribuzione delle azioni interne.

In questo corso ci occuperemo soltanto di elementi strutturali monodimensionali (travi).

L'obiettivo è far dipendere il comportamento dell'intero sistema strutturale da quello relativo a un numero finito di suoi punti di modo che lo studio possa essere ricondotto alla determinazione di spostamenti e sforzi ad essi relativi.

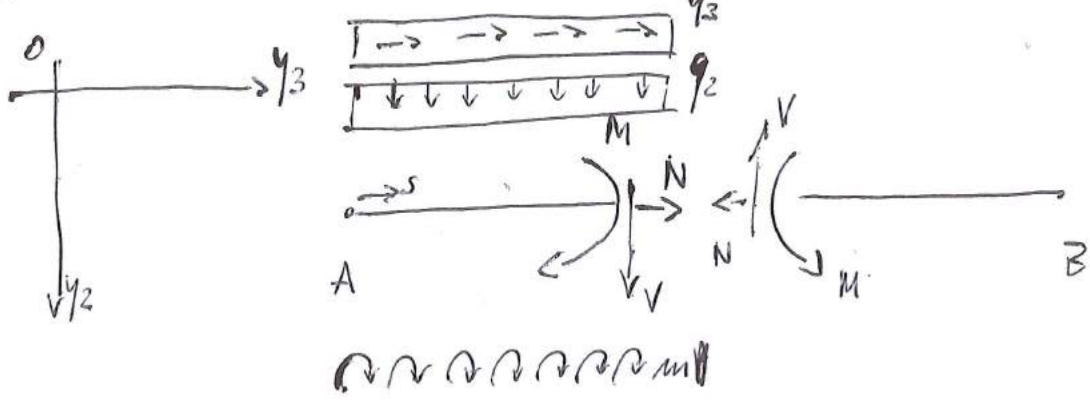
Ciò si verifica, ad esempio, nelle cosiddette <u>strutture a scheletro o strutture intelaiate</u>:

strutture composte da elementi monodimensionali (travi) le cui caratteristiche di risposta si fanno dipendere da quelle valutabili nei punti di incrocio: nodi

— MECCANICA STRUTTURALE DISCRETA <u>ELASTICA</u> <u>LINEARE</u>

– SISTEMI PIANI

Nello specifico ci occuperemo di sistemi di trave piani il cui asse longitudinale è contenuto in un piano che è anche piano di simmetria rispetto alle caratteristiche geometriche e di carico.

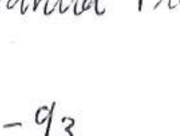


Le equazioni indefinite di un elementino di trave RETTILINEA (o a curvatura trascurabile) risultano:

$$\frac{dN}{ds} = -q_3 \qquad \frac{dV}{ds} = -q_2 \qquad \frac{dM}{ds} = V - m$$

In riferimento alla teoria di De Saint-Venant, ci troviamo di fronte ad un problema in cui flessione e taglio sono retti (non deviati).

Sono considerati gli spostamenti, le rotazioni e le corrispondenti deformazioni:



$$\frac{du_3}{ds} = \frac{N}{EA} \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ} \qquad \frac{du_2}{ds} = \frac{\chi V}{GA}$$

MOD ELASTICO LONGIT.

MOM. INERZIA

FATT. TAGLIO

MOD. ELASTICO A TAGLIO

Possiamo raggruppare le strutture in 3 categorie principali:

- labili → per condizioni generiche di carico l'equilibrio non è possibile
- isostatiche → le equazioni di equilibrio ammettono un'unica soluzione e consentono di determinare univocamente le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione sezione per sezione
- iperstatiche → le equazioni di equilibrio ammettono ∞^n soluzioni con n-gradi di iperstaticità. È necessario risolvere il problema usando altre equazioni (anche di tipo energetico - congruenza)

Al fine di risolvere il nostro problema vi sono 3 tipi di condizioni che il sistema da analizzare deve soddisfare:

1 - Leggi costitutive del materiale e condizioni geometriche
2 - Condizioni di Congruenza: spostamenti delle sezioni di estremità della struttura devono essere compatibili con gli spostamenti ai nodi e con le eventuali condizioni di vincolo.

3- Condizioni di equilibrio

Possiamo classificare i metodi di calcolo dell'analisi strutturale in base all'ordine con cui i gruppi di condizioni vengono imposti alla struttura:

A) METODI DELLE FORZE:
si parte da una situazione equilibrata imponendo successivamente il rispetto delle condizioni di congruenza
Incognite statiche: FORZE

B) METODI DEGLI SPOSTAMENTI:
si parte da una situazione congruente e si perviene successivamente ad una situazione che rispetti la congruenza.
Incognite cinematiche: SPOSTAMENTI

È spesso possibile individuare dei problemi per cui è sufficiente una sola coppia di parametri (una forza F ed uno spostamento u) a caratterizzare completamente la risposta strutturale:

$$F = K \cdot u$$

COEFF. DI RIGIDEZZA K:

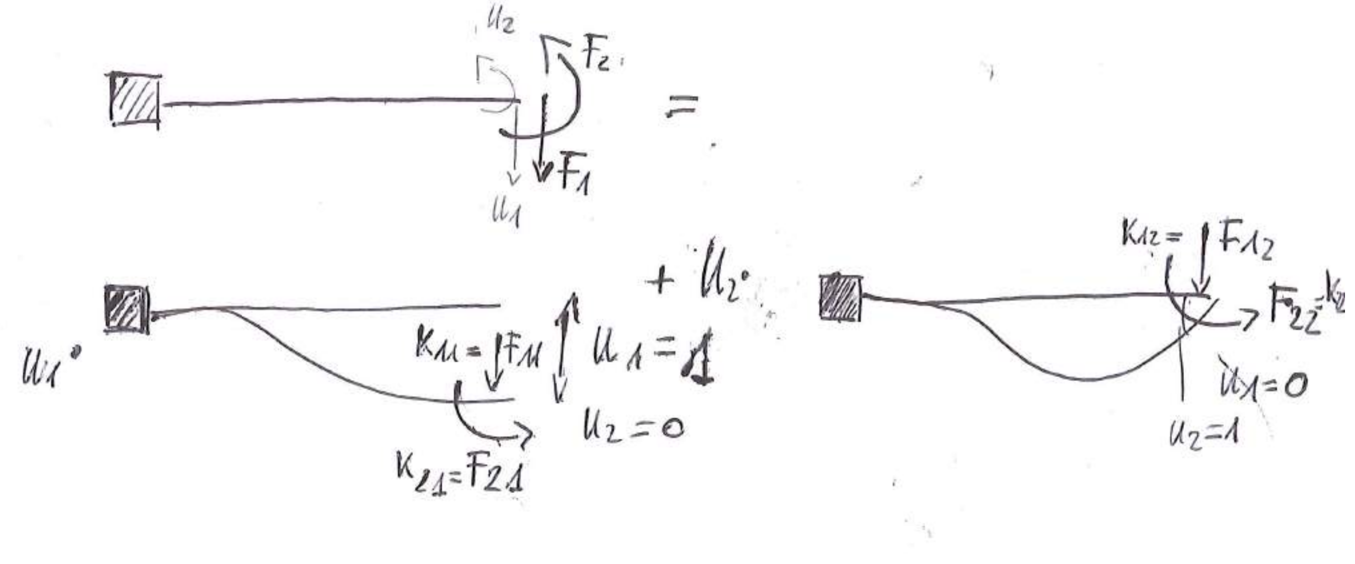
| Forza da associare alla coordinata prescelta quando il corrispondente spostamento è unitario $u=1$ |

Una maniera alternativa per descrivere il comportamento strutturale è basata sullo impiego del coeff. di deformabilità h:

$$u = h \cdot F$$

Spostamento corrispondente all'applicazione di una forza unitaria.

Consideriamo la seguente mensola il cui comportamento risulta completamente descritto attraverso le 2 coordinate che individuano la forza ed il momento, o lo spostamento e la rotazione in estremità:



K_{11} e K_{21} sono le forze da applicare in corrispondenza delle coordinate 1 e 2 per realizzare la configurazione corrispondente a $u_1 = 1$, $u_2 = 0$.

In generale quindi K_{iJ} è la forza da applicare alla coordinata i per realizzare la configurazione corrispondente a $u_J = 1$ e $u_i = 0$.

$$F_{iJ} = K_{iJ} \cdot u_J$$

È possibile scrivere le equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} F_1 = K_{11} \cdot u_1 + K_{12} \cdot u_2 & \text{eq. traslazione} \\ F_2 = K_{21} \cdot u_1 + K_{22} \cdot u_2 & \text{eq. rotazione} \end{cases}$$

che si sintetizza in:

$$\{F\} = [K] \cdot \{u\}$$

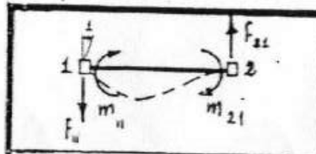
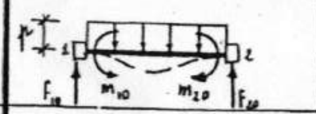
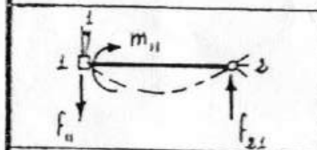
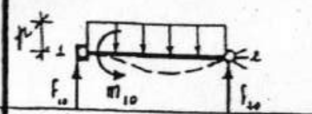
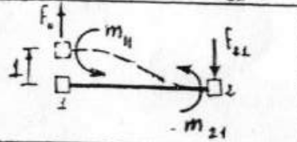
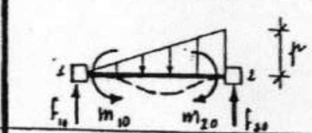
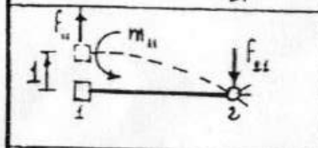
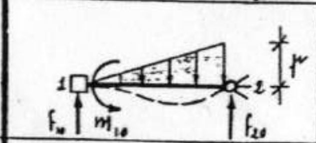
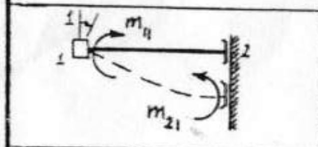
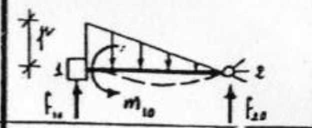
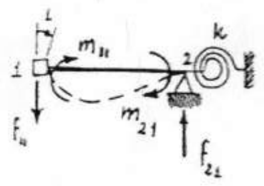
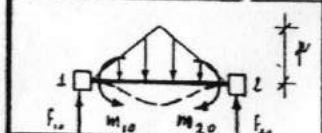
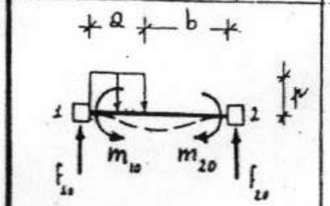
Trascurando gli effetti del taglio sulla deformazione si può facilmente dimostrare:

$$K_{11} = \frac{12 EJ}{l^3} \qquad K_{21} = \frac{6EJ}{l^2}$$

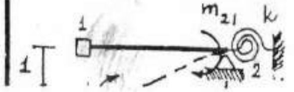
$$K_{12} = \frac{6EJ}{l^2} \qquad K_{22} = \frac{4EJ}{l}$$

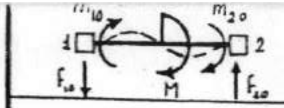
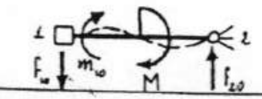
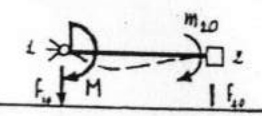
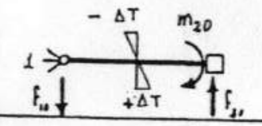
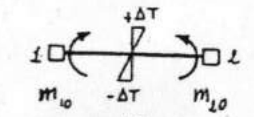
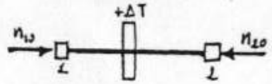
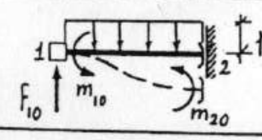
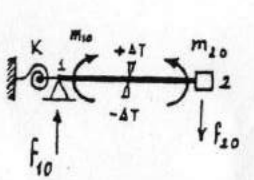
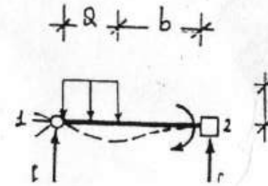
Matrice K sym! VEDI TABELLA MDS

MOMENTI E FORZE NODALI
(METODO DEGLI SPOSTAMENTI)

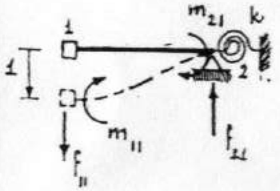
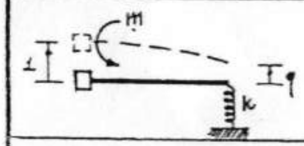
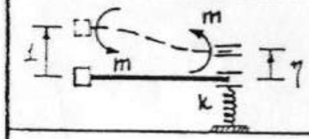
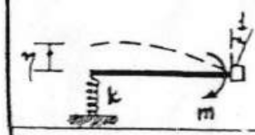
	$m_{11}=\dfrac{4EJ}{\ell}$ $m_{21}=\dfrac{2EJ}{\ell}$ $f_{11}=f_{21}=\dfrac{6EJ}{\ell^2}$		$m_{10}=m_{20}=\dfrac{p\ell^2}{12}$ $f_{10}=f_{20}=\dfrac{p\ell}{2}$
	$m_{11}=\dfrac{3EJ}{\ell}$ $(m_{21}=0)$ $f_{11}=f_{21}=\dfrac{3EJ}{\ell^2}$		$m_{10}=\dfrac{p\ell^2}{8}$ $f_{10}=\dfrac{5}{8}p\ell$ $f_{20}=\dfrac{3}{8}p\ell$
	$m_{11}=m_{21}=\dfrac{6EJ}{\ell^2}$ $f_{11}=f_{21}=\dfrac{12EJ}{\ell^3}$		$m_{10}=\dfrac{p\ell^2}{30}$ $m_{20}=\dfrac{p\ell^2}{20}$ $f_{10}=0{,}15\,p\ell$ $f_{20}=0{,}35\,p\ell$
	$m_{11}=\dfrac{3EJ}{\ell^2}$ $f_{11}=f_{21}=\dfrac{3EJ}{\ell^3}$		$m_{10}=0{,}05833\,p\ell^2$ $f_{10}=0{,}225\,p\ell$ $f_{20}=0{,}275\,p\ell$
	$m_{11}=m_{21}=\dfrac{EJ}{\ell}$ $f_{11}=f_{21}=0$		$m_{10}=\dfrac{p\ell^2}{15}$ $f_{10}=0{,}4\,p\ell$ $f_{20}=\dfrac{p\ell}{10}$
	$m_{11}=\dfrac{12\mu(EJ)^2+4\ell EJ}{\ell(\ell+4\mu EJ)}$ $\mu=1/k$		$m_{10}=m_{20}=0{,}0521\,p\ell^2$ $f_{10}=f_{20}=\dfrac{p\ell}{4}$
	$m_{21}=\dfrac{6\mu(EJ)^2+2EJ\ell}{(\ell+4\mu EJ)(\ell+3\mu EJ)}$ $f_{11}=f_{21}=3\,\dfrac{6\mu(EJ)^2+2\ell EJ}{\ell^2(\ell+4\mu EJ)}\,\dfrac{\ell+2\mu EJ}{\ell+3\mu EJ}$		$m_{10}=pa^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2a}{3\ell}+\dfrac{a^2}{4\ell^2}\right)$ $f_{10}=\dfrac{pa}{2\ell}(b+\ell)+\dfrac{m_{10}-m_{20}}{\ell}$ $m_{20}=pa^2\left(\dfrac{a}{3\ell}-\dfrac{a^2}{4\ell^2}\right)$ $f_{20}=\dfrac{pa^2}{2\ell}-\dfrac{m_{10}-m_{20}}{\ell}$

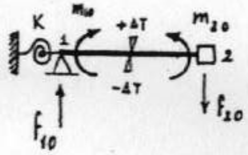
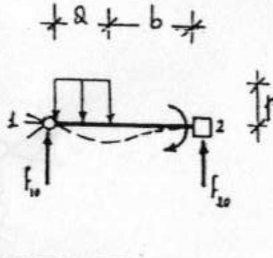
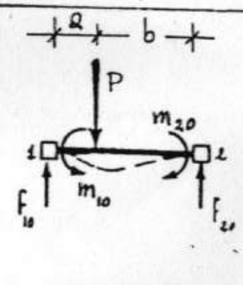
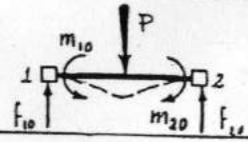
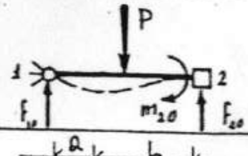
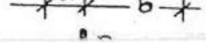
NOTA: nella tabella è riportato il valore assoluto del momento/forza, considerati applicati **alle estremità delle aste**; il segno è indicato dal vettore nelle figure. Per i momenti/forze applicati ai nodi, cambiare i rispettivi segni.

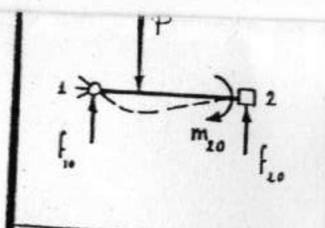
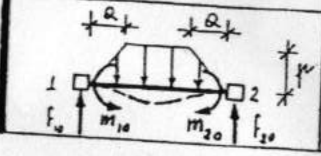
	$m_{11} = \dfrac{6\ell EJ + 12\mu (EJ)^2}{\ell^2(\ell + 4\mu EJ)}$ $6EJ$

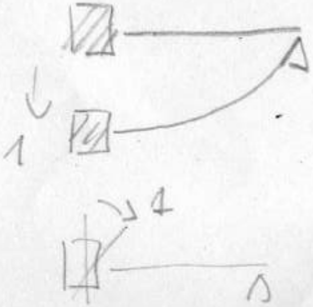
	$m_{10} = m_{20} = \dfrac{M}{4}$ $\quad f_{10} = f_{20} = \dfrac{3}{2}\dfrac{M}{\ell}$
	$m_{10} = \dfrac{M}{8}$ $\quad f_{10} = f_{20} = \dfrac{9}{8}\dfrac{M}{\ell}$
	$m_{20} = \dfrac{M}{2}$ $\quad f_{10} = f_{20} = \dfrac{3}{2}\dfrac{M}{\ell}$
	$f_{10} = f_{20} = \dfrac{3EJ\alpha\Delta T}{\ell t}$ $\quad m_{20} = + f_{10}\cdot\ell$
 	$m_{10} = m_{20} = \dfrac{2EJ\alpha\Delta T}{t}$ $N_{10} = N_{20} = \alpha \Delta T EA$ t = altezza della trave α = coeff. di dilatazione termica
	$m_{10} = p\dfrac{\ell^2}{3}$ $m_{20} = p\dfrac{\ell^2}{6}$ $\quad f_{10} = p\ell$
	$m_{10} = \delta K$ $\quad \delta = \dfrac{2\alpha\Delta T EJ}{t\left(K + \frac{4EJ}{\ell}\right)}$ $m_{20} = \delta\left(K + \dfrac{6EJ}{\ell}\right)$ t = altezza della trave $f_{10} = f_{20} = \delta\,\dfrac{6EJ}{\ell^2}$
	$f_{10} = p\dfrac{a(\ell+b)}{2\ell} - \dfrac{m_{20}}{\ell}$ $m_{20} = \dfrac{p}{2\ell^2}\left(\dfrac{\ell^2 a^2}{2} - \dfrac{a^4}{4}\right)$

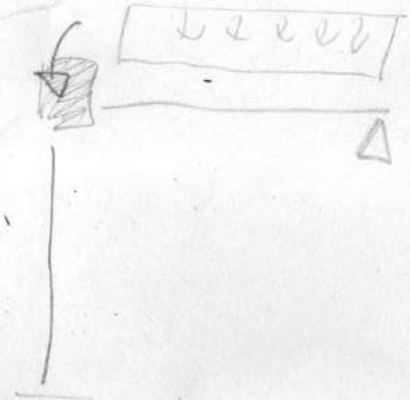
MOMENTI E FORZE NODALI
(METODO DEGLI SPOSTAMENTI)

	$m_{11} = \dfrac{6\ell\, EJ + 12\,\mu\,(EJ)^2}{\ell^2(\ell + 4\mu EJ)}$ $m_{21} = \dfrac{6EJ}{\ell(\ell+4\mu EJ)}$ $\quad \mu = 1/k$ $f_{11} = f_{21} = \dfrac{12EJ}{\ell^3}\,\dfrac{\ell + \mu EJ}{\ell + 4\mu EJ}$
	$m = \dfrac{3EJ\,K\ell}{3EJ + K\ell^3}$ $\quad \eta = \dfrac{3EJ}{3EJ + K\ell^3}$
	$m = \dfrac{6EJ\,K\ell}{12EJ + K\ell^3}$ $\quad \eta = \dfrac{12EJ}{12EJ + K\ell^3}$
	$m = \dfrac{3EJ\,K\ell^2}{3EJ + K\ell^3}$ $\quad \eta = \dfrac{m}{\ell}\,\dfrac{1}{K}$

	$m_{10} = \delta K$ $\quad \delta = \dfrac{2\alpha\Delta T EJ}{t\left(K + \frac{4EJ}{\ell}\right)}$ $m_{20} = \delta\left(K + \dfrac{6EJ}{\ell}\right)$ $\quad$ t = altezza della trave $f_{10} = f_{20} = \delta\,\dfrac{6EJ}{\ell^2}$
	$f_{10} = p\,\dfrac{a(\ell+b)}{2\ell} - \dfrac{m_{20}}{\ell}$ $m_{20} = \dfrac{p}{2\ell^2}\left(\dfrac{\ell^2 a^2}{2} - \dfrac{a^4}{4}\right)$ $f_{20} = \dfrac{p\,a^2}{2\ell} + \dfrac{m_{20}}{\ell}$
	$m_{10} = \dfrac{Pab^2}{\ell^2}$ $\quad f_{10} = \dfrac{Pab(b-a)}{\ell^3} + \dfrac{Pb}{\ell}$ $m_{20} = \dfrac{Pa^2b}{\ell^2}$ $\quad f_{20} = \dfrac{Pab(a-b)}{\ell^3} + \dfrac{Pa}{\ell}$
	$m_{10} = m_{20} = \dfrac{P\ell}{8}$ $\quad f_{10} = f_{20} = \dfrac{P}{2}$
	$m_{20} = \dfrac{3}{16}P\ell$ $\quad f_{20} = \dfrac{11}{16}P$ $\quad f_{10} = \dfrac{5}{16}P$
	$f \quad Pb^2(a+2\ell)$

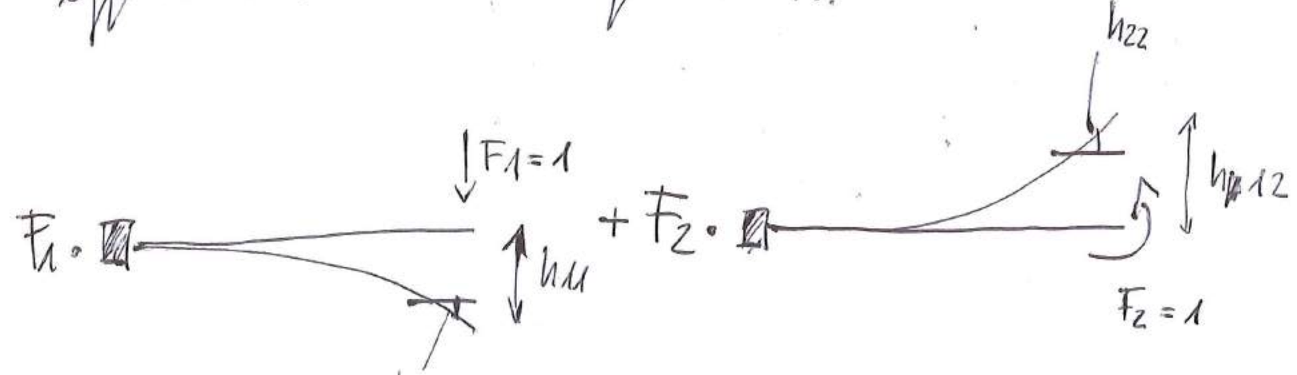
			$f_{10} = \frac{\qquad}{2\ell^3}$ $m_{20} = \frac{P a b (a + \ell)}{2 \ell^2}$ $f_{20} = P - f_{10}$
			$m_{10} = m_{20} = p \left(\ell^3 - 2a^2 \ell + a^3\right) \frac{1}{12 \ell}$ $f_{10} = f_{20} = p \frac{\ell - a}{2}$





Al fine di risolvere il problema con il metodo delle forze applichiamo alla struttura le forze F_1 e F_2 una alla volta e siano u_{11} e u_{12} gli spostamenti che si leggono in corrispondenza delle coordinate 1-2 rispettivamente come effetto della forza F_1.

Siano analogamente u_{12} e u_{22} gli spostamenti effetto della sola forza F_2.



Il generico coeff. di deformabilità h_{ij} rappresenta lo spostamento della coordinata i per effetto dell'applicazione della forza $F_j = 1$

$$u_{ij} = h_{ij} \cdot F_j$$

Le condizioni di congruenza per questo sistema si possono esprimere come:

$$\begin{cases} u_1 = h_{11} \cdot F_1 + h_{12} \cdot F_2 \\ u_2 = h_{21} \cdot F_1 + h_{22} \cdot F_2 \end{cases}$$

che in forma matriciale diviene:

$$\{u\} = [H] \cdot \{F\}$$

Tramite il PLV o la linea elastica è possibile determinare il valore dei coefficienti:

$$h_{11} = \frac{l^3}{3EJ} \qquad h_{21} = -\frac{l^2}{2EJ}$$

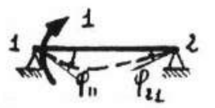
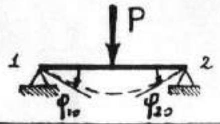
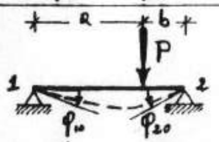
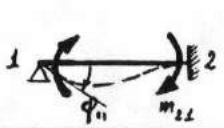
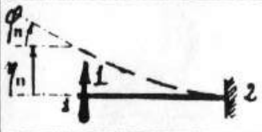
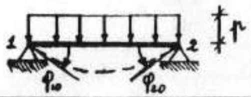
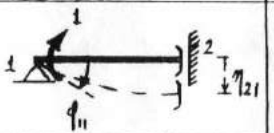
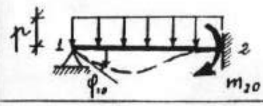
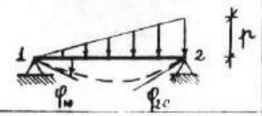
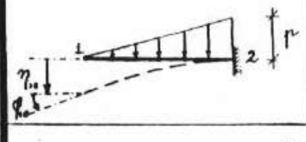
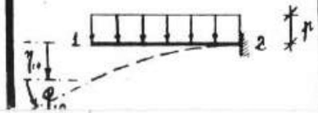
$$h_{12} = \frac{l^2}{2EJ} \qquad h_{22} = \frac{l}{EJ}$$

VEDI TABELLA MDF

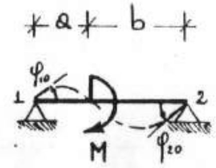
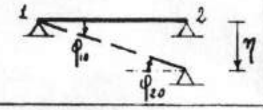
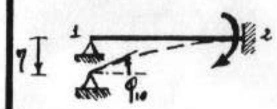
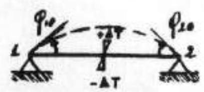
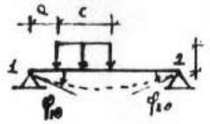
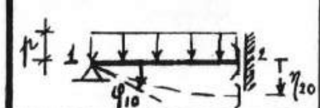
Ora è chiaro che

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}}$$

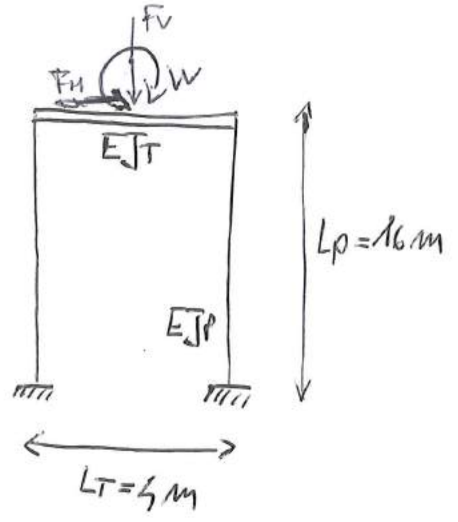
ROTAZIONI E SPOSTAMENTI NODALI
(METODO DELLE FORZE)

	$\varphi_{11} = \frac{\ell}{3EJ}$ $\quad \varphi_{21} = \frac{\ell}{6EJ}$		$\varphi_{10} = \varphi_{20} = \frac{P\ell^2}{16\,EJ}$
	$\varphi_{11} = \frac{\ell}{EJ}$ $\quad \eta_{11} = \frac{\ell^2}{2EJ}$		$\varphi_{10} = \frac{Pb(\ell^2 - b^2)}{6\ell EJ} = \frac{Pab}{6\ell EJ}(\ell + b)$
	$\varphi_{11} = \frac{\ell}{4EJ}$ $\quad m_{21} = \frac{1}{2}$		$\varphi_{20} = \frac{Pab}{6\ell EJ}(\ell + a)$
	$\varphi_{11} = \frac{\ell^2}{2EJ}$ $\quad \eta_{11} = \frac{\ell^3}{3EJ}$		$\varphi_{10} = \varphi_{20} = \frac{p\ell^3}{24\,EJ}$
	$\varphi_{11} = \frac{\ell}{EJ}$ $\quad \eta_{21} = \frac{\ell^2}{2EJ}$		$\varphi_{10} = \frac{p\ell^3}{48\,EJ}$ $\quad m_{20} = \frac{p\ell^2}{8}$
			$\varphi_{10} = \frac{7p\ell^3}{360\,EJ}$ $\quad \varphi_{20} = \frac{p\ell^3}{45\,EJ}$
			$\varphi_{10} = \frac{p\ell^3}{24\,EJ}$ $\quad \eta_{10} = \frac{p\ell^4}{30\,EJ}$
			$\varphi_{10} = \frac{p\ell^3}{6\,EJ}$ $\quad \eta_{10} = \frac{p\ell^4}{8\,EJ}$

NOTA: nella tabella è riportato il valore assoluto della rotazione/spostamento; il segno è indicato dal vettore nelle figure

			$\varphi_{10} = \frac{M}{\ell^2}\left[\frac{b^3}{3} - \frac{a^2}{2}\left(b + \frac{a}{3}\right)\right]\frac{1}{EJ}$ $\varphi_{20} = \frac{M}{\ell^2 EJ}\left[\frac{a^3}{3} - \frac{b^2}{2}\left(a + \frac{b}{3}\right)\right]$ se $a = b = \ell/2 \rightarrow \varphi_{10} = \varphi_{20} = M\ell/24EJ$
			$\varphi_{10} = \varphi_{20} = \frac{\eta}{\ell}$
			$\varphi_{10} = \frac{3}{2}\frac{\eta}{\ell}$ $\quad m_{20} = \frac{3EJ}{\ell^2}\eta$
			$\varphi_{10} = \varphi_{20} = \frac{\alpha \ell \Delta T}{t}$ $\quad \alpha$ = coeff. di dilatazione termica t = altezza della trave
			$\varphi_{10} = \frac{pc\ell}{6EJ}\left(\ell - a - \frac{c}{2}\right)\left[1 - \left(\frac{\ell - a - \frac{c}{2}}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{c}{2\ell}\right)^2\right]$ $\varphi_{20} = \frac{pc\ell}{6EJ}\left(a + \frac{c}{2}\right)\left[1 - \left(\frac{a + \frac{c}{2}}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{c}{2\ell}\right)^2\right]$
			$\varphi_{10} = p\frac{\ell^3}{3EJ}$ $\quad \eta_{20} = \frac{5}{24}p\frac{\ell^4}{EJ}$

ES. MDS (METODO DEGLI SPOSTAMENTI)



$F_H = 500$ kN

$F_V = 5000$ kN

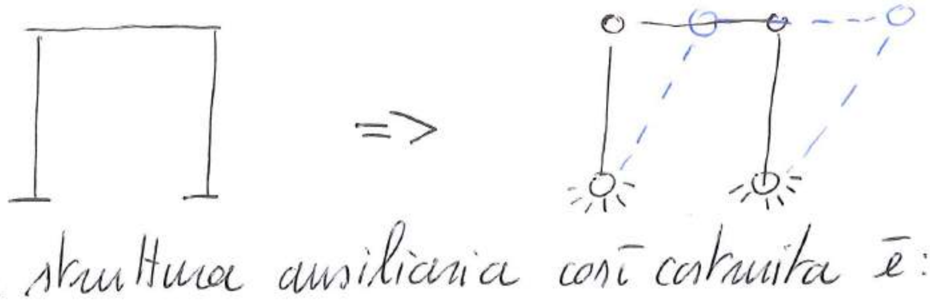
$W = 750$ kNm

$EJ_T = 4EJ_P = 4EJ$

IPOTESI DI CALCOLO
- Comport. Elastico Mat.li
- Piccoli spostamenti
- Def. a taglio ed assiali sono trascurate

La struttura considerata è un telaio con grado di iperstaticità pari a 3.

ANALISI CINEMATICA ⟶ Inseriamo delle cerniere in tutti i nodi della struttura.

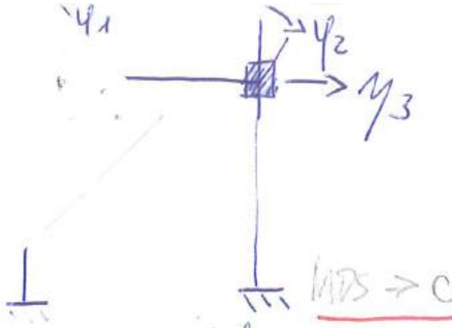


se la struttura ausiliaria così costruita è:

- labile (ipostatica) ⟶ struttura di partenza a nodi spostabili
- isostatica o iperstatica ⟶ struttura a nodi fissi

1^a FASE ⟶ Individuazione delle incognite e della struttura ausiliaria geometricamente (cinematicamente) determinata.

In generale sarà considerato incognito qualunque spostamento geometricamente indeterminato.
Nel caso di una struttura a nodi spostabili si assumono come incognite le rotazioni e gli spostamenti di qualunque nodo interno più eventuali altri spostamenti geometricamente indeterminati.



Poiché $\boxed{EA \to \infty}$ e non consideriamo deformazioni assiali, lo spost. orizzontale è identico per tutto il traverso

MDS → cerca unica sol. eq. fra le ∞ sol. congruenti

l MDS definiamo una struttura di servizio
ngruente (geometric = cinematicamente determinata)
imponiamo ... le condizioni di equilibrio.
natica si tratta di incastrare (bloccare con un morsetto)
i gli spostamenti ... incogniti.
uesto modo possiamo riferirci ad una struttura
(trave doppiamente incastrata)
...
ui è già nota la matrice di rigidezza e
è già stata risolta sotto tutte le possibili
dizioni di carico.
Hi sono ... state calcolate attraverso i
llari di Mohr o attraverso il PLV ...
le seguenti tabelle dei coefficienti
MDS. ... Tali tabelle si possono
izzare durante l'esame e in questa
citazione vengono assunte per buone.

E Scrittura e soluzione del sistema
→ di equazioni che permette di conoscere
gli spostamenti subiti dalla struttura.

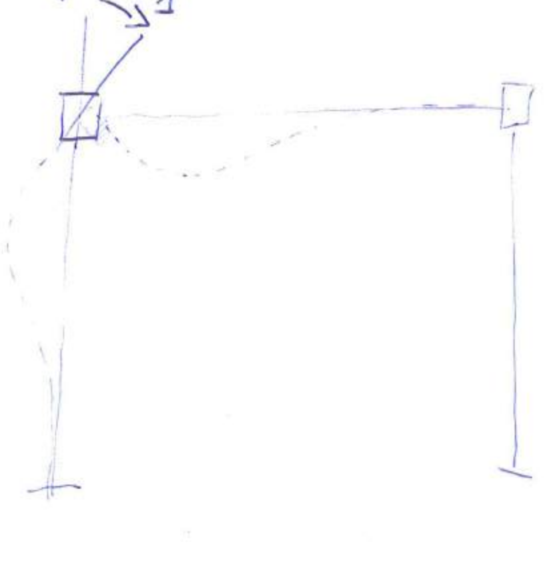
$$\dots + m_{12}\varphi_2 + m_{13}\eta_3 + m_{10} = 0$$
$$\dots_{21}\varphi_1 + m_{22}\varphi_2 + m_{23}\eta_3 + m_{20} = 0$$
$$\dots_{31}\varphi_1 + t_{32}\varphi_2 + t_{33}\eta_3 + t_{30} = 0$$

...a equaz. esprime l'equilibrio alla rotazione ... nodo 1, la seconda quello del nodo 2, la ...a l'equilibrio allo spostam. orizzontale ... traverso (equaz. piano).

...fficienti della prima colonna rappresentano ... effetti di una rotazione unitaria del nodo 1 su tutti i nodi presi in considerazione:

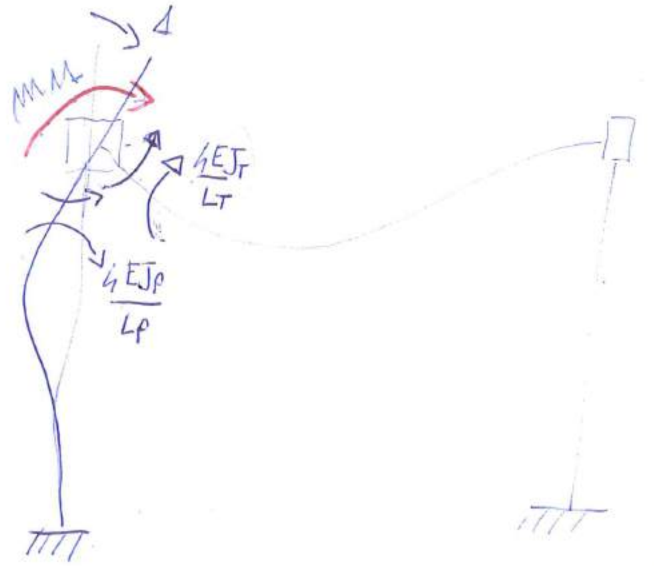
...alcolarli dobbiamo immaginare di attivare ...cognita 1 ponendola di valore unitario ...occare tutte le altre incognite:

$\varphi_1 = 1 \quad \varphi_2 = 0 \quad \eta_3 = 0$



∴ momento da applicare al nodo 1 per farlo ruotare di un'unità.

…e tabelle fornite si trovano le azioni sulle aste:

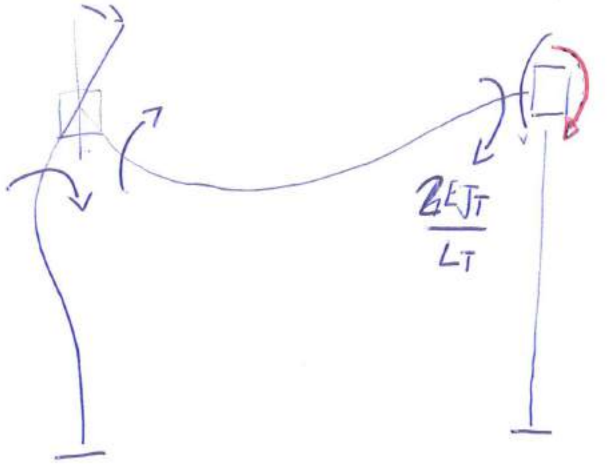


…nodo 1 oppone un momento resistente di

$\frac{4EJ_T}{L_T} + \frac{4EJ_P}{L_P}$ per cui noi dovremo …plicare un momento di pari entità …iconde con il verso assunto come positivo … far ruotare quel nodo 1 di 1:

$$m_{11} = \frac{4EJ_T}{L_T} + \frac{4EJ_P}{L_P} = 4{,}25\, EJ$$

m_{21} = momento da applicare al nodo 2 perché rimanga bloccato quando il nodo 1 ruota di un'unità.

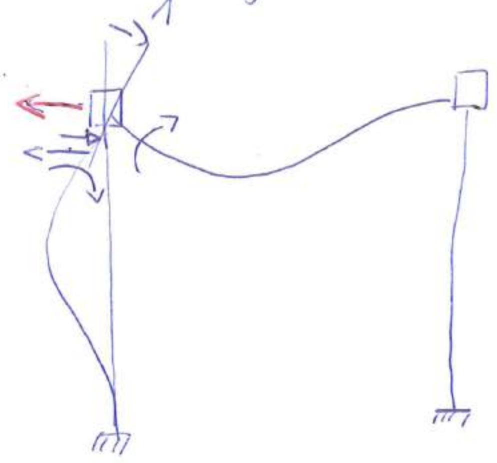


Sul ~~modo~~ 2 agisce un momento di $\frac{2EJ_T}{L_T}$ quando $\varphi_1 = 1$ per cui dovremo applicare un momento opposto per tenerlo bloccato:

$$m_{21} = \frac{2EJ}{L_T} = 2EJ$$

Si noti che il segno è positivo perché concorde con il verso positivo scelto per l'incognita 2.

t_{31} = forza da applicare sul (modo 1) traverso affinché 6 rimanga bloccato quando: $y_1 = 1$



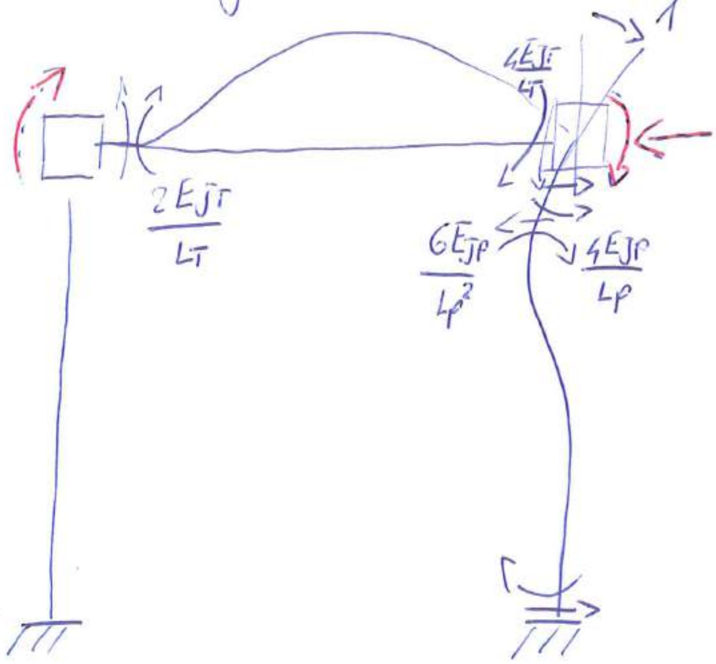
Tenendo conto che il modo 2 rimane bloccato quando $y_1 = 1$ sul modo agisce una forza orizzontale pari a $\frac{6 E J_P}{L_P^2}$.

Per cui dovremo applicare una reazione uguale e opposta per tenerlo fermo per cui per la convenzione dei segni adottata:

$$t_{31} = - \frac{6 E J_P}{L_P^2} = -0{,}023\ EJ$$

Ora calcoliamo i coefficienti della 2a colonna: 7
essi rappresentano gli effetti di una rotazione unitaria del nodo 2 su tutti i nodi presi in considerazione.

Attiviamo l'incognita $y_2 = 1$ e poniamo $y_1 = y_3 = 0$



m_{22} = momento da imporre al nodo 2 per farlo ruotare di 1

$$m_{22} = \frac{4EJ_T}{L_T} + \frac{4EJ_P}{L_P} = 4{,}25\, EJ$$

m_{12} = momento da applicare al nodo 1 perché rimanga bloccato quando $y_2 = 1$

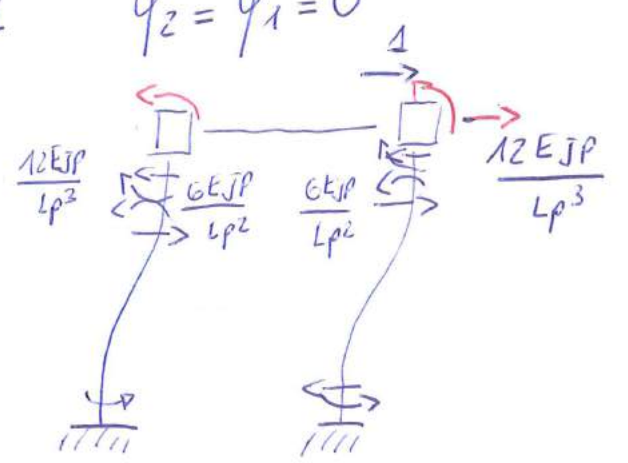
$$m_{12} = \frac{2EJ_T}{L_T} = 2EJ$$

t_{32} = forza da applicare sul ... nodo 2 (sul traverso) affinché non vi sia spostamento orizzontale per $\varphi_2 = 1$

$$t_{32} = -\frac{6EJp}{Lp^2} = -0{,}0\ 23\ EJ$$

I coefficienti della 3ª colonna rappresentano gli effetti di uno spostamento $\eta_3 = 1$ su tutti i nodi presi in considerazione:

$\eta_3 = 1 \qquad \varphi_2 = \varphi_1 = 0$



t_{33} = forza da imporre sul traverso (che vista l'ipotesi $EA \to \infty$, è un meganodo che comprende al suo interno i nodi 1 e 2) perché si sposti in modo da imporre $\eta_3 = 1$

$$t_{33} = \frac{12EJP}{Lp^3} + \frac{12EJP}{Lp^3} = 0{,}00586\ EJ$$

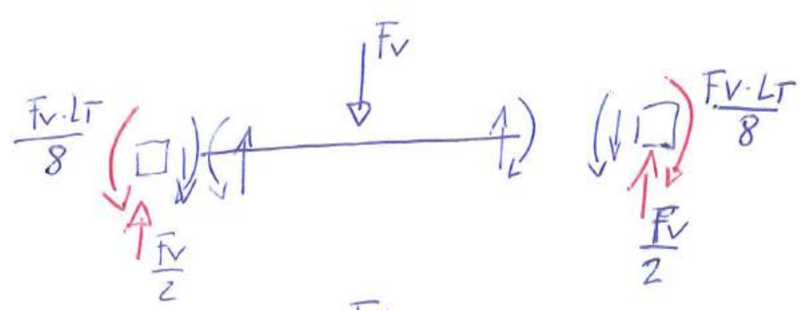
m_{13} = momento da imporre al nodo 1 affinché rimanga bloccato quando $\eta_3 = 1$

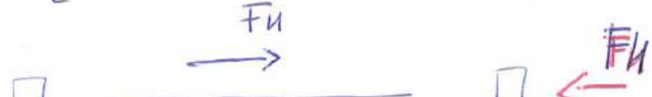
$$m_{13} = -\frac{6EJ_P}{L_P^2} = -0{,}023\,EJ$$

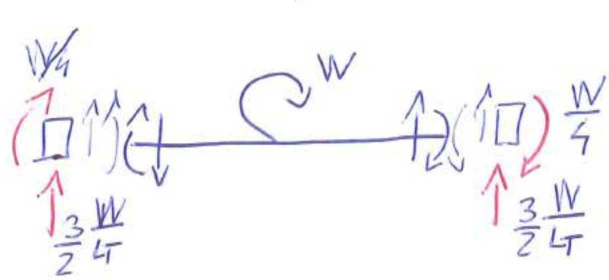
m_{23} = momento da imporre al nodo 2 affinché rimanga bloccato quando $\eta_3 = 1$

$$m_{23} = -\frac{6EJ_P}{L_P^2} = -0{,}023\,EJ$$

Rimangono da calcolare i termini del sistema relativi ai carichi esterni.
Abbiamo gli effetti di 3 carichi differenti che possiamo sommare grazie al PSE.
le soluzioni delle trave doppiamente incastrata sotto una ∀ cond. carico si trovano nelle tabelle del MDS.







m_{10} = momento da applicare al nodo 1 perché esso non ruoti sotto le azioni esterne:

$$m_{10} = \frac{W}{4} - \frac{F_V \cdot L_T}{8} =$$

m_{20} = momento da applicare al nodo 2 perché non ruoti sotto le azioni esterne:

$$m_{20} = \frac{W}{4} + \frac{F_V \cdot L_T}{8} =$$

t_{30} = forza da applicare al traverso (nodo 1-2) perché non si sposti sotto le azioni esterne

$$t_{30} = -F_H = -500$$

Ora si può scrivere completamente il sistema lineare che permette di calcolare gli spostamenti del telaio:

$$\begin{cases} 4{,}25EJ\varphi_1 + 2EJ\varphi_2 \cancel{\;} - 0{,}023EJ\eta_3 - 2313 = 0 \\ 2EJ\varphi_1 + 4{,}25EJ\varphi_2 - 0{,}023EJ\eta_3 + 2688 = 0 \\ -0{,}023EJ\varphi_1 - 0{,}023EJ\varphi_2 \; 0{,}005859EJ\eta_3 - 500 = 0 \end{cases}$$

Per fare alcune osservazioni è bene scriverlo in f. matriciale:

$$4{,}25\varphi_1 + 2\varphi_2 - 0{,}023 \cdot \eta_3 = -\frac{2312}{EJ}$$

$$2\varphi_1 + 4{,}25\varphi_2 - 0{,}023\,\eta_3 = \frac{-2688}{EJ}$$

$$-0{,}023\varphi_1 - 0023\varphi_2 + 0{,}005859\eta_3 = \frac{500}{EJ}$$

$$\begin{bmatrix} 4{,}25 & 2 & -0{,}023 \\ 2 & 4{,}25 & -{,}023 \\ -0{,}023 & -0{,}023 & 0{,}005859 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2313}{EJ} \\ -\frac{2688}{EJ} \\ \frac{500}{EJ} \end{Bmatrix}$$

Caratteristiche della matrice di rigidezza dei sistemi elastici: 12
- lineari -> per hp piccoli spostamenti
- simmetria -> per th. energetici di reciprocità
- ben condizionati

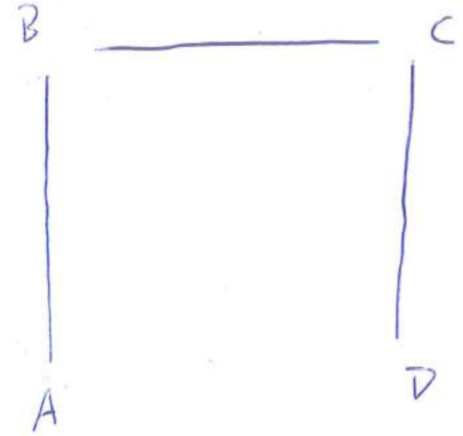
Risolvendo il sistema si trovano le seguenti soluzioni (tenendo conto di tutte le cifre dopo la virgola)

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{1410}{EJ} \text{ [RAD]} \qquad \varphi_2 = \frac{-812}{EJ} \text{ [RAD]} \qquad \eta_3 = \frac{87739}{EJ} \text{ [m]}}$$

(Immaginando una trave 300x300 mm:
$J = 0{,}002133 \; [m^4]$
$E_{cls} = 3{,}1 \cdot 10^{10} \left[\frac{N}{m^2}\right]$

$\varphi_1 = 2{,}13 \cdot 10^{-5}$ [RAD]
$\varphi_2 = -1{,}23 \cdot 10^{-5}$ [RAD]
$\eta_3 = 0{,}0013$ [m])

3ª FASE -> Calcolo dei momenti all'estremità delle aste



È comodo procedere in maniera ordinata con la seguente tabella:
Ora ci riferiamo alle azioni sulle aste:

	φ_1	φ_2	η_3	F_V	F_H	W	$\curvearrowright +$, $\rightarrow +$
M_{AB}	$\frac{2EJ_P}{L_P}$	–	$-\frac{6EJ_P}{L_P^2}$	–	–	–	$M_{AB} = \frac{2EJ_P}{L_P}\varphi_1 - \frac{6EJ_P}{L_P^2}\eta_3$
M_{BA}	$\frac{4EJ_P}{L_P}$	–	$-\frac{6EJ_P}{L_P^2}$				$M_{BA} = \frac{4EJ_P}{L_P}\varphi_1 - \frac{6EJ_P}{L_P^2}\eta_3$
M_{DC}	–	$\frac{2EJ_P}{L_P}$	$-\frac{6EJ_P}{L_P^2}$				$M_{DC} = \frac{2EJ_P}{L_P}\varphi_2 - \frac{6EJ_P}{L_P^2}\eta_3$
M_{CD}	–	$\frac{4EJ_P}{L_P}$	$-\frac{6EJ_P}{L_P^2}$				$M_{CD} = \frac{4EJ_P}{L_P}\varphi_2 - \frac{6EJ_P}{L_P^2}\eta_3$
M_{BC}	$\frac{4EJ_T}{L_T}$	$\frac{2EJ_T}{L_T}$		$-\frac{L_T}{8}$	–	$\frac{1}{4}$	$M_{BC} = \frac{4EJ_T}{L_T}\varphi_1 + \frac{2EJ_T}{L_T}\varphi_2 - \frac{F_V L_T}{8} + \frac{W}{4}$
M_{CB}	$\frac{2EJ_T}{L_T}$	$\frac{4EJ_T}{L_T}$		$\frac{L_T}{8}$		$\frac{1}{4}$	$M_{CB} = \frac{2EJ_T}{L_T}\varphi_1 + \frac{4EJ_T}{L_T}\varphi_2 + \frac{F_V L_T}{8} + \frac{W}{4}$

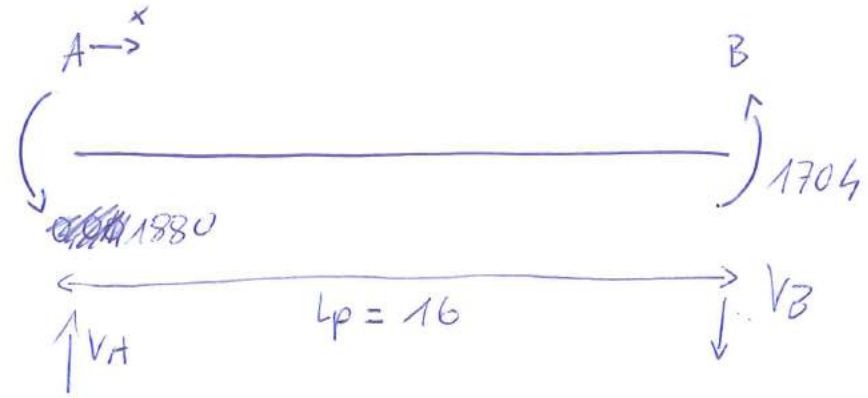
$M_{AB} = -1880$
$M_{BA} = -1704$
$M_{DC} = -2158$
$M_{CD} = -2259$
$M_{BC} = 1704$
$M_{CB} = 2259$

verifica eq. nodo

NB → questi segni son riferiti esclusivamente al verso positivo rotaz. momenti e non alla convenz. per le az. interne!!

4ª FASE → Determinaz. dei diag. e della deformata qualitativa.

ASTA AB

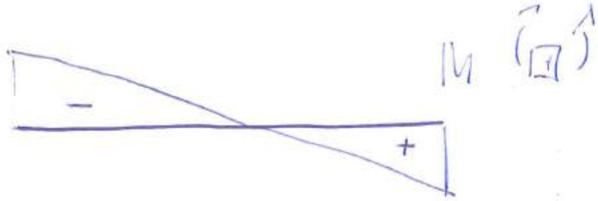


$V_A = +V_B$

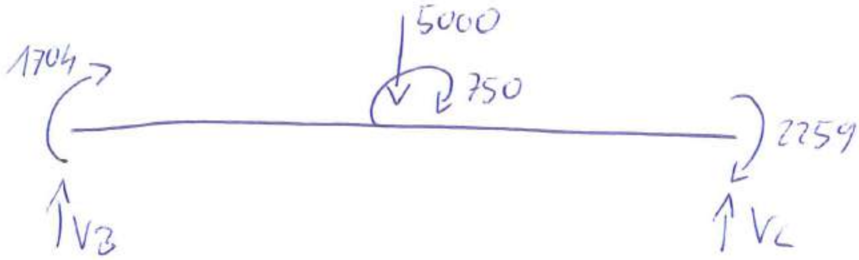
$$V_A = \frac{1880 + 1704}{L_p} = 223{,}96 = V_B$$

$M(x) = 223{,}96 \cdot x - 1880$

$V(x) = 223{,}96$



ASTA BC



$V_B + V_C = 5000$

$V_B \cdot L_T + 1704 + 750 - 5000 \frac{L_T}{2} + 2259 = 0$

$V_B = -\frac{1704}{4} - \frac{750}{4} + \frac{5000}{2} - \frac{2259}{4} \simeq 1322$

$V_C = 3678$

per $x < 2$

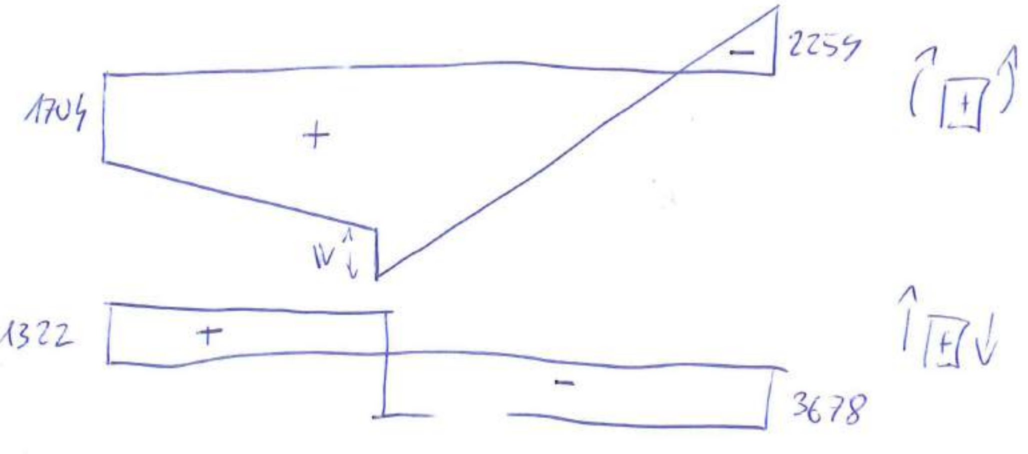
$M(x) = 1322 \cdot x + 1704$

$V(x) = 1322$

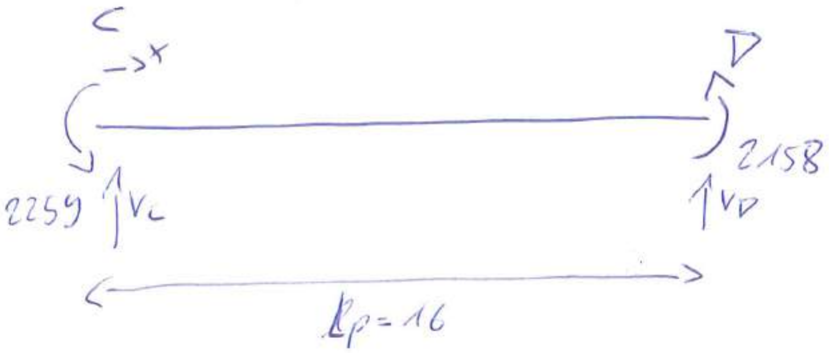
per $x \geq 2$

$M(x) = 1322 \cdot x + 1704 + 750 - 5000 \cdot (x-2)$

$V(x) = 1322 - 5000 = 3678$



ASTA CD

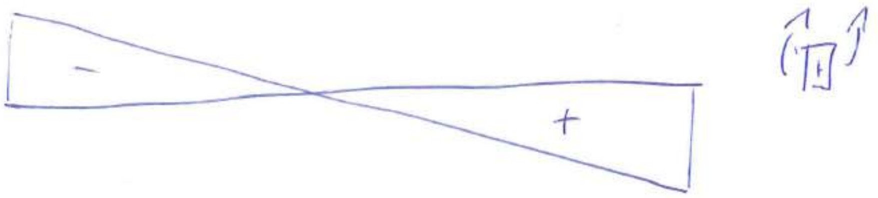


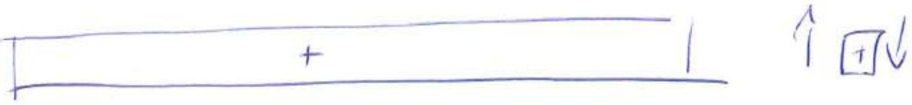
$V_C + V_D = 0$

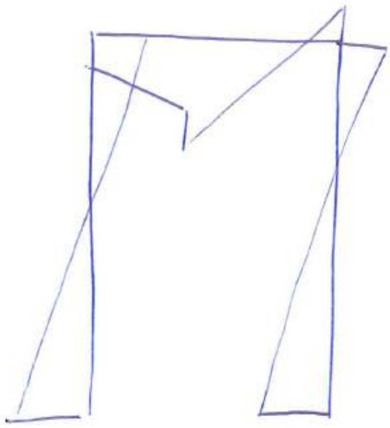
$V_C = \dfrac{2259 + 2158}{16} \cong 276$

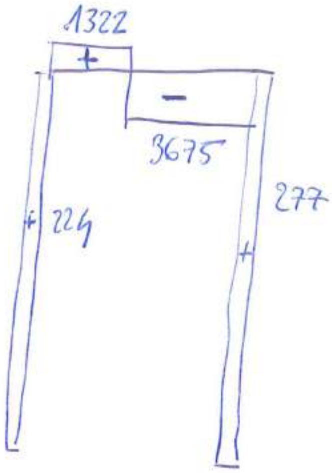
$M(x) = 276 \cdot x - 2259$

$V(x) = 276$

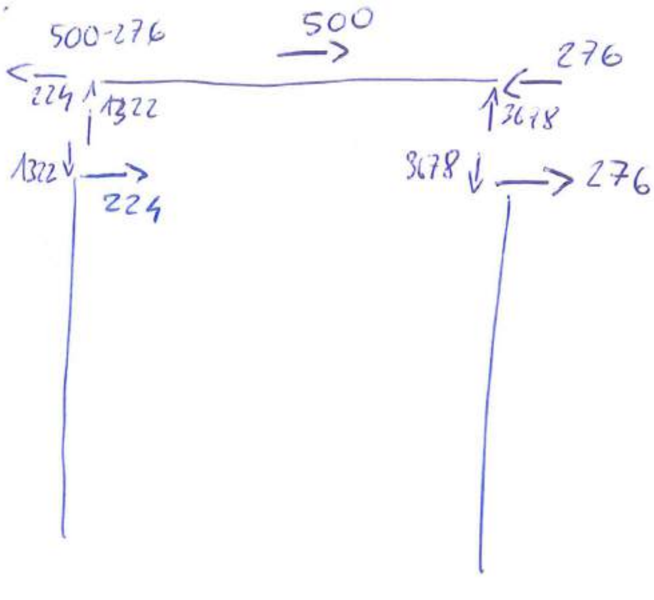


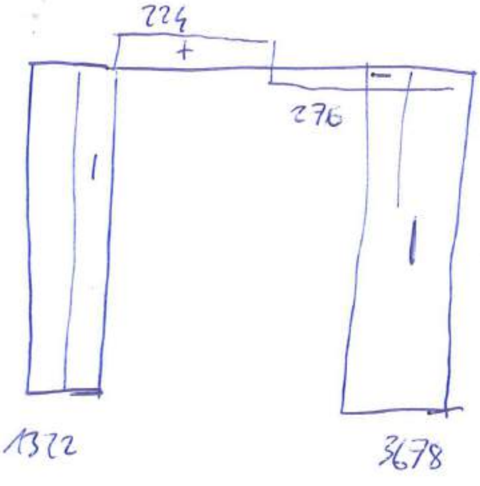




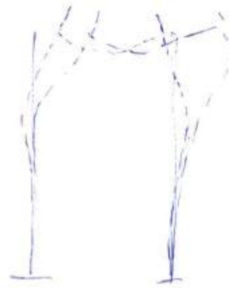


Per calcolare il valore dell'azione assiale è sufficiente riferirsi a quanto determinato per il taglio:

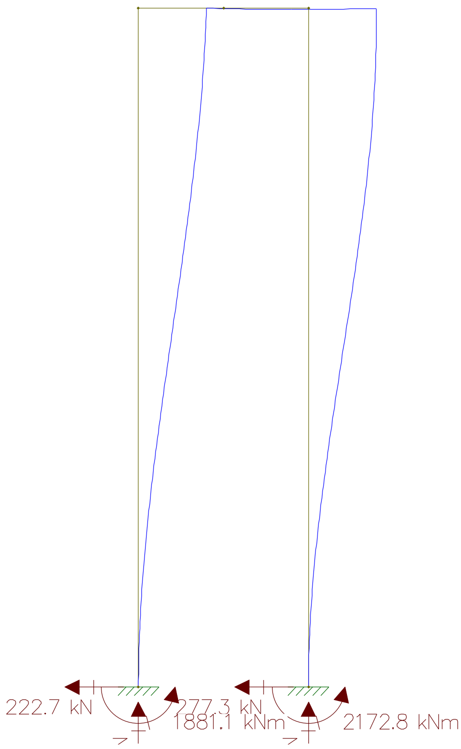




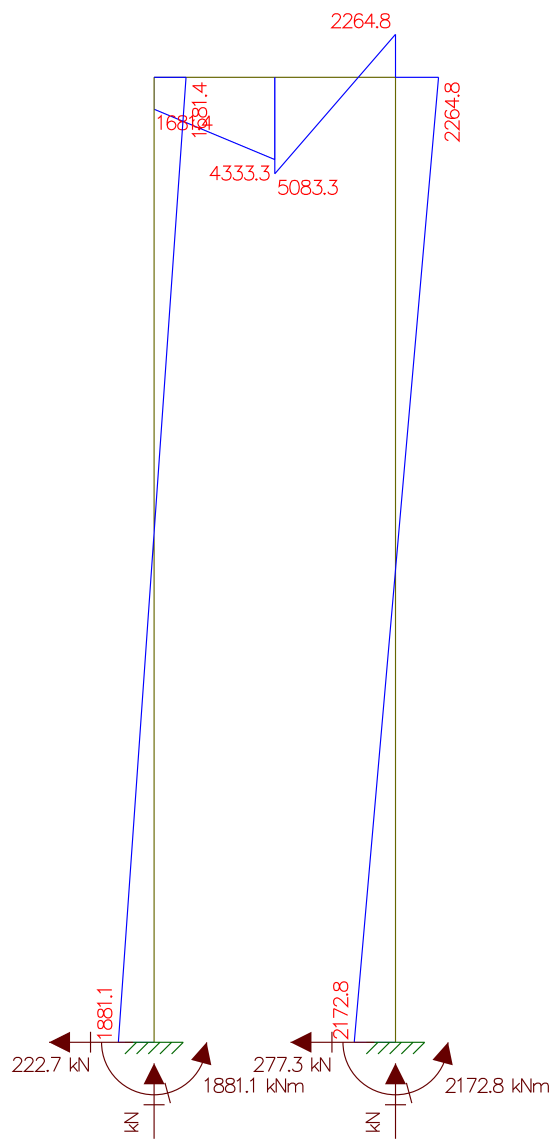
Deformata:



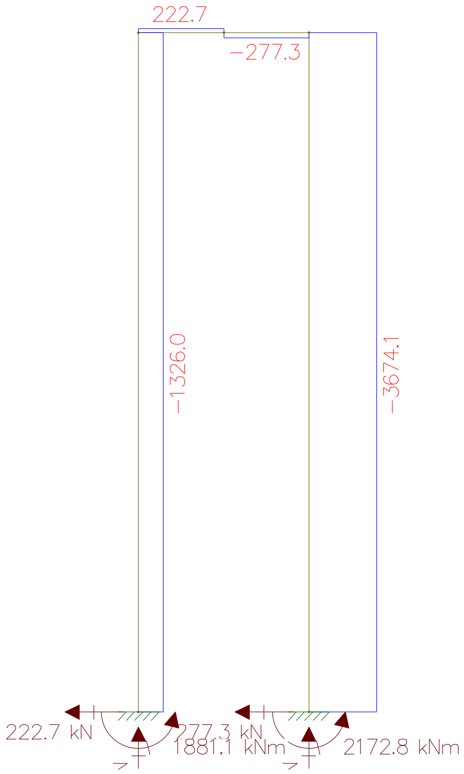
Spostamenti



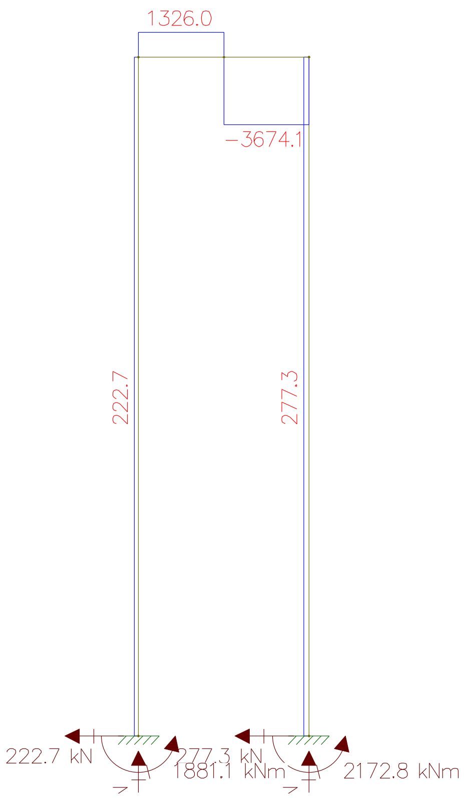
Momento


2264.8
2264.8
4333.3
5083.3
1881.1
222.7 kN
1881.1 kNm
kN
2172.8
277.3 kN
2172.8 kNm
kN

Azione Normale



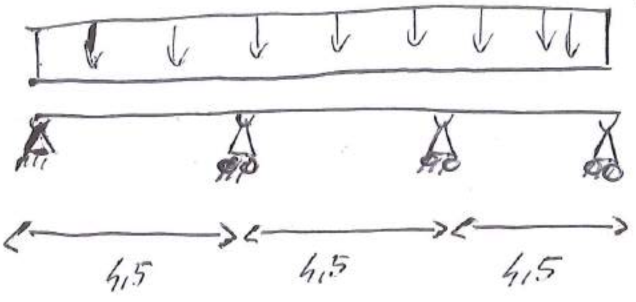
Taglio



ES MDF METODO DELLE FORZE

(1)

$q = 3,2 \frac{kN}{m}$



GDV = 5

GDL = 3

1° → Individuazione delle incognite e della struttura ausiliaria (di servizio) staticamente determinata

per determinare le 2 incognite isostatiche serviranno 2 equazioni di congruenza.

Infatti:

"Tra le infinite configurazioni equilibrate il MDF individua l'unica che è anche congruente".

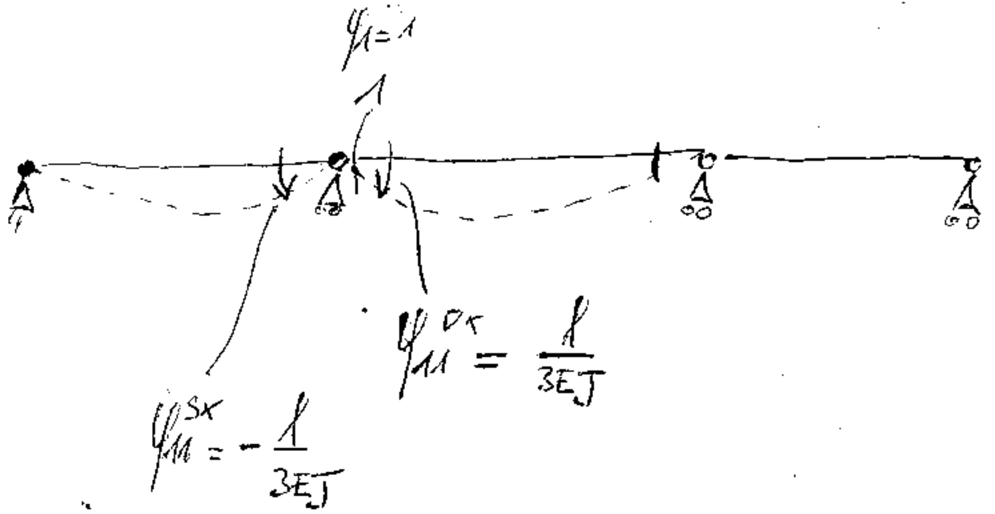
NB → la scelta della trave semp appoggiata come struttura ausiliaria mi permette di utilizzare le tabelle dei coefficienti viste prima.

② 2° ⟶ Scrittura e soluzione del sistema

2 equaz di congruenza che esprimono l'annullamento delle rotazioni relative nei nodi 1 e 2

↻+ ROTAZ. ORARIE

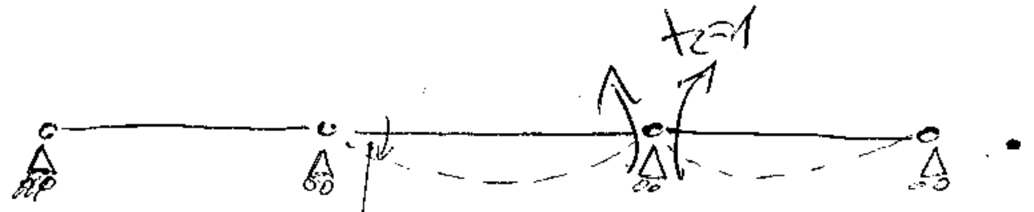
$$\begin{cases} \varphi_{11} \cdot X_1 + \varphi_{12} \cdot X_2 + \varphi_{10} = 0 & \varphi_1^{dx} - \varphi_1^{sx} = 0 \\ \varphi_{21}\, X_1 + \varphi_{22}\, X_2 + \varphi_{20} = 0 & \varphi_2^{dx} - \varphi_2^{sx} = 0 \end{cases}$$



φ_{11} = rotazione relativa in 1 dovuta a X_1.

$$\varphi_{11} = \Big(\underbrace{\frac{l}{3EJ}}_{\varphi_{11}^{dx}} - \underbrace{\Big(-\frac{l}{3EJ}\Big)}_{\varphi_{11}^{sx}} \Big)$$

φ_{12} = rappresenta la rotazione relativa in 1 dovuta a X_2:

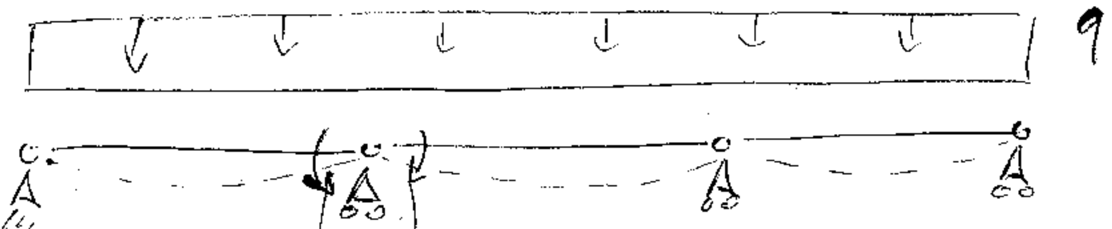


$$\varphi_{12}^{Dx} = \frac{l}{6EJ}$$

$$\varphi_{12} = \left(\frac{l}{6EJ} - 0\right)$$

φ_{12}^{Dx} φ_{12}^{Sx}

φ_{10} = rotaz. relativa in 1 dovuta ai carichi esterni:



$$\varphi_{10}^{Dx} = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_{10}^{Sx} = -\frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_{10} = \left(\frac{ql^3}{24EJ} - \left(-\frac{ql^3}{24EJ}\right)\right)$$

(4)

In maniera analoga con riferimento al nodo 2:

$$\varphi_{21} = \varphi_{21}^{DX} - \varphi_{21}^{SX} = 0 - \left(-\frac{l}{6EJ}\right)$$

$$\varphi_{22} = \varphi_{22}^{DX} - \varphi_{22}^{SX} = \frac{l}{3EJ} - \left(-\frac{l}{3EJ}\right)$$

$$\varphi_{20} = \frac{ql^3}{24EJ} - \left(-\frac{ql^3}{24EJ}\right)$$

Il sistema diviene:

$$\frac{2\cancel{l}}{3\cancel{EJ}} \cdot x_1 + \frac{\cancel{l}}{6\cancel{EJ}} \cdot x_2 + \frac{q\cancel{l^3}^{\,2}}{12\cancel{EJ}} = 0$$

$$\frac{\cancel{l}}{6\cancel{EJ}} \cdot x_1 + \frac{2\cancel{l}}{3\cancel{EJ}} \cdot x_2 + \frac{q\cancel{l^3}^{\,2}}{12\cancel{EJ}} = 0$$

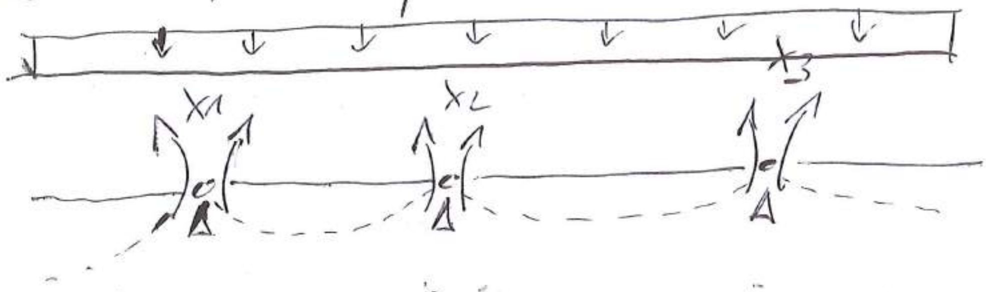
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{Bmatrix}$$

con $l = 4.5\,m$ si ottiene:

$q = 3.2\ \frac{kN}{m}$

$X_1 = -6.48\ kNm$ $\qquad$ $X_2 = -6.48\ kNm$

Questa tecnica può essere generalizzata per travature ad n-campate:



In cui l'equazione di congruenza dell'i-esimo nodo avrà sempre l'espressione:

EQUAZ 3 MOMENTI

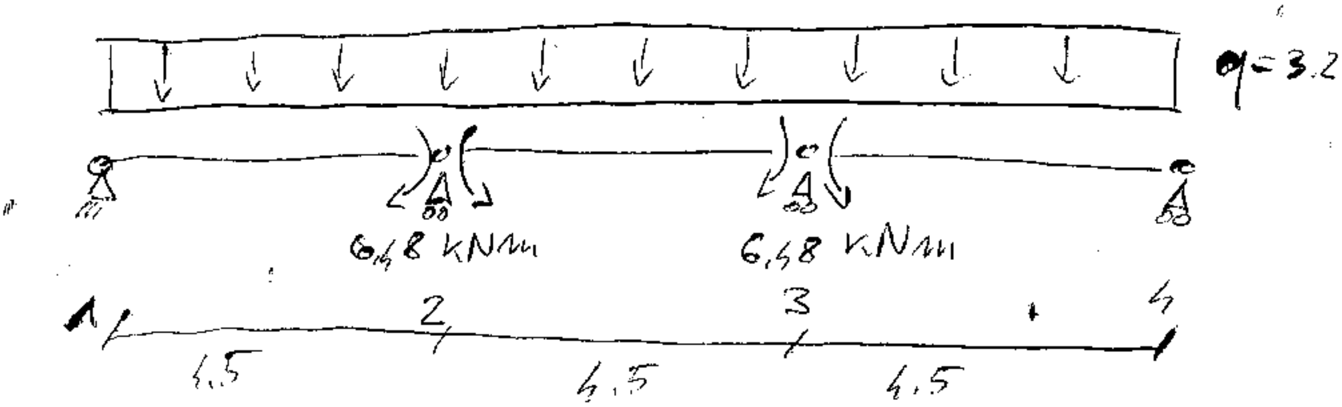
$$\frac{l}{6EJ}\cdot X_{i-1} + \left(\frac{l}{3EJ}+\frac{l}{3EJ}\right)\cdot X_i + \frac{l}{6EJ}\cdot X_{i+1} = -\frac{ql^3}{12EJ}$$

in cui compaiono solo i 3 momenti X_i, X_{i-1}, X_{i+1}.
per questo motivo la matrice ~~...~~ di flessibilità ha una forma tridiagonale

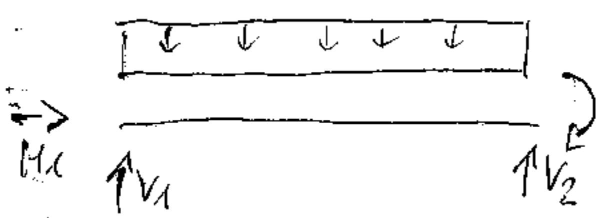
$$\begin{bmatrix} \frac{2l}{3EJ} & \frac{l}{6EJ} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{6EJ} & \frac{2l}{3EJ} & \frac{l}{6EJ} & & & \\ 0 & \frac{l}{6EJ} & \frac{2l}{3EJ} & \frac{l}{6EJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{6EJ} & \frac{2}{3}\frac{l}{EJ} & \frac{l}{6EJ} & 0 \end{bmatrix}$$ ecc

(6)

3° ⟶ DETERMINAZ DIAGRAMMI E DELLA DEFORMATA



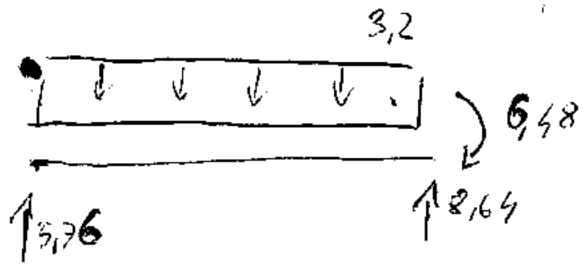
CAMPATA 1 − 2



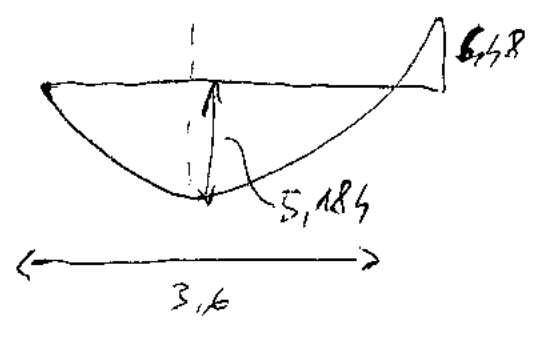
$H_1 = 0$

$$\begin{cases} V_1 + V_2 - (3{,}2 \cdot 4{,}5) = 0 \\ -V_2 \cdot 4{,}5 + 6{,}48 + (3{,}2 \cdot 4{,}5)\,\frac{4{,}5}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 = 5{,}76 \text{ kN} \\ V_2 = 8{,}64 \text{ kN} \end{cases}$$

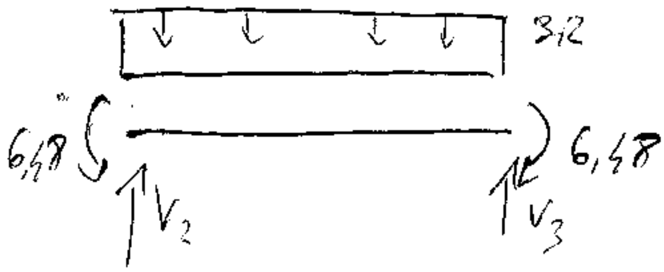


$T(x) = 5{,}76 - 3{,}2 \cdot x$



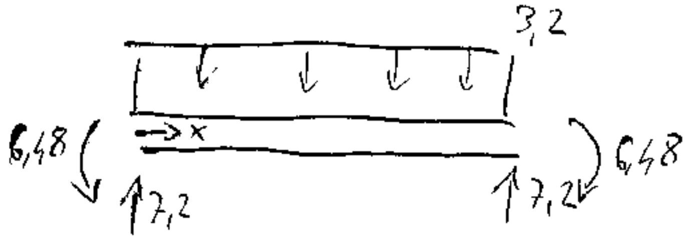
$M(x) = 5{,}76 \cdot x - (3{,}2)\,\frac{x^2}{2}$

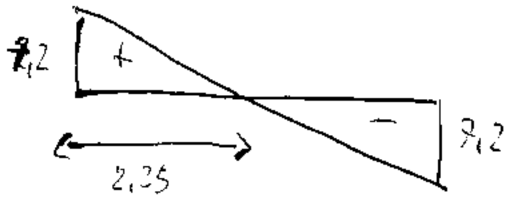
CAMPATA 2-3



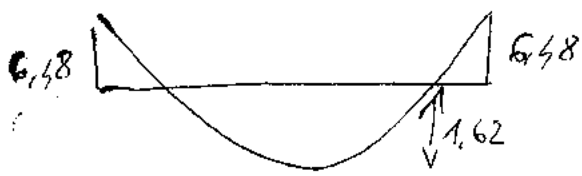
$$\begin{cases} V_2 + V_3 = 3{,}2 \cdot 4{,}5 \\ 2+ \quad -V_3 \cdot 4{,}5 + 6{,}48 - 6{,}48 + \left(3{,}2 \cdot \frac{4{,}5^2}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_3 = 7{,}2 \text{ kN} \\ V_2 = 7{,}2 \text{ kN} \end{cases}$$



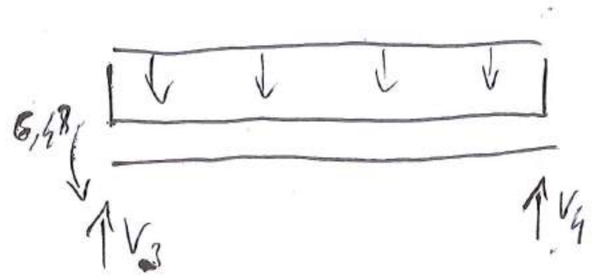


$T(x) = 7{,}2 - 3{,}2 \cdot x$



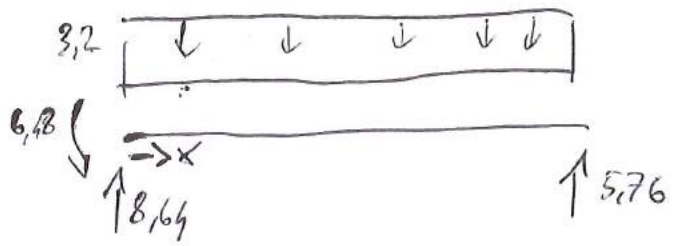
$M(x) = 7{,}2x - 6{,}48 - 3{,}2 \cdot \frac{4{,}5^2}{2}$

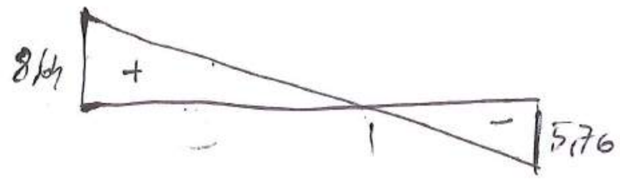
8 CAMPATA 3-4



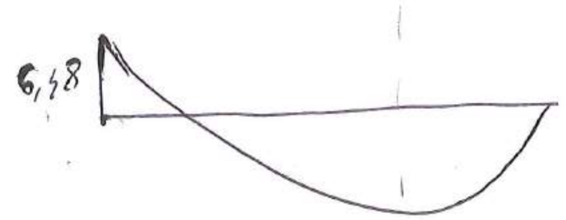
$$\begin{cases} V_3+V_4 = 3{,}2\cdot 4{,}5 \\ -V_4\cdot 4{,}5 + 3{,}2\cdot \dfrac{4{,}5^2}{2} - 6{,}48 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_3 = 8{,}64 \\ V_4 = 5{,}76 \end{cases}$$



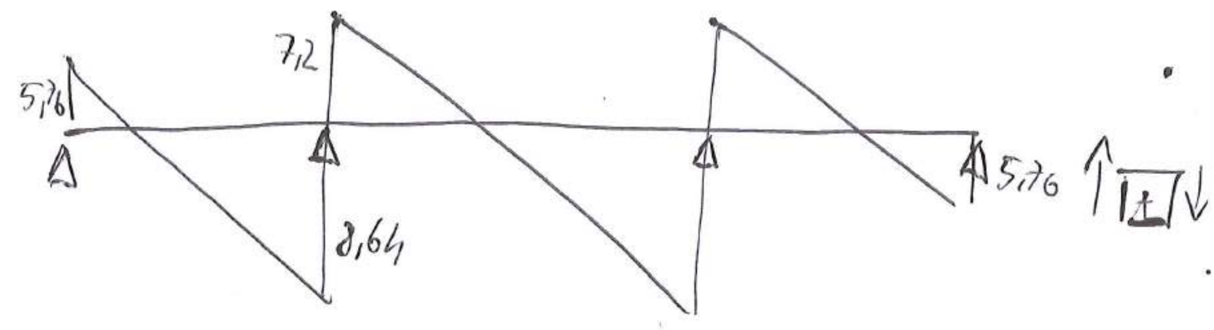


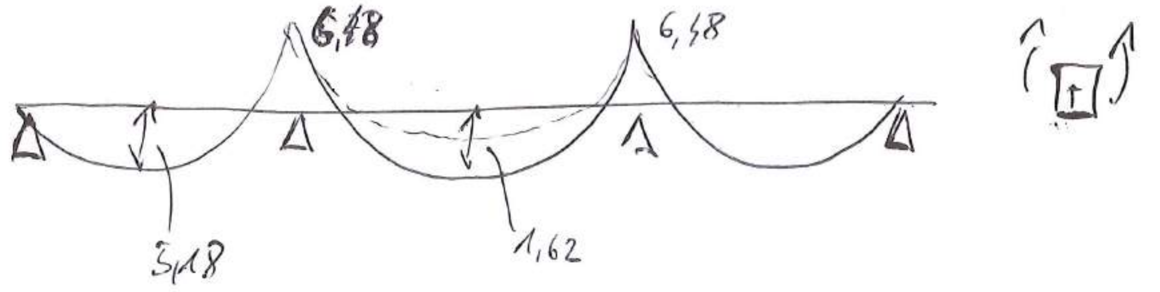
$$T(x) = 8{,}64 - 3{,}2\cdot x$$



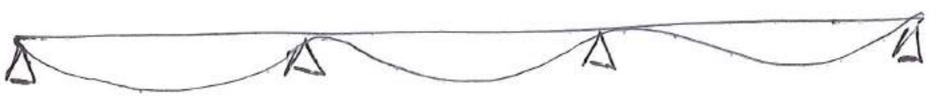
$$M(x) = 8{,}64\,x - 6{,}48 - 3{,}2\cdot \frac{x^2}{2}$$

Complessivamente avremo una struttura simmetrica con carichi sym:

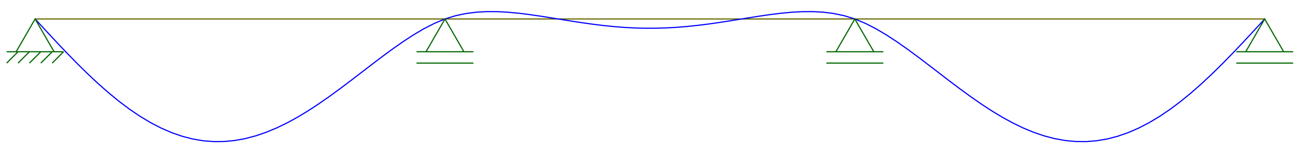




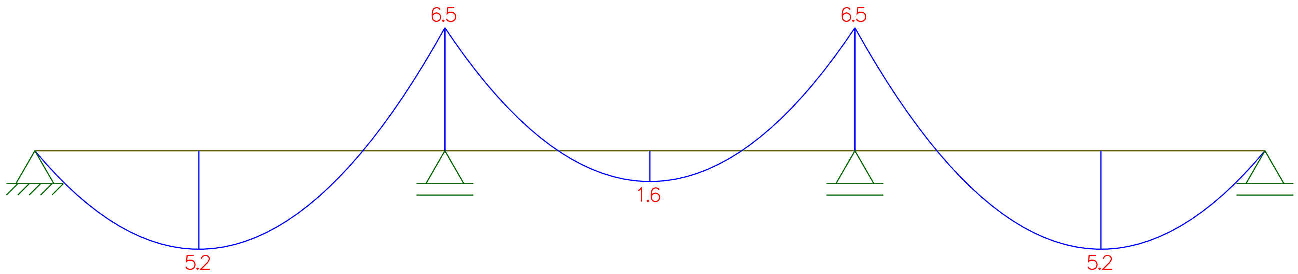
DEFORMATA



Deformata



Momento



Taglio