

1 LINEE DI TRASMISSIONE: TEORIA CIRCUITALE

Consideriamo una struttura con due conduttori paralleli, indefinita, ad esempio un cavo coassiale. La differenza di potenziale tra i due conduttori, v , e la corrente, i , che fluisce nel conduttore centrale sono funzioni del tempo t ma possono essere, e anzi sono, funzioni anche della posizione z lungo il cavo. Supponiamo infatti di applicare all'istante $t = 0$ una differenza di potenziale costante, ad esempio mediante un generatore, ad una certa sezione del cavo, che scegliamo come origine dell'asse z . All'istante $t = 0^-$ la differenza di potenziale in ogni punto del cavo è evidentemente nulla. Se andiamo *successivamente* a misurare la differenza di potenziale in un altro punto del cavo, di ascissa $z = D$, troveremo invece un valore di differenza di potenziale pari alla tensione del generatore. Poichè questa differenza di potenziale è *causata* dalla inserzione del generatore, essa non può però comparire prima che la relazione causa-effetto abbia viaggiato da $z = 0$ a $z = D$, e quindi, in base alla teoria della relatività, prima che sia trascorso un tempo $T_D = D/c$, essendo $c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ¹ la velocità della luce nel vuoto, non che la velocità massima a cui si può spostare una relazione causa-effetto. Ovviamente all'istante t_D non vi può essere tensione oltre $z = D$, in quanto non è trascorso abbastanza tempo affinché la relazione causa-effetto vi arrivi, e quindi se consideriamo la tensione all'istante t_D (*prendiamo una fotografia della tensione all'istante t_D*) troveremo che questa è diversa nei vari punti della linea, ovvero dipende da z .

Per determinare le equazioni a cui soddisfano $v(z, t)$ e $i(z, t)$ occorre specificare le proprietà della struttura.

Per ora facciamo alcune ipotesi semplificatrici che poi nel seguito rimuoveremo, almeno in parte.

- 1) la struttura ha una geometria uniforme rispetto a z
- 2) i due conduttori sono di un materiale conduttore elettrico perfetto (C.E.P.). In altri termini la loro conducibilità σ tende all'infinito. Conseguenza immediata è che all'interno di tali conduttori il campo elettrico (e di conseguenza quello magnetico) deve essere nullo, altrimenti dissiperebbe una potenza infinita. Poichè la componente tangente del campo elettrico \underline{E} si conserva attraverso una superficie, allora alla superficie di un C.E.P. il campo elettrico è necessariamente normale e pertanto l'integrale di linea di \underline{E} su tale superficie è sempre nullo.
- 3) la struttura è vuota o riempita in maniera uniforme di un materiale le cui proprietà dielettriche e magnetiche non dipendono dal campo applicato (linearità), siano costanti del tempo (omogeneità temporale) oltre che nello spazio (omogeneità spaziale), non cambino per una rotazione relativa del campo esterno e del materiale (isotropia). Queste proprietà sono verificate, oltre che dal vuoto, da una larga classe di materiali utilizzati nelle applicazioni elettromagnetiche.

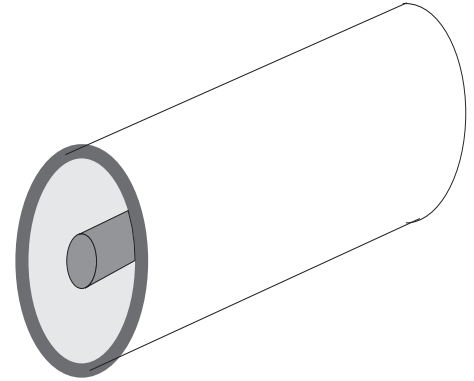


Fig 1: Geometria di un cavo coassiale

¹ Spesso si assume $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, con un errore di 0.2 %

- 4) i costituenti microscopici del materiale interno alla struttura siano privi di inerzia (non dispersività nel tempo). Tale proprietà è, invece, verificata solo dal vuoto e, con maggiore o minore approssimazione, da parte dei materiali di interesse. Pertanto questa ipotesi limita abbastanza il campo di applicabilità di quanto diremo, a meno che non si considerino segnali di tipo sinusoidale nel tempo. Vedremo infatti nel seguito che per tali segnali tutta la trattazione analitica, e buona parte dei risultati, prescindono da tale ipotesi.

Le ipotesi 3) e 4) ci consentono di dire che tra le induzioni e i campi valgono relazione del tipo

$$\underline{D} = \varepsilon \underline{E} \quad \underline{B} = \mu \underline{H} \quad (1)$$

dove ε, μ sono costante dielettrica e permeabilità magnetica del materiale, e si misurano rispettivamente in $[F/m]$ e $[H/m]$. Nel caso del vuoto esse s'indicano con ε_0, μ_0 rispettivamente, e valgono

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 8.85 \text{ pF/m} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} = 1.256 \text{ }\mu\text{H/m} \end{aligned}$$

In materiali diversi dal vuoto è utile introdurre le costanti relative

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (2)$$

e nel seguito utilizzeremo indifferentemente $\varepsilon_r \varepsilon_0$ oppure ε . Va anche detto che alle frequenze di interesse $\mu_r \simeq 1$ per tutti i materiali usuali². E quindi quasi sempre useremo direttamente μ_0 . In ogni caso, nelle ipotesi 3) e 4), basta sostituire $\mu = \mu_r \mu_0$ a μ_0 (e, analogamente, anche $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ad ε_0) per passare dal caso di permeabilità pari a quella del vuoto a quella di permeabilità diversa.

Cominciamo ad esaminare un tratto di linea di lunghezza Δz , piccola. I due conduttori di questo tratto costituiscono un condensatore con capacità $C \Delta z$, dove C (capacità per unità di lunghezza, che si misura in $[F/m]$) dipende dalla geometria della linea e dal dielettrico interposto. Per un cavo coassiale, ad esempio, il condensatore è un condensatore cilindrico per il quale

$$C = (\varepsilon_r \varepsilon_0) \frac{2\pi}{\log \frac{b}{a}} \quad (3)$$

essendo a, b i raggi interno ed esterno del cavo e ε_r la costante dielettrica del materiale che riempie il cavo³.

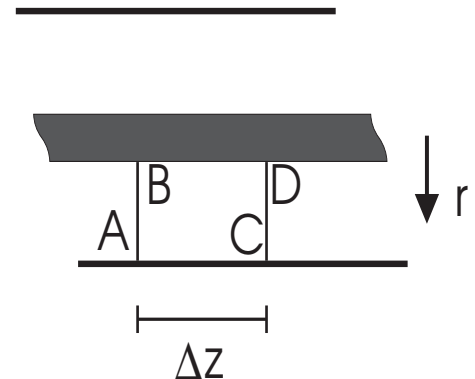


Fig 2

² Fanno eccezione materiali speciali, detti *ferriti*, costruiti per avere particolari proprietà magnetiche, e che in genere soddisfano solo alcune delle proprietà 3). Di essi, comunque, non ci occuperemo in queste note

³ Qui e nel seguito $\log x$ indica il logaritmo naturale di x . I logaritmi decimali saranno invece indicati con \log_{10} .

Poichè la capacità C di un condensatore è proporzionale a ε_r , può essere utile esprimerla nella forma

$$C = \varepsilon_r C_a$$

essendo C_a la capacità del medesimo condensatore quando il dielettrico è il vuoto (o l'aria). In tal modo è possibile separare il contributo del dielettrico (ε_r) e quello della geometria dei conduttori (C_a) alla capacità totale. Del concetto di capacità in aria C_a faremo spesso uso nel seguito.

Tornando al nostro tratto di linea, consideriamo la corrente $i(z, t)$ che scorre sul conduttore interno. Essa produce un campo magnetico le cui linee di forza si avvolgono attorno al conduttore. Si ha pertanto un flusso concatenato col conduttore stesso e quindi un coefficiente di autoinduzione $L\Delta z$ dove L (autoinduttanza *statica* per unità di lunghezza, che si misura in $[H/m]$) dipende dalla geometria dei conduttori e dalla permeabilità magnetica del materiale che riempie il cavo.

Il coefficiente di autoinduzione L è in genere più complesso da calcolare di C , tranne che per geometrie molto semplici. Una di queste è proprio il cavo coassiale. Infatti se sul conduttore centrale scorre una corrente (continua) I , si ha un campo magnetico $I/(2\pi r)$ che si avvolge attorno a tale conduttore e che varia in modo inversamente proporzionale alla distanza dall'asse del conduttore.

Il flusso concatenato attraverso il percorso $ABCD$ (Fig. 2) vale allora

$$\Phi = L\Delta z I = \mu_0 \int_S H dS = \Delta z \mu_0 \int_a^b H dr \quad (4)$$

in quanto H è costante in direzione ortogonale a r ed è sempre ortogonale alla superficie $ABCD$. Inserendo l'espressione di H segue:

$$L = \frac{1}{I} \mu_0 \int_a^b H dr = \frac{1}{I} \mu_0 \int_a^b \frac{I}{2\pi r} dr = \frac{1}{2\pi} \mu_0 \left| \log |r| \right|_a^b = \mu_0 \frac{\log \frac{b}{a}}{2\pi} \quad (5)$$

Il tratto Δz è quindi equivalente a un circuito LC come in Fig. 3. Tensione e corrente ai due terminali del circuito saranno diversi, in quanto calcolati rispettivamente in z_0 e in $z_0 + \Delta z$. Notiamo inoltre che la corrente è scelta equiversa con l'asse z .

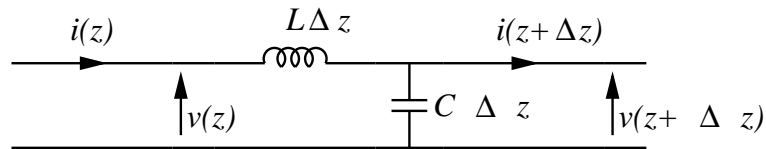


Fig. 3: Circuito equivalente ad un tratto Δz di linea di trasmissione

Applicando i principi di Kirchhoff al circuito di Fig. 3, si ottiene

$$\begin{aligned} i(z_0) &= i(z_0 + \Delta z) + i_C(t) \\ v(z_0) &= v_L(t) + v(z_0 + \Delta z) \end{aligned} \quad (6)$$

essendo $i_C(t)$ e $v_L(t)$ rispettivamente la corrente attraverso il condensatore e la caduta di tensione ai capi dell'induttore (vedi Fig. 4).

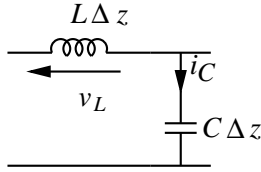


Fig. 4: Definizione di v_L e i_C

Ricordando che

$$i_C(t) = C\Delta z \frac{dv_C}{dt} \quad v_L(t) = L\Delta z \frac{di_L}{dt}$$

e che $v_C(t) = v(z_0 + \Delta z, t)$ e $i_L(t) = i(z_0, t)$ (vedi Fig. 3,4) si ottiene da (6), riordinando i termini

$$\begin{aligned} -i(z_0 + \Delta z, t) + i(z_0, t) &= C\Delta z \frac{dv(z_0 + \Delta z, t)}{dt} \\ -v(z_0 + \Delta z, t) + v(z_0, t) &= L\Delta z \frac{di(z_0, t)}{dt} \end{aligned} \quad (7)$$

Dividendo per Δz e passando al limite per $\Delta z \rightarrow 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} -\frac{di(z, t)}{dz} &= C \frac{dv(z, t)}{dt} \\ -\frac{dv(z, t)}{dz} &= L \frac{di(z, t)}{dt} \end{aligned} \quad (8)$$

che prendono il nome di equazioni delle linee di trasmissione ⁴. Notiamo esplicitamente che le (8) valgono per ogni linea di trasmissione. La struttura fisica della linea (geometria e materiale) entra solo attraverso le costanti L e C che sono dette *costanti primarie della linea*. Poichè ogni linea è costituita da infinite celle del tipo di Fig. 2, tali costanti primarie L e C sono *distribuite* lungo tutta la linea. Si parla allora di circuiti a costanti distribuite per indicare circuiti che contengono anche linee di trasmissione, per differenziarli dagli ordinari circuiti, in cui le *costanti*, ovvero induttanza e capacità, sono localizzate in componenti *puntiformi* e che vengono pertanto detti a *costanti concentrate*. È naturalmente possibile, e viene fatto normalmente, inserire nei circuiti con linee di trasmissione anche componenti concentrati passivi (induttori, condensatori, resistori e così via) e attivi (generatori reali ⁵ ma per trattarli come tali, applicando ad essi i principi di Kirchhoff, essi devono appunto essere *concentrati*) ovvero occupare una estensione sufficientemente piccola che per essi valgano per l'appunto i principi di Kirchhoff.

Le equazioni (8) sono state introdotte inizialmente [?] per studiare la propagazione di un segnale telegrafico e prendono anche il nome di equazioni dei telegrafisti.

Tali equazioni, e quindi la propagazione di un segnale lungo la linea, dipendono dalle costanti primarie L, C , che sono caratteristiche di ogni data linea e vanno quindi calcolate caso per caso, come abbiamo visto per il caso di un cavo coassiale. D'altra parte, per quest'ultimo segue, moltiplicando (3) e (5)

⁴ Ovviamente nella (8) si è indicato il punto z_0 , che è un punto generico della linea, con z .

⁵ Ci limitiamo per ora a considerare generatori reali di tensione o di corrente, rimandando a più avanti una discussione sul significato e l'utilizzo di generatori ideali nelle linee di trasmissione

$$LC = \frac{\mu_0}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) (\varepsilon_r \varepsilon_0) \frac{2\pi}{\log\left(\frac{b}{a}\right)} = (\varepsilon_r \varepsilon_0) \mu_0 = \frac{\varepsilon_r}{c^2} \quad (9)$$

In altri termini, il prodotto LC per un cavo coassiale è pari all'inverso del quadrato della velocità della luce nel mezzo che riempie il cavo.

Ora si può dimostrare che il risultato (9) vale per qualunque struttura guidante con simmetria *cilindrica*, purchè delimitata da almeno due conduttori e con il dielettrico che la riempie trasversalmente omogeneo. Pertanto il calcolo di L non è necessario, bastando quello della sola capacità per ottenere anche la autoinduttanza, il che è un vantaggio notevole essendo, come già detto, più semplice calcolare C che L (ed evidentemente molto più comodo calcolarne uno solo, anzicchè entrambi).

2 PROPAGAZIONE PER ONDE

Prima di addentrarci nelle proprietà generali delle (8) e nel calcolo della loro soluzione generale (che verrà però fatto solo per il caso di soluzioni che varino sinusoidalmente nel tempo) vediamo di trovare qualche soluzione particolare delle (8) e di discuterne le proprietà. Le (8) sono equazioni differenziali a derivate parziali, in cui le variabili sono z , t . Cerchiamo soluzioni, se esistono, che dipendono da tali variabili solo tramite la grandezza $z - v_p t$, essendo v_p una costante (dimensionalmente una velocità) da determinare. Poniamo cioè

$$\begin{aligned} v(z, t) &= \mathcal{V}(z - v_p t) \\ i(z, t) &= \mathcal{I}(z - v_p t) \end{aligned} \quad (10)$$

dove \mathcal{V} e \mathcal{I} sono funzioni da determinare, e sostituiamo nelle (8).

$$\begin{aligned} -\dot{\mathcal{I}} &= -v_p C \dot{\mathcal{V}} \\ -\dot{\mathcal{V}} &= -v_p L \dot{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{I}} &= v_p C \dot{\mathcal{V}} \\ \dot{\mathcal{V}} &= \frac{1}{v_p L} \dot{\mathcal{I}} \end{aligned} \quad (11)$$

dove il punto indica la derivata della funzione rispetto al proprio argomento. Le (11) costituiscono un sistema lineare omogeneo che può avere soluzione solo se le due equazioni sono equivalenti, ovvero se

$$v_p L = \frac{1}{v_p C} \quad \Rightarrow \quad v_p^2 = \frac{1}{LC} \quad (12)$$

che fissa il valore di v_p .

La costante $v_p L = (v_p C)^{-1}$, che lega $\dot{\mathcal{V}}$ e $\dot{\mathcal{I}}$ e che è dimensionalmente una impedenza, è anch'essa una caratteristica della linea e prende il nome di *impedenza caratteristica* della linea di trasmissione. Tale grandezza s'indica in genere con Z_0 . Dalla (12) segue quindi

$$Z_0 = v_p L = \frac{1}{v_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (13)$$

Notiamo poi che le equazioni dei telegrafisti determinano solo v_p^2 e quindi vi saranno soluzioni funzione di $\xi^+ = z - v_p^+ t$ e soluzioni funzione di $\xi^- = z - v_p^- t$, essendo v_p^+ la radice quadrata positiva di $(LC)^{-1}$ e $v_p^- = -v_p^+$.

Dalle (11) segue poi

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\xi} = Z_0 \frac{d\mathcal{I}}{d\xi} \quad (14)$$

e, a parte una costante arbitraria che possiamo fissare pari a 0,

$$\mathcal{V}(\xi^+) = Z_0 \mathcal{I}(\xi^+) \quad (15)$$

che è l'unica condizione imposta sulla \mathcal{V} (ed \mathcal{I}). Allo stesso modo si ottiene $\mathcal{V}(\xi^-) = -Z_0 \mathcal{I}(\xi^-)$. In altri termini, dette f e g due funzione arbitrarie, sono separatamente soluzioni delle equazioni dei telegrafisti sia

$$\begin{aligned} v(z, t) &= f(z - v_p t) \\ i(z, t) &= \frac{1}{Z_0} f(z - v_p t) \end{aligned} \quad (16)$$

sia

$$\begin{aligned} v(z, t) &= g(z + v_p t) \\ i(z, t) &= -\frac{1}{Z_0} g(z + v_p t) \end{aligned} \quad (17)$$

Prendiamo in particolare la (16). Se consideriamo la *fotografia* della tensione a due istanti diversi di tempo, t_1 e t_2 , otteniamo rispettivamente $f(z - v_p t_1)$ e $f(z - v_p t_2)$. In altri termini i due andamenti di tensione sono uguali come forma ma si trovano in punti diversi dell'asse z . Se $f(\xi)$ è diversa da 0 solo tra 0 e Z , allora la tensione all'istante t_1 è diversa da 0 tra $z = v_p t_1$ e $z = v_p t_1 + Z$, mentre la tensione all'istante t_2 è diversa da 0 tra $z = v_p t_2$ e $z = v_p t_2 + Z$ (vedi Fig. 3).

La funzione $f(z - v_p t)$ rappresenta dunque una *onda* ovvero una *configurazione di campo che si muove nello spazio con velocità finita misurabile, mantenendosi riconoscibile*¹. Il moto di un'onda è detto *propagazione*. Naturalmente questa onda deve avere una causa² (ovvero una sorgente) posizionata per valori di z negativi (ovvero minori di quelli in cui stiamo considerando l'onda) e attiva precedentemente agli istanti t_1, t_2 in cui stiamo guardando tale onda.

La velocità di *propagazione* dell'onda descritta da $f(z - v_p t)$ si ottiene immediatamente come rapporto tra lo spazio percorso nel moto e il tempo impiegato percorrerlo, e vale

$$\frac{v_p t_2 - v_p t_1}{t_2 - t_1} = v_p \quad (18)$$

¹ Nel nostro caso, anzi, si mantiene esattamente inalterata la forma e persino la ampiezza.

² Si ricordi l'esempio del generatore costante applicato alla linea del paragrafo 1. In quel caso la tensione occupa zone via via più grandi dell'asse z al crescere di t , ovvero si *muove* allontanandosi dalla sorgente.

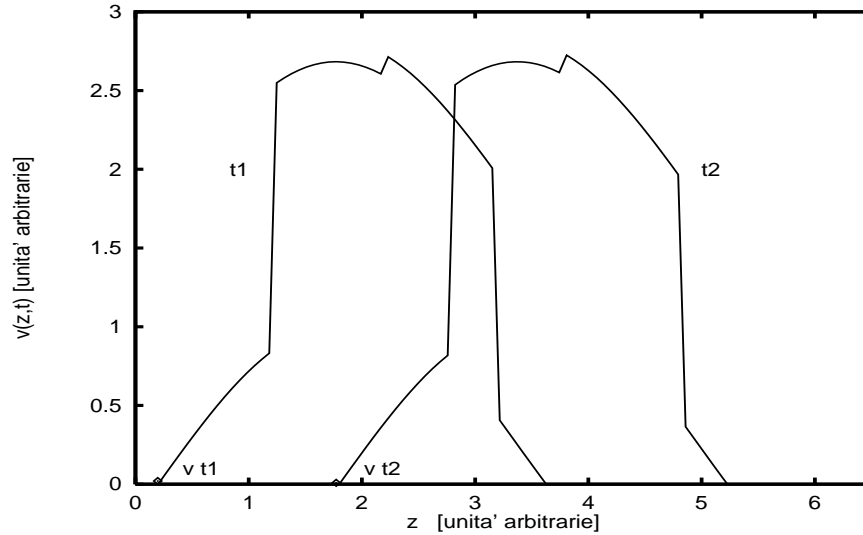


Fig. 1: Andamento della tensione nello spazio negli istanti t_1 e t_2 (con $t_2 > t_1$).

L'onda descritta da $f(z - v_p t)$ è pertanto un'onda che si propaga nel verso positivo dell'asse z con velocità pari a v_p . Allo stesso modo si può verificare che $g(z + v_p t)$ rappresenta un'onda che si propaga con la stessa velocità, ma nel verso negativo dell'asse z . Si può cioè dire che i vettori velocità delle due onde sono $v_p \hat{i}_z$ e $-v_p \hat{i}_z$. Le due onde prendono anche il nome di onda *progressiva* e onda *riflessa*. Notiamo esplicitamente che, *separatamente* per le due onde, la forma di tensione e di corrente è la stessa (a parte un cambio di segno per l'onda riflessa). D'altra parte le equazioni dei telegrafisti sono lineari, e quindi, qualunque siano le funzioni f e g , anche

$$v(z, t) = f(z - v_p t) + g(z + v_p t) \quad (19)$$

è una possibile onda di tensione. La corrispondente onda di corrente vale però

$$i(z, t) = \frac{1}{Z_0} [f(z - v_p t) - g(z + v_p t)] \quad (20)$$

e quindi la forma di tensione e di corrente è diversa ed il loro rapporto (che separatamente per le due onde di (16) e (17) è costante e pari a Z_0) diviene funzione di (z, t) . Si può dimostrare che le (19,20) costituiscono la soluzione generale di (8).

Dalla (12) e dalla (9) segue che

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_r \epsilon_0) \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (21)$$

ovvero la velocità di propagazione delle onde in una linea di trasmissione è numericamente pari alla velocità della luce nel mezzo che riempie la linea stessa, ma è indipendente dalle caratteristiche geometriche della linea. Viceversa l'impedenza caratteristica di una linea dipende in maniera essenziale sia dalle caratteristiche del mezzo, sia dalla geometria (e dimensioni) della struttura. Per un cavo coassiale, ad esempio, si ha (vedi (3,5))

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) \frac{1}{2\pi(\varepsilon_r \varepsilon_0)} \log\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\zeta_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad (22)$$

essendo

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \, \Omega$$

una grandezza detta *impedenza intrinseca del vuoto* (intrinseca perchè dipendente solo dalle caratteristiche elettromagnetiche del mezzo). $\zeta_0/\sqrt{\varepsilon_r}$ viene in genere chiamata, analogamente, *impedenza intrinseca del mezzo* considerato.

3 ONDE SINUSOIDALI

Il caso più interessante di propagazione di onde elettromagnetiche è quando queste variano sinusoidalmente nel tempo in ogni punto con la stessa pulsazione ω (ovvero con la stessa frequenza $f = \omega/2\pi$). Ciò è possibile ad esempio se tutte le sorgenti dell'onda sono sinusoidali con la stessa pulsazione ω ¹.

Sappiamo che una grandezza sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (23)$$

può essere rappresentata da un numero complesso

$$v(t) \longrightarrow V_M e^{j\varphi} \quad (24)$$

nel senso che

- (a) la corrispondenza è biunivoca: noto il numero complesso A associato alla grandezza $a(t)$, quest'ultima vale

$$a(t) = \text{Re}[A e^{j\omega t}] \quad (25)$$

- (b) tutte le operazioni lineari (somma, moltiplicazione per un numero reale, derivazione, integrazione) possono essere fatte indifferentemente sulle due rappresentazioni. In particolare

$$\frac{dv}{dt} \longrightarrow j\omega [V_M e^{j\varphi}] \quad (26)$$

Se ora consideriamo una $v(z, t)$ sinusoidale, per ogni punto z possiamo considerare il corrispondente numero complesso. Ciò conduce alla corrispondenza (generalizzazione della (24))

¹ A rigori, questo è vero in quanto L, C sono costanti (ovvero non dipendono nè dal tempo nè dalla ampiezza dei campi). Le equazioni che regolano il fenomeno (nel nostro caso le equazioni dei telegrafisti) devono cioè essere *lineari* e a *coefficienti costanti* affinché a una sorgente sinusoidale corrisponda un effetto sinusoidale con la stessa frequenza.

$$v(z, t) \longrightarrow V(z) \quad (27)$$

essendo $V(z)$ una funzione complessa, definita da

$$v(z, t) = \operatorname{Re} \left[V(z) e^{j\omega t} \right] \quad (28)$$

Per distinguere il caso in cui si utilizza la rappresentazione come funzione di (z, t) da quella in cui si utilizzano i numeri complessi corrispondenti, si parla di dominio del tempo (DT) nel primo caso e di dominio della frequenza (DF) nel secondo (si dirà quindi tensione nel DT o nel DF , equazioni nel DT o nel DF e così via). Tutte le operazioni rispetto al tempo si eseguono considerando z come un parametro. Viceversa, per quelle rispetto a z , la corrispondenza (28) è trasparente, nel senso che

$$v(z, t) \longrightarrow V(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv(z, t)}{dz} \longrightarrow \frac{dV(z)}{dz} \quad (29)$$

e analoghe.

Se le onde sono sinusoidali, le equazioni dei telegrafisti (8) prendono la forma (equazioni dei telegrafisti nel DF)

$$\begin{aligned} -\frac{dV(z)}{dz} &= j\omega LI(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} &= j\omega CV(z) \end{aligned} \quad (30)$$

dove $V(z)$, $I(z)$ sono i numeri complessi rappresentativi di $v(z, t)$, $i(z, t)$ rispettivamente (ovvero tensione e corrente nel DF).

Le (30) sono diventate equazioni differenziali ordinarie, la cui soluzione si ottiene derivando la prima rispetto a z

$$-\frac{d^2V(z)}{dz^2} = j\omega L \frac{dI(z)}{dz}$$

e sostituendo $\frac{dI(z)}{dz}$ dalla seconda per ottenere

$$-\frac{d^2V(z)}{dz^2} = j\omega L (-j\omega C V(z))$$

ovvero

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} + \omega^2 LC V(z) = 0 \quad (31)$$

a cui associare la prima delle (30) per ottenere $I(z)$. Introduciamo la costante reale (positiva) β definita da

$$\beta^2 = \omega^2 LC \quad (32)$$

La soluzione generale della (31) può essere scritta nella forma

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} \quad (33)$$

essendo V^+ , V^- due costanti (complesse) arbitrarie.

Per ottenere il significato fisico della soluzione (33) occorre passare nel DT utilizzando la (28):

$$v(z, t) = |V^+| \cos(\beta z - \omega t - \varphi^+) + |V^-| \cos(\beta z + \omega t + \varphi^-) \quad (34)$$

avendo posto $V^\pm = |V^\pm| \exp(j\varphi^\pm)$. Ora

$$\cos(\beta z \mp \omega t + \varphi^\pm) = \cos \left[\beta \left(z \mp \frac{\omega}{\beta} t \right) + \varphi^\pm \right]$$

e quindi i due termini della (34) rappresentano due onde che viaggiano nella direzione positiva e in quella negativa dell'asse z con velocità ω/β . Anche nel caso sinusoidale, ognuna di tali onde ha una causa, localizzata per z rispettivamente minore e maggiore della zona in cui stiamo considerando le due onde. Poichè da (12) segue

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = v_p \quad (35)$$

la (34) rappresenta un caso particolare della (19), in cui le funzioni arbitrarie sono funzioni cosinusoidali del loro argomento. Data la forma di tale argomento, $z \pm v_p t$, segue che la soluzione è ovviamente cosinusoidale nel tempo (ovvero fissato z), ma deve essere anche necessariamente cosinusoidale nello spazio (ovvero per ogni istante di tempo la distribuzione spaziale della tensione è una cosinusoide). La costante $\beta = \omega/v_p$ gioca allora il ruolo della *pulsazione* ed il corrispondente *periodo spaziale*

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (36)$$

prende nome di *lunghezza d'onda*. La costante β , che determina come l'onda si propaga, viene detta *costante di propagazione*. Le costanti V^+ , V^- sono le ampiezze (complesse) dell'onda progressiva e di quella riflessa, misurate per $z = 0$.

Può essere utile riscrivere la (33) mettendo in evidenza l'onda progressiva

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} \left[1 + \frac{V^-}{V^+} e^{2j\beta z} \right] = V^+ e^{-j\beta z} \left[1 + \Gamma(z) \right] \quad (37)$$

L'ultima uguaglianza della (37) definisce la funzione $\Gamma(z)$, che prende il nome di *coefficiente di riflessione* e misura il rapporto tra l'ampiezza dell'onda riflessa e quella dell'onda incidente¹. Una importante proprietà del coefficiente di riflessione è che, essendo β reale, $|\Gamma(z)|$ è costante.

A partire dalla rappresentazione (33) si ottiene, dalla prima della (30), l'andamento della corrente, come

$$I(z) = \frac{\beta}{\omega L} \left[V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z} \right] \quad (38)$$

Ovviamente anche nella (38) vi sono i due termini di onda progressiva e riflessa, col segno meno tra di essi. Inoltre dalla (32) segue che $\beta/\omega L$ è l'inverso della impedenza caratteristica, si ha cioè anche

¹ Si noti che, spesso, si indica la quantità $\Gamma(0) = V^-/V^+$ semplicemente col simbolo Γ .

$$Z_0 = \frac{\omega L}{\beta} = \frac{\beta}{\omega C} \quad (39)$$

Possiamo scrivere anche la corrente in una forma analoga alla (37) come

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} V^+ e^{-j\beta z} \left[1 - \Gamma(z) \right] \quad (40)$$

Dalle (33) e (38) si vede immediatamente che una linea di trasmissione, pur potendo anche essere costituita da due conduttori paralleli, si comporta in maniera completamente diversa da due fili percorsi da corrente continua (o di bassa frequenza). Per tale motivo si usano simboli speciali per indicare le linee di trasmissione. Noi utilizzeremo il simbolo in Fig. 4, in cui in genere sono riportati costante di propagazione e impedenza caratteristica della linea, oppure le costanti primarie L e C ². Per contrasto, indichiamo con un tratto sottile i conduttori, e le connessioni, di lunghezza infinitesima su cui, quindi, valgono i principi di Kirchhoff e non le equazioni dei telegrafisti (30). Poichè il filo inferiore di una linea è generalmente comune a tutte le linee (e costituisce la massa del circuito), talvolta verrà sottinteso, per esigenze grafiche, rappresentando la linea col simbolo di Fig. 5.

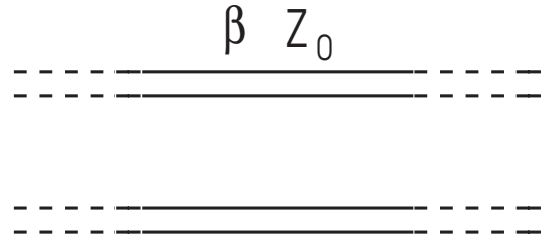


Fig 4: Simbolo di una linea di trasmissione; β e Z_0 sono le costanti secondarie della linea.

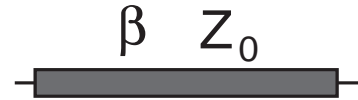


Fig 5: Simbolo alternativo di linea.

4 RAPPRESENTAZIONE STAZIONARIA

La soluzione (33,38) della equazione dei telegrafisti prende il nome di soluzione *viaggiante* in quanto costituita da onde che viaggiano. Tuttavia richiede, per essere scritta, la conoscenza separatamente delle ampiezza di tali onde (nello stesso, ma anche eventualmente in punti diversi). In molti casi è invece nota tensione e corrente in un certo punto $z = \ell$ della linea. Conviene allora scrivere la soluzione della (31) in termini di funzioni trigonometriche. Si ha così

$$V(z) = V(\ell) \cos \beta(z - \ell) + \mathcal{A} \sin \beta(z - \ell) \quad (41)$$

in cui si è direttamente tenuto conto che la costante davanti al $\cos \beta(z - \ell)$ vale $V(\ell)$. La corrente corrispondente vale

² Il simbolo non vuole affatto indicare che solo le linee bifilari sono linee di trasmissione (così come quello di resistenza non indica che queste devono essere costituite da un filo a zigzag). Viceversa esso si usa per tutte le linee trasmissione, ovvero ogni qualvolta valgono le (30)

$$I(z) = \frac{\beta}{j\omega L} [V(\ell) \sin \beta(z - \ell) - \mathcal{A} \cos \beta(z - \ell)] \quad (42)$$

La corrente per $z = \ell$ vale

$$I(\ell) = -\frac{\beta \mathcal{A}}{j\omega L}$$

da cui segue il valore della costante \mathcal{A}

$$\mathcal{A} = -j \frac{\omega L}{\beta} I(\ell) = -j Z_0 I(\ell) \quad (43)$$

e le (41,42) diventano

$$\begin{aligned} V(z) &= V(\ell) \cos \beta(z - \ell) - j Z_0 I(\ell) \sin \beta(z - \ell) \\ I(z) &= I(\ell) \cos \beta(z - \ell) - \frac{j}{Z_0} V(\ell) \sin \beta(z - \ell) \end{aligned} \quad (44)$$

che sono le soluzioni cercate. Passando nel DT possiamo anche ottenere l'interpretazione fisica della soluzione (44). Prendendo uno dei termini a caso, ad esempio il primo, si trova, nel DT

$$\text{Re}[V(\ell) \cos \beta(z - \ell) e^{j\omega t}] = |V(\ell)| \cos \beta(z - \ell) \cos(\omega t + \varphi_\ell) \quad (45)$$

essendo φ_ℓ la fase di $V(\ell)$. La (45) non è più un'onda ma una configurazione *stazionaria* di campo che oscilla nel tempo. In altri termini, *fotografie* successive della tensione mostrano sempre la stessa forma. Cambia solo la ampiezza (ovvero la tensione si contrae e si espande) ed eventualmente il segno, come in Fig. 1. A configurazioni stazionarie simili si perviene considerando gli altri termini di (44). La soluzione (44) è detta quindi soluzione stazionaria.

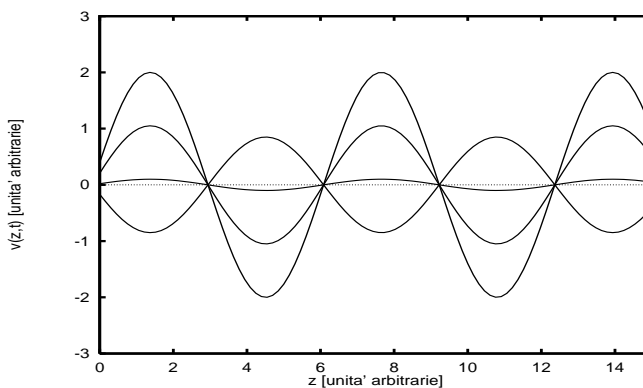


Fig. 1: Andamento della tensione nello spazio per una onda stazionaria in istanti di tempo successivi.

I vari termini di una soluzione stazionaria non sono onde, e quindi non hanno una sorgente, o causa, immediatamente riconoscibile. Poichè però ogni termine della (44) può essere ottenuto come la sovrapposizione (interferenze) tra un'onda progressiva e un'onda riflessa di pari ampiezza, sovrapposizione che dà proprio luogo alla configurazione stazionaria (44), ogni termine della soluzione stazionaria deve avere una causa localizzata per z inferiore e una localizzata per z superiore alla zona in cui vale la (44).

Notiamo infine che spesso le (44) sono scritte (e usate) per $\ell = 0$, ovvero ponendo l'origine dell'asse z nel punto in cui si conoscono tensione e corrente, ottenendo

$$\begin{aligned} V(z) &= V(0) \cos \beta z - jZ_0 I(0) \sin \beta z \\ I(z) &= I(0) \cos \beta z - \frac{j}{Z_0} V(0) \sin \beta z \end{aligned} \quad (46)$$

5 DISCONTINUITA'

Le soluzioni trovate nei paragrafi precedenti valgono solo se la geometria è uniforme rispetto a z . Tuttavia capita molto spesso che tale ipotesi non sia soddisfatta. Ciò può avvenire per differenti motivi:

- la linea di trasmissione forma delle curve;
- le proprietà geometriche o elettromagnetiche della linea variano con continuità rispetto a z ;
- la struttura in esame è costituita da più tratti di linea omogenea, connessi insieme.

Il primo caso capita abbastanza spesso ma l'effetto delle curve può normalmente essere trascurato, in particolare se la frequenza non è troppo elevata. Molto comune è anche il terzo caso, che esamineremo in dettaglio in questo paragrafo, almeno per quanto riguarda gli effetti principali. In realtà, nelle discontinuità tra linee omogenee occorre tener conto anche di ulteriori effetti, oltre a quelli che vedremo in questo paragrafo, ma la loro importanza è paragonabile all'effetto delle curve, e di essi ci occuperemo alla fine di queste note. Per semplicità, non considereremo invece il caso di linee con proprietà variabili con continuità.

Il problema di più tratti di linea omogenea connessi insieme si può risolvere, in linea di principio, scrivendo la soluzione generale delle equazioni delle linee (30) in ogni zona omogenea, e poi collegandole attraverso le superfici di discontinuità tra le linee. In tal modo si perviene a un sistema lineare nelle ampiezze incognite delle soluzioni, che va risolto con una delle numerosissime tecniche disponibili. Tuttavia la complessità computazionale di tale procedura cresce rapidamente col numero di tratti omogenei diversi, e contemporaneamente si riduce altrettanto rapidamente la comprensione fisica del fenomeno. Conviene allora esaminare più da vicino il problema delle discontinuità in una linea di trasmissione, iniziando dal caso più semplice, quello di una sola discontinuità tra due linee illimitate.

Supponiamo allora che i parametri della linea siano L_1, C_1 fino ad una certa sezione, che assumiamo come origine dell'asse z , e L_2, C_2 dopo tale sezione.

La struttura viene alimentata con sorgenti poste in $z = -\infty$ che quindi, in una linea omogenea, produrrebbero una onda progressiva

$$V(z) = V_i e^{-j\beta_1 z} \quad (47)$$

in cui indichiamo col pedice 1 tutte le costanti (primarie e secondarie) della linea per $z < 0$ e col pedice 2 quelle della linea per $z > 0$. Ovviamente la ampiezza V_i dipende dalla ampiezza della sorgente utilizzata, mentre la *forma* (47) di $V(z)$, ne è indipendente e dipende solo dal fatto che la linea è omogenea e uniforme.

L'onda progressiva (47) sarà presente, ma non da sola, anche nella struttura attuale e anzi deve essere considerata la causa prima dei campi che troveremo in essa. In tal modo si divide lo studio della discontinuità da quello della interazione tra sorgenti e linea (che serve a determinare l'ampiezza della onda che viaggia verso la discontinuità). Il campo (47) prende il nome di campo (onda) *incidente* ed è definito come quel campo che esisterebbe nella struttura se questa fosse priva di discontinuità e con costanti uguali a quelle della linea 1. Quando l'onda (47) incide sulla discontinuità, produce una onda riflessa nella linea 1 e una onda trasmessa nella linea 2. In altri termini la tensione totale nella struttura sarà

$$V(z) = \begin{cases} V_1(z) & \text{se } z \leq 0 \\ V_2(z) & \text{se } z \geq 0 \end{cases} \quad (48)$$

dove

$$\begin{aligned} V_1(z) &= V_i e^{-j\beta_1 z} + V_r e^{j\beta_1 z} \\ V_2(z) &= V_2(0) e^{-j\beta_2 z} \end{aligned} \quad (49)$$

Naturalmente le (49) sono anche la soluzione generale delle equazioni dei telegrafisti (30), separatamente per le linee 1 e 2, equazioni che descrivono le proprietà *locali* della linea. Vi è solo una modifica: è stata posta a zero la ampiezza dell'onda riflessa nella linea 2 in quanto, essendo tale linea illimitata, non vi sono cause per $z > 0$ che possano produrre una tale onda.

Anche la corrente ha la stessa forma di (48,49)

$$I(z) = \begin{cases} I_1(z) & \text{se } z \leq 0 \\ I_2(z) & \text{se } z \geq 0 \end{cases} \quad (50)$$

con

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \frac{1}{Z_1} (V_i e^{-j\beta_1 z} - V_r e^{j\beta_1 z}) \\ I_2(z) &= \frac{1}{Z_2} (V_2(0) e^{-j\beta_2 z}) \end{aligned} \quad (51)$$

Per poter determinare le costanti V_r , $V_2(0)$ e così completare la soluzione del nostro problema, occorre ricordare che alla sezione $z = 0$ della linea devono essere continui i componenti del campo elettrico \underline{E}_t e del campo magnetico \underline{H}_t tangenti alla superficie di discontinuità, e quindi trasversali rispetto a z . Poiché la differenza di potenziale tra i due conduttori $V(z)$ è l'integrale di linea di \underline{E}_t su di un percorso che unisce i due conduttori, come AB in figura 1, e la corrente nel conduttore centrale $I(z)$ è la circuitazione di \underline{H}_t su di una curva che circonda il conduttore centrale, come γ in figura 1, allora la continuità di \underline{E}_t , \underline{H}_t implica quella di tensione e corrente, ovvero

$$\begin{aligned} V_1(0^-) &= V_2(0^+) \\ I_1(0^-) &= I_2(0^+) \end{aligned} \quad (52)$$

Imponendo le (52) alle soluzioni (49,51) segue

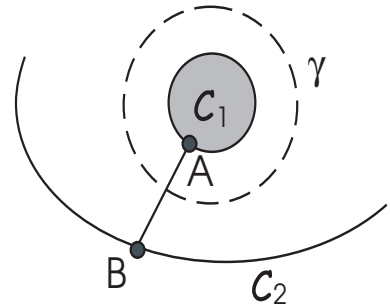


Fig 1

$$\begin{aligned} V_i + V_r &= V_2(0) \\ V_i - V_r &= \frac{Z_1}{Z_2} V_2(0) \end{aligned} \quad (53)$$

Le (53) sono un sistema lineare non omogeneo che consente di determinare le ampiezze incognite V_r , $V_2(0)$ Poichè queste ultime devono essere proporzionali a V_i per la linearità del problema, conviene introdurre il coefficiente di riflessione alla interfaccia

$$\Gamma = \frac{V_r}{V_i} \quad (54)$$

che coincide col valore in $z = 0$ del coefficiente di riflessione definito nella (37). Dalla prima delle (53) segue allora

$$\frac{V_2(0)}{V_i} = 1 + \Gamma \quad (55)$$

e sostituendo nella seconda delle (53) si ha

$$\frac{1 - \Gamma}{Z_1} = \frac{1 + \Gamma}{Z_2}$$

da cui segue, risolvendo,

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (56)$$

e anche

$$\frac{V_2(0)}{V_i} = 1 + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (57)$$

Le relazioni (56,57) possono anche essere espresse in termini dell'inversa Y_i della impedenza caratteristica, parametro che viene detto *ammettenza caratteristica*. In particolare la (57) diventa

$$\Gamma = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} = - \frac{Y_2 - Y_1}{Y_2 + Y_1} \quad (58)$$

6 LINEA CHIUSA SU DI UN CARICO

Le relazioni (56,57) sono applicabili anche in altri casi, oltre a quello di discontinuità dei parametri per il quale sono state ricavate. Ad esempio, se si ha una linea, di costanti L_1 , C_1 che termina ad $z = 0$ e tale che a questa sezione

$$V(0^+) = Z_C I(0^+) \quad (59)$$

la tensione e corrente sulla linea sono date ancora da $V_1(z)$, $I_1(z)$ di (49,51). Dalla (52) segue allora

$$\begin{aligned}
V_i + V_r &= V(0^+) \\
V_i - V_r &= \frac{Z_1}{Z_C} V(0^+)
\end{aligned}
\tag{60}$$

che hanno per soluzione ancora le (56,57). Quindi sulla linea 1 vi sarà una onda riflessa di ampiezza

$$V_r = \Gamma V_i \quad \text{con} \quad \Gamma = \frac{Z_C - Z_1}{Z_C + Z_1} \tag{61}$$

e in $z = 0^+$ la tensione sarà

$$V(0^+) = (1 + \Gamma) V_i \tag{62}$$

tensione che coincide con quella al termine della linea 1 medesima.

Ad esempio se in $z = 0$ vi è un C.E.P., allora \underline{E}_t è nullo e quindi $V(0^+) = 0$. La (59) può essere usata con $Z_C = 0$ e segue allora $\Gamma = -1$. Se invece vi è un C.M.P., allora sarà nullo \underline{H}_t nonchè $I(0^+)$. Nella (59) il parametro Z_C dovrà andare all'infinito. Conviene in tal caso passare alle ammettenze, definendo $Y_C = 1/Z_C$ e usando la (58). $I(0^+) = 0$ implica $Y_C = 0$ e segue allora da (58) che $\Gamma = 1$.

La relazione (59) vale ovviamente anche quando la linea è finita e chiusa su di una impedenza generica Z_C concentrata. Infatti, oltre il termine della linea valgono i principi di Kirchhoff, per cui $I(0^+)$ è uguale alla corrente che scorre in Z_C e $V(0^+)$ alla tensione ai suoi capi. Vale quindi la (59) e il coefficiente di riflessione sulla linea 1 è dato dalla (61).

I casi di conduttore perfetto equivalgono quindi ad un corto circuito (C.E.P., con $Z_C = 0$) o a un circuito aperto (C.M.P., con $Y_C = 0$). Se Z_C è reale, allora sarà reale anche Γ e in particolare positivo se $Z_C > Z_1$ e negativo nel caso contrario.

Se Z_C è immaginario puro, $Z_C = jX$ con X reale, allora

$$\Gamma = \frac{jX - Z_1}{jX + Z_1} \Rightarrow |\Gamma| = 1 \tag{63}$$

La discussione del paragrafo precedente mostra poi che una linea illimitata a destra è indistinguibile, restando a sinistra del suo inizio, da una resistenza di valore pari alla sua impedenza caratteristica, in quanto entrambe le situazioni danno esattamente coefficiente di riflessione nullo.

Una ulteriore generalizzazione si consegue notando che, per il teorema di Thevenin, una qualunque rete lineare passiva a una sola porta è equivalente, all'esterno della rete stessa, a una impedenza Z_{in} detta impedenza di ingresso della rete. Se una tale rete è connessa ai termini di una linea, come in figura 1, produrrà sulla linea 1 una onda riflessa con coefficiente di riflessione

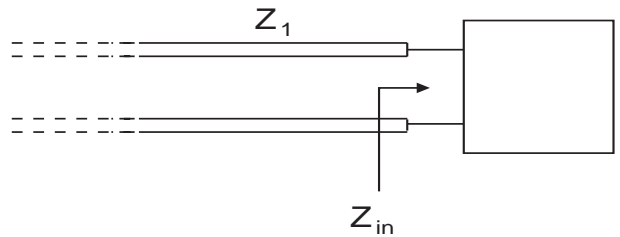


Fig 1: Linea chiusa su di una rete 1-porta generica.

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - Z_1}{Z_{in} + Z_1} \quad (64)$$

e la tensione all'ingresso della rete varrà

$$V_{in} = \frac{2Z_{in}}{Z_{in} + Z_1} V_i \quad (65)$$

7 IMPEDENZA DI INGRESSO DI UNA LINEA DI TRASMISSIONE

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato una linea di trasmissione con una sola discontinuità, ma ovviamente sono possibili, e molto comuni, anche casi con più discontinuità. Anche in tal caso è possibile risolvere il problema in passi, utilizzando opportunamente il concetto di impedenza di ingresso derivato dal teorema di Thevenin.

In particolare occorre calcolare l'impedenza di ingresso di un tratto di lunghezza L di linea di trasmissione (figura 1), chiusa su di un carico Z_C

Dal teorema di Thevenin segue che

$$Z_{IN} = \frac{V_{IN}}{I_{IN}}$$

(convenzione dell'utilizzatore), dove V_{IN} e I_{IN} sono evidentemente anche pari alla tensione e alla corrente all'ingresso della linea. D'altra parte tra tensione e corrente all'uscita della linea vale la relazione

$$V_{OUT} = Z_C I_{OUT} \quad (66)$$

Se prendiamo un asse z lungo la linea, con origine all'ingresso, possiamo esprimere V_{OUT} I_{OUT} in funzione di I_{IN} e di $V_{IN} = Z_{IN} I_{IN}$ utilizzando le (46):

$$\begin{aligned} V_{OUT} = V(L) &= I_{IN} \left(Z_{IN} \cos \beta L - j Z_0 \sin \beta L \right) \\ I_{OUT} = I(L) &= I_{IN} \left(\cos \beta L - j \frac{Z_{IN}}{Z_0} \sin \beta L \right) \end{aligned} \quad (67)$$

Sostituendo nella (66) si ha

$$Z_{IN} \cos \beta L - j Z_0 \sin \beta L = Z_C \cos \beta L - j Z_{IN} \frac{Z_C}{Z_0} \sin \beta L$$

e risolvendo rispetto a Z_{IN} si trova

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_C \cos \beta L + j Z_0 \sin \beta L}{Z_0 \cos \beta L + j Z_C \sin \beta L} = Z_0 \frac{Z_C + j Z_0 \tan \beta L}{Z_0 + j Z_C \tan \beta L} \quad (68)$$

come impedenza di ingresso di un tratto di linea di lunghezza L chiuso su di un carico pari a Z_C . Le due espressioni precedenti sono ovviamente equivalenti, e verranno utilizzate entrambe a seconda delle necessità.

Vediamo i principali casi particolari che possono verificarsi

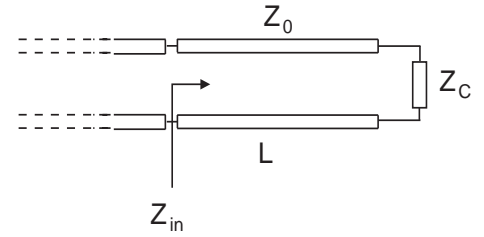


Fig 1: Impedenza di ingresso di una linea.

a: $Z_C = Z_0$ Se la linea è chiusa sulla sua impedenza caratteristica, la sua impedenza di ingresso è anch'essa pari a Z_0 *qualunque sia* L . Ne segue che per una linea chiusa sulla sua impedenza caratteristica non è possibile, *dall'esterno*, determinarne la lunghezza. Inoltre una linea finita chiusa sulla sua impedenza caratteristica è indistinguibile anche da una linea definita. In tutti questi casi si parla quindi genericamente di *linea adattata*.

Dall'esterno tutti i casi di linea adattata sono indistinguibile in quanto su di una tale linea si ha $\Gamma(z) = 0$ e pertanto non vi è alcun segnale che trasporti all'ingresso informazioni su quanto avviene al termine della linea.

Il fatto che su una linea adattata risulta $\Gamma(z) = 0$ implica anche che, *se è fissata la potenza incidente*, la condizione di linea adattata garantisce il massimo flusso di potenza lungo la linea e quindi la massima potenza assorbita dal carico al termine della linea.

b: $Z_C = 0$ In questi casi, che corrispondono rispettivamente ad una linea chiusa in corto circuito, oppure ad una linea aperta, l'impedenza di ingresso è puramente immaginaria.
 $Y_C = 0$ Per $Z_C = 0$ risulta

$$Z_{IN} = jZ_0 \tan \beta L$$

mentre per analizzare il caso di circuito aperto, conviene prima calcolare Y_{IN} prendendo l'inverso della (68) e poi moltiplicandolo per $Y_0 Y_C = (Z_0 Z_C)^{-1}$ ¹

$$Y_{IN} = \frac{1}{Z_0} \frac{Z_0 \cos \beta L + jz_c i \sin \beta L}{Z_C \cos \beta L + jz_0 \sin \beta L} = Y_0 \frac{Y_C + jY_0 \tan \beta L}{Y_0 + jY_C \tan \beta L} \quad (69)$$

Se $Y_C = 0$ si ha

$$Y_{IN} = jY_0 \tan \beta L \implies Z_{IN} = -jZ_0 \operatorname{ctg} \beta L$$

c: $\operatorname{Re}(Z_C) = 0$ sostituendo $Z_C = jX_C$ (con X_C reale) nella (68) si vede che anche in tal caso Z_{IN} è immaginario puro

$$Z_{IN} = jZ_0 \frac{X_C + Z_0 \tan \beta L}{Z_0 - X_C \tan \beta L}$$

d: $L = 0$ In tal caso banalmente $Z_{IN} = Z_C$

e: $L = n\frac{\lambda}{2}$, Anche in tal caso, essendo $\beta L = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n\frac{\lambda}{2} = n\pi$ e $\tan \beta L = 0$ segue $Z_{IN} = Z_C$.
 n intero Più in generale, per la periodicità di $\tan \beta L$ risultano indistinguibile linee, chiuse sullo stesso carico, che hanno una differenza tra le loro lunghezze che un multiplo intero di $\lambda/2$.

f: $L = \frac{\lambda}{4}$ In tal caso $\beta L = \frac{\pi}{2}$ e usando la prima delle (68) si ha

$$Z_{IN} = \frac{Z_0^2}{Z_C} \quad (70)$$

Ovviamente allo stesso risultato si perviene se $L = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$, purchè n sia intero, per il medesimo motivo indicato nel caso e).

g: $L = \infty$ In tal caso la (68) non è più applicabile, ma dall'analisi dei paragrafi precedenti sappiamo già che $Z_{IN} = Z_0$

¹ Si noti la analogia strettissima tra la (68) e la equazione seguente

h: $L = \frac{\lambda}{8}$ In questo caso, che verrà utilizzato più avanti, $\tan \beta L = 1$ e

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_C + jZ_0}{Z_0 + jZ_C}$$

Concludiamo questo paragrafo notando esplicitamente che, nonostante il teorema di Thevenin non dia informazioni su quanto avviene all'interno della rete, nel caso in cui questa sia passiva (come qui) il bilancio di potenza media totale della rete sostituita si può ottenere dalla sola Z_{IN} (vedi discussione al termine del paragrafo precedente)

8 VARIAZIONE DELLE GRANDEZZE ELETTRICHE

Consideriamo una linea, di parametri β , Z_0 chiusa, all'ascissa $z = \ell$ su di un carico Z_C e indichiamo con Γ_C il coefficiente di riflessione sul carico ¹

$$\Gamma_C = \frac{Z_C - Z_0}{Z_C + Z_0}$$

Dalla (37,61) segue che

$$\Gamma(z) = \Gamma_C e^{2j\beta(z-\ell)} \quad (71)$$

che vale, più in generale, se al posto di Γ_C inseriamo $\Gamma(\ell)$ purchè tra le ascissa z e ℓ la linea sia *omogenea*. Se tra le due sezioni considerate vi sono *discontinuità* di qualunque tipo la (71) non è valida. Immediata conseguenza della (71) è che su di una linea omogenea (ideale)

$$|\Gamma(z)| = \text{cost}$$

e in genere indicheremo tale costante, che è un parametro globale associato alla linea, con $|\Gamma|$. Possiamo anche porre

$$\Gamma_C = |\Gamma| e^{j\Phi_C} \quad \Gamma(z) = |\Gamma| e^{j[2\beta(z-\ell) + \Phi_C]} \quad (72)$$

Dalla (72) e dalla (37,40) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} V(z) &= V^+ e^{-j\beta z} \left[1 + |\Gamma| e^{j(2\beta z + \Phi_0)} \right] \\ I(z) &= \frac{1}{Z_0} V^+ e^{-j\beta z} \left[1 - |\Gamma| e^{j(2\beta z + \Phi_0)} \right] = \frac{1}{Z_0} V^+ e^{-j\beta z} \left[1 + |\Gamma| e^{j(2\beta z + \Phi_0 + \pi)} \right] \end{aligned} \quad (73)$$

avendo posto $\Phi_0 = \arg(\Gamma_0)$. $|V|$ e $|I|$ dipenderanno allora da z in quanto vi dipende il termine in parentesi quadra e possiamo determinare i massimi e minimi di tensione e corrente esaminando solo il modulo di tale ultimo fattore.

In entrambi i casi abbiamo a che fare col modulo della somma di due numeri complessi, i quali numeri complessi hanno modulo costante e fase variabile. In tal caso il massimo si ha

¹ ovvero Γ_C è il coefficiente riflessione sulla linea, ma alla estremità di essa in contatto col carico.

quando i numeri complessi hanno la *stessa* fase (a meno di multipli di 2π) . Pertanto, poichè $\arg(1) = 0$

$$\begin{aligned}\max_z |V(z)| = |V(z_V)| &= |V^+| (1 + |\Gamma|) && \text{con } 2\beta z_V + \Phi_0 = 0 + 2p_1\pi \\ \max_z |I(z)| = |I(z_I)| &= \frac{1}{Z_0} |V^+| (1 + |\Gamma|) && \text{con } 2\beta z_I + \Phi_0 + \pi = 0 + 2p_2\pi\end{aligned}$$

con p_1, p_2 interi. Invece il minimo si ha quando (sempre meno di multipli di 2π) le fasi dei due numeri complessi differiscono di π . Il minimo di tensione si ha quando $[2\beta z + \Phi_0] - [0] = \pi + 2p_3\pi$ ovvero nel punto z_I e analogamente il minimo di corrente si ha in z_V

$$\begin{aligned}\min_z |V(z)| = |V(z_I)| &= |V^+| (1 - |\Gamma|) \\ \min_z |I(z)| = |I(z_V)| &= \frac{1}{Z_0} |V^+| (1 - |\Gamma|)\end{aligned}$$

In altre parole, $|V(z)|$ è massimo dove è minimo $|I(z)|$ e viceversa. È interessante notare esplicitamente che sia in z_V , sia in z_I , $\Gamma(z)$ risulta reale e quindi in tale punti $V(z)$ e $I(z)$ hanno la stessa fase.

Il rapporto tra il valore massimo e quello minimo di tensione (o di corrente) prende il nome di rapporto d'onda stazionaria, *ROS* o, con acronimo inglese *SWR* (*Standing wave ratio*)

$$S = \frac{\max_z |V(z)|}{\min_z |V(z)|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (74)$$

S aumenta al crescere di $|\Gamma|$ passando da $S = 1$ per una linea adattata fino a $S = \infty$ per una linea chiusa su di un carico reattivo, per il quale (vedi (60)) $|\Gamma| = 1$

È possibile anche associare ad ogni punto z_0 una impedenza, definendola come l'impedenza di ingresso del tratto di linea che inizia da $z = z_0$. Naturalmente $Z(z)$ è anche il rapporto tra $V(z)$ e $I(z)$ (quest'ultima orientata concordemente all'asse z), come è facile verificare. L'impedenza $Z(z)$ così definita è evidentemente una funzione periodica con periodo $\lambda/2$, legata a $\Gamma(z)$ da

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0}$$

ovvero

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

Se $|\Gamma| = 1$, poichè $\Gamma(z)$ assume tutte le possibili fasi in ogni tratto lungo $\lambda/2$, allora $Z(z)$ assumerà sia il valore 0 che il valore ∞ ¹. Se invece $|\Gamma| < 1$ allora $|Z(z)|$, e quindi sia la parte reale $R(z)$, sia quella immaginaria $X(z)$, saranno limitate e avranno massimo in minimo. Particolare interesse hanno gli estremi di $R(z)$. Per ottenerli partiamo dal calcolare la derivata di $Z(z)$

¹ Ovviamente purchè la linea sia lunga almeno $\lambda/2$.

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{I^2} \left(\frac{dV}{dz} I - V \frac{dI}{dz} \right) \quad (75)$$

Usando le equazioni delle linee per le derivate di V ed I si trova

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{I^2} \left[(-j\beta Z_0 I) I - V \left(-j \frac{\beta}{Z_0} \right) V \right] \quad (76)$$

Da (76) segue

$$\frac{dZ}{dz} = -j\beta Z_0 + j \frac{\beta}{Z_0} Z^2 = j \frac{\beta}{Z_0} (Z^2 - Z_0^2) \quad (77)$$

La (77) è una equazione differenziale non-lineare che tra l'altro consente di calcolare numericamente $Z(z)$ anche per linee con costanti variabili con z []. Nel nostro caso possiamo ottenere, prendendo la parte reale di (77), la derivata di $R(z)$. Posto $Z = R + jX$ si trova

$$\frac{dR}{dz} = \text{Re} \left[j \frac{\beta}{Z_0} (R^2 - X^2 + 2jRX - Z_0^2) \right] = -2 \frac{\beta}{Z_0} RX \quad (78)$$

Poichè $R(z)$ è sempre diverso da zero, allora i punti estremali $R(z)$ sono quelli in quelli in cui $X(z)=0$ ovvero i punti z_V, z_I già visti.

In tali punti il coefficiente di riflessione $\Gamma(z)$ è reale, e quindi risulta reale anche $Z(z)$. Calcolando il rapporto tra tensione e corrente in z_V e in z_I si trova che su di una linea

$$\frac{Z_0}{S} \leq R(z) \leq Z_0 S \quad (79)$$

e analoga relazione vale per la resistenza di ingresso di una linea al variare della sua lunghezza. Calcolando la derivata della ammettenza si trova poi che anche la conduttanza $G(z)$ soddisfa relazioni analoghe alle (79):

$$\frac{Y_0}{S} \leq G(z) \leq Y_0 S \quad (80)$$

essendo $Y_0 = 1/Z_0$. Ovviamente analoga relazione vale anche per la conduttanza di ingresso di una linea al variare della lunghezza della linea stessa.

Quindi il rapporto d'onda stazionaria S fornisce anche l'intervallo di variazione della parte reale di impedenza e ammettenza lungo una linea ¹.

Occorre comunque notare che $R(z)$ o $G(z)$ possono non raggiungere i loro valori limite se la linea non è abbastanza lunga.

¹ Si può dimostrare in modo analogo che anche $|Z(z)|$ e $|Y(z)|$ lungo una linea sono limitati, e anzi hanno esattamente gli stessi limiti (79) ed (80).

9 FLUSSO DI POTENZA IN UNA LINEA DI TRASMISSIONE

Alla propagazione di tensione e corrente in una linea di trasmissione è associato un trasporto di energia, e quindi un flusso di potenza. Nonostante quest'ultima grandezza non sia una funzione lineare di tensione e corrente, la rappresentazione nel *DF* può essere utilizzata anche in questo caso, sia pure in maniera non immediata.

Consideriamo di nuovo la linea rappresentata con una successione di celle a costanti concentrate (Fig. 3 del paragrafo 1). La potenza istantanea che fluisce attraverso una sezione alla ascissa z è

$$p(z, t) = v(z, t) i(z, t) \quad (81)$$

Nel caso sinusoidale tale potenza vale (usando la (33)) e sottintendendo l'ascissa z per semplicità di scrittura

$$p(t) = |V| \cos(\omega_0 t + \phi_V) |I| \cos(\omega_0 t + \phi_I) = \frac{1}{2} |V| |I| \cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{1}{2} |V| |I| \cos(2\omega_0 t + \phi_V + \phi_I) \quad (82)$$

dove $|V| \exp(j\phi_V)$, $|I| \exp(j\phi_I)$ sono i numeri complessi corrispondenti a $v(t)$, $i(t)$, e sono state usate le formule trigonometriche di Werner.

Se calcoliamo il valore medio su di un periodo di $p(t)$

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (83)$$

essendo T il periodo dell'onda sinusoidale, si ottiene la potenza *attiva* (o media)

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} |V| |I| \cos(\phi_V - \phi_I) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} V I^* \right] \quad (84)$$

Pertanto nel *DF* non è possibile determinare la potenza istantanea ma è possibile calcolare facilmente la potenza media, ovvero quella che ha effetti energetici.¹

Benchè la conoscenza della potenza attiva sia in genere quella di interesse, può essere utile anche valutare la parte oscillante della potenza istantanea. Infatti, quanto più il suo valore massimo

$$P_{VM} = \frac{1}{2} |V| |I|$$

¹ Notiamo che espressioni come la (84) non sono specifiche della potenza media. Ogni qualvolta una grandezza è il prodotto di due fattori sinusoidali (uguali o diversi) il suo valore medio è dato da una espressione come la (84). Ad esempio la potenza istantanea dissipata in una resistenza R percorsa da una corrente $i(t)$ è

$$p_R(t) = R i^2(t) = R \left[i(t) \cdot i(t) \right]$$

Se $i(t)$ è sinusoidale il suo valore medio vale

$$\langle p_R(t) \rangle = R \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} I I^* \right] = \frac{1}{2} R |I|^2$$

essendo I il numero complesso corrispondente a $i(t)$.

è grande, fissata la potenza attiva, tanto più grandi saranno le ampiezze di tensione e corrente necessarie a fornire quella data potenza attiva. Limitare tali valori massimi in molti casi è utile, ad esempio per ridurre la dissipazione di potenza lungo la linea di alimentazione, o necessario, ad esempio se le strutture utilizzate hanno valori limite di corrente o, più spesso, di tensione sopportabili.

Per valutare P_{VM} possiamo notare che

$$P_{VM}^2 = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} V I^* \right]^2 + \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} V I^* \right]^2$$

e quindi basta considerare insieme la potenza attiva e la cosiddetta *potenza reattiva*, definita da

$$P_R = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} V I^* \right]$$

Fissata la potenza attiva, al crescere della potenza reattiva aumenta anche la parte oscillante della potenza istantanea P_{VM}

Si definisce allora una *potenza complessa*

$$P(z) = \left[\frac{1}{2} V(z) I^*(z) \right] \quad (85)$$

in modo che la potenza attiva che fluisce una sezione all'ascissa z è la parte reale di tale potenza complessa, la potenza reattiva quella immaginaria e

$$P_{VM} = |P(z)|$$

La potenza complessa (85) può essere calcolata a partire dalle espressioni di tensione e corrente sulla linea, utilizzando sia le espressioni progressive (37,40), sia quelle stazionarie (46).

Per comodità, riscriviamo le espressioni progressive come

$$\begin{aligned} V(z) &= V^+ e^{-j\beta z} \left[1 + \Gamma e^{2j\beta z} \right] \\ I(z) &= \frac{1}{Z_0} V^+ e^{-j\beta z} \left[1 - \Gamma e^{2j\beta z} \right] \end{aligned} \quad (86)$$

avendo indicato col simbolo Γ il rapporto V^-/V^+ . Sostituendo le (86) nella (85) si ottiene

$$P(z) = \frac{1}{2Z_0} |V^+|^2 \left[1 - |\Gamma|^2 + 2j \operatorname{Im}(\Gamma e^{2j\beta z}) \right] \quad (87)$$

da cui si ottiene immediatamente la potenza attiva

$$P_A(z) = \frac{1}{2Z_0} |V^+|^2 \left[1 - |\Gamma|^2 \right] \quad (88)$$

e la potenza reattiva che, ponendo $\Gamma = |\Gamma| e^{j\psi}$, può essere scritta in una delle due forme seguenti

$$P_R(z) = \frac{1}{2Z_0} |V^+|^2 \left[2 \operatorname{Im}(\Gamma e^{2j\beta z}) \right] = \frac{1}{2Z_0} |V^+|^2 \left[2 |\Gamma| \sin(2\beta z + \psi) \right] \quad (89)$$

Dalla (88) si vede immediatamente che il flusso di potenza attiva risulta costante lungo tutta la linea. Questo ovviamente c'era da aspettarselo in quanto, essendo la linea priva di perdite, non vi può essere variazione del flusso di potenza. Tale flusso risulta pari alla differenza tra due termini, un primo termine indipendente dal valore del coefficiente di riflessione

$$P_{inc} = \frac{1}{2Z_0} |V^+|^2 \quad (90)$$

e un secondo pari a

$$P_r = P_{inc} |\Gamma|^2$$

Il primo di questi due termini è evidentemente anche la potenza che fluisce nella linea in assenza di riflessione, e può quindi essere associato senza problemi alla sola onda progressiva. Allo stesso modo il secondo di questi termini può essere associato alla sola onda riflessa. Pertanto il flusso di potenza attiva in una linea di trasmissione è pari alla differenza fra il flusso di potenza, detto *incidente*, associato all'onda progressiva e il flusso di potenza associato all'onda riflessa. Immediata conseguenza della (88) è che

$$|\Gamma| \leq 1 \quad (91)$$

In particolare se $|\Gamma| = 1$ non vi è flusso di potenza attiva lungo la linea. È questo il caso di una linea chiusa su di un corto circuito o circuito aperto, oppure di una linea chiusa su di un carico puramente reattivo (vedi eq. (63)).

La grandezza

$$|\Gamma|^2 = \frac{P_r}{P_{inc}}$$

prende il nome di *riflettività*, e s'indica talvolta con R . La quantità $1 - R$ è sostanzialmente l'efficienza della trasmissione di potenza lungo una linea, ovvero misura quale frazione della potenza incidente viene effettivamente trasferita al termine della linea. Non a caso, il termine inglese per indicare R o anche $|\Gamma|^2$, è *return loss*, ovvero *perdita per riflessione*.

La potenza reattiva (89) è invece variabile lungo una linea, a meno che $\Gamma = 0$ nel qual caso essa è non solo costante ma nulla. In tutti gli altri casi la potenza reattiva è una grandezza periodica, con periodo pari a mezza lunghezza d'onda.

Nell'esprimere invece la potenza attiva e reattiva mediante le espressioni stazionarie (46) di corrente e tensione, occorre fare attenzione al fatto che $V(0)$ e $I(0)$ sono in generale numeri complessi. Sostituendo le (46) nelle (85) si ottiene così

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2} \left[V(0)I^*(0) \cos^2 \beta z + V^*(0)I(0) \sin^2 \beta z + \left(\frac{j}{Z_0} |V(0)|^2 - jZ_0 |I(0)|^2 \right) \sin \beta z \cos \beta z \right] \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} V(0)I^*(0) \right) + \frac{j}{2} \left[\operatorname{Im} \left(V(0)I^*(0) \right) \cos 2\beta z + \frac{1}{Z_0} \left(|V(0)|^2 - Z_0^2 |I(0)|^2 \right) \frac{\sin 2\beta z}{2} \right] \end{aligned} \quad (92)$$

¹ Normalmente il *return loss* è misurato in *decibel (dB)* e in tal caso non c'è differenza fra il modulo e il modulo quadro della stessa grandezza, che danno esattamente lo stesso valore in dB

La potenza attiva è data dal primo termine della seconda riga della (92), ed è costante con z . Segue quindi immediatamente che se per $z = 0$ la tensione, oppure la corrente, sono nulli, è nullo il flusso di potenza attiva attraverso ogni sezione della linea. Lo stesso accade se per $z = 0$ tensione e corrente sono sfasati di $\pm\pi/2$, ovvero sono in *quadratura*. Naturalmente nella (92), il punto $z = 0$ è arbitrario, e quindi il verificarsi di tali proprietà in un qualunque punto della linea assicura l'annullarsi della potenza attiva.

Concludiamo questo paragrafo notando che dalla (88) segue che, *fissata la potenza incidente*, il massimo flusso di potenza attiva lungo la linea si ha per $\Gamma = 0$, e che tale flusso si riduce al crescere di $|\Gamma|$. Notiamo però anche che tale condizione di massimo è valida solo ed esclusivamente se è fissata la potenza incidente. Qualora anche quest'ultima possa cambiare, si può avere massimo flusso di potenza attiva anche in presenza di un coefficiente di riflessione diverso da 0.

10 BILANCIO DI POTENZA IN UNA LINEA IDEALE

Abbiamo già rimarcato che il flusso di potenza attraverso una qualunque sezione di una linea ideale è costante, come richiesto dal principio di conservazione dell'energia. Evidentemente le espressioni per la potenza attiva trovate al paragrafo precedente godono di tali proprietà. È tuttavia conveniente, analogamente quanto si fa nella dinamica del punto materiale, ricavare la conservazione dell'energia direttamente dalle equazioni delle linee di trasmissione.

Dal punto di vista formale, quello che ricaveremo è un *integrale primo* delle equazioni delle linee di trasmissione, ovvero una relazione espressa in termini finiti (non contenente quindi derivate) che è soddisfatta da qualunque soluzione delle equazioni delle linee. A tale integrale primo assoceremo poi una interpretazione di tipo energetico, che lo renderà equivalente al principio di conservazione dell'energia, e consentirà inoltre di ottenere ulteriori informazioni, sempre di tipo energetico. Naturalmente ci limiteremo al caso di linea ideale visto finora, rimandando a più avanti la dimostrazione e la discussione del caso generale (*Teorema di Poynting* nel *DF* [?]).

Cominciamo col calcolare la derivata della potenza complessa $P(z)$ utilizzando le equazioni delle linee (30) per esprimere le derivate di tensione e corrente

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} I^* + \frac{1}{2} V \frac{dI^*}{dz} = \frac{1}{2} (-j\omega L) |I|^2 + \frac{1}{2} (j\omega C) |V|^2 \quad (93)$$

Possiamo separare parte reale e immaginaria, ponendo $P = P_A + P_R$, e integrare su di un tratto di linea tra z_1 e z_2 ottenendo

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dP_A}{dz} dz &= P_A(z_2) - P_A(z_1) = 0 \\ \int_{z_1}^{z_2} \frac{dP_R}{dz} dz &= P_R(z_2) - P_R(z_1) = 2\omega \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{1}{4} C |V(z)|^2 - \frac{1}{4} L |I(z)|^2 \right] dz \end{aligned} \quad (94)$$

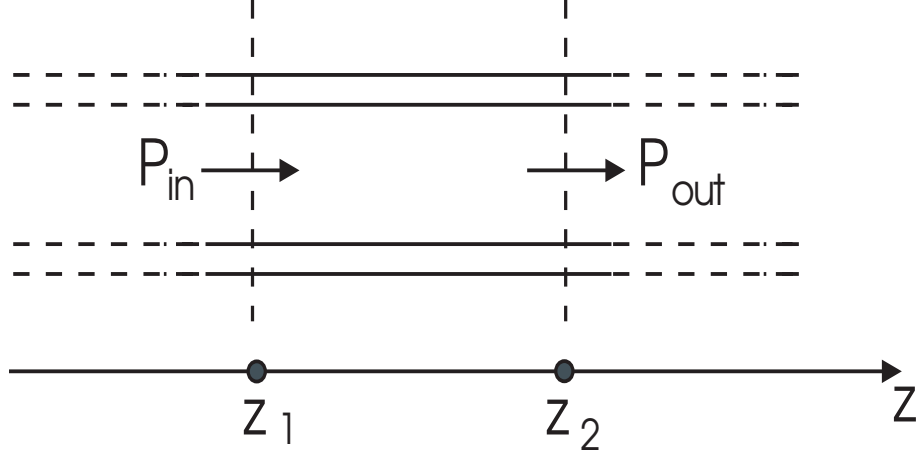


Fig. 1: Definizione di potenza entrante ed uscente.

Se consideriamo il tratto di linea tra z_1 e z_2 (figura 1), vediamo che $P(z_1)$ è la potenza entrante P_{IN} e $P(z_2)$ è invece quella uscente P_{OUT} . La prima delle (94) diventa allora

$$P_{A,IN} = P_{A,OUT} \quad (95)$$

ovvero il principio di conservazione dell'energia di cui abbiamo già parlato.

Allo stesso modo la seconda delle (94) diventa

$$[P_{R,IN} - P_{R,OUT}] = 2\omega \int_{z_1}^{z_2} [w_M(z) - w_E(z)] dz \quad (96)$$

dove $w_E(z) = 1/4 C |V(z)|^2$ e $w_M(z) = 1/4 L |I(z)|^2$ sono dimensionalmente delle densità lineari di energia (ovvero si misurano in $[J/m]$), di modo che l'integrale secondo membro delle (96) è dimensionalmente una energia. Nel seguito indicheremo con W_M e W_E gli integrali di tale densità, di modo che la (96) può essere scritta come

$$[P_{R,IN} - P_{R,OUT}] = 2\omega [W_M - W_E] \quad (97)$$

Possiamo esprimere w_E come

$$w_E = \frac{1}{2} C \left\{ \frac{1}{2} \text{Re} [VV^*] \right\}$$

e tenendo conto di (84) si ha che

$$w_E = \left\langle \frac{1}{2} C v^2(t) \right\rangle \quad (98)$$

Poichè C è la capacità per unità di lunghezza della linea (v. paragrafo 1), w_E è formalmente identica alla densità energia elettrostatica media immagazzinata nel tratto unitario di linea, e lo stesso vale per w_M . Anche nel caso dinamico, comunque, possiamo assumere che w_E , w_M siano le densità di energia elettrica e magnetica immagazzinate nella linea, e di conseguenza che W_E, W_M siano le energie immagazzinate

La (96) dice allora che il flusso totale **entrante** di potenza reattiva (il primo membro della (96)) serve a bilanciare la differenza (moltiplicata per 2ω) tra energie magnetica ed elettrica nel volume considerato.

Le equazioni (94,95) contengono quindi informazioni in più rispetto alla conservazione delle potenze medie. Va comunque notato che, rispetto al primo principio della termodinamica applicato alle potenze istantanee, nella (94) manca un termine, e precisamente quello relativo alla variazione di energia immagazzinata W . Ciò è dovuto al fatto che il valore medio in un periodo di quest'ultimo termine è nullo:

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dt} dt = W(T) - W(0) = 0$$

in quanto $W(t)$ è una funzione periodica con periodo T . Le uniche informazioni che si possono ottenere sulla energia in regime sinusoidale sono quelle date dalla (96).

Il bilancio di potenza (94) è stato ottenuto considerando una linea omogenea. Risultati analoghi valgono anche per linee con costanti primarie variabili con continuità ma, come già detto, non ci interessiamo qui di tali linee. Viceversa risulta utile capire se, e come, è possibile estendere questo bilancio al caso di circuiti complessi, contenenti linee di trasmissione differenti (e quindi discontinuità tra linee), carichi concentrati ed eventualmente reti (descritte da una matrice, ad esempio quella di impedenza, \underline{Z} , o di ammettenza, \underline{Y} [1]) e i generatori.

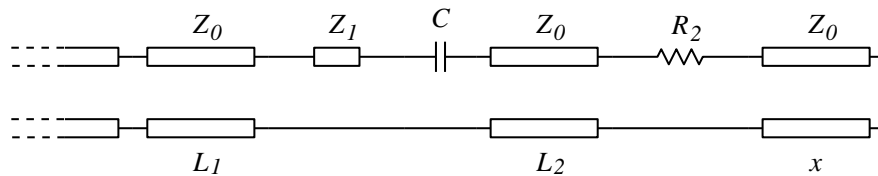


Fig. 2: Esempio di circuito a struttura lineare.

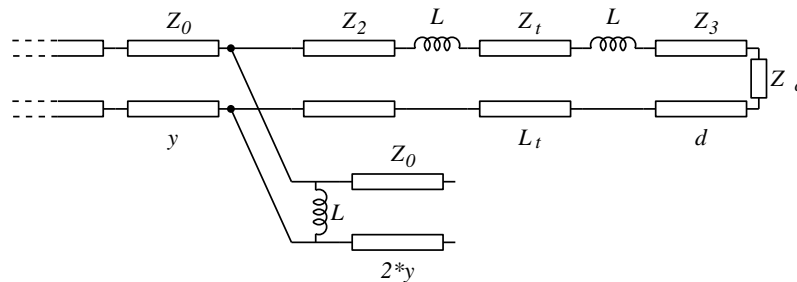


Fig. 3: Esempio di circuito a struttura ad albero.

In queste note ci limiteremo a circuiti privi di anelli (circuiti ad albero), ovvero costituiti da successioni di linee con intercalati carichi concentrati o reti due porte. La struttura può essere lineare (vedi Fig. 2) o presentare punti di derivazione (vedi Fig. 3).

A parte i punti di derivazione, tali strutture possiamo sempre considerarle come successioni di reti due porte. Per una rete due porte costituita da un tratto di linea il bilancio di potenza è dato da (95,97), considerando come ingresso e uscita le due porte della rete. Se colleghiamo le due linee (o, più in generale, due reti due porte) in cascata (vedi Fig. 4), possiamo ottenere il bilancio complessivo di potenza scrivendo i due bilanci parziali e la condizione di raccordo alla sezione di conversione. Poichè a tale sezione sono continui sia tensione, sia corrente, allora la condizione di raccordo è la *continuità della potenza complessa* all'interfaccia.

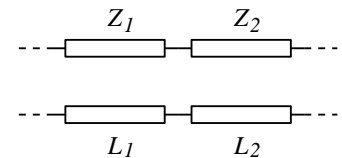
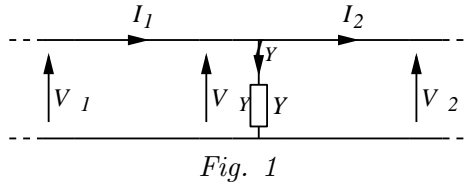


Fig. 4: Linee in cascata.

Anche per il caso di connessioni multiple (derivazioni, giunzioni a Y o a T) i principi di Kirchoff consentono di dire che la potenza complessa entrante è pari a quella uscente. Per applicare tale risultato va notato che entrante e uscente vanno riferite alle convenzioni usate: è entrante nella connessione la potenza che fluisce attraverso la sezione su cui è stata scelta la convenzione del generatore e uscente quella che fluisce attraverso una sezione su cui è stata scelta la convenzione dell'utilizzatore. Con tali avvertenze basterà determinare solo i bilanci di potenza di reti semplici, come già fatto in questo paragrafo per un tratto di linea ideale, per ottenere il bilancio totale di potenza dei circuiti di nostro interesse.

11 BILANCIO DI POTENZA IN PRESENZA DI CARICHI CONCENTRATI

1). Consideriamo un carico concentrato, ad esempio una ammettenza Y in parallelo (Fig. 1).



Il relativo bilancio di potenza complessa è

$$P_{OUT} - P_{IN} = \frac{1}{2}V_2I_2^* - \frac{1}{2}V_1I_1^* = \frac{1}{2}V_Y(I_2^* - I_1^*) \quad (99)$$

essendo V_Y , tensione ai capi di Y , uguale a V_1 e V_2 . D'altra parte

$$I_2 - I_1 = -I_Y = -YV_Y \quad (100)$$

e segue quindi, da (99)

$$P_{OUT} - P_{IN} = -\frac{1}{2}Y^*|V_Y|^2 \quad (101)$$

Separando parte reale e immaginaria

$$\begin{aligned} P_{A,IN} &= P_{A,OUT} + \frac{1}{2}Re(Y)|V_Y|^2 \\ P_{R,IN} &= P_{R,OUT} + \frac{1}{2}Im(Y^*)|V_Y|^2 \end{aligned} \quad (102)$$

che esprimono il bilancio di potenza del carico concentrato. La prima delle (102) indica che la potenza entrante in parte esce e in parte viene dissipata sulla ammettenza. Quanto alla seconda delle (102), questa può essere scritta analogamente a [2]

$$P_{R,IN} - P_{R,OUT} = -\frac{1}{2}Im(Y)|V_Y|^2 \quad (103)$$

in quanto $Im(Y) = -Im(Y^*)$, e quindi il secondo membro di (103) rappresenta la differenza (moltiplicata per 2ω) tra energia magnetica ed elettrica immagazinata nella ammettenza, come

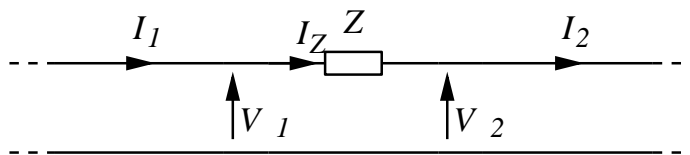


Fig.2

si verifica facilmente se tale ammettenza è un induttore ($Y = -j/\omega L$) o un condensatore ($-j\omega C$).

Analogamente per un componente in serie (Fig. 2) la (101) viene sostituita da

$$P_{OUT} - P_{IN} = -\frac{1}{2}Z^*|I_Z|^2 \quad (104)$$

e può essere analogamente sviluppata e discussa.

Le (101,104) valgono anche per il carico terminale della linea, a patto di porre $P_{out} = 0$. Possiamo anche riscrivere tutti i bilanci di potenza fin qui visti nella forma

$$\begin{aligned} P_{A,IN} &= P_{A,OUT} + P_D \\ P_{R,IN} - P_{R,OUT} &= 2\omega(W_M - W_E) \end{aligned} \quad (105)$$

dove P_D è la potenza dissipata tra le due sezioni di ingresso e uscita e W_M, W_E le energie immagazzinate. In tale forma questo bilancio di potenza vale per ogni rete o circuito due-porte. Inoltre vale per ogni rete a una porta (ponendo $P_{out}=0$) e persino per reti a più porte (ad esempio una connessione a Y), a patto di intendere P_{IN} e P_{OUT} come la somma di tutte le potenze entranti e di tutte le potenze uscenti.

12 MASSIMIZZAZIONE DELLA POTENZA

Un problema tipico di progetto a radiofrequenza è quello relativo al collegamento tra una sorgente e un carico in modo da trasferire al carico stesso la massima potenza attiva possibile (*adattamento*). Esistono svariate tecniche per realizzare un tale collegamento, che dipendono dalle prestazioni che si vogliono ottenere, dalla tecnologia utilizzata per realizzare il circuito, dalla frequenza di funzionamento, dagli ingombri massimi ammissibili e, ovviamente, da considerazioni relative al costo e alla variazione del comportamento in relazione alle inevitabili tolleranze realizzative.

Va inoltre considerata anche la banda passante in cui si vuole avere l'adattamento. In genere si distingue tra adattamento a banda stretta e adattamento a banda larga. Nel primo caso l'adattamento viene progettato in modo che ad una certa frequenza (che viene detta frequenza centrale dell'adattamento) si abbia la massima potenza trasferita al carico. Il circuito di adattamento si progetta comunque cercando di ottenere un trasferimento di potenza prossimo a quello ottimale in una banda di frequenze, attorno alla frequenza centrale, più larga possibile. Nel caso di adattamento a larga banda, invece, si richiede che in tutto un intervallo di frequenze (detto *banda passante*) la potenza trasferita al carico sia molto prossima a quella massima. Più precisamente, e poichè in tal caso la *sorgente* è una linea semi-infinita, si richiede che il coefficiente di riflessione sul tale linea sia, in tutta la banda passante, minore di un opportuno valore Γ_m . Valori tipici di Γ_m sono intorno ai -20 dB.

In queste note ci occuperemo solo di adattamenti a banda stretta, utilizzando come sorgente sia linee semi-infinite, sia generatori reali con impedenze di uscita reali o complesse.

Molte tecniche di massimizzazione si basano su un opportuno utilizzo del concetto di *adattamento coniugato*, di cui, in questo paragrafo, daremo la dimostrazione e svilupperemo alcune considerazioni iniziali. Nei paragrafi successivi applicheremo l'adattamento coniugato per descrivere le tecniche di adattamento più utilizzate alle frequenze di nostro interesse.

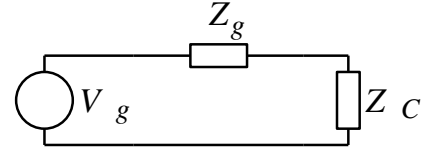


Fig 1

Consideriamo il circuito di figura 1, in cui è presente un generatore reale di ampiezza V_g costante almeno in modulo, e con impedenza $Z_g = R_g + jX_g$. Tale generatore è utilizzato per alimentare un carico $Z_c = R_c + jX_c$.

Ci domandiamo sotto quali condizioni la potenza assorbita dal carico Z_c , data da

$$P_C = \frac{1}{2} R_c \frac{|V_g|^2}{|Z_c + Z_g|^2} = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{R_c}{(R_c + R_g)^2 + (X_c + X_g)^2} \quad (106)$$

sia la massima possibile.

Naturalmente un tale problema di massimo ha senso solo se sono specificate le grandezze costanti da una parte e quelle variabili, rispetto a cui possiamo massimizzare, dall'altra.

Supponiamo inizialmente che la parte reale dell'impedenza del generatore R_g sia costante mentre la parte immaginaria di tale impedenza X_g e sia la parte reale R_c sia la parte immaginaria X_c dell'impedenza di carico siano variabili, e anzi che queste tre grandezze possano variare *indipendentemente* l'una dall'altra, assumendo tutti i valori possibili ($R_c \in (0, \infty)$ e $X_c, X_g \in (-\infty, \infty)$).

Dalle ipotesi fatte, solo l'ultima frazione di (106) è variabile ed è quindi la grandezza da massimizzare. Esaminando tale espressione si vede che il termine $(X_c + X_g)^2$ varia indipendentemente da R_c e può assumere qualunque valore positivo o nullo e inoltre la potenza assorbita dal carico è una funzione decrescente di tale grandezza. Per tutti questi motivi il valore ottimale di questa grandezza è 0, e resta pertanto da massimizzare

$$\frac{R_c}{(R_c + R_g)^2}$$

rispetto ad R_c . Per semplicità, conviene minimizzare l'inverso dell'espressione precedente

$$R_c + 2R_g + \frac{R_g^2}{R_c}$$

Derivando tale ultima espressione si trova come punto estrema $R_c = R_g$ e quindi nelle ipotesi fissate inizialmente la potenza attiva assorbita dal carico è massima se

$$R_c = R_g \quad X_c + X_g = 0 \quad (107)$$

Nell'ipotesi che anche la parte reattiva di Z_g sia costante, e che quindi possa variare solo l'impedenza di carico, la condizione di massimo può essere anche scritta nella forma

$$Z_c = Z_g^* \quad (108)$$

che viene detta, al pari della (107), condizione di adattamento coniugato. Se vale tale condizione la potenza attiva assorbita dal carico è pari a

$$P_{C,max} = \frac{1}{8} \frac{|V_g|^2}{R_g} \quad (109)$$

Tale potenza massima dipende, in realtà, solo dai parametri del generatore $|V|_g$ e R_g ed è quindi una caratteristica del generatore. In altri termini ogni generatore è in grado di erogare al massimo una potenza data dal secondo membro della (109), potenza che viene definita come *potenza disponibile* dal generatore. Naturalmente il generatore riesce ad erogare a un carico la potenza disponibile soltanto se il carico medesimo soddisfa la condizione di adattamento coniugato (107) oppure (108).

Conviene ribadire ancora che la condizione di adattamento coniugato vale soltanto nelle ipotesi in cui è stata dimostrata, ed in particolare che la potenza disponibile dal generatore sia costante. Ad esempio se a poter variare è R_g anziché R_c il massimo di potenza fornita al carico si ha quando R_g è nullo, nonostante che tale valore non soddisfi la condizione di adattamento coniugato. Allo stesso modo, è indispensabile che i parametri variabili abbiano un intervallo di variazione sufficientemente ampio da garantire il soddisfacimento della condizione di adattamento coniugato. Può infatti capitare di non poter verificare la (108) perchè l'intervallo di variazione di Z_c non comprende il valore Z_g^* . Possiamo anzi dire che, nelle ipotesi in cui è stata dimostrata, la condizione di adattamento coniugato fornisce il massimo della potenza assorbita dal carico soltanto se tale condizione può essere verificata facendo variare i parametri liberi a disposizione. In caso contrario, tale condizione può solo suggerire in che direzione muoversi per determinare il massimo di potenza assorbita, che deve però essere calcolato per altra via, normalmente scrivendo l'espressione della potenza assorbita in funzione dei parametri variabili e poi massimizzandola con le tecniche usuali (ad esempio derivandola).

Per quanto detto nei paragrafi precedenti, al circuito di figura 1 ci può ricondurre anche in casi più complessi. Se abbiamo un circuito in linea di trasmissione, possiamo massimizzare la potenza che fluisce attraverso una sezione Σ di tale linea trasformando sia la parte a destra, sia la parte a sinistra di tale sezione col teorema di Thevenin, e riconducendosi così al circuito di figura 1. *Evidentemente, questo consente di massimizzare anche la potenza sul carico finale solo se tra la sezione Σ e il carico stesso non vi è dissipazione di potenza.*

Nel seguito discuteremo in dettaglio i principali circuiti utilizzabili a radiofrequenza per la massimizzazione della potenza. Ovviamente questi non sono i soli possibili, ovvero i soli che consentano di verificare la condizione di adattamento coniugato. Notiamo infatti che se è fissata la rete di adattamento, e non è possibile realizzare l'adattamento coniugato, occorre determinare l'espressione della potenza in funzione dei componenti della rete, e poi derivare rispetto a questi per trovare il massimo.

13 ALIMENTAZIONE CON LINEA SEMI-INFINITA

Consideriamo ora il caso in cui la parte a sinistra della sezione Σ a cui si impone la condizione di adattamento coniugato è costituita da una linea semi indefinita di impedenza Z_0 su cui è presente un'onda di tensione incidente V_i . Il teorema di Thevenin fornisce come circuito equivalente del generatore un generatore di tensione $2V_i$ con impedenza Z_0 come in un figura 1. Infatti al termine della linea indefinita, se questa è lasciata aperta come prescritto dal teorema di Thevenin, è presente un coefficiente di riflessione $\Gamma = 1$ e la tensione sul circuito aperto risulta pari a $V_i(1 + \Gamma) = 2V_i$

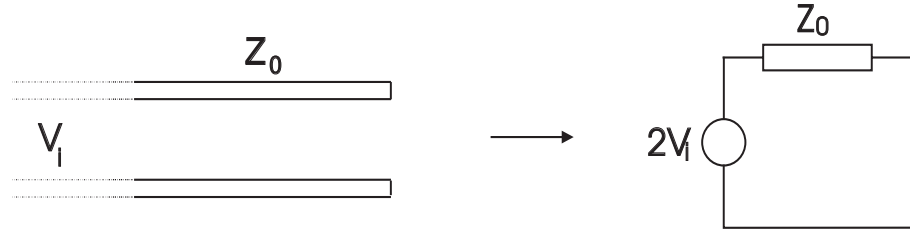


Fig. 1: Applicazione del teorema di Thevenin ad una linea semi-indefinita

Poichè il generatore, che questa volta è un generatore equivalente, è costante è possibile applicare la condizione di adattamento coniugato nella forma (108) ottenendo $Z_C = Z_0$. Ovviamente, in tali condizioni, il coefficiente di riflessione che si misura sulle linee indefinite del circuito reale è pari a 0. Quindi la condizione di adattamento coniugato garantisce, in tali condizioni, che il flusso di potenza attiva attraverso la linea semi-indefinita di alimentazione sia il più grande possibile, e pari alla potenza incidente. Ne segue anche che tale potenza incidente è numericamente pari alla potenza disponibile dal generatore equivalente.

Per un adattamento alimentato da una linea semi-indefinita, la sua *qualità* viene misurata dal valore del $|\Gamma|^2$ sulla linea di alimentazione, ovvero dal return loss.

Poichè però lo scopo di un adattamento è quello di trasferire potenza ad un carico può essere più utile misurare tale qualità con parametri legati a tale trasferimento. In particolare si utilizza l'efficienza di trasferimento ¹

$$\eta = \frac{\text{Potenza trasferita al carico}}{\text{Potenza disponibile dal generatore}}$$

o il suo corrispettivo in *dB*, che viene detto perdita di inserzione (o *insertion loss*)

$$IL = 10 \log_{10} \eta$$

Nella tabella sono riportate le corrispondenze tra questi parametri in alcuni casi notevoli.

Return Loss [dB]	efficienza η [%]	Insertion Loss [dB]
-3	50	-3
-5	68	-1.6
-7	80	-1
-10	90	-0.5
-15	97	-0.14
-20	99	-0.044
-30	99.9	-0.0044

Ovviamente, la relazione tra efficienza e *Insertion loss* (ma non il *return loss*) ha senso anche per alimentazioni con generatori reali qualunque.

¹ Tale parametro, nel contesto degli amplificatori, prende il nome di guadagno di trasduzione

14 SCELTA DELLA SEZIONE PER L'ADATTAMENTO CONIUGATO

Lo schema tipico di un adattamento è quello riportato in figura 1, in cui la rete posta tra generatore e carico (rete di adattamento) è una rete priva di perdite e contenente elementi variabili. La condizione di massimo trasferimento di potenza si ottiene scegliendo la struttura della rete di adattamento e dimensionando opportunamente gli elementi variabili. Per quanto dimostrato nel paragrafo precedente, è possibile massimizzare la potenza su Z_C imponendo alla porta A la condizione di adattamento coniugato (108). Tuttavia ci sono molti casi in cui imporre alla porta A tale condizione può essere complicato, mentre risulta molto più semplice imporla alla porta B .

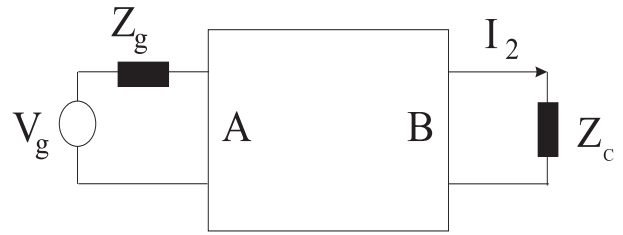


Fig 1
Struttura di una rete di adattamento

Vogliamo dimostrare che, se la rete è reciproca e priva di perdite, allora imporre l'adattamento coniugato in B è una condizione sufficiente per massimizzare la potenza su Z_C .

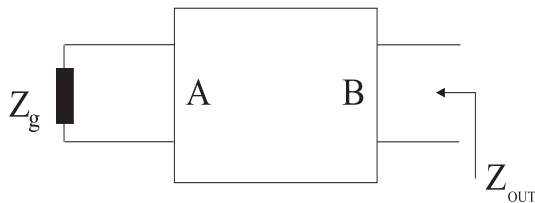


Fig 2

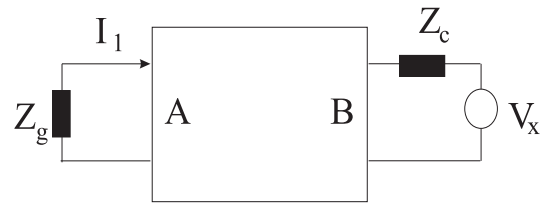


Fig. 3

Imporre la condizione di adattamento coniugato in B significa che i parametri della rete di adattamento sono scelti in modo che (vedi figura 2) $Z_{OUT} = Z_C^*$. A partire dalla rete così dimensionata, costruiamo la struttura di figura 3, inserendo un generatore di tensione in serie a Z_C . La potenza all'ingresso della rete di figura 3 (porta B) è evidentemente pari a quella dissipata su Z_g , in quanto la rete di adattamento è priva di perdite. Inoltre, grazie alla condizione di adattamento coniugato, tale potenza risulta anche pari alla potenza disponibile dal generatore. Ne segue

$$P_L = \frac{1}{2} R_g |I_1|^2 = \frac{1}{8R_C} |V_x|^2 \quad (110)$$

D'altra parte, essendo la rete di adattamento reciproca, possiamo applicare il teorema di reciprocità ai due casi di figura 1 e 3, ottenendo

$$V_g I_1 = V_x I_2$$

Sostituendo quest'ultima equazione nella (110), si trova

$$\frac{1}{8R_C} |V_x|^2 = \frac{1}{2} R_g \left| \frac{V_x I_2}{V_g} \right|^2$$

da cui, dividendo per $|V_x|^2/|V_g|^2$, e scambiando R_g con R_C si trova

$$\frac{1}{8R_g} |V_g|^2 = \frac{1}{2} R_C |I_2|^2 \quad (111)$$

Il secondo membro di (111) è la potenza che si dissipa su Z_C . Si trova quindi che tale potenza è pari a quella disponibile dal generatore, e quindi la massima possibile. Pertanto, per massimizzare la potenza su Z_C , è possibile anche imporre la condizione di adattamento coniugato alla porta di uscita della rete di adattamento. Ovviamente, il risultato può facilmente essere stesso anche a sezioni interne al circuito complessivo, purchè queste siano connesse da reti reciproche e prive di perdite ad una sezione cui possiamo applicare la dimostrazione del paragrafo precedente.

Una ulteriore conseguenza è che, essendo costante il flusso di potenza attiva attraverso ogni sezione (teorema di Poynting), risulta costante anche la potenza disponibile da tutti i generatori equivalenti (di Thevenin o di Norton) alle varie sezioni. Pertanto, se ad una sezione c'è un disadattamento, ovvero se il rapporto tra la potenza che fluisce e quella disponibile dal generatore è minore di uno, tale rapporto risulta costante in tutte le sezioni.

Dalla relazione (111) si può anche dimostrare che imporre alla porta B la condizione di adattamento coniugato fornisce la stessa condizione anche alla porta A (ovvero che la condizione di adattamento coniugato alla porta B è condizione necessaria e sufficiente per la massimizzazione della potenza su Z_C). Infatti la potenza in ingresso alla porta A della rete vale

$$P_{IN} = \frac{1}{2} \frac{R_{IN} |V_g|^2}{|Z_{IN} + Z_g|^2} = \frac{1}{8R_g} |V_g|^2 \quad (112)$$

dove l'ultima uguaglianza discende dal fatto che, essendo la rete di adattamento priva di perdite, la potenza in ingresso è uguale alla potenza sul carico, e qui di alla potenza disponibile dal generatore data dal primo membro della (111). Dalla (112) segue

$$|Z_{IN} + Z_g|^2 = (R_g + R_{IN})^2 + (X_g + X_{IN})^2 = 4R_g R_{IN}$$

ovvero, sviluppando,

$$(R_g - R_{IN})^2 + (X_g + X_{IN})^2 = 0$$

che è equivalente alla condizione di adattamento coniugato sull'ingresso $Z_g = Z_{IN}^*$.

15 ADATTAMENTO CON TRASFORMATORE

La più semplice rete di adattamento è costituita da un unico tratto di linea di trasmissione posto tra il generatore ed il carico, come in figura 1 e che funge da trasformatore di impedenza. Indichiamo con Z_T e con β_T rispettivamente la impedenza caratteristica e la costante di propagazione della linea, e sia L_T la sua lunghezza. Poichè la linea è priva di perdite, la potenza

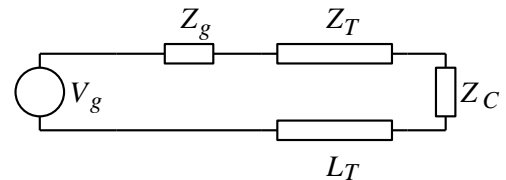


Fig 1
Adattamento a trasformatore

attiva che entra nella sua sezione di ingresso è sempre pari a quella che si dissipa sul carico Z_C e quindi per massimizzare quest'ultima basta applicare alla sezione di ingresso della linea la condizione di adattamento coniugato (108):

$$Z_{IN} = Z_g^*$$

in cui Z_{IN} è Impedenza di ingresso che si vede a monte del trasformatore.

La condizione (108) ha però soluzione solo in certi casi, e pertanto tale rete di adattamento può essere utilizzata solo in questi casi. Il più importante di questi è quando sia il carico, sia l'impedenza del generatore, siano puramente reali ¹. In tal caso, infatti, la condizione di adattamento coniugato (108) richiede che anche Z_{IN} sia reale e ciò è possibile, con Z_C reale se la linea è lunga un quarto di lunghezza d'onda. Dalla (70) segue allora

$$Z_{IN} = \frac{Z_T^2}{Z_C}$$

e imponendo la condizione di adattamento coniugato si determina il valore di Z_T :

$$Z_T = \sqrt{Z_g Z_C} \quad (113)$$

che completa il progetto della rete di adattamento.

Una tale rete di adattamento prende il nome di *trasformatore a quarto d'onda* o di *trasformatore a $\lambda/4$* .

Evidentemente, un trasformatore a quarto d'onda può essere utilizzato anche in altri casi, e in particolare quando $Z_g^* Z_C$ risulta reale.

La soluzione di adattare con un trasformatore presenta il vantaggio di un ridotto ingombro laterale, rispetto alle soluzioni con *stub*, che esamineremo più avanti, e di avere generalmente una banda passante più elevata. Per contro richiede di poter realizzare una linea di trasmissione con impedenza Z_T il che è generalmente possibile con strutture planari (purchè Z_T non sia troppo grande o troppo piccola) ma può facilmente creare problemi in circuiti realizzati in cavo coassiale. Infatti in tal caso la variazione di impedenza si può ottenere quasi esclusivamente utilizzando nel trasformatore un dielettrico con opportuna costante dielettrica, che non è sempre reperibile.

Questi vantaggi spingono a cercare di usare, in particolare per circuiti planari, soluzioni con trasformatore anche in altri casi.

Se occorre adattare un carico non reale, è possibile ricorrere a una soluzione con due trasformatori in cascata. Il secondo trasformatore è una linea lunga $\lambda/8$, che ha la proprietà, scegliendo opportunamente la sua impedenza, di presentare al suo ingresso una impedenza reale. Tale impedenza di ingresso reale può poi essere adattata all'impedenza (reale) del generatore mediante un normale trasformatore a quarto d'onda. Ovviamente una tale soluzione presenta lo svantaggio di una notevole lunghezza. È comunque

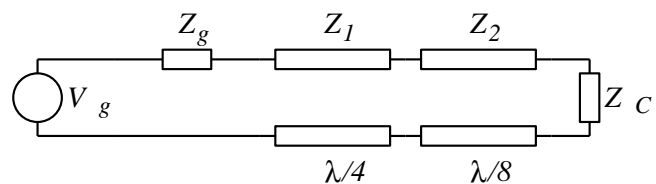


Fig 2
Trasformatore $\lambda/8 - \lambda/4$

¹ Ricordiamo che la condizione di impedenza del generatore puramente reale si ha anche quando l'alimentazione è ottenuta mediante un'onda incidente su di una linea semi indefinita.

possibile, per opportune combinazioni dell'impedenza di carico e di quella del generatore, utilizzare come trasformatore d'adattamento una singola linea, di opportuna impedenza e lunghezza. Non è facile dare criteri generali su quando una tale soluzione funzioni. In ogni caso, essa va trovata calcolando l'impedenza di ingresso a monte del trasformatore (vedi Fig. 1) tramite la (68) e imponendo a questa sezione l'adattamento coniugato.

Per carichi reali, e generatori reali, è possibile anche una rete di adattamento con due tratti di linea, che presenta il vantaggio di essere complessivamente più corta di un trasformatore a $\lambda/4$, e di aver bisogno solo di linee con impedenza pari a quella del carico e a quella del generatore, impedenze che,

quando carico e generatore sono linee semi-indefinite, sono ovviamente disponibili. La struttura è quella di figura 3, e la determinazione della lunghezza elettrica dei due tratti di linea, che risulta la stessa, può essere facilmente ottenuta imponendo la condizione di adattamento coniugato. La sezione più adatta risulta essere la sezione centrale fra i due tratti di linea che costituiscono la rete di adattamento.

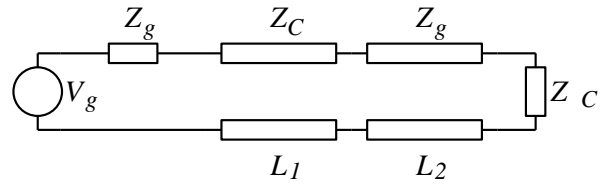


Fig 3

16 ADATTAMENTI CON STUB

Una soluzione alternativa all'uso dei trasformatori di impedenza del paragrafo precedente è quella di utilizzare, per adattare un dato carico Z_C , uno o più *stub*, ovvero uno o più tratti di linea chiusi in corto circuito, oppure aperti, collegati in parallelo oppure in serie rispetto alla linea principale di alimentazione del carico. Nell'ipotesi, che stiamo facendo, che la linea sia priva di perdite, l'impedenza di ingresso dello *stub* è puramente reattiva, e quindi lo *stub* può essere utilizzato senza problemi nelle reti di adattamento.

La struttura più semplice di adattamento con *stub* è quella detta a singolo *stub*, di cui un esempio è riportato in figura 1. In tale figura lo *stub* è costituito da una linea di impedenza Z_s e lunghezza L_s , aperta all'estremità, connessa in parallelo tra il generatore (eventualmente equivalente) e il carico. Tra lo *stub* e il carico è interposta una linea di impedenza Z_l e lunghezza L .

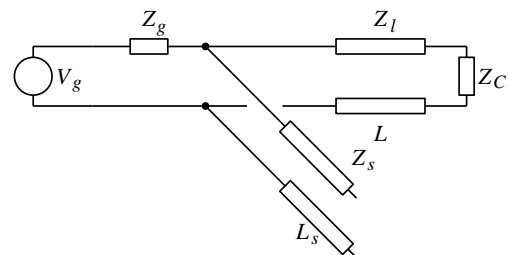


Fig 1

Adattamento a singolo *stub*

Ovviamente, reti di adattamento analoghe possono essere ottenute chiudendo lo *stub* in corto circuito all'estremità, oppure collegandolo in serie. Si noti comunque che tali soluzioni, che sono tutte possibili in linea teorica, non sempre possono essere realizzate, in dipendenza dalla tecnologia realizzativa del circuito, e dalla precisione che si vuole ottenere.

Poichè si hanno a disposizione ben quattro parametri liberi nella rete di adattamento, è facile immaginare che, in generale, sarà possibile sceglierne due ad arbitrio (ovvero in modo da

soddisfare altri requisiti, come ad esempio quelli realizzativi, o da garantire il soddisfacimento della condizione di adattamento) e determinare gli altri due. Normalmente vengono fissate le impedenze, e determinate le lunghezze.

Come già detto precedentemente, la ammettenza di ingresso della linea interposta tra stub e carico ha una parte reale che varia con la lunghezza L della linea, restando comunque un intervallo che dipende dal valore di Z_l e dal rapporto d'onda stazionaria sulla linea stessa, secondo la (79). Al variare della parte reale, varerà ovviamente anche la parte immaginaria. La condizione di adattamento (108), applicata al circuito di figura 1, fornisce

$$\begin{aligned} G_g &= G_{eq}(L) \\ -B_g &= B_s(L_s) + B_{eq}(L) \end{aligned} \quad (114)$$

in cui $Y_g = G_g + jB_g$, $Y_{eq} = G_{eq} + jB_{eq}$ è la ammettenza di ingresso della linea lunga L chiusa sul carico Z_C , e B_s è la suscettanza dello stub. Nella (114) sono anche esplicitamente inserite le lunghezze da cui dipendono le varie ammettenze. Poichè B_s varia tra $-\infty$ e $+\infty$, la seconda delle (114) può essere sempre soddisfatta da una opportuna scelta di L_s . Resta quindi da soddisfare solo la prima delle (114), che può essere considerata come una equazione in $T = \tan \beta_l L$. Questa equazione ha certamente soluzione se la conduttanza del generatore G_g soddisfa la

$$\frac{1}{Z_l} \frac{1}{S} \leq G_g \leq \frac{1}{Z_l} S \quad (115)$$

essendo S il rapporto d'onda stazionaria sul carico. Infatti, in tal caso, esisterà almeno un valore di L che renderà G_{eq} pari a G_g , in quanto quest'ultima è compresa fra il minimo e il massimo di $G_{eq}(L)$, al variare di L .

Ne consegue che se la (115) è soddisfatta, l'adattamento a singolo stub è sempre possibile. Naturalmente, in molti casi, una oculata scelta di Z_l consentirà di soddisfare la (115). In particolare, se l'alimentazione arriva da una linea semi - indefinita di impedenza Z_0 , basterà scegliere $Z_l = Z_0$. Notiamo inoltre che se l'adattamento a singolo stub è possibile, allora tutta la potenza disponibile dal generatore viene trasferita al carico.

Per quanto riguarda la scelta di L e di L_s , va detto che se la prima delle (114) ha una soluzione per T , allora ne ha necessariamente due (di cui, però, una o entrambe possono essere infinite, perchè a $T = \infty$ corrisponde una lunghezza finita e precisamente pari a un quarto di lunghezza d'onda). A queste due soluzioni corrisponderanno due valori opposti di B_{eq} e quindi due valori opposti di B_s . Poichè la banda passante di un adattamento dipende in maniera inversa dall'energia immagazzinata all'interno dell'adattamento medesimo, andrà in genere scelta sempre la lunghezza *positiva* più piccola (a meno che considerazioni costruttive non richiedano lunghezze diverse). Questo criterio può consentire di determinare il valore di T che interessa, e, per quel valore di T , il più piccolo valore di L tra gli infiniti valori, dovuti alla periodicità della tangente, possibili, e lo stesso per determinare L_s .

Gli adattamenti a singolo stub presenteranno comunque bande passanti molto ridotte rispetto agli adattamenti a trasformatore, e inoltre hanno ingombri laterali ben maggiori, in quanto lo stub va posto lateralmente. D'altra parte, per un adattamento a singolo stub, è possibile scegliere le impedenze delle linee, e quindi evitare i problemi realizzativi che possono insorgere utilizzando adattamenti a trasformatore. Un ulteriore problema degli adattamenti a singolo stub è che è necessario connettere lo stub in un punto ben preciso, e non determinabile a priori, della linea principale di alimentazione.

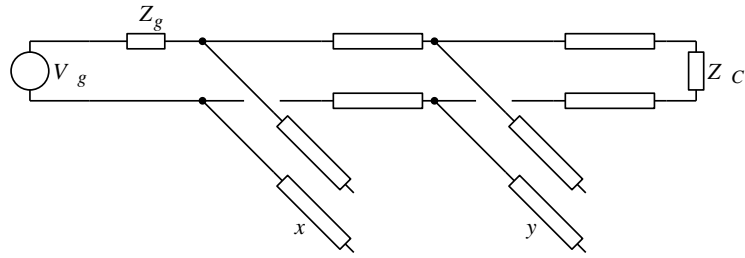


Fig. 2: Adattamento a doppio stub

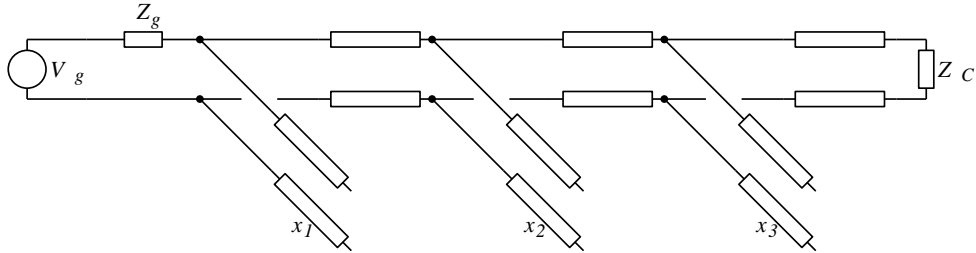


Fig. 3: Adattamento a triplo stub

Quest'ultimo inconveniente, ma evidentemente non gli altri, può essere superato utilizzando adattamenti a due o tre stub. Infatti in questo caso è possibile predeterminare la posizione degli stub medesimi. Gli schemi relativi sono riportate in figura 2 e 3. Lo stub più vicino al carico può essere sia connesso a una certa distanza dal carico stesso, come nelle figure 2 e 3, sia direttamente sul carico. In particolare per gli adattamenti a doppio stub, i parametri variabili sono le lunghezze dei due stub, che possono essere determinate imponendo la condizione di adattamento (108) alla sezione dello stub più vicino al generatore. Va però detto che una tale configurazione non è in grado di adattare qualunque carico, e l'insieme dei carichi adattabili dipende dalla distanza tra gli stub. La configurazione a triplo stub consente di superare questo problema in quanto il terzo stub può essere utilizzato per fare in modo che il carico equivalente, visto a monte di questo stub, rientri tra quelli adattabili dalla rete costituita dagli altri due stub.

17 ADATTAMENTI A CARICHI CONCENTRATI

L'utilizzo delle linee di trasmissione negli adattamenti è legato al fatto che, alle frequenze di nostro interesse, tali linee hanno un comportamento molto ben prevedibile. Ovviamente potrebbero essere usati, in linea di principio, anche circuiti di adattamento basati su componenti concentrati, come induttanze e capacità. Tuttavia tali componenti, a frequenze pari o superiori alle centinaia di MHz, hanno un comportamento molto poco prevedibile. Se si consulta, ad esempio, un catalogo di condensatori per uso a radiofrequenza, si vede che l'impedenza di un tale condensatore è molto diversa da $1/j\omega C$ ed è anzi molto meglio rappresentabile con la impedenza di un circuito RLC. Quindi si preferisce non utilizzare tali componenti, a meno che problemi di spazio non ne consiglino l'uso. In tal caso, comunque, il dimensionamento di adattamenti (o più in generale di reti) comprendenti tali componenti va fatto tenendo conto del loro circuito equivalente.

L'uso di componenti concentrati può essere utile in particolare in due casi:

- 1 A frequenze basse, corrispondenti a lunghezze d'onda di metri. Infatti in tal caso occorrerebbe utilizzare linee di trasmissione troppo lunghe (e quindi costose e ingombranti). Fortunatamente queste sono anche le frequenze a cui i componenti concentrati hanno un comportamento molto vicino a quello ideale.
- 2 Nei circuiti integrati a microonde (*MMIC*), in cui anche le linee di trasmissione vengono realizzate su substrati si *Si* o di *GaAs*, che sono molto costosi. L'uso di componenti concentrati produce un risparmio di area occupata e quindi riduce il costo finale del circuito integrato. In questo caso, però, il circuito equivalente di un induttore o di un condensatore è molto complesso, e dipende dalla tecnologia costruttiva. Dopo un dimensionamento di massima, quindi, occorre una fase di ottimizzazione delle dimensioni.

In queste note considereremo comunque solo componenti ideali. Il dimensionamento che si ottiene sarà pertanto solo il punto di partenza del progetto finale in una applicazione reale .

Un adattamento a carichi concentrati richiede due componenti concentrati ¹, uno in serie al carico e uno in parallelo al generatore, oppure uno in parallelo al carico e uno in serie al generatore.

Poichè ogni componente concentrato può essere una induttanza o una capacità, vi sono 8 diversi circuiti possibili.

Il numero di possibili combinazioni aumenta se si considera che un carico concentrato può essere realizzato mediante uno stub. Va detto subito che, dato un carico Z_c , solo alcuni di questi circuiti potranno essere usati per adattarlo, mentre altri non ne sono in grado.

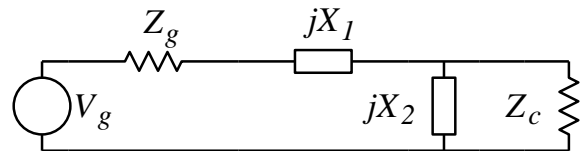


Fig 1

Adattamento a carichi concentrati

Il dimensionamento di un adattamento a carichi concentrati (usando componenti ideali) può essere eseguito utilizzando la condizione di adattamento coniugato, applicata alla sezione immediatamente a valle del primo componente concentrato. Se tale componente è in serie, si utilizza la condizione sulle impedenze. Infatti in tal caso tale componente consente di annullare la parte immaginaria totale della impedenza presente nella maglia. Basterà allora scegliere il secondo componente concentrato in modo da verificare la condizione sulle parti reali delle due impedenze.

Consideriamo l'adattamento di una resistenza di carico R_c ad un generatore di resistenza R_g , mediante una induttanza L in serie e poi un condensatore C in parallelo (Fig. 2). La condizione di adattamento coniugato va allora imposta sulle impedenze, ottenendo

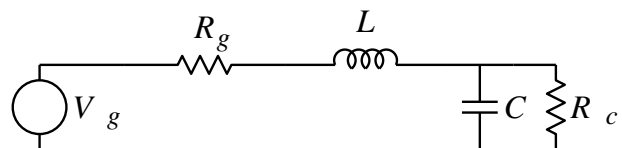


Fig 2

¹ Possono essere usati anche più componenti concentrati, con un dimensionamento non univoco. Ad esempio un terzo componente può servire per rendere adattabile un carico che non lo è, in maniera analoga agli adattamenti a tre stub

$$(R_g + j\omega L)^* = R_c // \frac{1}{j\omega C} = \frac{R_c \frac{1}{j\omega C}}{R_c + \frac{1}{j\omega C}}$$

ovvero

$$R_g - j\omega L = \frac{R_c}{j\omega R_c C + 1}$$

A questo punto, analogamente a quanto visto per gli adattamenti a a singolo stub, sono possibili due strade.

La prima prevede di eliminare il denominatore, e poi separare parte reale e coefficiente dell'immaginario. Si perviene così a

$$\begin{aligned} R_g + \omega^2 R_c LC &= R_c \\ \omega R_g R_c C - \omega L &= 0 \end{aligned} \quad (116)$$

Dalla seconda equazione si può ricavare $\omega L = \omega R_g R_c C$, da cui si vede che la prima reattanza della rete di adattamento deve essere una induttanza, se la seconda è un condensatore (e viceversa). Sostituendo nella prima si ottiene

$$R_g + \omega^2 R_g R_c^2 C^2 = R_c$$

da cui

$$(\omega C)^2 = \frac{R_c - R_g}{R_g R_c^2}$$

Da tale ultima equazione si vede subito che deve essere $R_c > R_g$ per poter ottenere l'adattamento. Tale ultima condizione si giustifica immediatamente se si pensa che porre qualcosa in parallelo a R_c ne abbassa il valore. Se invece fosse $R_c < R_g$, si potrebbe ottenere l'adattamento con l'altra configurazione, cioè ponendo un condensatore in serie a R_c e una induttanza in parallelo al generatore.

La seconda strategia di soluzione prevede di razionalizzare il secondo membro della equazione di adattamento coniugato, ottenendo

$$R_g - j\omega L = \frac{R_c (-j\omega R_c C + 1)}{(\omega C)^2 R_c + 1}$$

e poi di separare parte reale e immaginaria della equazione

$$\begin{aligned} R_g &= \frac{R_c}{(\omega C)^2 R_c + 1} \\ -\omega L &= \frac{-\omega R_c^2 C}{(\omega C)^2 R_c + 1} \end{aligned} \quad (117)$$

Dalla prima equazione si ricava direttamente ωC che, sostituito nella seconda, fornisce ωL . L'analisi di realizzabilità dell'adattamento è ovviamente identica.

Nel caso in cui carico, o generatore, siano complessi, gli sviluppi matematici sono simili. La semplice analisi delle condizioni di realizzabilità, fatta nel caso di carico e generatore reale, ovviamente non vale. Si può comunque dire che occorrono reattanze di entrambi i segni (tenendo

conto anche di generatore e carico) per adattare. Inoltre è vero che l'impedenza del carico diminuisce ponendo un componente in parallelo, ma solo se non vi è compensazione tra la parte immaginaria del carico e la reattanza che viene posta in parallelo. Consideriamo ad esempio un generatore $R_g + jX_g$. Utilizzando la seconda strategia risolutiva si arriva alle equazioni (analoghe alle (117)):

$$R_g = \frac{R_c}{(\omega C)^2 R_c + 1}$$

$$X_g - \omega L = \frac{-\omega R_c^2 C}{(\omega C)^2 R_c + 1}$$

Resta ancora la richiesta $R_c > R_g$, ma dovrà anche essere $X_g - \omega L < 0$. Se il generatore è capacitivo, questa condizione è sempre rispettata, ma se il generatore fosse induttivo, potrebbe essere necessaria una capacità, e non una induttanza, come primo componente, a seconda del valore di X_g .

18 LARGHEZZA DI BANDA DEGLI ADATTAMENTI

La larghezza di banda degli adattamenti dipende ovviamente dal tipo di circuito adottato, e dal carico che occorre adattare. Ma dipende anche dal *Return Loss*, ovvero dalla efficienza η che si considera accettabile in una data situazione.

Nel seguito vogliamo dare qualche esempio di risposta in frequenza degli adattamenti studiati, e valutarne la larghezza di banda, scegliendo come *Return Loss* accettabile -20 dB, ovvero $\eta = 99\%$.

Ci limitiamo a considerare carichi reali, in quanto, per carichi complessi, la variazione della loro impedenza con la frequenza non può essere predetta dal valore che tale impedenza assume a frequenza centrale ¹

La prima analisi riguarda gli adattamenti a $\lambda/4$, al variare del carico Z_C , il cui circuito è riportato in Fig. 1. Dagli andamenti riportati in Fig. 2, si vede chiaramente che la larghezza di banda aumenta quanto più generatore e carico sono vicini.

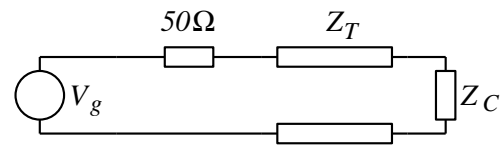


Fig 1: Adattamento a $\lambda/4$

¹ La variazione dipende dal *fattore di merito* del carico, ovvero dalla energia elettromagnetica che il carico ha immagazinata. Per una discussione più ampia di questo aspetto, si rimanda ai paragrafi sul collegamento dei risuonatori

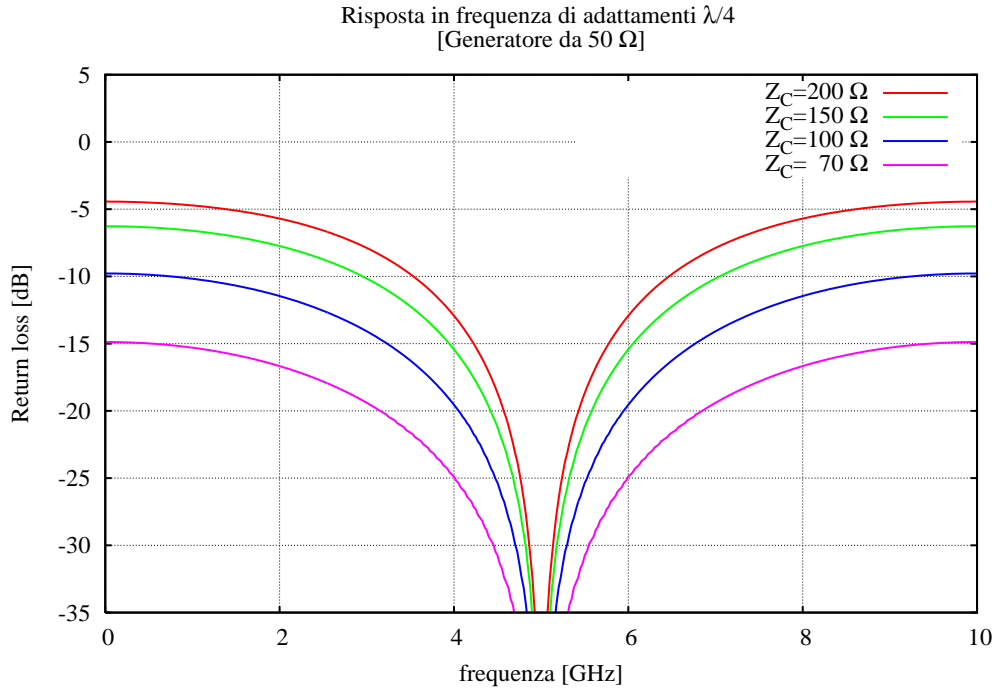


Fig. 2: Risposta in frequenza di adattamenti a $\lambda/4$ al variare del carico Z_C

La banda passante a -20 dB passa dal 16% per un carico $Z_C = 200 \Omega$, fino al 72% per un carico $Z_C = 70 \Omega$.

Passiamo ora a considerare adattamenti a singolo stub, il cui circuito è riportato in Fig. 3 (e supponendo che lo stub possa essere sia aperto, sia chiuso in corto circuito). Per ciascuna configurazione dello stub, esistono due possibili soluzioni per le lunghezze x e y , con larghezze di banda differenti.

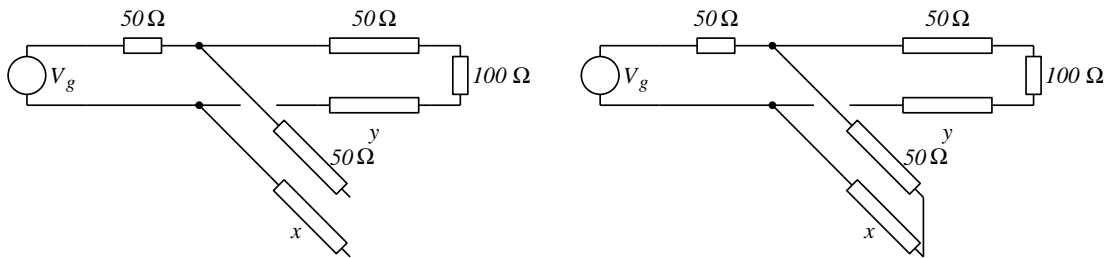


Fig. 3: Adattamento a singolo stub in parallelo, a sinistra aperto (A), e destra in corto circuito (C)

La risposta in frequenza è riportata in figura 4, per i vari casi riassunti nella tabella I, in cui è calcolata anche la larghezza di banda. Per confronto è riportata anche la risposta in frequenza di un adattamento $\lambda/4$ per lo stesso carico.

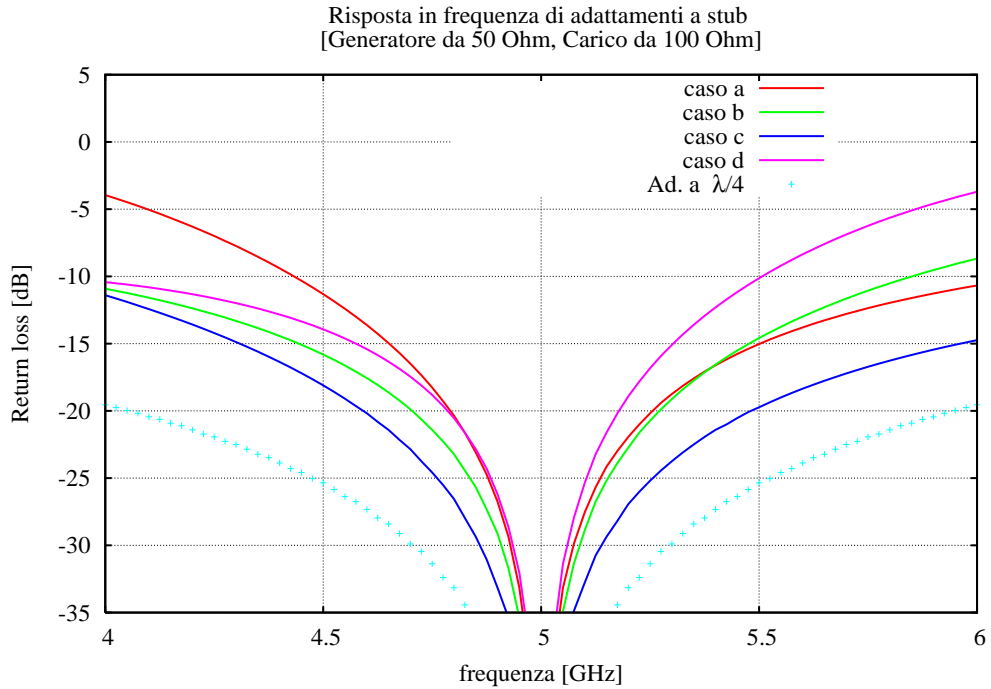


Fig. 4: Risposta in frequenza di adattamenti a stub (legenda in Tabella I)

Tabella I
Legenda, e risultati, di Fig. 4

Caso	Stub	y	x	banda passante	
a	A	54°	146°	0.45 GHz	9%
b	A	125°	34°	0.56 GHz	11%
c	C	54°	56°	0.90 GHz	18%
d	C	125°	124°	0.39 GHz	8%

Dalla analisi di tabella I si vede che la banda passante non solo è molto inferiore a quella di un adattamento $\lambda/4$, pari nel nostro caso al 38%, ma dipende in maniera sostanziale dalla lunghezza delle linee coinvolte x e y . Infatti nell'unico caso in cui tali lunghezze sono intorno ai 55° , ovvero nel caso c, la banda passante risulta quasi doppia di tutti gli altri casi, in cui una, o entrambe le linee, sono circa triple. Si può anche notare che la banda dipende più dalla lunghezza x dello stub che da y . In realtà la banda passante si riduce al crescere della energia immagazinata nel circuito di adattamento. Qualitativamente, si può considerare che, a parità di lunghezza della linea, l'energia aumenti con il ROS sulla linea. Quindi la lunghezza dello stub (ROS = ∞) conta più della lunghezza della linea verso il carico, che ha un ROS di 2.

Consideriamo poi gli adattamenti a carichi concentrati, e quelli *stepped*, riportati in Figura 5 e 6.

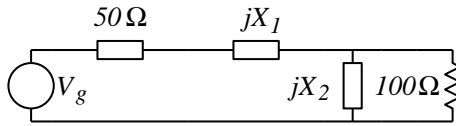


Fig. 5: Adattamento a carichi concentrati

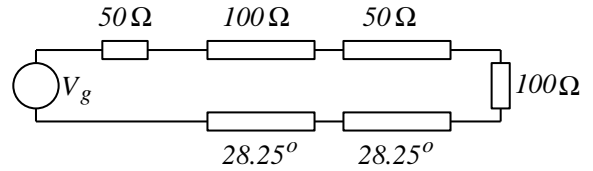


Fig. 6: Adattamento stepped

La risposta in frequenza è riportata in figura 7, per le due possibili configurazioni di reattanze (riepilogate in tabella II) e per l'adattamento stepped. Per confronto è riportata anche la risposta in frequenza di un adattamento $\lambda/4$ per lo stesso carico. Nella Tabella II sono anche calcolate le larghezze di banda.

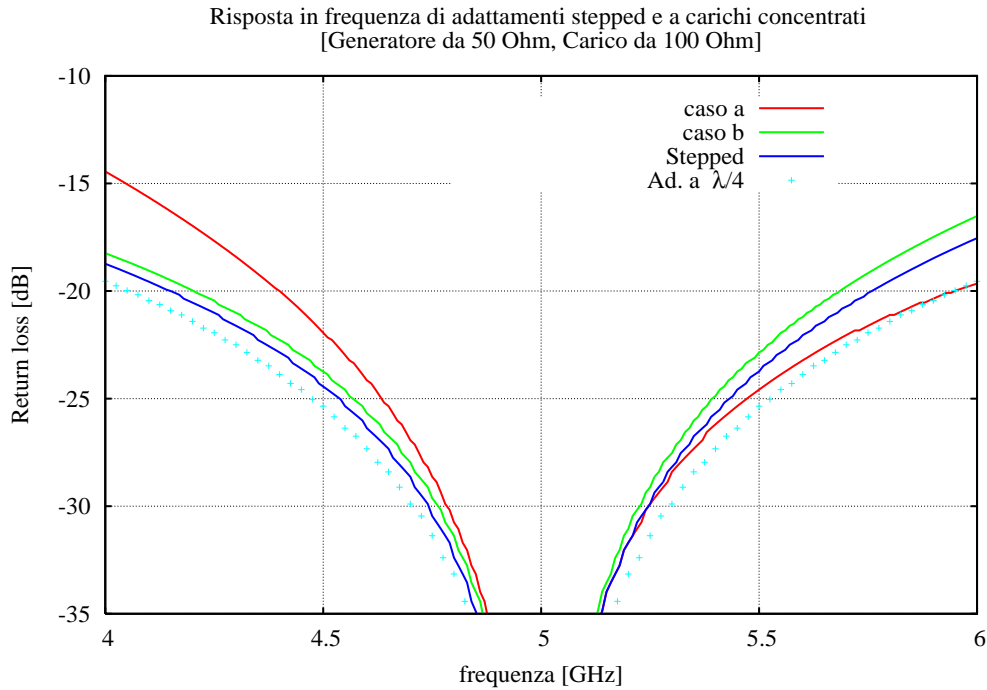


Fig. 7: Risposta in frequenza di adattamenti a carichi concentrati (legenda in Tabella II) e stepped

Tabella II
Legenda, e risultati, di Fig. 7

Caso	jX_1	jX_2	banda passante	
a	-49Ω	100Ω	1.60 GHz	32 %
b	49Ω	-100Ω	1.45 GHz	29 %
stepped			1.60 GHz	32 %

Si nota in entrambi i casi una banda passante prossima (anche se inferiore) a quella di un adattamento $\lambda/4$. Segno di una minore energia immagazinata nella rete di adattamento. Nel

caso dell'adattamento stepped ciò deriva dalla piccola lunghezza della struttura mentre, nel caso di carichi concentrati, dal fatto che ogni carico immagazina solo una energia, mentre una linea immagazina sempre sia energia elettrica, sia energia magnetica.

19 MEZZI DISPERSIVI

Passiamo ora a considerare linee non più ideali, eliminando le varie ipotesi fatte all'inizio del paragrafo 1. Cominciamo a eliminare l'ipotesi sull'assenza di inerzia dei costituenti microscopici del dielettrico che riempie la linea di trasmissione.

La relazione tra induzione e campo elettrico finora utilizzata è stata la (1)

$$\underline{D}(t) = \varepsilon \underline{E}(t) \quad (118)$$

in cui i due vettori sono calcolati nello stesso punto.

Sappiamo che un dielettrico risponde al campo $\underline{E}(t)$ applicato polarizzandosi, ovvero orientando (o deformando) i dipoli che lo costituiscono. Se il campo $\underline{E}(t)$ è costante o varia molto lentamente, tali dipoli riescono a seguire senza ritardo la variazione del campo elettrico, e allora può valere la (118). Se invece la variazione di \underline{E} è rapida, i dipoli non riescono più a seguirla istantaneamente a causa della loro inerzia e pertanto la polarizzazione di un dielettrico dipenderà non solo al campo applicato in quell'istante ma anche da quello che era stato applicato precedentemente (*materiali con memoria*).

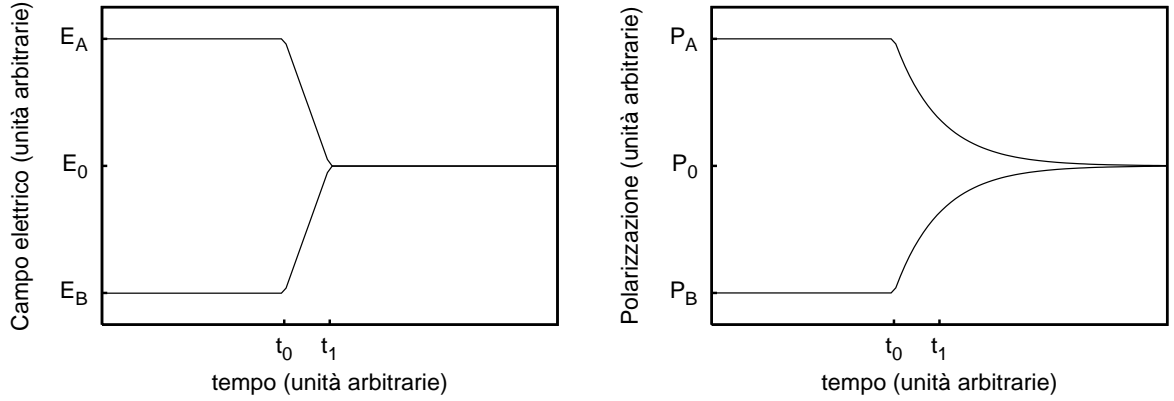


Fig. 1: Andamenti di campo elettrico e polarizzazione in un materiale con memoria

Consideriamo i due casi di figura 1. Per $t < t_0$ il dielettrico ha una certa polarizzazione, P_A , nel caso in cui campo elettrico valga E_A , e una inferiore, P_B , se il campo vale E_B . A $t = t_0$ Il campo varia molto rapidamente portandosi, in entrambi i casi, al valore E_0 all'istante t_1 . Nel caso A la polarizzazione si riduce ma, a causa della inerzia, tende a ridursi più lentamente del campo per cui all'istante t_1 sarà maggiore di quella che si avrebbe per un campo costantemente pari ad E_0 . Allo stesso modo, nel caso B, la crescita è più lenta di quella del campo e la polarizzazione resta minore di quella corrispondente a un campo pari a E_0 , che è poi anche il valore a regime, ovvero per $t \rightarrow \infty$. Il risultato è mostrate in figura 2, dove si vede che lo stesso campo, pari ad E_0 , da luogo a polarizzazioni diverse a seconda della *storia* del campo negli istanti precedenti. La (118) va allora generalizzata, introducendo la polarizzazione $\underline{P}(t)$ nella forma

$$\begin{aligned} \underline{D}(t) &= \varepsilon_0 \underline{E}(t) + \underline{P}(t) \\ \underline{P}(t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t g(t-t') \underline{E}(t') dt' \end{aligned} \quad (119)$$

in modo da tener conto della storia passata del campo. La funzione $g(t)$ tiene conto della inerzia del materiale e viene detta *funzione di Green* o *risposta impulsiva*. Se infatti il campo $\underline{E}(t)$ applicato è concentrato in un intervallo di tempo molto piccolo, ovvero è approssimabile con un impulso centrato in t_E

$$\underline{E}(t) = \underline{E}_0 \delta(t - t_E) \quad (120)$$

allora la polarizzazione vale

$$\underline{P}(t) = \varepsilon_0 g(t - t_E) \delta_{-1}(t - t_E) \underline{E}_0 \quad (121)$$

in cui gradino δ_{-1} tiene conto del fatto che per $t < t_E$ non vi può essere polarizzazione. La (121) dice che un campo impulsivo mette in moto i dipoli microscopici del materiale, in modo da orientarli nella sua direzione, contribuendo così alla polarizzazione. Non appena cessa l'effetto del campo, il moto dei dipoli, non più sollecitato, continua solo per inerzia ma l'effetto viene contrastato dai moti di agitazione termica per cui, quando l'effetto della sollecitazione svanisce, tende rapidamente a scomparire anche la polarizzazione. Pertanto la funzione $\underline{P}(t)$ nella (121) sarà diversa da zero solo in un intervallo $(t_E, t_E + \tau)$, con τ dell'ordine di grandezza dei tempi di rilassamento dei dipoli.

Questa considerazione consente di analizzare il comportamento di un dielettrico anche per campi non impulsivi. Infatti la (119) può essere scritta come

$$\underline{P}(t) \simeq \varepsilon_0 \int_{t-\tau}^t g(t-t') \underline{E}(t') dt' \quad (122)$$

e se il campo varia lentamente rispetto a τ può essere considerato costante nella (122) ottenendo

$$\underline{P}(t) \simeq \left[\varepsilon_0 \int_{t-\tau}^t g(t-t') dt' \right] \underline{E}(t) = \chi \varepsilon_0 \underline{E}(t) \quad (123)$$

ovvero comportamento senza memoria. L'induzione sarà allora

$$\underline{D}(t) = \varepsilon_0 \underline{E}(t) + \underline{P}(t) \simeq \varepsilon_0 (1 + \chi) \underline{E}(t) \quad (124)$$

e $\chi = \varepsilon_r - 1$.

Pertanto in elettrostatica tutti i dielettrici possono essere considerati senza memoria. Al crescere della frequenza (ovvero della velocità di variazione di $\underline{E}(t)$) i dielettrici cominciano diventare dispersivi. Dalla (122) discende che un dielettrico può essere considerato non dispersivo fino a una frequenza $\omega \ll 1/\tau$. Poichè τ dipende dal dielettrico, per ogni frequenza vi saranno dielettrici ancora non dispersivi e dielettrici dei quali occorrerà considerare la dispersione.

In quest'ultimo caso, per campi sinusoidali a frequenza ω_0 , si ha, usando la rappresentazione complessa

$$\begin{aligned} \underline{P}(t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-t') \delta_{-1}(t-t') \operatorname{Re} \left[\underline{E} e^{j\omega_0 t'} \right] dt' \\ &= \operatorname{Re} \left[\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{t}) \delta_{-1}(\bar{t}) e^{-j\omega_0 \bar{t}} d\bar{t} \underline{E} e^{j\omega_0 t} \right] \end{aligned} \quad (125)$$

avendo posto $\bar{t} = t - t'$. Se indichiamo con $\chi(\omega)$ la trasformata di Fourier di $g\delta_{-1}$

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{t})\delta_{-1}(\bar{t})e^{-j\omega_0\bar{t}}d\bar{t} \quad (126)$$

otteniamo che il vettore complesso associato a $\underline{P}(t)$ (che ovviamente è ancora una funzione sinusoidale a frequenza ω_0) è

$$\underline{P} = \varepsilon_0\chi(\omega_0)\underline{E} \quad (127)$$

e pertanto

$$\underline{D} = \varepsilon(\omega_0)\underline{E} \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 + \chi(\omega)) \quad (128)$$

ovvero la stessa relazione (118) del caso senza memoria, almeno formalmente. Si può quindi introdurre, per caratterizzare insieme mezzi come senza memoria, una “costante dielettrica” dipendente dalla frequenza che, nel caso di mezzo non dispersivo, si riduce a una costante (la costante dielettrica usuale). Per mezzi dispersivi, invece, $\varepsilon(\omega)$ è una funzione complessa, con parte reale anche eventualmente negativa.⁸ Pertanto, nel caso sinusoidale, i mezzi dispersivi si trattano allo stesso modo di quelli non dispersivi, a patto di usare il valore della costante dielettrica alla frequenza di interesse.

Una proprietà di $\chi(\omega)$ è che, essendo $g(t)$ di durata finita,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \chi(\omega) = 0 \quad (129)$$

Quindi a frequenza sufficientemente alta tutti i dielettrici i diventano sostanzialmente equivalenti al vuoto. La frequenza limite oltre cui ciò avviene è tanto più grande quanto minore è la durata di $g(t)$, ovvero l’inerzia dei costituenti microscopici. Ciò conferma che la ragione della (129) è che se il campo varia molto rapidamente, l’inerzia dei dipoli può essere così grande da impedire del tutto il moto dei dipoli stessi. Evidentemente una inerzia elevata impedisce il moto a frequenze per le quali dielettrici con inerzia minore tendono ancora a polarizzarsi.

20 CONDUCIBILITA'

In alcuni materiali dielettrici i sono presenti cariche libere, che danno luogo a una conducibilità σ_d , con conseguente dissipazione di energia per effetto Joule. Nel caso sinusoidale il suo valore medio è

$$P_J = \frac{1}{2} \int_V \sigma_d |E|^2 dV \quad (130)$$

Occorre quindi tener conto anche di tale effetto in una linea di trasmissione.

Per far ciò possiamo cominciare a notare che in un tale dielettrico, oltre alla corrente di spostamento $d\underline{D}/dt$ è presente anche una densità di corrente di conduzione

⁸ Il significato di $\varepsilon(\omega)$ non è quindi necessariamente simile alla costante dielettrica usuale. Per meglio comprenderlo, è necessario prima sviluppare il principio di conservazione dell’energia in elettromagnetismo, cosa che verrà fatta successivamente.

$$\underline{J} = \sigma_d \underline{E} \quad (131)$$

La corrente totale, nel DF e per dielettrici eventualmente dispersivi, vale

$$\underline{J}_{tot} = j\omega \underline{D} + \sigma_d \underline{E} = [j\omega \varepsilon(\omega) + \sigma_d] \underline{E} \quad (132)$$

Possiamo quindi tener conto di σ_d utilizzando al posto di $\varepsilon(\omega)$ una $\varepsilon_{eq}(\omega)$ data da

$$\varepsilon_{eq}(\omega) = \varepsilon(\omega) - j \frac{\sigma_d}{\omega} \quad (133)$$

in modo che la (132) divenga

$$\underline{J}_{tot} = j\omega \varepsilon_{eq}(\omega) \underline{E} \quad (134)$$

che è analoga alla relazione tra la corrente di spostamento e il campo elettrico.

Quindi σ_d/ω è del tutto indistinguibile (a frequenza fissata) dalla parte immaginaria di $\varepsilon(\omega)$. Ne segue immediatamente che la presenza di $\varepsilon_2 \neq 0$ indica la presenza di perdite nel materiale. Pertanto nel seguito useremo in genere $\varepsilon(\omega)$ complesso per tener conto di entrambi meccanismi di perdita, mettendo in evidenza σ_d solo per dare particolare risalto alla dissipazione per effetto Joule. Talvolta invece risulterà più utile esprimere tutta (o persino parte) la parte immaginaria di $\varepsilon(\omega)$ come una σ_{eq}/ω .

Conseguenza di questo è che la presenza di un $\varepsilon_2 \neq 0$ indica la presenza di *perdite*, indipendentemente dalla causa che lo produce.

A questo punto occorre notare che la relazione di trasformata di Fourier tra $g(t)$ ed $\varepsilon(\omega)$ ha una importante conseguenza energetica. Infatti la presenza della funzione $\delta_{-1}(t)$ nella (126), ovvero il fatto che la causalità impone che la risposta impulsiva sia nulla prima dell'applicazione della causa, implica che la parte immaginaria di $\chi(\omega)$ non possa avere che zeri isolati [?]. Poichè non esistono segnali perfettamente sinusoidali, in quanto dovrebbero avere durata infinita, ne segue che tutti mezzi dispersivi hanno necessariamente anche dissipazione.

Naturalmente questa dissipazione deve essere diversa da zero, ma non vi è alcuna prescrizione sul suo valore. Infatti esistono mezzi dispersivi in cui, in tutta una banda di frequenze,

$$\text{Im}[\chi(\omega)] \ll 1 + \text{Re}[\chi(\omega)] \quad (135)$$

Tali mezzi sono detti *trasparenti* (in quella banda di frequenze). Nel seguito parleremo talvolta di mezzi dispersivi e privi di perdite, facendo riferimento in realtà a mezzi trasparenti.

Si noti infine che anche la sola presenza di perdite in un dielettrico non dispersivo produce una “costante dielettrica” ε_{eq} che varia con la frequenza.

21 EQUAZIONI DELLE LINEE CON DIELETTRICO DISPERSIVO E PERDITE

La presenza di perdite (dovute sia a $\sigma_d \neq 0$, sia ad $\varepsilon_2 \neq 0$) può essere tenuta in conto molto semplicemente nelle equazioni delle linee di trasmissione. Se infatti (limitandoci a segnali

sinusoidali) utilizziamo la costante dielettrica complessa ⁹ $\varepsilon(\omega)$, le equazioni di Maxwell nel DF assumono esattamente la stessa forma. Ad esempio la legge di Gauss diventa

$$\oint \varepsilon(\omega) \underline{E} \cdot \underline{dS} = Q \quad (136)$$

Se la struttura in aria ha una capacità C_a , e quindi una carica $Q_a = C_a V$ per una data differenza di potenziale V , si ha, ovviamente

$$\oint \varepsilon_0 \underline{E} \cdot \underline{dS} = Q_a = C_a V \quad (137)$$

in quanto, essendo fissato V , non cambia neanche \underline{E} . Da (136,137) segue allora che possiamo definire una capacità equivalente (complessa)

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} C_a \quad (138)$$

da utilizzare nelle equazioni dei telegrafisti (30). Allo stesso modo si procede (o si procederebbe, nei rari casi in cui fosse necessario) se è la permeabilità magnetica a diventare complessa.

Le (30) possono allora essere riscritte come

$$\begin{aligned} -\frac{dV(z)}{dz} &= j\omega LI(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} &= j\omega(\varepsilon_1 - j\varepsilon_2)C_a V(z) \end{aligned} \quad (139)$$

dove

$$\varepsilon_1 - j\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \quad (140)$$

e, ovviamente, $\varepsilon(\omega)$ è calcolato alla frequenza del segnale.

Formalmente le equazioni (140) restano uguali alle (30) e possiamo risolverle analogamente introducendo una costante complessa k (vedi (32)) definita da

$$k^2 = \omega^2 LC \quad (141)$$

dove ora L, C sono le costanti *complesse* della linea (nel caso di (140) C è pari a $(\varepsilon_1 - j\varepsilon_2)C_a$), e scrivendo la soluzione (33) nella forma

$$V(z) = V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz} \quad (142)$$

Notiamo che, come il caso ideale, le due radici di k^2 sono entrambe incluse in (142), ma conviene scegliere una convenzione per determinare k in modo da assegnare un significato univoco ai due termini di (142), ed in particolare che il primo rappresenti ancora una onda progressiva. Posto

$$k = \beta - j\alpha \quad (143)$$

con β, α reali. Il primo termine di (142) diventa, nel DT

⁹ Come detto nel paragrafo precedente, da ora in poi $\varepsilon(\omega)$ tiene conto sia della dispersione, sia delle perdite

$$|V^+|e^{-\alpha z} \cos(\beta z - \omega t + \varphi^+) \quad (144)$$

che è ancora una onda ¹⁰ che viaggia nella direzione positiva dell'asse z se $\beta > 0$

Mentre l'onda viaggia, deve poi attenuarsi a causa delle perdite. Ciò richiede che anche $\alpha > 0$. Pertanto una costante k è la radice di k^2 che si trova nel 4^o quadrante del piano di Gauss.

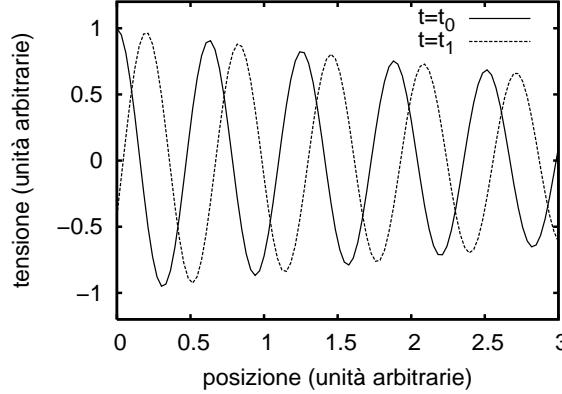


Fig. 1: Andamento della tensione in un materiale con perdite ($t_1 > t_0$)

Poichè $\varepsilon_2 > 0$ allora k^2 si trova nel 3^o o 4^o quadrante, con fase compresa in $(-\pi, 0)$ Pertanto esisterà sempre una tale radice k con fase compresa tra $-\pi/2$ e 0 ovvero nel 4^o quadrante. I casi limite sono quelli corrispondenti a $\varepsilon_2 = 0$ e si trattano come limite di $\varepsilon_2 > 0$:

$\varepsilon_1 > 0$ la radice k sarà sull'asse reale (caso ideale del paragrafo 3)

$\varepsilon_1 < 0$ la radice k sarà immaginaria pura, con parte immaginaria negativa.

La corrente corrispondente a (144), nonché la forma stazionaria della soluzione (44), si scriveranno ancora formalmente nello stesso modo, a patto di usare k (complesso) al posto di β e di prendere come impedenza il valore

$$Z_0 = \frac{\omega L}{k} = \frac{k}{\omega C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (145)$$

complesso. Ciò che cambierà sarà invece l'interpretazione delle soluzioni così trovate. Ad esempio $V(0) \cos kz$ darà luogo, al posto di (45), a

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[V(0) (\cos \beta z \cosh \alpha z + j \sin \beta z \sinh \alpha z) e^{j\omega_0 t} \right] \\ & = |V(0)| \left[\cos \beta z \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cosh \alpha z - \sin \beta z \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \sinh \alpha z \right] \end{aligned} \quad (146)$$

che è ancora una configurazione stazionaria ma con ampiezza spazialmente variabile.

¹⁰ si ricordi che la definizione di onda non prevede che la configurazione viaggi mantenendosi identica ma solo *riconoscibile*

22 PROPAGAZIONE DISPERSIVA

Finora abbiamo considerato solo segnali sinusoidali puri. Pertanto anche il caso di mezzo dispersivo, in cui ε (ed eventualmente μ) dipende dalla frequenza non presenta difficoltà. Basta utilizzare il valore di $\varepsilon(\omega)$ relativo alla frequenza ω dell'onda.

Il caso di segnale non sinusoidale, invece, richiede una trattazione diversa per il caso dispersivo. Infatti occorre ricordare che la velocità di un'onda sinusoidale è comunque (vedi (35))

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad (147)$$

Se β è una funzione lineare di ω tutte le frequenze hanno la stessa velocità. Poiché un segnale non sinusoidale può essere sempre decomposto (Trasformata di Fourier) in onde sinusoidali, tali onde viaggiano tutte con la stessa velocità e, al termine della propagazione, si ricompongono ricostruendo lo stesso segnale di partenza.

Se invece β è una funzione non lineare di ω le varie componenti sinusoidali hanno velocità diversa e quindi all'arrivo il segnale può non essere ricostruito in maniera corretta. Pertanto ogni qualvolta β non è funzione lineare di ω ovvero se

$$\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \neq 0$$

c'è il rischio di deformare i segnali che si propagano, se questi sono non sinusoidali. Ciò avviene nei mezzi dispersivi ma può avvenire per altre cause, come le perdite (v. paragrafo precedente). Poiché i segnali che vengono normalmente trasmessi non sono sinusoidali, ma sono comunque a banda stretta, ovvero occupano un intervallo di frequenze piccolo rispetto alla frequenza centrale di tale intervallo, è consigliabile trattare in forma generale il caso di un tale segnale che si propaga, con una legge del tipo $e^{-j\beta z}$ con β funzione non lineare di ω , indipendentemente dalla causa fisica di tale dipendenza non lineare ¹.

Consideriamo allora un segnale a banda stretta, di trasformata $V(\omega)$ centrata intorno a ω_0 , che si propaga da un trasmettitore posto alla ascissa 0 a un ricevitore posto alla ascissa z , attraverso un canale dispersivo. Per semplicità di scrittura supponiamo $v_s(t) = 0$, ma il discorso è identico nel caso generale.

La trasformata del segnale nel punto di ricezione vale:

$$V_R(\omega) = V(\omega) e^{-jk(\omega)z} = V(\omega) e^{-j\beta(\omega)z} e^{-\alpha(\omega)z}$$

Il corrispondente segnale $v_R(t)$ è reale, e da questo discende che $V_R(-\omega) = V_R^*(\omega)$. Dalla relazione precedente segue quindi

$$\beta(-\omega) = -\beta(\omega) \quad \alpha(-\omega) = \alpha(\omega)$$

Assumiamo per semplicità il mezzo trasparente in tutta la banda del segnale, in modo da poter trascurare l'attenuazione. Risulterà quindi

¹ Il termine $e^{-j\beta z}$ risulta essere la funzione di trasferimento (o, più precisamente, la risposta armonica) del canale di trasmissione. La trattazione di questo paragrafo si applica anche a tutti quei casi in cui la fase di una funzione di trasferimento è una funzione non lineare della frequenza, come ad esempio i filtri

$$V_R(\omega) = V(\omega) e^{-j\beta(\omega)z}$$

e per ottenere il segnale effettivamente ricevuto occorre antitrasformare tale $V_R(\omega)$, ottenendo

$$v_R(t) = \text{Re} \left[\int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} 2V(\omega_0 + \sigma) e^{-j\beta(\omega_0 + \sigma)z} e^{j\sigma t} \frac{d\sigma}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \right]$$

Poichè $2\Delta\omega \ll \omega_0$, possiamo sviluppare $\beta(\omega_0 + \sigma)$ in serie di Taylor rispetto a σ intorno a $\sigma = 0$, ottenendo

$$\beta(\omega_0 + \sigma) \simeq \beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)\sigma + \frac{1}{2}\beta''(\omega_0 + \xi)\sigma^2 = \beta_0 + \beta'_0\sigma + \frac{1}{2}\beta''_0\sigma^2$$

dove $|\xi| < |\sigma| < \Delta\omega$, dipende da σ .

Se ¹²

$$\left| \frac{1}{2}\beta''_0\sigma^2 z \right| < \frac{1}{2} \max |\beta''(\omega)| \Delta\omega^2 z \ll 1 \quad (148)$$

dove il massimo è calcolato in $(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$, è possibile trascurare il terzo termine della espansione.

In tal caso infatti l'errore relativo vale circa $1/2 \max |\beta''(\omega)| \Delta\omega^2 z$. Si noti che, nonostante l'approssimazione sembri fatta nella espansione di β in serie di Taylor, l'errore relativo è indipendente dai termini conservati in tale espansione e invece dipende da z , che entra solo nell'integrale. Ciò perchè l'errore di una approssimazione deve essere valutato come effetto sul risultato finale di interesse, e non nel momento in cui tale approssimazione viene fatta.

Si può dare una forma quantitativa alla (148), in quanto in elettromagnetismo si assume di poter trascurare un termine esponenziale (con esponente immaginario puro) a fattore in un integrale (come quello in esame) se l'esponente è, in modulo, minore di $\pi/8$. Quindi si ottiene

$$\max |\beta''(\omega)| \Delta\omega^2 z < \frac{\pi}{4} \quad (149)$$

Se vale la (149), si ottiene al ricevitore

$$\begin{aligned} v_R(t) &= \text{Re} \left[\int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} 2V(\omega_0 + \sigma) e^{-j\beta_0 z} e^{-j\beta'_0 \sigma z} e^{j\sigma t} \frac{d\sigma}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \right] \\ &= \text{Re} \left[\int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} 2V(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma(t - \beta'_0 z)} \frac{d\sigma}{2\pi} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \right] \end{aligned}$$

e per confronto con $v(t)$ si ottiene

$$v_R(t) = v_c(t - \beta'_0 z) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z)$$

¹² L'errore che si commette approssimando l'esponente di un esponenziale non dipende dai termini che restano. Consideriamo $\exp(A + B)$, con $|A| \ll |B|$. L'errore assoluto che si commette approssimando l'esponente con B è dato da $|\exp(A + B) - \exp(B)|$. Per ottenere l'errore relativo occorre dividere per il valore vero $\exp(A + B)$, ottenendo $|1 - \exp(-A)|$. Se $|A| \ll 1$ allora l'errore relativo è praticamente $|A|$, ed è quindi piccolo e valutabile anche quantitativamente. Se invece $|A|$ è grande, non è possibile tale approssimazione, comunque sia grande $|B|$.

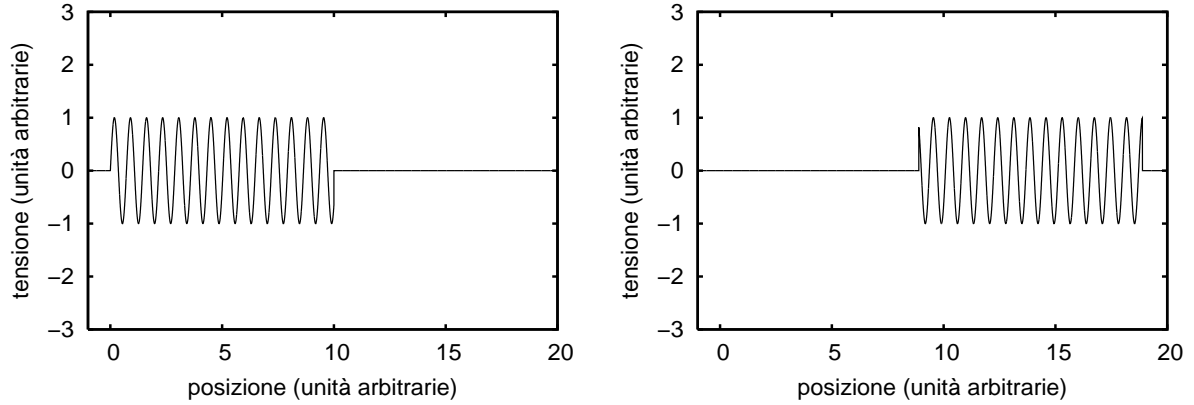


Fig. 1: Segnale trasmesso e ricevuto

Nelle figure 1a e 1b sono riportati, in unità arbitrarie, il segnale trasmesso e quello ricevuto. Il segnale trasmesso $v(t)$ è costituito da una sinusoide a frequenza ω_0 (portante), il cui involuppo è costituito da $v_c(t)$ (un impulso rettangolare nel caso della figura). L'involuppo si sposta con una velocità (si veda il paragrafo sulla propagazione per onde)

$$v_g = \frac{1}{\beta'_0} = \frac{d\omega(\beta_0)}{d\beta}$$

detta velocità di gruppo. Un osservatore, solidale con un punto della sinusoide portante, ad esempio col punto di argomento (fase) 0, si sposta invece con velocità

$$v_f = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

detta appunto velocità di fase. Si noti che la velocità di gruppo è non solo la velocità con cui si sposta l'informazione associata al segnale ma anche la velocità con cui si sposta l'energia associata al segnale, che è presente solo dove v_c è diverso da zero. Pertanto v_g deve essere minore della velocità della luce nel vuoto. Invece la v_f non ha alcun significato fisico, e quindi potrebbe essere (e in molti casi è) maggiore della velocità della luce nel vuoto.

Pertanto, se vale la (149), l'informazione, rappresentata da $v_c(t)$, si propaga senza deformarsi. Se invece la (149) non è rispettata, l'involuppo del segnale si deforma, e non è più possibile ricostruire l'informazione associata. La presenza di dispersione, misurabile da $|\beta''_0|$, pone quindi un limite superiore alla massima distanza di trasmissione o, alternativamente alla massima banda trasmissibile, corrispondente alla massima velocità di trasmissione. Un incremento di distanza può quindi essere ottenuto o a spese della velocità di trasmissione o riducendo la dispersione del canale. Inoltre, a meno che la velocità non sia molto piccola, il limite sulla distanza posto dalla dispersione è generalmente più piccolo di quello imposto dalle perdite.

Si noti infine che, nel caso non valga la (149), $1/\beta'_0$ perde il significato di velocità di gruppo. Infatti, per un segnale deformato, è difficile andare a definire in maniera precisa una velocità a cui si sposta l'energia. In questi casi, quindi, $1/\beta'_0$ può anche diventare maggiore della velocità della luce nel vuoto.

23 PERDITE NEI CONDUTTORI

Il caso di perdite nei conduttori, dovuta alla loro conducibilità non infinita, è più difficile da trattare. Occorre infatti ripartire dalla equivalenza tra un tratto Δz di linea ideale e il circuito di Fig. 2. Da tale circuito, nel DF , si ha

$$V(z_0) = j\omega L\Delta z I(z_0) + V(z_0 + \Delta z) \quad (150)$$

dove $j\omega L\Delta z I(z_0)$ è la caduta di tensione sul tratto Δz del conduttore.

Se il conduttore non è perfetto, la corrente non sarà più superficiale ma scorrerà all'interno del conduttore stesso. D'altra parte un conduttore non perfetto presenterà una resistenza R per unità di lunghezza ¹³ E quindi su di un tratto Δz vi sarà una ulteriore caduta di tensione $R\Delta z I(z_0)$ da aggiungere al secondo membro di (150), ottenendo

$$V(z_0) = j\omega L\Delta z I(z_0) + R\Delta z I(z_0) + V(z_0 + \Delta z) \quad (151)$$

Procedendo come nel paragrafo 1 si arriva a

$$-\frac{dV}{dz} = j\omega LI + RI \quad (152)$$

che generalizza la prima delle (30). Ovviamente la R può sempre essere inclusa nella parte immaginaria di L introducendo una induttanza equivalente

$$L_{eq} = L - j\frac{R}{\omega} \quad (153)$$

che può essere utilizzata come la induttanza in presenza di μ complessa.

Viceversa la parte immaginaria di L e C può, volendo, essere sempre separata da quella reale scrivendo le equazioni dei telegrafisti nella forma

$$\begin{aligned} -\frac{dV}{dz} &= j\omega LI + RI \\ -\frac{dI}{dz} &= j\omega CV + GV \end{aligned} \quad (154)$$

introducendo una costante G (conduttanza per unità di lunghezza) e inglobando in R anche l'eventuale contributo della parte immaginaria di μ

Alle (154) corrisponde il circuito equivalente di figura 2.

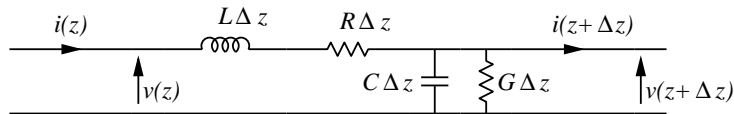


Fig. 3: Circuito equivalente ad un tratto Δz di linea di trasmissione con perdite

¹³ Tale resistenza dipende non solo dalla conducibilità e dalle caratteristiche geometriche (lunghezza e sezione) del conduttore, come nel caso di corrente continua, ma anche dalla distribuzione trasversale della corrente. Infatti per $\omega \neq 0$ la corrente tende a concentrarsi alla superficie del conduttore (effetto pelle [?]) in maniera tanto più marcata quanto più è alta ω . Pertanto la sezione del conduttore interessata al flusso di corrente si riduce al crescere la frequenza, e di conseguenza R aumenta.

Dal punto di vista formale le (154), analogamente alle (140), si risolvono come le (30) a patto di usare al posto di L , C i valori complessi $L - j \frac{R}{\omega}$ e $C - j \frac{G}{\omega}$. Si trova così

$$k = \omega \sqrt{\left(L - j \frac{R}{\omega}\right) \left(C - j \frac{G}{\omega}\right)} = \sqrt{(\omega L - jR)(\omega C - jG)}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L - j \frac{R}{\omega}}{C - j \frac{G}{\omega}}} = \sqrt{\frac{j\omega L + R}{j\omega C + G}} \quad (155)$$

Dalle (155) segue che in presenza di perdite k è sempre complesso mentre Z_0 lo è a meno che $(j\omega L + R)$ e $(j\omega C + G)$ non siano tra loro proporzionali, ovvero a meno che non esista una costante reale R_0^2 tale che

$$j\omega L + R = R_0^2(j\omega C + G) \quad (156)$$

In tal caso $Z_0 = R_0$ reale. Se vale la (156), che viene detta condizione di Heaviside, allora si ha anche

$$k = R_0(\omega C - jG) = \omega(CR_0) - j(GR_0) = \omega\sqrt{LC} - j(GR_0) \quad (157)$$

e la costante di propagazione risulta non solo indipendente dal valore delle perdite, ma soprattutto lineare con ω . Ne segue che se vale la condizione di Heaviside, le perdite non producono dispersione e quindi non limitano la banda trasmissibile.

24 PROPAGAZIONE IN PRESENZA DI PICCOLE PERDITE

Le perdite in una linea di trasmissione si assumono piccole se valgono contemporaneamente:

$$\frac{R}{\omega L} \ll 1 \quad \frac{G}{\omega C} \ll 1 \quad (158)$$

In tal caso è possibile (se necessario) approssimare le costanti secondarie delle linee, e soprattutto calcolare in maniera perturbativa l'effetto delle perdite. Naturalmente va notato che, se G ed R sono indipendenti dalla frequenza, la condizione di piccole perdite è sempre meglio verificata quanto più aumenta la frequenza.

Per quanto riguarda la costante di propagazione, si ha, dalla prima delle (155):

$$k = \omega\sqrt{LC} \sqrt{\left(1 - j \frac{R}{\omega L}\right) \left(1 - j \frac{G}{\omega C}\right)} = \omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - j \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C}\right) - \frac{GR}{\omega^2 LC}}$$

e utilizzando le condizioni di piccole perdite (158) è possibile trascurare l'ultimo termine sotto radice quadrata e espandere la radice stessa in serie di Taylor arrestandosi al primo termine. Si ottiene così

$$k = \omega\sqrt{LC} \left[1 - \frac{j}{2\omega} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \right] \quad (159)$$

La costante di propagazione β coincide quindi, in questa approssimazione, con quella in assenza di perdite, mentre ovviamente compare una attenuazione

$$\alpha = \beta \frac{1}{2\omega} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right)$$

Per quanto riguarda l'impedenza si ottiene, allo stesso ordine di approssimazione e con passaggi equivalenti partendo dalla seconda delle (155)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - j \frac{R}{\omega L} \right)^{1/2} \left(1 - j \frac{G}{\omega C} \right)^{-1/2} \simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 - \frac{j}{2\omega} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \right] \quad (160)$$

Anche qui la parte reale di Z_0 coincide con quella in assenza di perdite, mentre la parte immaginaria può essere positiva o negativa (o persino nulla) a seconda di quali perdite sono presenti e del peso relativo. Invece α risulta, in presenza di perdite, sempre positiva.

La presenza di piccole perdite viene normalmente trascurata nel dimensionamento dei circuiti, e se ne tiene conto solo nella analisi (che, in questo caso è necessaria per valutare la correttezza del dimensionamento fatto in condizioni ideali). Comunque in genere si assume, nella analisi, che Z_0 sia reale, e che la configurazione di tensione e corrente siano quelle valutate in assenza di perdite. In tali ipotesi si può calcolare facilmente la potenza dissipata nella linea con perdite.

25 GENERATORI

Come già detto nel paragrafo 1, in un circuito contenente linee di trasmissione è possibile anche inserire componenti concentrati, siano essi componenti passivi (resistori, induttori, condensatori e così via), oppure componenti attivi ovvero generatori.

Tuttavia, per quanto riguarda l'inserimento dei generatori, è necessario distinguere non solo tra generatori reali e generatori ideali (come nella ordinaria teoria di circuiti) ma anche distinguere il modo con cui i generatori vengono collegati al circuito. Conviene allora esaminare separatamente i vari casi.

Generatori reali

Un generatore reale di tensione, o di corrente, può essere collegato allo stesso modo di un componente concentrato, utilizzando per esso i principi di Kirchhoff. Occorre inoltre ricordare che, essendo la rete lineare, un qualunque circuito attivo, più complesso di un semplice generatore reale, ma che abbia una sola porta, può essere sempre ricondotto, utilizzando il teorema di Thevenin o quello di Norton, a un generatore reale di tensione o di corrente.

Generatori ideali propri

Così come i generatori reali, anche generatori ideali possono essere connessi al circuito, risolvendo quest'ultimo mediante anche i principi di Kirchhoff.

È però consigliabile esaminare più in dettaglio il comportamento di una linea di trasmissione in cui a un certo punto z_G è connesso un generatore ideale. Se tale generatore è un generatore ideale di tensione, connesso in *serie*, o un generatore ideale di corrente, connesso in *parallelo*, esso si comporta effettivamente come un generatore, cioè serve ad alimentare il circuito. E infatti se consideriamo una struttura fisica che dia luogo ad una linea di trasmissione, in cui inseriamo delle correnti elettriche o magnetiche di dimensione molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda, queste correnti possono essere modellate mediante generatori ideali di tensione in serie o generatori ideali di corrente in parallelo. Possiamo allora chiamare questo tipo di generatori come generatori ideali propri.

Generatori ideali corrispondenti a condizioni ai limiti

Generatori ideali di tensione connessi in *parallelo* o generatori ideali di corrente connessi in *serie* non si comportano come dei veri generatori, ma servono piuttosto a fissare il valore di tensione o di corrente nel punto $z = z_G$. Nonostante nessuna configurazione di sorgenti (nè elettriche, nè magnetiche) in una linea di trasmissione dia generatori di questo tipo, nel seguito capiterà di utilizzarli per modellare situazioni in cui tensione o corrente in un punto sono note e da mantenere fissate.

Dalla discussione precedente segue poi anche che soltanto generatori ideali propri possono essere tenuti in conto inserendoli direttamente nelle equazioni delle linee di trasmissione. Per fare questo consideriamo ad esempio un generatore di tensione, di valore V_G connesso in serie in $z = z_G$. Applicando i principi di Kirchhoff tra $z = z_G^-$ e $z = z_G^+$ si trova che

$$V(z_G^+) - V(z_G^-) = V_G \quad (161)$$

La tensione lungo la linea è pertanto discontinua in z_G . Andando sostituire tale tensione discontinua nelle equazioni delle linee (30), a primo membro si ottiene una funzione impulsiva $\delta(z - z_G)$ di ampiezza pari a $-V_G$. Pertanto le (30) possono essere corrette solo se un tale termine impulsivo è presente anche a secondo membro. Allo stesso modo si ragiona se è presente un generatore ideale di corrente in parallelo, di ampiezza I_G .

Le equazioni delle linee devono quindi essere generalizzate nella forma

$$\begin{aligned} -\frac{dV(z)}{dz} &= j\omega LI(z) - V_G\delta(z - z_G) \\ -\frac{dI(z)}{dz} &= j\omega CV(z) - I_G\delta(z - z_G) \end{aligned} \quad (162)$$

per tener conto dei generatori ideali propri. È evidente che se vi fossero più generatori di corrente o di tensione, ovviamente in punti diversi dell'asse z , l'ultimo termine a secondo membro verrebbe sostituito da una somma di termini simili, uno per ogni generatore.

26 CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA E TEOREMA DI POYNTING

A partire dalle (154) possiamo costruire un *integrale primo* delle equazioni delle linee con perdite, ovvero una relazione che è verificata da tutte le soluzioni della (154), che vedremo corrispondere alla conservazione dell'energia.

Se calcoliamo la derivata di $P(z)$ usando le (154) otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dz} &= \frac{1}{2} \frac{dV}{dz} I^* + \frac{1}{2} V \frac{dI^*}{dz} \\
&= \frac{1}{2} (-j\omega L) |I|^2 + \frac{1}{2} (-R) |I|^2 + \frac{1}{2} [j\omega(\varepsilon_1 + j\varepsilon_2) C_a] |V|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} V_G I^*(z_G) \delta(z - z_G) + \frac{1}{2} I_G^* V(z_G) \delta(z - z_G)
\end{aligned} \tag{163}$$

Possiamo separare parte reale e immaginaria, ponendo $P = P_A + P_R$, e integrare su di un tratto di linea tra z_1 e z_2 , contenente z_G , ottenendo

$$\begin{aligned}
\int_{z_1}^{z_2} \frac{dP_A}{dz} dz &= P_A(z_2) - P_A(z_1) \\
&= -\frac{1}{2} \omega \int_{z_1}^{z_2} \varepsilon_2 C_a |V(z)|^2 dz - \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} R |I(z)|^2 dz + \frac{1}{2} \text{Re}[V_G I^*(z_G) + I_G^* V(z_G)] \\
\int_{z_1}^{z_2} \frac{dP_R}{dz} dz &= P_R(z_2) - P_R(z_1) \\
&= 2\omega \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{1}{4} \varepsilon_1 C_a |V(z)|^2 - \frac{1}{4} L |I(z)|^2 \right] dz + \frac{1}{2} \text{Im}[V_G I^*(z_G) + I_G^* V(z_G)]
\end{aligned} \tag{164}$$

che generalizzano le (94).

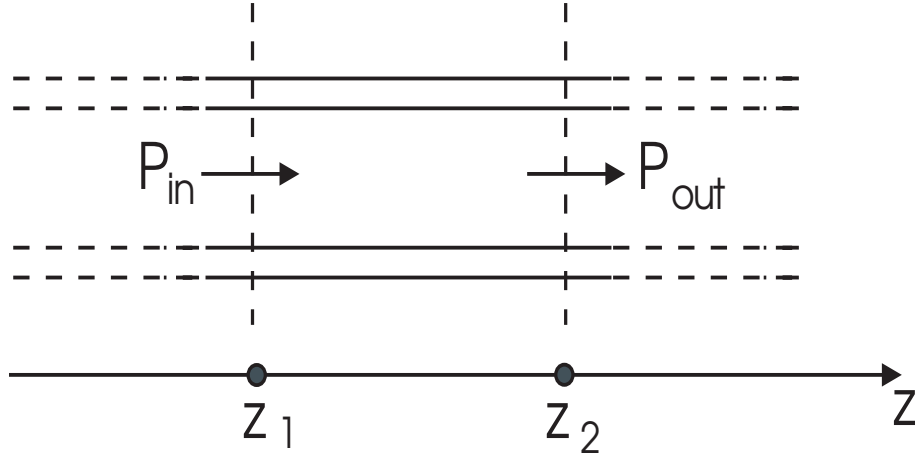


Fig. 1: Definizione di potenza entrante ed uscente.

Se consideriamo il tratto di linea tra z_1 e z_2 (figura 1), la prima delle (164) diventa allora, generalizzando la (95):

$$P_{A,IN} + P_{A,G} = P_{A,OUT} + \frac{1}{2} \omega \int_{z_1}^{z_2} \varepsilon_2 C_a |V(z)|^2 dz + \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} R |I(z)|^2 dz \tag{165}$$

dove

$$P_{A,G} = \frac{1}{2} \text{Re}[V_G I^*(z_G) + I_G^* V(z_G)] \tag{166}$$

corrisponde alla potenza attiva erogata dai generatori posti in Z_G .

La (165) dice che la potenza totale entrante nel tratto di linea (dovuta in parte al flusso di potenza alla sezione di ingresso e in parte alla potenza attiva fornita dai generatori) viene parzialmente dissipata all'interno della linea stessa mentre la restante parte esce dalla sezione di uscita. La (165) può quindi essere interpretata come l'espressione analitica che il principio di conservazione dell'energia assume per le linee di trasmissione con perdite e sorgenti in regime sinusoidale. In particolare si vede che il termine ε_2 (che può essere dovuto anche alla presenza di una conducibilità σ_d nel materiale che riempie la linea) corrisponde ad un effetto dissipativo, ovvero a perdite nel materiale.

Allo stesso modo la seconda delle (164) diventa

$$[P_{R,IN} - P_{R,OUT}] + P_{R,G} = 2\omega \int_{z_1}^{z_2} [w_M(z) - w_E(z)] dz \quad (167)$$

dove $w_M(z) = 1/4 \mathbf{L}|I(z)|^2$ è sempre la densità lineare di energia magnetica mentre $w_E(z) = \frac{1}{4}\varepsilon_1 C_a |V(z)|^2$ è dimensionalmente una densità lineare di energia (ovvero si misura anch'essa in $[J/m]$). Nel caso non dispersivo, vedi (98), la w_E è la densità media di energia elettrica, di modo che l'integrale secondo membro delle (167) è la differenza tra le energie magnetica ed elettrica. Diverso è il caso di mezzo dispersivo, in cui ε_1 potrebbe persino essere negativo. Si parla allora di *pseudo-energia* elettrica (anche se, per segnali sinusoidali, quest'ultima può senza problemi essere usata al posto della energia, almeno se è positiva).

Il termine

$$P_{R,G} = \frac{1}{2} \text{Im}[V_G I^*(z_G) + I_G^* V(z_G)]$$

è invece la potenza reattiva associata ai generatori in z_G .

La (167) dice allora che il flusso **entrante** di potenza reattiva (il primo membro della (167)) serve a bilanciare la differenza (moltiplicata per 2ω) tra energie (o pseudo-energie) magnetica ed elettrica nel volume considerato.

Le (165,167) costituiscono la forma che prende la conservazione dell'energia per una linea di trasmissione e costituiscono un caso particolare del *teorema di Poynting* nel *DF* [?], valido per le equazioni di Maxwell.

27 ESISTENZA E UNICITA'

Le leggi che regolano la propagazione del campo elettromagnetico in una linea di trasmissione sono state espresse nella forma di equazioni differenziali. Equazioni alle derivate parziali (di tipo iperbolico [?]) per le equazioni (8) nel dominio del tempo, equazioni differenziali ordinarie [?] per il dominio della frequenza. Le suddette equazioni sono lineari e a coefficienti costanti (rispettivamente con (t, z) e con (z)) nelle ipotesi fatte nel primo capitolo. Queste proprietà si mantengono, nel dominio della frequenza, anche per mezzi dispersivi, mentre nel dominio del tempo la presenza di mezzi dispersivi trasforma le equazioni (8) in equazioni integro-differenziali, ben più complesse da analizzare. Nella discussione che segue sull'esistenza e unicità, ci limiteremo pertanto a trattare solo il dominio della frequenza, lasciando solo qualche accenno al dominio del tempo.

Quando si ha a che fare con equazioni differenziali come le (30), in cui C e L sono complesse, per tener conto dell'eventuale presenza di perdite, ha senso porsi, oltre al problema della ricerca delle soluzioni e della loro proprietà, che sono stati discussi nei capitoli precedenti, anche il problema della **esistenza e unicità** della soluzione.

Per quanto riguarda l'esistenza, assumiamo che le nostre equazioni, in quanto rappresentanti un fenomeno fisico, abbiano comunque una soluzione. Viceversa, per ottenere l'unicità di una certa soluzione, dovremo imporre alla soluzione stessa delle ulteriori condizioni, che ricaveremo ovviamente anch'esse dalle proprietà fisiche del fenomeno. Tali condizioni aggiuntive dipenderanno inoltre anche dal dominio (DT o DF) in cui scriviamo le equazioni. Nei prossimi paragrafi vedremo in dettaglio quali sono queste condizioni aggiuntive.

28 IL SIGNIFICATO DELL'UNICITA'

Dai corsi di analisi matematica è noto il significato del concetto di unicità della soluzione di una equazione differenziale ordinaria. Esattamente lo stesso significato vale anche per le equazioni delle linee nel DT , nonostante queste ultime siano equazioni a derivate parziali. Per il DF , invece, visto che tali equazioni regolano la soluzione a regime per sorgenti sinusoidali isofrequenziali, il significato del concetto di unicità è, come vedremo, completamente diverso (nonostante che le equazioni nel DF siano equazioni differenziali ordinarie).

Per il DT dire che una soluzione $v(z, t), i(z, t)$ è unica in un dato intervallo di tempo, (T_0, T_1) , e dominio spaziale, \mathcal{Z} , significa che non vi possono essere (in tale intervallo e dominio) due diverse coppie di funzioni (v, i) che soddisfano le equazioni delle linee (con le eventuali sorgenti) e un insieme sufficiente di condizioni aggiuntive. Per brevità, evitiamo di discutere qui tali condizioni aggiuntive, e per esse rimandiamo, per esempio, a [1]¹. Tra le condizioni di unicità nel DT vogliamo qui ricordare solo necessità di imporre una condizione *iniziale*, ovvero

[1] Franceschetti: Campi Elettromagnetici, Boringhieri

¹ In realtà, in quest'ultimo testo, è trattata direttamente l'unicità per le equazioni di Maxwell, ma le condizioni di unicità sono qualitativamente le stesse anche per le equazioni delle linee, e ciò è ovvio in quanto queste ultime non sono altro che la specializzazione delle equazioni di Maxwell alle strutture che abbiamo chiamato col termine di *linee di trasmissione*

di dover richiedere che, all'istante iniziale T_0 , tensione e corrente lungo tutta la linea assumano un ben preciso valore:

$$v(z, T_0) = V_0(z), \quad i(z, T_0) = I_0(z) \quad \forall z \in \mathcal{Z} \quad (168)$$

dove $V_0(z)$ e $I_0(z)$ sono funzioni *indipendenti* e largamente arbitrarie.

Ben diverso il discorso per il DF , in quanto una soluzione $V(z), I(z)$ nel DF non è la soluzione di una equazione differenziale, ma solo una sua parte e precisamente la soluzione a regime delle equazioni delle linee nel DT , nella ipotesi di sorgenti sinusoidali isofrequenziali. Ciò significa che occorre considerare sorgenti che varino come $\cos(\omega_0 t + \phi)$ applicate a partire dall'istante iniziale $T_0 = -\infty$. All'istante attuale tali sorgenti daranno luogo a una soluzione $v(z, t), i(z, t)$, la cui parte a regime

$$\begin{aligned} v_R(z, t) &= \operatorname{Re} [V(z)e^{j\omega_0 t}] \\ i_R(z, t) &= \operatorname{Re} [I(z)e^{j\omega_0 t}] \end{aligned} \quad (169)$$

può espressa tramite i fasori (dipendenti da z) $V(z), I(z)$. Naturalmente, fissate le sorgenti, la soluzione completa $v(z, t), i(z, t)$ sarà unica se assegnamo opportune condizioni, comprese le condizioni iniziali $v(z, -\infty), i(z, -\infty)$. E, altrettanto naturalmente, tale soluzione dipenderà dalle condizioni iniziali. È quindi possibile che la soluzione a regime (169), essendo una parte della soluzione totale, dipenda anche essa dalle condizioni iniziali a $T_0 = -\infty$

Per definizione, diremo allora che la soluzione nel DF è **unica** se la soluzione a regime è **indipendente** dalle condizioni iniziali, e viceversa.

Più formalmente, una qualunque soluzione con sorgenti sinusoidali può sempre essere espressa come somma di due termini

$$v(z, t) = v_T(z, t) + v_F(z, t) \quad (170)$$

(e analogamente per $i(z, t)$), in cui v_T , detta soluzione transitoria, dipende dalle condizioni iniziali mentre v_F è sinusoidale e indipendente dalle condizioni iniziali ¹

Se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_T(z, t) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z} \quad (171)$$

allora v_F costituisce l'**unica** soluzione a regime, qualunque siano le condizioni iniziali, (unicità nel DF). Se invece la (171) non è valida, allora la soluzione a regime dipende dalle condizioni iniziali. Tuttavia mentre il termine v_F è sempre alla frequenza ω_0 delle sorgenti, la parte dipendente dalle condizioni iniziali v_T può contenere o non contenere un termine alla medesima frequenza ω_0 . Mentre nel primo caso non vi è unicità nel DF , nel secondo caso l'unicità sussiste ancora in quanto la parte alla frequenza ω_0 della soluzione a regime deriva solo da v_F ed è quindi indipendente dalle condizioni iniziali.

Va infine rimarcato che se si riesce a determinare, in un modo qualunque, una coppia di funzioni V_x, I_x che soddisfano sia le equazioni delle linee, sia ad un insieme di condizioni sufficienti per l'unicità, allora tale coppia di funzioni è l'**unica** soluzione del nostro problema.

¹ La decomposizione (170) segue dalla teoria delle equazioni differenziali lineari: v_F è un integrale particolare della equazione completa, mentre v_T è integrale generale della equazione omogenea associata.

29 CONDIZIONI DI UNICITA' NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Consideriamo un circuito contenente linee di trasmissione, generatori, ed eventualmente carichi concentrati. La unicità della soluzione si può dimostrare, essendo le equazioni *lineari*, supponendo, per assurdo, l'esistenza di due soluzioni distinte V_1, I_1 e V_2, I_2 , e poi dimostrando che tali soluzioni devono necessariamente coincidere, ovvero che la loro differenza

$$\begin{aligned} V(z) &= V_1(z) - V_2(z) \\ I(z) &= I_1(z) - I_2(z) \end{aligned} \quad (172)$$

dev'essere identicamente nulla. D'altra parte la soluzione differenza $V(z), I(z)$ è ancora soluzione dell'equazione delle linee, ma con generatori di valore pari alla differenza tra quelli della prima soluzione e quelli della seconda soluzione. E poichè le due soluzioni V_1, I_1 e V_2, I_2 sono prodotte dagli stessi generatori, la soluzione differenza $V(z), I(z)$ è prodotta da generatori nulli.

Convien quindi cominciare a esaminare in quali casi un circuito costituito da una successione di linee di trasmissione e carichi concentrati, in assenza di generatori, ammette la sola soluzione nulla. Infatti, ognuno di questi casi si tradurrà immediatamente in un insieme di condizioni sufficienti per l'unicità. Naturalmente cercheremo soluzioni che sono continue a tutte le interfacce, e che soddisfano le corrette condizioni di discontinuità in presenza dei carichi concentrati.

È necessario inizialmente fare una prima distinzione tra i *problemi interni*, in cui il circuito è limitato, e i *problemi esterni* in cui alle estremità del circuito vi sono una, o due, linee semi-infinito, poichè questi due problemi vanno esaminati separatamente.

Iniziamo a considerare i problemi interni e esaminiamo per primo il caso in cui il circuito è costituito da un tratto di linea di trasmissione, che parte da $z = z_1$, una sequenza, eventualmente vuota, di carichi concentrati e altri tratti di linea e infine un ulteriore tratto di linea di trasmissione che termina a $z = z_2$.

In assenza di sorgenti, il verificarsi di entrambe le condizioni seguenti è condizione **sufficiente** per avere la *sola* soluzione nulla:

- (*condizione ai limiti*) sia in $z = z_1$, sia in $z = z_2$, si ha $V = 0$ oppure $I = 0$;
- sono presenti all'interno della linea delle **perdite** distribuite (ovvero almeno uno dei tratti di linea che costituiscono il circuito ha delle perdite).

La dimostrazione si basa sul teorema di Poynting, in assenza di generatori, che è ovviamente soddisfatto dalla nostra soluzione. Dalla (165), con $P_{A,G} = 0$ segue

$$P(z_1) - P(z_2) = P_D \quad (173)$$

in cui i flussi di potenza sono nella direzione positiva dell'asse z e P_D è la potenza dissipata tra $z = z_1$ e $z = z_2$

Se in $z = z_1$ (e analogamente in $z = z_2$) si annulla la tensione, oppure la corrente, il corrispondente flusso di potenza nella (173) è nullo.

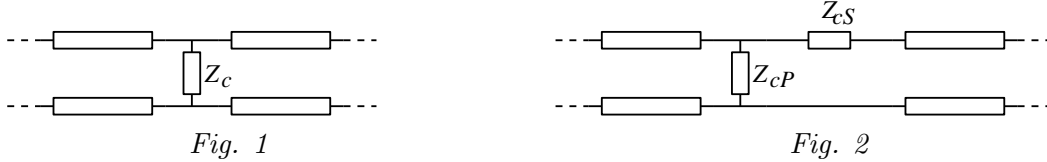
Ne segue che

$$P_D = 0 \quad (174)$$

La presenza di perdite distribuite (ad esempio R diverso da zero, ed eventualmente variabile con z) in un intervallo (z_a, z_b) consente di esprimere la potenza dissipata come

$$P_D = \frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_b} R|I(z)|^2 dz = 0 \quad (175)$$

da cui segue, essendo l'integrando non negativo, $R|I(z)|^2 = 0$ per ogni z . Poichè $R \neq 0$ si trova che la corrente si annulla per ogni z dell'intervallo (z_a, z_b) . Dall'equazione delle linee segue poi l'annullarsi anche della tensione nello stesso intervallo. Quindi alle due estremità di tale intervallo z_a, z_b si annullano sia la tensione, sia la corrente e questo è sufficiente ad avere soluzione nulla ovunque (come si vede facilmente utilizzando la forma stazionaria dei campi su una linee di trasmissione (44)).



Notiamo esplicitamente che la presenza di perdite *concentrate* (ovvero di carichi concentrati resistivi) anzichè distribuite (e quindi con tutte le linee prive di perdite) non è condizione sufficiente per l'annullamento della soluzione. Si consideri ad esempio il caso di figura 1, in cui la parte reale di Z_c è diversa da zero (e ovviamente positiva). La potenza dissipata è data da

$$P_D = \frac{1}{2} \text{Re}(Z_c) |I_z|^2$$

e dalla (174) segue l'annullarsi della I_z , nonchè della tensione ai capi di Z_c . Non c'è però alcun motivo per il quale debba annullarsi anche la corrente entrante (o uscente) dalle linee di trasmissione, e quindi la soluzione può ben essere diversa da zero. Sono necessarie perdite distribuite come quelle di figura 2, in cui vi sono due impedenze a parte reale positiva, una in serie e una in parallelo, per avere ai capi delle linee sia tensione, sia corrente nulla e quindi l'annullarsi della soluzione.

Consideriamo ora il caso in cui a una o entrambe le estremità del circuito la condizione ai limiti sia sostituita da una condizione di *impedenza*

$$V = -Z_{s1} I \quad z = z_1 \quad \quad \quad V = Z_{s2} I \quad z = z_2 \quad (176)$$

con $\text{Re}[Z_{s1}] \geq 0$ e $\text{Re}[Z_{s2}] \geq 0$. La (176) viene detta condizione di impedenza perchè è la relazione che vale tra tensione e corrente se l'estremità della linea è chiusa su di un'impedenza pari a Z_s . Quindi la (176) consente di analizzare anche tali casi.

Dimostriamo che nel caso di una o due condizioni di impedenza alle estremità del circuito si ha ancora solo la soluzione nulla purchè valga almeno una delle due seguenti condizioni

- sono presenti all'interno della linea delle **perdite** distribuite (oppure concentrate, purchè del tipo di figura 2);
- in almeno una (o nell'unica) condizione di impedenza risulta $\text{Re}[Z_s] > 0$.

Infatti facile verificare che, se vale una condizione di impedenza, (176), il flusso di potenza risulta

$$P(z_1) = \frac{1}{2} \text{Re} [VI^*] = -\frac{1}{2} \text{Re}(Z_c) |I|^2$$

(e analogamente per z_2) e se $\text{Re}(Z_c) = 0$ allora ancora il flusso di potenza corrispondente nella (173) è nullo e si ricade nel caso precedente, nel quale l'unicità è garantita solo dalla presenza di perdite distribuite.

Se invece $\text{Re}(Z_c) > 0$ allora il flusso di potenza è non positivo. D'altra parte, la (173) richiede, essendo la potenza dissipata non negativa, che sia non negativa anche $P(z_1)$. L'unica condizione possibile è allora che $P(z_1) = 0$ il che richiede la corrente in z_1 (e, dalla (176), anche la tensione) nulla. Come nel caso precedente, la presenza di tensione e corrente contemporaneamente nulle nello stesso punto garantisce l'annullarsi della soluzione in tutti i punti del circuito.

Si può in altri termini dire che l'eventuale mancanza di perdite distribuite nel circuito può essere compensata dalla presenza di perdite all'estremità, ottenute chiudendo il circuito su di una impedenza Z_s a parte reale strettamente positiva.

A questo punto è immediato considerare il caso di problema esterno. Infatti tra la tensione e la corrente, in tutti punti della linea semi-indefinita, di impedenza caratteristica Z_0 , vale una relazione analoga alla (176):

$$V = \pm Z_0 I$$

che esprime la assenza di generatori all'infinito (ovvero la presenza di una sola onda che viaggia verso l'infinito). Una dimostrazione identica a quella fatta per la condizione di impedenza dimostra che in un problema esterno senza generatori la unica soluzione possibile è quella nulla, anche in assenza di perdite interne al circuito.

Notiamo infine che se, in un problema interno, non vi sono nè perdite distribuite ($R = 0$ e $G = 0$) nè perdite alle due estremità, potranno esistere anche soluzioni diverse da quella nulla, nonostante la assenza di generatori. Tali soluzioni sono dette *risonanti*. Per tali soluzioni la parte reattiva del teorema di Poynting (167) fornisce

$$2\omega(W_M - W_E) = P_R(z_1) - P_R(z_2) = 0 \quad (177)$$

Quindi per tutte le soluzioni risonanti le energie (o pseudo energie) totali elettrica e magnetica sono uguali.

A questo punto siamo in grado di enunciare anche i risultati di unicità, che discendono immediatamente dalle considerazioni precedenti.

In un problema esterno si ha unicità della soluzione imponendo solo che sulle linee semi-indefinite sia presente solo una onda che viaggi verso l'infinito, di ampiezza qualunque.

In un problema interno si ha unicità della soluzione se si impongono, a entrambe le estremità, il valore ¹ della tensione, della corrente, o una condizione di impedenza del tipo della (176), e sono presenti all'interno del circuito delle perdite distribuite. La richiesta di perdite distribuite può essere sostituita da una condizione di impedenza in cui la parte reale dell'impedenza sia strettamente positiva (presenza di perdite all'estremità). In assenza di perdite la soluzione può non essere unica, ma due soluzioni distinte differiranno necessariamente per una soluzione risonante.

¹ Assegnare il valore, ad esempio, della tensione in $z = z_1$, significa dire che tanto $V_1(z_1)$, quanto $V_2(z_1)$ devono essere uguali a un valore fissato V_s . Ne segue che la soluzione differenziale avrà $V(z_1) = V_1(z_1) - V_2(z_1) = V_s - V_s = 0$, che è una delle condizioni che assicura l'annullamento della soluzione.

30 RISONANZE SULLE LINEE DI TRASMISSIONE

Risuonatori, ovvero circuiti in grado di supportare soluzioni risonanti (soluzioni a regime sinusoidali in assenza di generatori) vengono largamente utilizzati nelle applicazioni, ad esempio per realizzare oscillatori sinusoidali, oppure filtri. Inoltre svariati dispositivi elettromagnetici, ad esempio molte antenne, possono essere analizzati e progettati considerandoli analoghi a risuonatori. Conviene quindi analizzare in dettaglio quali circuiti in linea di trasmissione presentino risonanze, circuiti che devono necessariamente essere privi di perdite, e successivamente considerare cosa avviene delle risonanze quando si tiene conto che in ogni circuito reale vi sono necessariamente perdite.

Per analizzare le risonanze, che fanno parte della parte transitoria della soluzione delle equazione delle linee nel dominio del tempo, conviene considerare il circuito di interesse come un sistema descritto mediante la sua funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(s)$ dove s è la variabile della trasformazione di Laplace. L'utilizzo della trasformazione di Laplace, al posto di quella di Fourier (che è direttamente ottenibile dalla soluzione nel dominio della frequenza) è legata al fatto che le risonanze sono oscillazioni sinusoidali persistenti, descritte da termini impulsivi nel dominio di Fourier, e da normali funzioni razionali nel dominio di Laplace. Tuttavia va ricordato che, con la sostituzione

$$\omega \longrightarrow \frac{1}{j} s \tag{178}$$

è immediato ottenere le relazioni nel dominio di Laplace a partire dalle grandezze del dominio della frequenza. Va solo ricordato che la sostituzione precedente va fatta ovunque compaia la frequenza, quindi anche nella costante di propagazione β . Ad esempio

$$e^{-j\beta z} = e^{-j\omega \frac{z}{c}} \longrightarrow e^{-s \frac{z}{c}}$$

$$jZ_0 \tan \beta \ell \longrightarrow jZ_0 \tan \left[-js \frac{\ell}{c} \right] = -Z_0 \tanh \left[s \frac{\ell}{c} \right]$$

A partire dalla soluzione del dominio della frequenza, è quindi molto facile scrivere la funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(s)$ una volta scelte le grandezze che rappresentano l'ingresso e l'uscita. Dall'analisi dei sistemi si sa che i poli della funzione di trasferimento (ovvero gli zeri del suo denominatore) forniscono la variazione temporale dei cosiddetti *modi caratteristici* del sistema, soluzioni in assenza di forzamento, che pertanto non sono altro che le nostre risonanze.

Se $s_p = \sigma_p + j\omega_p$ è un polo della funzione trasferimento, la variazione temporale del corrispondente modo caratteristico, ovvero della corrispondente risonanza, è

$$e^{s_p t} = e^{\sigma_p t} e^{j\omega_p t}$$

Se $\sigma_p = 0$ ovvero se s_p è sull'asse immaginario, si ha una risonanza in senso stretto, nel senso che la soluzione a regime esiste. Dalla discussione sull'unicità, segue allora che se la struttura è priva di perdite i suoi poli sono (salvo casi particolari) sull'asse immaginario, cosa che per ora assumeremo.

Per calcolare le risonanze in un circuito dobbiamo partire costruendo una descrizione ingresso-uscita del circuito medesimo. Naturalmente, per ogni circuito a costanti distribuite vi sono infinite descrizioni di questo tipo in quanto possiamo scegliere una qualunque tensione o

corrente come ingresso e un'altra come uscita. Tuttavia, salvo casi di simmetria, ogni descrizione ingresso-uscita fornisce le stesse risonanze.

Sceghieremo allora come ingresso e uscita tensione e corrente presenti ad una sezione AB del nostro circuito a costanti distribuite (o concentrate) come in figura 1. In tale figura Y_L, Y_R sono delle ammettenze di **ingresso**, ovvero calcolate con la convenzione dell'utilizzatore. Se applichiamo a AB un generatore di corrente $I(s)$ (ingresso), la tensione tra A e B (uscita) sarà

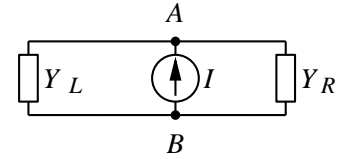


Fig 1

$$V(s) = \frac{I(s)}{Y_L + Y_R}$$

La corrispondente funzione di trasferimento è pertanto

$$W_{iv}(s) = \frac{1}{Y_L + Y_R}$$

Possiamo ovviamente utilizzare anche un generatore di tensione $V(s)$ come ingresso, come in figura 2, e prendere come uscita la corrente $I(s)$ che scorre attraverso il generatore di tensione. In tal caso

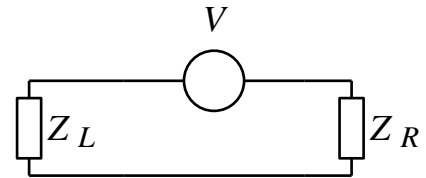


Fig 2

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_L + Z_R}$$

con corrispondente funzione di trasferimento

$$W_{vi}(s) = \frac{1}{Z_L + Z_R}$$

Le risonanze sono pertanto i poli di $\frac{1}{Y_L + Y_R}$ e di $\frac{1}{Z_L + Z_R}$ ovvero l'**unione** delle soluzioni di

$$Y_L + Y_R = 0 \quad Z_L + Z_R = 0 \quad (179)$$

D'altra parte

$$Y_L + Y_R = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_R} = \frac{Z_L + Z_R}{Z_L \cdot Z_R}$$

Pertanto ogni zero di $Y_L + Y_R$ è anche zero di $Z_L + Z_R$ purchè queste due impedenza non vadano mai contemporaneamente all'infinito (e viceversa). Se quindi si è sicuri che le due impedenza, o le due ammettenze, godono di tale proprietà, basta una sola delle due equazioni (179). Caso tipico in cui ciò *non* si verifica è quando le due impedenza sono sempre uguali, ad esempio quando si sceglie come sezione AB una sezione di simmetria.

La sezione AB è arbitraria, nel senso che l'insieme di *tutte* le risonanze (unione delle soluzioni della prima di (179) e delle soluzioni della seconda di (179)) è invariante. Infatti se applichiamo il teorema di Poynting al campo risonante ad una *qualunque* sezione del circuito (vedi figura 3) si ha

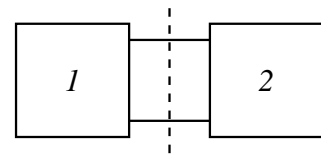


Fig 3

$$\frac{1}{2} Z_R |I|^2 = 2j\omega(W_{m2} - W_{e2})$$

$$\frac{1}{2} Z_L |I|^2 = 2j\omega(W_{m1} - W_{e1})$$

e sommando

$$\frac{1}{2} (Z_L + Z_R) |I|^2 = 2j\omega(W_m - W_e) \quad (180)$$

Analogamente

$$\frac{1}{2} (Y_L + Y_R) |V|^2 = 2j\omega(W_m - W_e) \quad (181)$$

Se consideriamo la sezione cui abbiamo calcolato la risonanza, risolvendo la (179), il primo membro di (180), o quello di (181), è nullo e segue

$$W_m = W_e \quad (182)$$

(alla risonanza le energie, o pseudo-energie, *totali* sono uguali).

Poichè i secondi membri di (180,181) sono indipendenti dalla sezione, a qualunque altra sezione almeno una delle (179) è verificata, in quanto ad ogni sezione non possono essere contemporaneamente nulli sia la tensione, sia la corrente, se nel circuito vi è un campo diverso da zero.

Per chiarire questo problema consideriamo il semplice esempio di figura 4. Se scegliamo un estremo della linea, ad esempio quello di sinistra, Z_L è sempre nullo e basta la sola equazione alle impedenze:

$$0 + jZ_0 \tan 2\beta_0 d = 0$$

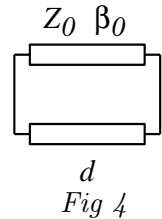
che ha per soluzione

$$2\beta_0 d = n\pi \quad \text{ovvero} \quad \omega = \frac{n\pi}{2} \frac{c}{d}$$

Se invece ci poniamo al centro, occorrono entrambe le equazioni, che ora diventano

$$\tan \beta_0 d = 0 \implies \omega = n\pi \frac{c}{d}$$

$$\cot \beta_0 d = 0 \implies \omega = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \frac{c}{d}$$



31 RISONANZE REALI

Una soluzione reale ω_0 dell'equazione di risonanza equivale a un modo naturale oscillatorio, con andamento temporale del tipo $\text{Re}(e^{j\omega_0 t})$

Tuttavia, la presenza di perdite (distribuite o concentrate) impedisce la presenza di modi naturali persistenti, e quindi le equazione di risonanza (179) forniranno delle soluzioni in s con parte reale negativa. Interpretate in termini di frequenza, secondo la (178), tali soluzioni con

dovranno ad delle frequenze di risonanza *complesse* del tipo $\omega_1 + j\omega_2$. Di conseguenza l'andamento temporale del campo sarà del tipo

$$\operatorname{Re}(e^{j(\omega_1 + j\omega_2)t}) = e^{-\omega_2 t} \operatorname{Re}(e^{j\omega_1 t}) \quad (183)$$

ed è quindi di tipo oscillatorio smorzato. La parte reale della frequenza complessa di risonanza è la frequenza delle oscillazioni smorzate, mentre ω_2 è l'inverso della costante di tempo dello smorzamento del campo.

Per una soluzione di tipo oscillatorio smorzato, l'energia varia nel tempo e, a rigori, non si può evidentemente più parlare di energia media. Se però $\omega_2 \ll \omega_1$ allora l'andamento (183) è quello di una funzione a banda stretta. Pertanto ha ancora senso parlare di energia media valutata su un periodo, in quanto all'interno di ogni periodo dell'oscillazione è possibile trascurare lo smorzamento. Naturalmente tal energia media non sarà costante, ma varierà a seconda del periodo scelto per calcolarla. In particolare si ridurrà secondo una legge del tipo

$$W(t) = W(0) e^{-2\omega_2 t} \quad (184)$$

in cui t è l'istante iniziale del periodo in cui stiamo calcolando l'energia media. La riduzione di energia descritta dalla (184) è evidentemente collegata a una dissipazione di potenza (o a un flusso di potenza verso l'esterno del risonatore) tramite il teorema di Poynting:

$$P_D = -\frac{d}{dt} W(t) = (2\omega_2) W(t) \quad (185)$$

La potenza dissipata in un periodo di durata T vale

$$T P_D = \frac{2\pi}{\omega_1} (2\omega_2) W$$

e quindi il rapporto

$$\frac{2\omega_2}{\omega_1} = \frac{T}{2\pi} \frac{P_D}{W}$$

è una misura della potenza dissipata nel periodo, ovvero dell'attenuazione (sempre riferita d'un periodo) del campo. Per analogia con i circuiti risonanti *RLC* conviene introdurre il *fattore di merito*:

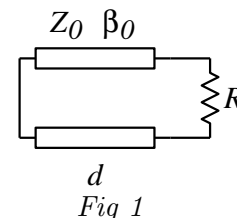
$$Q = \frac{\omega_1 W}{P_D} = \frac{\omega_1}{2\omega_2} \quad (186)$$

che, al pari di ω_2 fornisce una misura della velocità di attenuazione dell'energia in un periodo.

La (186) esprime il fattore di merito mediante le due parti della frequenza complessa. Tuttavia, molti casi, il fattore di merito può anche essere calcolato una tecnica più semplice, di tipo *perturbativa*, che è valida purchè $Q \gg 1$. Poichè ovviamente il fattore di merito non è noto prima di calcolarlo, sembrerebbe che tale tecnica non sia mai applicabile. È però possibile utilizzare un approccio cosiddetto *autoconsistente*, in cui si suppone inizialmente che il fattore di merito sia abbastanza grande, lo si calcola utilizzando la tecnica perturbativa e, se il valore è effettivamente grande, si accettano quei risultati. Se invece il valore trovato è troppo piccolo, occorre ricalcolare per altra via (e cioè usando la frequenza complessa) il fattore di merito. È evidente che, se si è in grado di fare una stima *a priori* del fattore di merito, il che è molto spesso possibile, allora si può evitare di utilizzare la tecnica perturbativa quando tale stima fornisce valori troppo piccoli.

Tale tecnica perturbativa prevede di calcolare la frequenza di risonanza e la energia immagazzinata di un risonatore *ideale* (cioè privo di perdite) che sia però *vicino* al risonatore reale di interesse. Per quanto riguarda invece la potenza dissipata, questa si calcola inserendo le perdite, ma assumendo che la presenza delle perdite medesime non alteri la distribuzione del campo nel risonatore rispetto al caso ideale. Naturalmente per il calcolo di energia e potenza dissipata occorre “alimentare” il risonatore, ovvero fissare il valore di una corrente o di una tensione. Questa scelta può essere fatta nel modo più comodo per calcolare le grandezze di interesse, in quanto il fattore di merito risulta completamente indipendente da essa.

Si consideri risonatore reale di figura 1, in cui la resistenza R è molto più piccola delle impedenza caratteristica Z_0 della linea. Il risonatore ideale vicino a quello reale si ottiene allora ponendo $R = 0$ e questo fornisce come frequenza di risonanza $\omega = \pi c/d$ e come energia immagazzinata $W = Ld|I_0|^2/4$, essendo L la induttanza della linea e I_0 la corrente che arbitrariamente assumiamo scorra nel cortocircuito di sinistra.



Per quanto riguarda il calcolo della potenza dissipata, occorre assumere la stessa configurazione di campo del risonatore ideale, e quindi, essendo il risonatore lungo mezza lunghezza d'onda, nella resistenza R scorrerà una corrente uguale a I_0 . La potenza dissipata sarà allora $P_D = R|I_0|^2/2$ e quindi il fattore di merito risulta

$$Q = \frac{\pi Z_0}{2R}$$

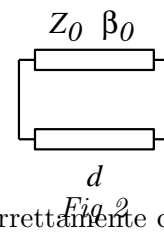
Risultando quindi $Q \gg 1$ l'analisi perturbativa fatta è corretta.

Analizzando lo stesso risonatore con la tecnica della frequenza complessa si trova che l'errore relativo, sia sul fattore di merito, sia sulla frequenza di risonanza, è dell'ordine di grandezza di $1/2Q$, e questo valore dell'errore relativo si ritrova anche in tutti gli altri casi di applicazione della tecnica perturbativa.

Concludiamo questo paragrafo notando due cose.

La prima è che, nel calcolo della potenza dissipata con la tecnica perturbativa, non tutte le grandezze possono essere considerate uguali a quelle del caso ideale. Se consideriamo infatti la tensione ai capi della resistenza R , questa tensione è nulla nel caso ideale, e quindi se venisse utilizzata per calcolare la potenza dissipata, troveremo potenza dissipata nulla, il che è palesemente assurdo. Il punto è che possiamo considerare uguali nel risonatore ideale e in quello reale tutte le grandezze che nel risonatore ideale sono diverse da zero. Infatti in tal caso l'errore relativo fatto nel considerarle uguali è molto piccolo. Se invece prendiamo una grandezza nulla nel risonatore ideale, ma diversa da zero in quello reale, il supporle uguali porta a un errore relativo infinito. La tensione ai capi della resistenza nel risonatore ideale può essere calcolata a partire dalla corrente attraverso la resistenza (che è uguale nella risonatore ideale ed in quello reale, e vale I_0) come $V_R = R I_0$.

La seconda è che anche un risonatore come quello di figura 2 *sembra* vicino al nostro risonatore ideale. Se però calcoliamo frequenza di risonanza e fattore di merito per tale risonatore troveremo una frequenza di risonanza metà di quella vera e soprattutto un fattore di merito pari a $\pi Z_0/2R$, ovvero molto più piccolo di 1. Tale ultimo fatto mostra che è stato fatto un errore, e in particolare quello di approssimare una resistenza *piccola* con un circuito aperto, anziché correttamente con un cortocircuito. Ovviamente, se la resistenza fosse risultata molto più grande dell'impedenza



caratteristica Z_0 della linea, il risonatore ideale da utilizzare sarebbe stato quello di figura 2.

32 COLLEGAMENTO DEI RISUONATORI

Finora abbiamo considerato il risonatore isolato. Tuttavia, per utilizzare un risonatore, occorre connetterlo a un circuito esterno, alimentato. La rete di alimentazione dei risonatori ha evidentemente anche l'effetto di caricare il risonatore, abbassandone pertanto il fattore di merito. Pertanto la scelta del tipo di connessione, e della sua posizione, deve tener conto, oltre che dei vincoli costruttivi, anche della necessità di non caricare eccessivamente il risonatore medesimo. D'altra parte, in molti casi un risonatore è usato come modello di altre strutture, e in tal caso l'interesse è soprattutto quello di fornire al risonatore tutta la potenza disponibile dal generatore. È ovvio che in tal caso la riduzione dell'effetto di carico dell'alimentazione passa in secondo piano.

La varietà di possibili configurazioni di risonatori, e di reti di alimentazione, non consente una trattazione generale. Pertanto faremo riferimento a un'unica struttura risonante, riportata in Fig. 1, costituita da una linea di lunghezza d , e di impedenza Z_L piccola (dell'ordine di alcuni Ohm). Le due estremità della linea sono chiuse su due resistenze di valore R_0 grandi (dell'ordine delle centinaia di Ohm e oltre). Cercheremo comunque di esprimere tutti i risultati in termini generali, in modo da poterli utilizzare direttamente (o applicando la dualità, qualora sia necessario) in tutti gli altri casi.

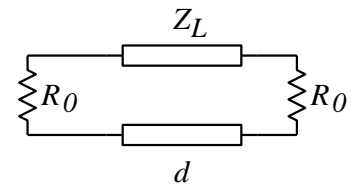


Fig 1

Utilizzando la tecnica perturbativa, occorre sostituire alle resistenze R_0 dei circuiti aperti. Si trova quindi che la risonanza del sistema isolato è alla frequenza f_r definita dalla relazione

$$\beta_r d = \pi$$

dove β_r è la costante di propagazione nella linea, corrispondente alla frequenza di risonanza.

Per quanto riguarda il fattore di merito, possiamo *alimentare* il risonatore con una tensione V_0 su una delle resistenze terminali. Si trova facilmente che l'energia vale

$$W_{em} = \frac{1}{2} C V_0^2 \frac{d}{2}$$

dove C è la capacità per unità di lunghezza della linea. Invece la potenza dissipata risulta

$$P_0 = 2 \frac{1}{2R_0} V_0^2 = \frac{1}{R_0} V_0^2$$

e quindi il fattore di merito totale ¹ del risonatore isolato, che prende il nome di fattore di merito *a vuoto* (*unloaded Q*), vale

¹ Tale fattore di merito totale risulta pari alla metà del fattore di merito dovuto separatamente a ciascuna delle due resistenze R_0 .

$$Q_0 = \omega_r \frac{W}{P_0} = \omega_r \frac{\frac{Cd}{4}}{\frac{1}{R_0}} = \frac{R_0}{Z_L} \frac{\beta_r d}{4} = \frac{\pi}{4} \frac{R_0}{Z_L}$$

La configurazione più semplice di alimentazione è quella di Fig. 2, in cui viene connessa a una delle due estremità del risonatore una linea di alimentazione di impedenza Z_A , che praticamente in tutti i casi soddisferà alla relazione

$$R_0 \gg Z_A \gg Z_L$$

Il carico dovuto a questa linea aumenterà evidentemente la potenza dissipata, riducendo il fattore di merito. Questo effetto può essere calcolato sostituendo alla linea la sua impedenza caratteristica, la quale si troverà in parallelo a R_0 e quindi sarà soggetta alla stessa tensione. La potenza dissipata su tale impedenza risulterà quindi

$$P_A = \frac{1}{2Z_A} V_0^2$$

Se introduciamo il *fattore di merito dovuto all'alimentazione*

$$Q_A = \omega_r \frac{W}{P_A} = \frac{\pi}{2} \frac{Z_A}{Z_L}$$

il fattore di merito totale Q_T , detto *fattore di merito del risonatore caricato* (loaded Q), risulterà pari a

$$\frac{1}{Q_T} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_A}$$

Nel nostro caso, in particolare, risulta

$$Q_T = \left[\frac{4Z_L}{\pi R_0} + \frac{2Z_L}{\pi Z_A} \right]^{(-1)} = \frac{\pi R_0}{4Z_L} \frac{1}{1 + \frac{R_0}{2Z_A}}$$

da cui risulta evidente la riduzione del fattore di merito causata dall'effetto di carico dell'alimentazione, e misurata dall'ultimo fattore dell'espressione precedente. Viceversa, con questo tipo di alimentazione, non si ha variazione della frequenza di risonanza, in quanto, essendo $Z_A \gg Z_L$, la linea di alimentazione va sostituita con un circuito aperto per ottenere il risonatore ideale corrispondente a quello sotto esame.

Questo per quanto riguarda il problema visto dall'*interno* del risonatore. Dal punto di vista dell'alimentazione, invece, occorre determinare il valore della ammettenza di ingresso $Y_{IN}(\omega)$, almeno per le frequenze intorno quella di risonanza. In questi intervalli tale ammettenza di ingresso può essere determinata in una forma valida per qualunque tipo di risonatore che abbia una ammettenza di ingresso che tende ad 0 alla frequenza di risonanza, se le perdite si annullano. Per quei risonatori in cui alla frequenza di risonanza è l'impedenza di ingresso (nel caso ideale) ad annullarsi, basterà, per dualità, scambiare ammettenze con impedenze e viceversa.

Dal teorema di Poynting, infatti, si trova che

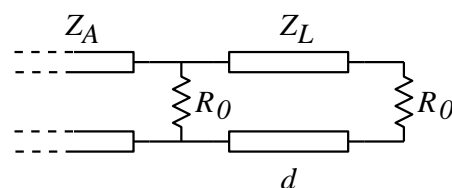


Fig 2

$$P_0 = \frac{1}{2} G_{IN} V_0^2$$

essendo $G_{IN} = \text{Re}[Y_{IN}]$.
Segue allora

$$G_{IN} = 2 \frac{P_0}{V_0^2} = 2 \frac{\omega_r \frac{W}{Q_0}}{V_0^2} = \frac{1}{Q_0} \frac{\omega_r C d}{2} = \frac{\pi}{2Z_L} \frac{1}{Q_0}$$

Questo è, evidentemente, il valore alla risonanza ma, in un intervallo non troppo grande attorno alla risonanza medesima, possiamo assumere G_{IN} costante con la frequenza. Per quanto riguarda la suscettanza B_{IN} , questa risulta pari alla ammettenza di ingresso in assenza di perdite (divisa per j). Si trova quindi

$$jB_{IN} = j \frac{1}{Z_L} \tan(\beta d) = j \frac{1}{Z_L} \tan[(\beta - \beta_r)d + \pi]$$

essendo $\beta_r d = \pi$. Limitandoci un intervallo piccolo attorno alla risonanza segue allora

$$B_{IN} = \frac{1}{Z_L} \tan[(\beta - \beta_r)d] \simeq \frac{1}{Z_L} (\beta - \beta_r)d = \frac{1}{Z_L} \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \beta_r d = \frac{\pi}{Z_L} \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}$$

Pertanto vicino alla risonanza risulta

$$Y_{IN} = \frac{\pi}{2Z_L} \frac{1}{Q_0} + 2j \frac{\pi}{2\omega_r Z_L} (\omega - \omega_r)$$

Tale espressione corrisponde alla ammettenza di un circuito RLC parallelo (Fig. 3), sempre intorno alla risonanza. In tal caso si ha infatti

$$Y = \frac{1}{R_c} + j\omega C_c - \frac{j}{\omega L_c} = \frac{1}{R_c} + j\omega C_c \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)$$

in cui la frequenza di risonanza è data da $\omega_r^2 = (L_c C_c)^{-1}$.
Vicino alla risonanza

$$1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2} \simeq \frac{\omega + \omega_r}{\omega_r^2} (\omega - \omega_r) = \frac{2}{\omega_r} (\omega - \omega_r)$$

e pertanto

$$Y \simeq \frac{1}{R_c} + 2jC_c(\omega - \omega_r)$$

che coincide con l'ammettenza di ingresso del nostro risuonatore con le corrispondenze

$$R_c \longleftrightarrow \frac{2Z_L Q_0}{\pi} \qquad C_c \longleftrightarrow \frac{\pi}{2Z_L \omega_r} \qquad L_c \longleftrightarrow \frac{2Z_L}{\pi \omega_r}$$

Nota l'ammettenza di ingresso Y_{IN} del risuonatore, è possibile calcolare la potenza assorbita dal risuonatore medesimo (che risulta anche proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza dei campi all'interno del risuonatore) per una data potenza incidente. In particolare il rapporto \mathcal{P} tra la potenza assorbita e quella incidente risulta pari a

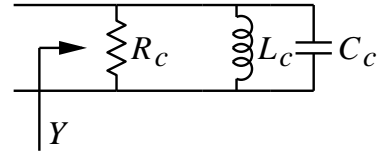


Fig 3

$$\mathcal{P} = 1 - |\Gamma|^2$$

essendo Γ il coefficiente di riflessione all'ingresso del risonatore, dato da

$$\Gamma = \frac{\frac{1}{Z_A} - Y_{IN}}{\frac{1}{Z_A} + Y_{IN}} = \frac{\frac{1}{Z_A} - \frac{\pi}{2Z_L Q_0} - 2j \frac{\pi}{2\omega_r Z_L} (\omega - \omega_r)}{\frac{1}{Z_A} + \frac{\pi}{2Z_L Q_0} + 2j \frac{\pi}{2\omega_r Z_L} (\omega - \omega_r)}$$

Ricordando poi che

$$\frac{1}{Z_A} = \frac{\pi}{2Z_L Q_A}$$

risulta

$$\Gamma = \frac{\left(\frac{1}{Q_A} - \frac{1}{Q_0}\right) - 2j \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)}{\left(\frac{1}{Q_A} + \frac{1}{Q_0}\right) + 2j \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{Q_A} - \frac{1}{Q_0}\right) - 2j \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)}{\frac{1}{Q_T} + 2j \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)}$$

Il valore del coefficiente di riflessione alla risonanza, Γ_r , risulta pertanto

$$\Gamma_r = \frac{\left(\frac{1}{Q_A} - \frac{1}{Q_0}\right)}{\frac{1}{Q_T}}$$

Evidentemente la condizione di massimo trasferimento di potenza è $Q_A = Q_0$, situazione detta di *accoppiamento critico*. È ovvio che in tal caso il fattore di merito totale risulta dimezzato rispetto al fattore di merito a vuoto ². Dall'espressione precedente di Γ risulta

$$\mathcal{P} = 1 - \frac{\frac{|\Gamma_r|^2}{Q_T^2} + 4 \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)^2}{\frac{1}{Q_T^2} + 4 \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)^2} = \frac{1 - |\Gamma_r|^2}{1 + 4Q_T^2 \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)^2}$$

L'andamento di $\mathcal{P}(\omega)$ (Fig. 4) è il tipico andamento di una risonanza. La sua larghezza si misura convenzionalmente mediante la banda passante a metà altezza

$$B_3 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

dove ω_1 e ω_2 sono le due frequenze per cui \mathcal{P} dimezza rispetto suo valore massimo (dette *frequenze di taglio* rispettivamente inferiore e superiore). Poichè il numeratore di \mathcal{P} è costante

² Se la condizione di massimo trasferimento di potenza non è verificata si parla di *accoppiamento lasco* se $Q_A > Q_0$, condizione nella quale la rete di alimentazione carica poco il risonatore, e ne modifica poco il fattore di merito, e di *accoppiamento stretto* se $Q_A < Q_0$, condizione nella quale la rete di alimentazione carica molto il risonatore, producendo una notevole riduzione del fattore di merito totale

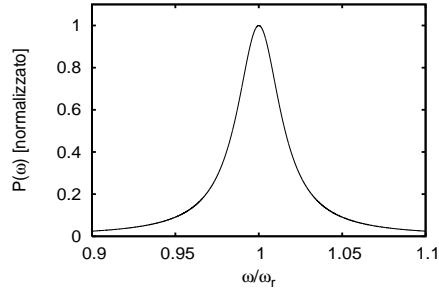


Fig. 4: Andamento della potenza assorbita da un risuonatore

con la frequenza, le due frequenze di taglio sono le frequenze per cui il denominatore di \mathcal{P} vale 2, e cioè

$$\omega_{1,2} = \omega_r \mp \frac{\omega_r}{2Q_T}$$

La banda passante è allora data da

$$B_3 = \frac{\omega_r}{2\pi} \frac{1}{Q_T}$$

e la banda passante relativa è esattamente l'inverso del fattore di merito totale. Al crescere di Q_T si riduce quindi la banda passante, il che è un vantaggio se il risuonatore è utilizzato per discriminare una frequenza rispetto alle altre, mentre risulta uno svantaggio se il risuonatore viene utilizzato per modellare un carico da alimentare, perchè in tal caso la banda in cui quel carico può essere utilizzato si riduce.

Occorre ovviamente notare che i risultati precedenti valgono solo in un intervallo non troppo largo attorno alla frequenza di risonanza. Tuttavia l'errore che si commette sulla banda passante risulta intorno allo 0.2% per bande passanti notevoli (superiori al 15%), e significativamente più piccolo per bande passanti piccole.

33 ALTRE CONFIGURAZIONI DI ALIMENTAZIONE

Dall'analisi del caso precedente si vede che non è consigliabile connettere direttamente la linea di alimentazione a risuonatori con un fattore di merito elevato, in quanto ciò riduce considerevolmente il fattore di merito stesso.

Una configurazione alternativa (Fig. 1) prevede di inserire tra la linea e l'ingresso del risuonatore una reattanza (tipicamente un condensatore) di valore elevato jX_A , che consenta di disaccoppiare il risuonatore dalla linea di alimentazione. Naturalmente la presenza della reattanza modifica anche la frequenza di

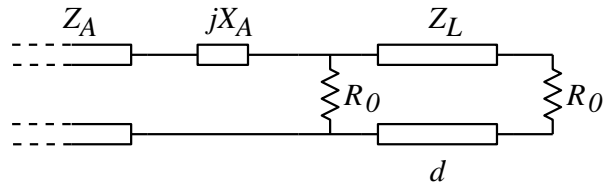


Fig 1

risonanza. L'equazione di risonanza per il risuonatore ideale (in cui la linea di alimentazione va ora sostituita con un cortocircuito) diventa

$$jX_A + jZ_L \cot \beta_{rx}d = 0$$

Ovviamente, essendo la reattanza di valore elevato, la frequenza di risonanza β_{rx} si sposta di poco, e si può quindi porre $\beta_{rx}d = \beta_r d + (\beta_{rx} - \beta_r)d = \pi + \Delta\vartheta$, con $\Delta\vartheta$ piccolo in modulo. Sostituendo nell'equazione di risonanza si trova

$$0 = jX_A - jZ_L \cot \Delta\vartheta \simeq jX_A - j\frac{Z_L}{\Delta\vartheta}$$

da cui segue ³

$$\Delta\vartheta = \frac{Z_L}{X_A}$$

La presenza di un condensatore riduce pertanto la frequenza di risonanza.

Per quanto riguarda il fattore di merito, si può trascurare nell'energia sia l'effetto della variazione di lunghezza $\Delta\vartheta$, sia l'energia immagazzinata in X_A . Anche la potenza dissipata nelle resistenze rimane inalterata. Viceversa la potenza dissipata in Z_A si riduce notevolmente e vale

$$P_A = \frac{1}{2} Z_A |I_A|^2 = \frac{1}{2} Z_A \frac{V_0^2}{Z_A^2 + X_A^2}$$

e pertanto

$$Q_A = \frac{\pi}{2Z_L} \frac{Z_A^2 + X_A^2}{Z_A}$$

Se $|X_A| \gg Z_A$, il fattore di merito dovuto all'alimentazione risulta notevolmente più grande, ovvero l'alimentazione non carica il risuonatore.

Un'altra configurazione di alimentazione, che viene utilizzata non solo per evitare di caricare i risuonatori con fattore di merito elevato, ma anche per ottenere facilmente la condizione di accoppiamento critico, è quella di connettere la alimentazione in un punto intermedio del risuonatore.

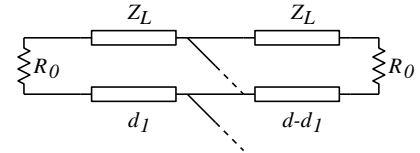


Fig 2

Collegiamo la linea di alimentazione, di impedenza Z_A , a una distanza d_1 da una delle estremità del risuonatore.

L'unica grandezza che varia rispetto alle configurazioni iniziali è la potenza dissipata sulla alimentazione. Poiché la tensione nel punto in cui è connessa la alimentazione vale $V_0 \cos \beta d_1$, tale potenza risulta

$$P_A = \frac{1}{2Z_A} V_0^2 \cos^2 \beta d_1$$

e di conseguenza

$$Q_A = \frac{\pi}{2Z_L} \frac{Z_A}{\cos^2 \beta d_1}$$

³ A rigori anche X_A dipende dalla frequenza, ma non si commette errore apprezzabile sostituendo nell'equazione precedente il suo valore alla frequenza di risonanza

più elevato rispetto al caso in cui alimentazione viene connessa a una estremità.

La posizione d_1 che fornisce l'accoppiamento critico (ovvero l'adattamento di ingresso) si ottiene imponendo $Q_A = Q_0$, e vale

$$\cos^2 \beta d_1 = \frac{\pi Z_A}{2Z_L} \frac{1}{Q_0}$$

34 STRUTTURE TEM

Finora abbiamo studiato le proprietà delle cosiddette *equazioni dei telegrafisti*, e determinato le proprietà delle relative soluzioni, quasi senza riferimento alle sottostanti strutture fisiche. Solo per ricavare le equazioni dei telegrafisti, nella forma più semplice, abbiamo considerato una struttura indefinita e omogenea, con due conduttori. E abbiamo utilizzato come esempio il cavo coassiale. Successivamente abbiamo poi visto come l'assenza di certe ipotesi sulla struttura (ad esempio il fatto che i conduttori elettrici fossero perfetti) porta a modifica delle equazioni dei telegrafisti.

In realtà, le equazioni dei telegrafisti sono un modello matematico che può essere utilizzato per descrivere la propagazione virtualmente in tutte le strutture guidanti elettromagnetiche. I parametri di ingresso di questo modello matematico sono nient'altro che le costanti primarie (L, C, R, G) o secondarie (k, Z_c) che entrano nelle equazioni dei telegrafisti.

Quindi, basterà determinare, per una data struttura guidante, le costanti primarie o secondarie per poter descrivere la propagazione in tale struttura mediante equazioni delle linee di trasmissione, e quindi utilizzarne tutte le conoscenze che abbiamo sin qui sviluppato.

Nel seguito vedremo quindi le principali classi di strutture guidanti, le proprietà delle corrispondenti equazioni delle linee di trasmissione, e, per gli esempi più significativi, anche il valore delle costanti primarie o secondarie, che naturalmente dipenderà dalle proprietà geometriche ed elettromagnetiche della struttura. Infine vedremo anche l'effetto delle principali discontinuità longitudinali sulla propagazione.

La prima classe di strutture che consideriamo sono quelle che rispettano le due ipotesi fondamentali di

- struttura con due conduttori
- dielettrico trasversalmente omogeneo

e che quindi posso essere chiamate linee di trasmissione in senso proprio. Dal punto di vista elettromagnetico, la loro caratteristica è che tanto il campo elettrico, quanto quello magnetico, sono sempre completamente trasversi rispetto alla direzione di propagazione. Tali strutture vengono pertanto dette strutture *TEM*. Conseguenza di tale ipotesi è che la velocità di propagazione all'interno di tali strutture coincide esattamente con la velocità della luce nel mezzo che riempie la struttura. La costante di propagazione β vale quindi

$$\beta = \beta_0 \sqrt{\varepsilon_r}$$

dove β_0 è la costante di propagazione della linea in aria e ε_r la costante dielettrica del materiale che riempie la struttura, eventualmente complessa per tener conto delle perdite nel materiale stesso.

Tra le strutture *TEM*, la più utilizzata è senza dubbio il cavo coassiale, che viene spesso utilizzato per la trasmissione di potenza a grande distanza, in quanto la propagazione è tutta confinata tra i due dielettrici, e quindi ha una dissipazione abbastanza piccola, e non dà luogo a interferenze.

L'impedenza caratteristica di un cavo coassiale è stata già ricavata, e vale¹

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\zeta}{\sqrt{\varepsilon_r}} \log \frac{r_e}{r_i}$$

¹ Si ricorda che, salvo chiara indicazione contraria, i logaritmi sono sempre naturali (base e)

essendo r_e , r_i i raggi esterno e interno del cavo e $\zeta = 377 \Omega$ l'impedenza caratteristica dello spazio libero.

Manca, per la caratterizzazione di una cavo coassiale, la resistenza dovuta alla conducibilità finita dei conduttori, di cui però qui non ci occupiamo.

Occorre però far notare che il modello di propagazione *linea di trasmissione* può essere utilizzato per un cavo coassiale solo purchè la frequenza non sia troppo alta, o più precisamente solo purchè le dimensioni trasverse del cavo coassiale risultino piccole rispetto alla lunghezza d'onda. Poichè un cavo coassiale ha due dimensioni caratteristiche (il raggio interno r_i e quello esterno r_e) non è facile ottenere una espressione semplice della frequenza limite di funzionamento. Una stima conservativa può essere ottenuta richiedendo che la circonferenza media del cavo coassiale sia inferiore a un quarto della lunghezza d'onda nel dielettrico che riempie il cavo. Questo conduce per la frequenza limite f_L al valore

$$f_L = \frac{c_0}{4\pi\sqrt{\epsilon_r}(r_e + r_i)}$$

essendo c_0 la velocità della luce nel vuoto e ϵ_r la costante dielettrica del materiale che riempie il cavo.

I cavi coassiale non si prestano a realizzare circuiti, e perchè la realizzazione di linee con impedenza diversa è abbastanza difficoltoso (richiede dielettrici con varie costanti dielettriche, o la realizzazione di strutture con raggi interni o esterni variabili), e perchè è abbastanza complesso connettere altri tratti di cavo coassiale in serie o in parallelo alla linea principale.

Questi problemi vengono superati utilizzando strutture di tipo planare, ovvero costituite da una piastrina di materiale dielettrico (substrato), sulle cui facce vengono praticate delle metallizzazioni. La principale struttura planare *TEM* è la *stripline*, che è costituita da due substrati dello stesso materiale, e in genere uguali, uniti insieme. La struttura è completamente metallizzata alle due estremità, mentre al centro tra i due substrati è posta una ulteriore metallizzazione che ha lo stesso ruolo del conduttore centrale di un cavo coassiale, ovvero quello di guidare il campo elettromagnetico.

Poichè le due metallizzazione esterne sono idealmente infinite, esse sono allo stesso potenziale (il potenziale nullo dell'infinito) e quindi equivalgono a un unico conduttore. In un certo senso, si può quindi dire che una stripline è l'equivalente planare di un cavo coassiale.

L'impedenza caratteristica di una stripline dipende esclusivamente dal rapporto tra la larghezza W della linea di guida e lo spessore del substrato. Poichè quest'ultimo è fissato, è possibile modificare l'impedenza caratteristica di una stripline semplicemente agendo su W .

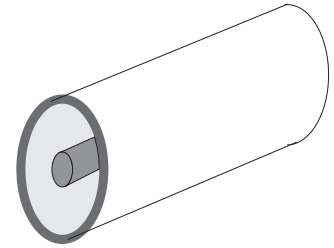


Fig 1: Cavo coassiale

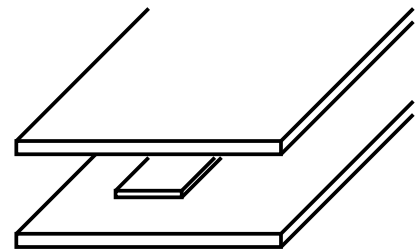


Fig 2: Stripline

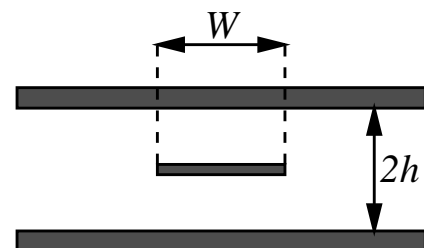


Fig 3:
Geometria di una stripline

Risulta inoltre molto semplice collegare in uno stesso nodo tre o più linee in parallelo, in modo da realizzare divisori oppure stub. Non è invece possibile collegare stub in serie.

Uno svantaggio delle stripline è che non è possibile determinare in maniera semplice la distribuzione del campo all'interno di tale struttura, diversamente, ad esempio, da un cavo coassiale. Infatti, nonostante una stripline assomigli ad un condensatore a facce piane parallele, il campo non risulta concentrato sotto la strip centrale (come in Fig. 4a), ma deborda lateralmente (Fig. 4b).

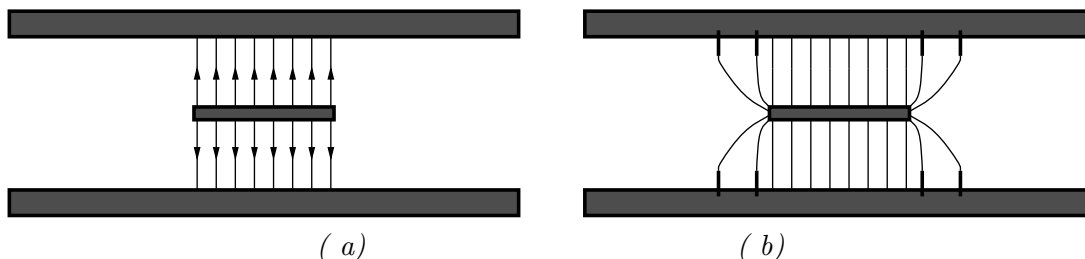


Fig.4: Campo elettrico di un condensatore a facce piane parallele (a sinistra) e campo elettrico vero di una stripline (a destra).

LA capacità di una stripline è quindi maggiore, e di questo se ne può tenere conto introducendo una *larghezza efficace* W_e , definita in modo che la capacità della stripline di larghezza W sia pari a quella di un condensatore a facce piane parallele di larghezza W_e :

$$C = \epsilon_r \frac{W_e}{h}$$

Di conseguenza l'impedenza della stripline vale

$$Z_0 = \frac{1}{2} \frac{\zeta}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{h}{W_e}$$

dove il fattore $1/2$ tiene conto che ci sono due condensatori di larghezza W_e , uno sopra e uno sotto.

Ovviamente il problema è spostato al calcolo di W_e . Da una analisi matematica del problema si trova che, per una strip infinitamente sottile ¹, la larghezza equivalente è molto ben approssimata da

$$W_e = W + \frac{4 \log 2}{\pi} h$$

Questo concetto della larghezza efficace è utile in molti casi, ed è quindi ampiamente usato. Ad esempio si assume che due stripline affiancate interagiscano in maniera consistente se la loro distanza è tale che stripline di larghezza W_e si sovrappongano, e sono invece abbastanza indipendenti se ciò non avviene.

Per quanto riguarda i piani di massa, questi dovrebbero essere infiniti. Tuttavia si assume che se la distanza tra la stripline e il bordo di piani di massa è di almeno 6 volte la dimensione della zona centrale (ovvero del più grande tra W ed h), allora il piano di massa

¹ Lo spessore tipico della metallizzazione è di 30–50 μm . L'ipotesi di metallizzazione infinitamente sottile è una ragionevole approssimazione solo se W risulta molto più grande dello spessore, altrimenti occorre utilizzare espressioni più complesse che tengono conto anche dello spessore.

si comporta come se fosse infinito. Per distanze più piccole, ovviamente, l'approssimazione insita nel considerare infinito un piano di massa che è in realtà finito risulta via via meno buona. Comunque tale approssimazione risulta accettabile se la distanza è di almeno 4 volte la dimensione della zona centrale.

Anche la frequenza limite può essere calcolata a partire da W_e . Si trova che la frequenza limite deve essere significativamente più piccola (60%–70%) di

$$f_L = \frac{c_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}W_e}$$

Ad esempio una stripline in Teflon ($\varepsilon_r = 2.2$) con larghezza pari a 5 mm può essere usata sino a una frequenza limite di circa 14 GHz, avendo utilizzato un margine di sicurezza del 30%. Per alzare la frequenza limite occorre ridurre la larghezza della stripline. Ciò è possibile, mantenendo inalterata l'impedenza, solo se si riduce proporzionalmente lo spessore del substrato. Si vede cioè che lo spessore del substrato va scelto sulla base della massima frequenza a cui si vuole utilizzare la struttura, oltrechè per considerazioni di tipo economico e costruttivo. Stripline a frequenze molto elevate (100 GHz o più) richiederebbero substrati molto sottili. Poichè tali substrati sono di difficile realizzazione (e di conseguenza costosi), ne segue che a tali frequenze si preferisce utilizzare strutture guidanti diverse.

Il principale svantaggio dell'uso di una stripline è la necessità di avere un ulteriore piano di massa al di sopra della struttura. Oltre a una certa maggiore difficoltà realizzativa, e al maggior costo dovuto al substrato di elettrico che va posto sopra le linee di guida, quest'ulteriore piano di massa impedisce completamente l'inserzione di componenti concentrati (sia passivi, sia attivi), e, inoltre, non consente una messa a punto del circuito, mediante modifica meccanica delle linee di guida (eliminazione o aggiunta di metallizzazione).

35 MICROSTRIP

Gli svantaggi della stripline sono legati alla presenza del secondo substrato e relativo piano di massa. Ovviamente questi inconvenienti possono essere superati eliminando completamente sia il dielettrico superiore, sia il piano di massa di chiusura, ottenendo una struttura che prende il nome di microstriscia o *microstrip*. Naturalmente, per una tale struttura, l'ipotesi di dielettrico trasversalmente omogeneo cade in quanto il campo elettromagnetico si sviluppa in parte tra la microstriscia di guida e il piano di massa inferiore (quindi nel dielettrico), e in parte al di sopra della microstriscia stessa, quindi nel vuoto. La propagazione in una microstrip non può quindi essere di tipo *TEM*, almeno se la frequenza è maggiore di zero, il che è ovviamente il caso che ci interessa.

Se però le dimensioni trasverse della struttura (W ed h) sono considerevolmente più piccole della lunghezza d'onda il campo elettromagnetico in una microstrip è molto simile a un campo *TEM*, nel senso che le componenti longitudinali del campo elettrico e del campo magnetico sono molto più piccole di quelle trasverse. Questo tipo di campo prende il nome di campo *quasi-TEM*, e esiste, più o meno con le stesse caratteristiche, non solo in una microstrip, ma in qualunque struttura planare con dielettrico non omogeneo, purchè tale struttura supporti, a frequenza nulla, un campo elettrostatico.

Oltre ad avere le componenti longitudinali dei campi molto più piccole di quelle trasverse, la principale caratteristica di un campo *quasi-TEM* è di avere una costante di propagazione sostanzialmente indipendente dalla frequenza, e intermedia tra le costanti di propagazione dei materiali che riempiono la struttura stessa. Se cominciamo considerare strutture prive di perdite, la costante di propagazione β viene normalmente scritta nella forma

$$\beta = \sqrt{\varepsilon_e} \beta_0$$

dove β_0 è la costante di propagazione nel vuoto alla stessa frequenza, e la *costante dielettrica efficace* ε_e assume un valore intermedio tra le costanti dielettriche relative dei vari mezzi.

Più precisamente si può dire che la costante dielettrica efficace è una media di queste costanti dielettriche, pesata al sulla base del campo elettrico. In altri termini, nel calcolare tale media, le zone in cui il campo elettrico è elevato pesano più delle zone in cui il campo elettrico è piccolo. Nel caso di una microstrip, poichè il campo elettrico (Fig. 3) è principalmente concentrato tra la striscia metallica di guida e il piano di massa, la costante dielettrica efficace risulta più vicina alla costante dielettrica del

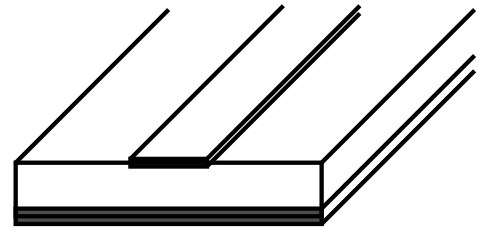


Fig 1: Microstrip

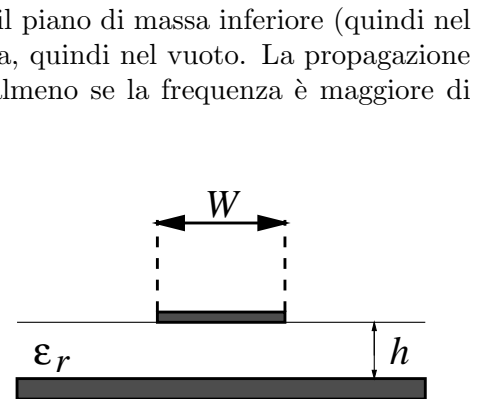


Fig 2:
Geometria di una microstrip

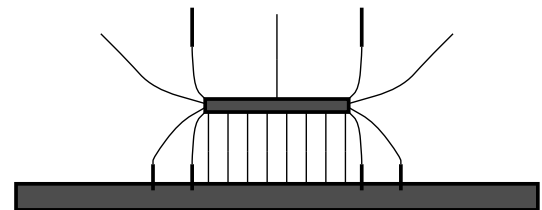


Fig 3:
Campo di una microstrip

substrato piuttosto che a 1 (costante dielettrica relativa dell'aria). Ovviamente, quanto più è larga la striscia di guida rispetto allo spessore del substrato, tanto più il campo risulta confinato all'interno del substrato stesso, e quindi tanto più la costante dielettrica efficace si avvicina a quella relativa del substrato.

Esistono, sia per una microstrip, sia per tutte le altre strutture *quasi-TEM*, un certo numero di espressioni approssimate che legano la costante dielettrica efficace ai parametri geometrici ed elettromagnetici della struttura. Tali espressioni hanno precisioni diverse, e complessità diversa: normalmente le formule più precise sono anche quelle più complesse. Noi qui ci limitiamo a considerare solo il caso di una microstrip per la quale una espressione sufficientemente precisa della costante dielettrica efficace è:

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 12 \frac{h}{W}}} + \Xi \left(\frac{W}{h} \right) \right]$$

dove

$$\Xi \left(\frac{W}{h} \right) = \begin{cases} 0.04 \left(1 - \frac{W}{h} \right)^2 & \frac{W}{h} < 1 \\ 0 & \frac{W}{h} \geq 1 \end{cases}$$

Da tale espressione, e l'andamento della costante dielettrica equivalente al variare di W/h riportato in figura 4 si vede immediatamente quando detto sopra relativamente alla interpretazione della costante dielettrica efficace come media pesata delle costanti dielettriche relative. ε_e risulta maggiore della media aritmetica delle costanti dielettriche relative (il primo termine), ed è tanto maggiore quanto più grande è il rapporto W/h , che (sotto radice) risulta a fattore del secondo addendo.

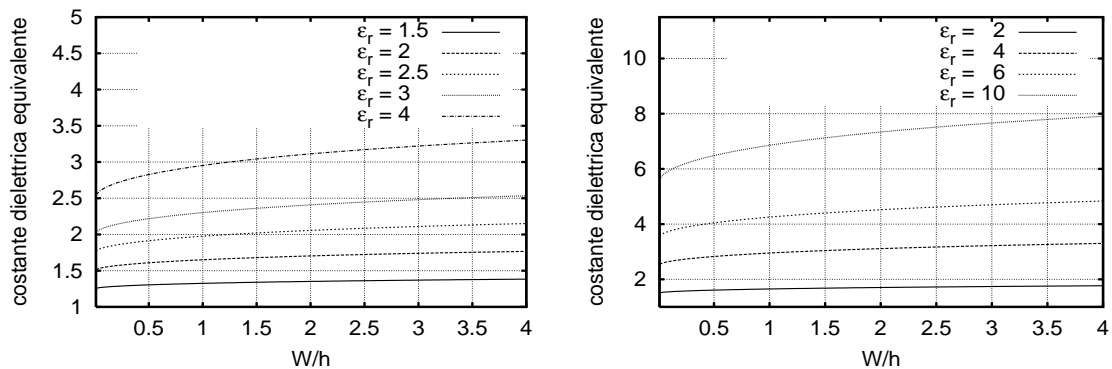


Fig 4: Andamento della costante dielettrica equivalente per una microstrip

Per linee molto larghe ($W \gg h$), la costante dielettrica equivalente tende ad ε_r . Ha quindi interesse la differenza tra ε_e e ε_r , che è mostrata nella figura 5.

La costante dielettrica efficace può anche essere espressa tramite il cosiddetto *fattore di riempimento* q , definito da

$$\varepsilon_e = q \cdot \varepsilon_r + (1 - q) \cdot 1$$

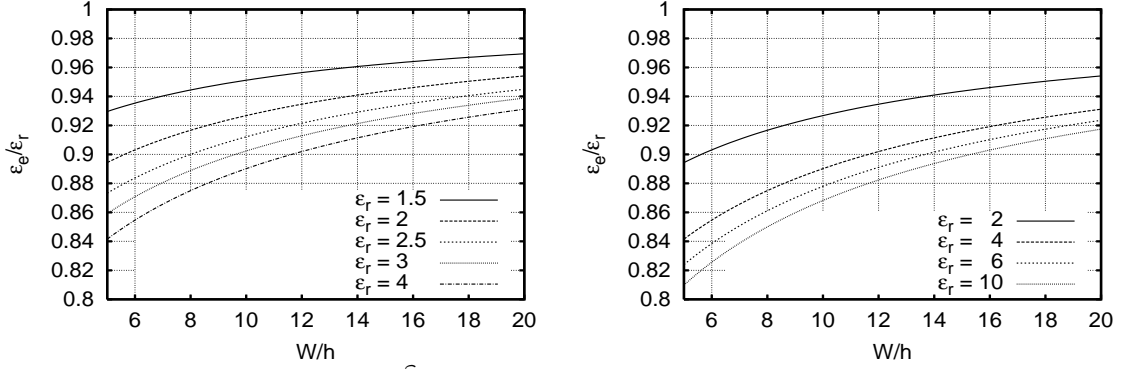


Fig 5: Valore di $\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_r}$ per microstrip molto larghe ($W \gg h$).

e che risulta tanto più grande quanto più il campo è concentrato all'interno del dielettrico.

Per quanto riguarda l'impedenza di una microstriscia, questa è legata, oltre che alla costante dielettrica efficace, anche al rapporto tra la larghezza della linea e lo spessore del substrato. Analogamente alle stripline, anche per una microstriscia è utile definire una larghezza efficace W_e , con la quale è possibile esprimere l'impedenza caratteristica nella forma

$$Z_0 = \frac{\zeta}{\sqrt{\varepsilon_e}} \frac{h}{W_e}$$

Per calcolare la larghezza efficace, possono essere utilizzate le equazioni seguenti, in dipendenza dal valore di W/h :

$$\begin{cases} W_e = W + \left[1.393 + 0.667 \log \left(\frac{W}{h} + 1.444 \right) \right] h & W > h \\ W_e = \frac{2\pi}{\log \left[\frac{8h}{W} + \frac{W}{4h} \right]} h & W < h \end{cases}$$

Come già detto per ε_e , queste sono espressioni approssimate, ricavate a partire dai risultati di analisi elettromagnetiche accurate, adattando a tali risultati delle espressioni semplici. In particolare, le espressioni precedenti, e le altre che vedremo, forniscono risultati con un errore massimo del 2%.

La larghezza efficace è evidentemente maggiore della larghezza fisica, ma la differenza dipende anche da W . Per microstrip abbastanza sottili ($W < 2h$), tale differenza è prossima a $2h$, e poi aumenta con W . In Fig. 6 è riportata la differenza normalizzata tra la larghezza efficace e quella vera, limitatamente al caso di microstrip larghe.

Anche per le microstrip la larghezza efficace può essere utilizzata per valutare se due microstrip parallele interagiscono oppure no.

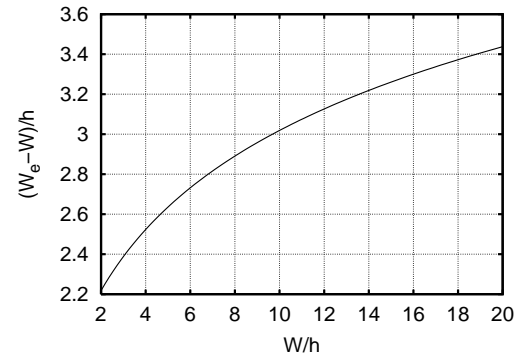


Fig 6: Allargamento di una microstrip

Una altra differenza sostanziale tra microstrip e stripline è nella sintesi, ovvero nella determinazione della larghezza W necessaria per ottenere una data impedenza. Nel caso di una stripline, il procedimento è molto semplice, mentre la dipendenza di ε_e da W in una microstrip rende molto più complicato invertire le equazioni di analisi.

Sono quindi state sviluppate delle equazioni di sintesi, che forniscono direttamente W in funzione della impedenza Z_0 che si vuole realizzare. Quelle che utilizzeremo dipendono dal valore della impedenza da sintetizzare e sono,

$$Z_0\sqrt{\varepsilon_e} > 89.91$$

$$\frac{W}{h} = \frac{8 \exp A}{\exp(2A) - 2}$$

$$Z_0\sqrt{\varepsilon_e} < 89.91$$

$$\frac{W}{h} = \frac{2}{\pi} \left\{ B - 1 - \log(2B - 1) + \frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r} \left[\log(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\varepsilon_r} \right] \right\}$$

Le grandezze A e B valgono, rispettivamente

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\varepsilon_r + 1}{2}} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \left[0.23 + \frac{0.11}{\varepsilon_r} \right]$$

$$B = \frac{60\pi^2}{Z_0\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Si noti che la scelta tra le due equazioni di sintesi dipende da un parametro incognito, ovvero ε_e , che dipende da W . Poichè $\varepsilon_e < \varepsilon_r$, se $Z_0\sqrt{\varepsilon_r} < 89.91$, può comunque essere usata la seconda. Negli altri casi andrebbero utilizzate entrambe, per vedere, *a posteriori*, quale delle due è applicabile. Tuttavia una stima del valore di ε_e è possibile (vedi Fig. 4,5), e quindi, in genere, è possibile valutare quale delle due equazioni è probabilmente quella da utilizzare.

36 PERDITE NELLE MICROSTRIP

La presenza di perdite nel dielettrico o nel metallo conduce evidentemente ad una dissipazione di potenza. Esaminiamo in dettaglio i due meccanismi.

Le perdite nel dielettrico possono essere modellate tramite una σ_d oppure una parte immaginaria di ε_r . Non è però possibile utilizzare le espressioni generali delle linee con perdite nel dielettrico (che invece valgono nei cavi coassiali e nelle stripline) in quanto le perdite ci sono solo in parte della sezione trasversa.

Se ne può tener conto (analogamente a quanto fatto per la costante dielettrica) introducendo nel calcolo della costante di propagazione una conducibilità efficace σ_e , media pesata delle conducibilità delle due zone, che può essere semplicemente calcolata tramite il fattore di riempimento

$$\sigma_e = q\sigma_d + (1 - q) \cdot 0$$

in quanto la conducibilità dell'aria è pari a 0.

Partendo dalla parte immaginaria di ε_r , occorre prima ricavarsi la σ_d e poi calcolare σ_e . Tuttavia alcune espressioni di ε_e , come quelle da noi utilizzate, consentono di calcolare la costante dielettrica efficace complessa utilizzando quest'espressione in cui, al posto di ε_r , va inserita la costante dielettrica equivalente (complessa) del substrato, ovvero quella che tiene conto delle perdite.

Più complesso è il discorso relativo alle perdite sul metallo. Dal discorso generale sulle perdite nei conduttori, sappiamo che se il conduttore è un buon conduttore, ovvero se la sua conducibilità σ_c soddisfa a

$$\frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_c} \gg 1$$

dove ε_c è la costante dielettrica relativa del conduttore stesso, allora possiamo includere le perdite nel modello delle linee di trasmissione aggiungendo una resistenza R per unità di lunghezza nel modello circuitale di linea, oppure una attenuazione $-j\alpha_c$ alla costante di propagazione della linea con conducibilità infinita.

Nella valutazione di tali parametri occorre considerare che il campo nel conduttore risulta confinato in una zona molto sottile vicino alla superficie del conduttore. La profondità di tale zona è dell'ordine di grandezza di alcune volte la *profondità di penetrazione* (o *skin depth*)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_c}}$$

che per i conduttori e le frequenze di interesse è tipicamente dell'ordine dei micron.

Pertanto interverrà, nella valutazione di α_c , sia lo spessore della metallizzazione, sia la eventuale tolleranza di lavorazione (quest'ultima specie a frequenza elevata).

Trascurando la tolleranza di lavorazione, l'attenuazione α_c per una microstrip può essere calcolata da

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_0 W_e} K_i$$

dove R_s prende il nome di resistenza superficiale del metallo:

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta}$$

ed è tipicamente dell'ordine dei $m \Omega$, Z_0 è l'impedenza caratteristica della linea a microstrip e K_i tiene conto della effettiva distribuzione (non uniforme) della corrente che scorre nel conduttore. Infatti la dissipazione dipende dal quadrato della corrente e, a parità di corrente media, la dissipazione è più grande se la corrente è distribuita in maniera molto variabile. Una espressione ragionevolmente approssimata per K_i , valida per spessori della metallizzazione di 30–50 μm , e per spessori del dielettrico almeno dieci volte più grandi è

$$K_i = 128 \frac{\exp\left(-4\pi \frac{h}{W_e}\right)}{4\pi \frac{h}{W_e}} \left(\frac{h}{W}\right)^2 \left(1 + 2.18 \frac{h}{W}\right)$$

Nell'espressione di α_c conviene notare che l'attenuazione è inversamente proporzionale all'impedenza caratteristica della linea. Infatti quanto più alta è tale impedenza, tanto più piccola è la corrente che scorre sui conduttori per una data potenza trasmessa. Ovviamente, più piccola è la corrente, più piccola è la dissipazione. Questa dipendenza dall'impedenza caratteristica è presente sostanzialmente per tutte le strutture *TEM* e *quasi-TEM*, e pertanto i cavi coassiali destinati al trasporto di potenze elevate vengono normalmente realizzati in aria (o quasi completamente in aria), e con i conduttori molto distanziati, in modo da ottenere impedenze molto elevate.

Per quanto riguarda le costanti primarie in presenza di perdite sui conduttori, i valori di C ed L si possono calcolare in assenza di perdite (in quanto le perdite sui conduttori, valutate secondo quanto esposto in questo paragrafo, sono piccole). Anche l'eventuale G , che dipende solo dalle perdite nel dielettrico, può essere calcolata assumendo i conduttori privi di perdite. Resta il calcolo di R che si ottiene facilmente da

$$k^2 = \omega^2 \left(L - j \frac{R}{\omega} \right) C = \omega^2 LC - j(\omega RC)$$

ricordando che in tali condizioni $k = \beta - j\alpha_c = \omega\sqrt{LC} - j\alpha_c$. Sviluppando segue

$$k^2 = (\beta^2 - \alpha_c^2) - j2\beta\alpha_c \simeq \omega^2 LC - j2\omega\sqrt{LC}\alpha_c$$

avendo trascurato α_c^2 rispetto a β^2 , e per confronto

$$R = 2 Z_0 \alpha_c$$

37 DISPERSIONE NELLE MICROSTRIP

Anche per le microstrip esiste una frequenza limite di utilizzo, valutabile in maniera analoga a quella delle stripline. Tuttavia, al contrario delle strutture *TEM* pure, la dipendenza dalla frequenza è molto più complessa, in quanto anche le caratteristiche propagative di una microstriscia dipendono da essa. Più precisamente, se la frequenza è molto più piccola della frequenza limite

$$f_p = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_e}} \frac{1}{2W_e}$$

allora costante dielettrica efficace, larghezza efficace, e quindi impedenza, sono indipendenti dalla frequenza. Per frequenze più alte di questa, ovvero che siano una frazione significativa di f_p , una microstriscia può essere ancora trattata come una linea di trasmissione (e quindi utilizzando le equazioni dei telegrafisti) ma i parametri di tale linea diventano dipendenti dalla frequenza, ovvero la propagazione nella linea di trasmissione è dispersiva. Pertanto per una microstriscia, e più in generale per qualunque struttura *quasi-TEM*, al variare della frequenza di utilizzo si ha dapprima una zona in cui la propagazione è quella di una linea di trasmissione non dispersiva, poi la propagazione diventa dispersiva, ma può essere ancora descritta mediante una linea di trasmissione, dopo di che il campo nella microstriscia comincia ad avere componenti longitudinali non più trascurabili e infine si supera la frequenza limite di utilizzo.

Per valutare i parametri al variare della frequenza si possono utilizzare delle espressioni approssimate, che forniscono direttamente la costante dielettrica equivalente $\varepsilon_e(f)$, e l'impedenza caratteristica $Z(f)$ al variare della frequenza, in funzione dei parametri geometrici, e di quelli propagativi ε_e, W_e, Z_0 , valutati però a bassa frequenza. Se occorre la larghezza efficace, poi, questa può essere calcolata da $Z(f)$ e $\varepsilon_e(f)$.

Per la costante dielettrica si ha

$$\varepsilon_e(f) = \varepsilon_r + \frac{\varepsilon_e(0) - \varepsilon_r}{1 + G \frac{f^2}{f_p^2}}$$

dove f_p è la frequenza limite già considerata e

$$G = \sqrt{\frac{Z_0 - 5}{60}} - 0.004 * Z_0$$

Per l'impedenza si ha invece

$$Z(f) = Z_s + \frac{Z_0 - Z_s}{1 + G_M \frac{f^2}{f_g^2}}$$

dove

$$Z_s = \frac{\zeta}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{h}{W + \frac{4 \log(2)}{\pi} h} \quad f_g = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{1}{2W}$$

mentre

$$G_M = \begin{cases} G & \frac{W}{h\sqrt{\varepsilon_r}} > \frac{2}{3} \\ \sqrt{\frac{Z_0 + 35}{20}} + 0.05 * Z_0 & \frac{W}{h\sqrt{\varepsilon_r}} \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Dalle espressioni di costante dielettrica e impedenza al variare della frequenza, si vede che un ruolo importante è giocato dalla frequenza limite f_p e da f_g , che però risulta più alta di f_p . Infatti la propagazione può essere considerata non dispersiva se la frequenza è molto più bassa di f_p , o più precisamente di f_p/G (che coincide con f_p salvo che per linee con impedenza caratteristica molto bassa). Se $f < 0.15 f_p/G$, la variazione di costante dielettrica è del 2% della differenza $\varepsilon_r - \varepsilon_e(0)$. Sulla costante dielettrica tale variazione è ancora più bassa, e quindi l'errore che si commette in tal caso è quasi sempre trascurabile (salvo che nelle risonanze). Per l'impedenza possono essere trascurate (anche nei risonatori) variazioni anche del 2-3%, e quindi si può utilizzare l'impedenza *statica* Z_0 se $f < 0.25 f_g/G_M$.

Notiamo infine che le frequenze limite aumentano se si riduce W (ovvero lo spessore del substrato), o si riduce ε_r .

38 GUIDE D'ONDA

Completato il discorso sulle strutture con dielettrico trasversalmente disomogeneo, consideriamo il caso di strutture con un numero di conduttori diverso da due. Se i conduttori sono più di due, sono possibili più configurazioni di campo di tipo *TEM* (o *quasi-TEM*, se il dielettrico è non omogeneo), che però interagiscono tra loro. La propagazione deve essere pertanto descritta da un insieme di linee di trasmissione *accoppiate* tra loro, struttura che esula dagli interessi di queste note.

Per quanto riguarda il caso di strutture con un unico conduttore (o addirittura senza conduttori metallici, come ad esempio le *fibre ottiche*), queste possono essere divise in varie categorie.

Noi qui ci occupiamo con un certo dettaglio solo delle *guide d'onda* omogenee, cioè di strutture costituite da un unico conduttore, chiuso a forma di tubo, contenente un dielettrico omogeneo. Il conduttore confina al suo interno il campo elettromagnetico. In particolare le più diffuse sono le guide rettangolari (Fig. 1), benchè siano utilizzate abbastanza di frequente anche guide circolari, o, per applicazioni particolari, di altra forma. Per queste strutture le componenti longitudinali del campo sono confrontabili con le componenti trasverse, e le caratteristiche della propagazione sono molto diverse da quelle viste finora.

La costante di propagazione vale infatti

$$k_z = \sqrt{\varepsilon_r \beta_0^2 - k_t^2}$$

dove ε_r è la costante di propagazione del dielettrico che riempie la guida e k_t un parametro geometrico. Ne segue che (per dielettrico privo di perdite) la propagazione è possibile (teoricamente) solo al di sopra di una certa frequenza, detta frequenza di taglio, data da

$$f_T = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{k_t}{2\pi}$$

Al di sotto di questa frequenza la costante di propagazione risulta immaginaria pura. Poichè esiste anche una frequenza limite superiore, ne discende che la propagazione in una guida d'onda è possibile solo in un intervallo limitato di frequenze, e in tale intervallo è fortemente dispersiva. Per motivi tecnici, comunque, una guida d'onda si utilizza solo a partire da circa $1.2f_T$ fino alla frequenza di taglio superiore, normalmente tra $1.5f_T$ e $2f_T$. Per la sola descrizione della propagazione dei campi o della potenza, è comunque possibile utilizzare ancora le equazioni dei telegrafisti. Viceversa, tali equazioni forniscono risultati errati se usate, per esempio, per calcolare l'energia immagazzinata o per studiare strutture risonanti basate su guide d'onda.

Oltre alla costante di propagazione, già vista, occorre quindi l'espressione dell'impedenza

$$Z_0 = \frac{\omega \mu_0}{k_z}$$

Si noti che tali espressioni sono valide entrambe anche per un dielettrico con perdite. Viceversa, non ci occupiamo qui del calcolo esplicito delle perdite nella guida d'onda dovute ai conduttori, in funzione dei parametri geometrici della struttura.

Nel caso di perdite nel dielettrico, ovviamente, occorre usare la costante dielettrica equivalente (complessa) al posto di ε_r . In tal caso la costante di propagazione risulterà avere

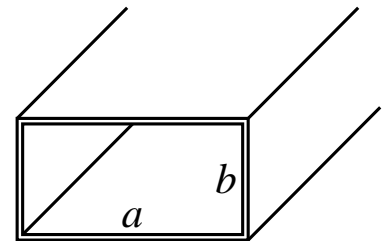


Fig 1:
Guida rettangolare

sempre sia parte reale, sia parte immaginaria. Tuttavia, se le perdite sono piccole o medie, al di sotto la frequenza di taglio la parte reale risulta trascurabile rispetto a quella immaginaria, mentre al di sopra della frequenza di taglio avviene il viceversa.

La costante k_t dipende dalle dimensioni geometriche di una guida d'onda. Per una guida rettangolare di lati a , $b (< a)$ risulta

$$k_t = \frac{\pi}{a}$$

e per una guida circolare di raggio r

$$k_t = \frac{1.841}{r} = \frac{3.682}{(2r)}$$

Per strutture diverse il valore di k_t è ovviamente diverso, ma il suo ordine di grandezza è comunque dato dal rapporto tra π e una dimensione caratteristica della struttura.

Ne segue che per una guida rettangolare di lato maggiore pari a 5 cm , risulta $f_T = 3 \text{ GHz}$, ovvero la guida può essere usata a partire da circa 3.5 GHz . Ridurre tale frequenza richiede di aumentare in proporzione le dimensioni. È facile allora vedere che le guide d'onda non sono utilizzabili (salvo rarissime eccezioni) al di sotto di 1 GHz . Inoltre è difficile utilizzarle oltre i $60\text{--}80 \text{ GHz}$, in quanto le dimensioni diverrebbero troppo piccole.

Concludiamo notando che le semplici espressioni qui citate per costante di propagazione e impedenza sono espressioni esatte, ma valgono solo per guide d'onda chiuse e con dielettrico omogeneo. Se il dielettrico non è omogeneo, o addirittura se le strutture sono aperte (come ad esempio le *fibres ottiche*) la costante di propagazione risulta avere un comportamento molto variabile con la frequenza, e con le caratteristiche geometriche. Di tali strutture, comunque, non c'occuperemo in questo corso.

39 DISCONTINUITÀ

Veniamo infine a descrivere come si può tener conto della presenza di discontinuità nella configurazione geometrica di una linea di trasmissione. Anche qui consideriamo in dettaglio, e quantitativamente, il solo caso di una microstriscia ma le considerazioni generali valgono anche per le altre strutture guidanti che abbiamo considerato.

Per discontinuità nella configurazione geometrica intendiamo modifiche della forma dei conduttori, come ad esempio cambi di larghezza, terminazioni brusche, giunzioni tra più linee, curve e così via. Discontinuità che hanno, invece, esattamente la forma trasversa della struttura, come ad esempio discontinuità di materiale (e quindi di costante dielettrica) o conduttori elettrici che *tappano* un cavo coassiale o guida d'onda, non rientrano in tale classificazione e vengono trattati semplicemente con un salto brusco di impedenza della struttura guidante, o con un collegamento in cortocircuito dei due conduttori.

La discontinuità più semplice è la terminazione brusca di una microstriscia (Fig. 1). In prima approssimazione questa terminazione, alla quale la corrente che scorre nella microstriscia si annulla bruscamente, può essere considerata come una terminazione aperta. Tuttavia, se è vero che la corrente di conduzione si interrompe bruscamente, è altrettanto vero che oltre la

terminazione è presente una *corrente di spostamento* legata alla differenza di potenziale che ci sarà tra la terminazione della microstriscia e il piano di massa (vedi Fig. 1b).

Tale corrente di spostamento è responsabile di un accumulo di energia elettrica attorno alla terminazione. Un miglior circuito equivalente della terminazione brusca sarà allora costituito da un condensatore. In altri termini, un tratto di linea a microstriscia di lunghezza L_f dovrà essere rappresentato con un tratto di linee di trasmissione di lunghezza L_f , terminato su un condensatore C_a , ovvero su di una impedenza (elevata) pari a $(j\omega C_a)^{(-1)}$ (Fig. 2a). Poichè la stessa impedenza capacitiva può essere ottenuta con un piccolo tratto di linea chiuso su di un circuito aperto, una rappresentazione della linea a microstriscia aperta del tutto equivalente a quella di linea più capacità si ottiene considerando un unico tratto di linea (quindi senza la capacità) ma con una lunghezza maggiore di quella fisica L_f , ovvero con un allungamento $\Delta\ell$ (Fig. 2b).

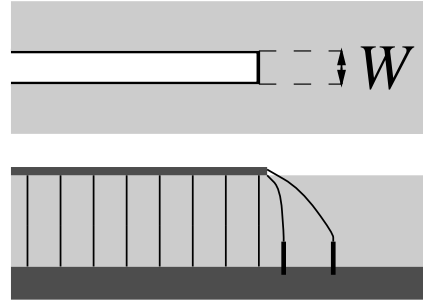


Fig 1: Terminazione aperta vista dall'alto e di lato

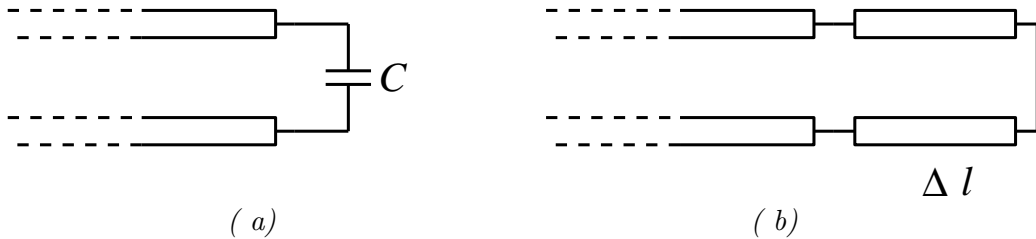


Fig.2: Possibili circuiti equivalenti di una terminazione aperta

L'allungamento $\Delta\ell$ dipende dalle caratteristiche geometriche ed elettromagnetiche della microstriscia, e vale

$$\frac{\Delta\ell}{h} = 0.412 \frac{\varepsilon_e + 0.3}{\varepsilon_e - 0.258} \frac{\frac{W}{h} + 0.264}{\frac{W}{h} + 0.8}$$

col solito significato dei simboli.

L'inclusione dell'allungamento della terminazione aperta è sufficiente a fornire risultati accurati in buona parte delle situazioni. Se la linea è però molto larga, o la terminazione aperta si trova in un risonatore, è necessario includere, come in Fig. 3, alla fine del tratto di linea aggiuntivo, di lunghezza $\Delta\ell$ una resistenza

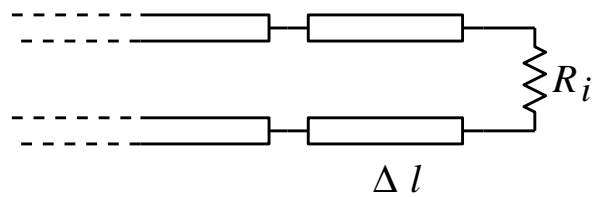


Fig 3

$$R_i = 90 \left(\frac{\lambda_0}{W_e} \right)^2 [\Omega]$$

che tiene conto della inevitabile perdita di potenza per irradiazione che si ha alla terminazione stessa.

Collegata alla terminazione aperta è anche il cambio brusco di larghezza di una microstriscia. Anche qui si ha un accumulo di energia elettrica, che sarà però presente solo in corrispondenza delle parti della linea più larga che si estende oltre la linea più sottile. La capacità corrispondente (da collegarsi in parallelo alla giunzione delle due linee, ovvero in corrispondenza della sezione A-A) potrà pertanto essere ottenuta partendo l' dalla capacità di una terminazione aperta di larghezza pari alla linea più larga e riducendola del rapporto tra la linea più sottile e quella più larga.

Analogamente si può procedere utilizzando gli allungamenti, il che fornisce un circuito equivalente notevolmente più maneggevole. Si trova che la linea più larga si allunga, e quella più sottile si accorcia, come mostrato nella figura 2.

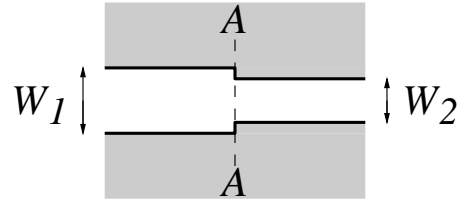


Fig 4: Cambio di larghezza

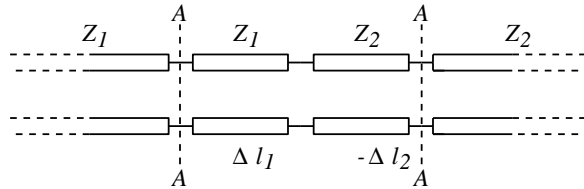


Fig.5: Circuito equivalente di un salto di impedenza

Allungamento e accorciamento sono diversi tra loro, e proporzionali *entrambi* all'allungamento $\Delta\ell_0$ di una terminazione aperta in una linea di larghezza pari alla linea più *larga*:

$$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_0 \frac{W_{e1}}{W_{e1} + W_{e2}} \quad \Delta\ell_2 = \Delta\ell_0 \frac{W_{e2}}{W_{e1} + W_{e2}}$$

In particolare, si vede da tali espressioni che se una linea è molto più larga dell'altra, allora la linea sottile mantiene inalterata la sua lunghezza, e quella larga subisce esattamente lo stesso allungamento della corrispondente terminazione aperta.

Queste discontinuità risultano essere discontinuità longitudinali, ovvero estese solo nel senso di propagazione del campo nella linea. Possono quindi essere trattate cambiando semplicemente la lunghezza delle linee. Vi sono poi anche discontinuità trasversali, come ad esempio curve o giunzioni tra più linee, che richiedono una maggiore cura. Per tali discontinuità, infatti, occorre tener conto che le linee fisiche hanno una estensione trasversa finita, mentre il modello linea di trasmissione (essendo monodimensionale) prevederebbe una estensione trasversa infinitesima.

Si può tener conto di ciò mediante un passaggio intermedio tra la struttura fisica in microstrip e la linea di trasmissione, trasformando prima la struttura fisica in un insieme di linee infinitesime (mantenendo lunghezze e connessioni) corrispondenti alla mezzera della struttura fisica. Successivamente questo insieme di linee infinitesime viene trasformato nel circuito il linea di trasmissione. In tal modo si ottiene il circuito equivalente in assenza di correzioni. Infine a

tale circuito vanno applicate le correzioni, che nel nostro caso saranno essenzialmente correzioni di lunghezza.

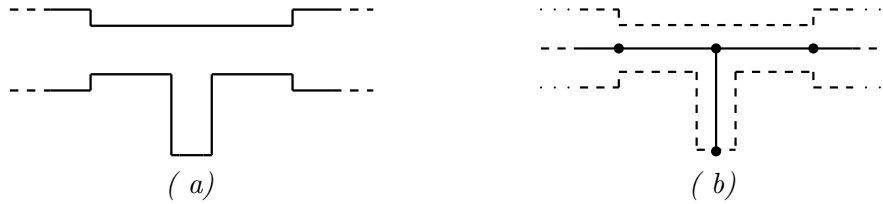


Fig. 6: Microstrip con giunzione a T (sinistra) e linee infinitesime corrispondenti

In fig. 6a è riportato un esempio per un circuito con discontinuità longitudinali e stub. In Fig. 6b è riportato il circuito tracciato con linee infinitesime, ed il circuito effettivo è disegnato tratteggiato. Si notino i punti che corrispondono a tutte le discontinuità (o meglio, ai punti centrali delle stesse). Ogni tratto di linea infinitamente sottile diventa un tratto di linea di trasmissione (con costanti opportune), e la sua lunghezza, senza correzioni, è quella tra i due punti. Il corrispondente circuito equivalente è mostrato in Fig. 7. Le lunghezze D_1 e D_2 sono (in assenza di correzioni) le distanze tra il centro della giunzione a T e le due discontinuità di impedenza, mentre D_s , sempre in assenza di correzioni, è la lunghezza dello stub misurata tra il centro della giunzione a T e l'estremità della microstrip.

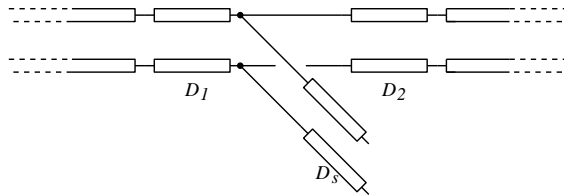


Fig. 7: Circuito equivalente della rete di Fig. 6

A questo punto vanno inserite le correzioni. Noi consideriamo qui solo la curva ad angolo retto e la giunzione a T simmetrica, in cui il ramo passante ha la stessa larghezza da entrambi i lati. Per quest'ultima, l'effetto principale è un accorciamento del ramo derivato, pari a

$$d_T = \frac{\zeta}{Z_1 \sqrt{\varepsilon_{e,1}}} \left\{ 0.5 - 0.16 \frac{Z_1}{Z_2} \left[1 - 2 \log \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) \right] \right\} h$$

essendo Z_1 l'impedenza della linea principale e $\varepsilon_{e,1}$ la sua costante dielettrica efficace, e Z_2 l'impedenza della linea derivata.

Tale comportamento può essere spiegato considerando che un segnale lanciato su questo ramo, e prelevato sui due lati del ramo passante, non procede in realtà sul percorso al centro delle linee, ma tende a seguire un percorso curvo (per accoppiamento capacitivo) il quale risulta più corto del precedente.

Per quanto riguarda la curva ad angolo retto, invece, questa può essere pensata come una giunzione a T simmetrica in cui uno dei lati del ramo passante è in realtà uno stub aperto di lunghezza fisica pari a metà della larghezza del ramo derivato, come si vede dal disegno delle linee infinitamente sottili di Fig. 8.

Pertanto la lunghezza totale, calcolata sui centri delle microstrisce, va ridotta dell'accorciamento

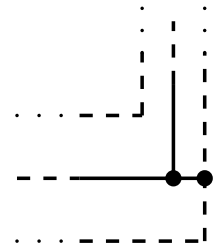


Fig 8

della giunzione a T, e poi occorre aggiungere una impedenza capacitiva, pari all'impedenza di ingresso dello stub, di lunghezza pari alla sua lunghezza fisica più l'allungamento di un circuito aperto.

Gli stessi ragionamenti possono essere utilizzati per passare dal circuito in linea di trasmissione alla struttura in microstrip (sintesi). Per prima cosa si determinano i valori delle lunghezze delle microstrip senza correzioni. Ovviamente un allungamento (ad es., terminazione aperta) implica che la lunghezza della microstrip da realizzare sia più corta, mentre un accorciamento (ad es., braccio derivato della T) implica che la linea è più lunga. Dopodiché si traccia il circuito in microstrip con linee infinitamente sottili e infine si tiene conto dello spessore delle microstrip (simmetricamente dai due lati).

Per meglio descrivere le operazioni, consideriamo un esempio di circuito, mostrato in Fig. 9, in cui è richiesto il valore di x in modo che lo stub abbia (a 6 GHz e trascurando la dispersione) una impedenza pari a $-j50\ \Omega$. Per un substrato con $h = 1.2\text{ mm}$, $\epsilon_r = 2$, l'impedenza caratteristica della linea che costituisce lo stub è pari a $60\ \Omega$, e quindi la lunghezza elettrica dello stub deve essere 0.876 . Poiché $\epsilon_e = 1.708$, la lunghezza non corretta d si ottiene da

$$\sqrt{\epsilon_e} \beta_0 d = 0.876$$

e vale 5.33 mm . L'allungamento della terminazione aperta vale 0.573 mm e l'accorciamento del braccio derivato della T vale 1.807 mm . Lo stub fisico deve quindi essere lungo $5.33 - 0.57 + 1.81 = 6.57\text{ mm}$. Tale lunghezza, però, parte dal centro del braccio principale della T. La lunghezza del tratto a "sbalzo", ovvero x , risulta quindi pari a $6.57 - 1 = 5.57\text{ mm}$, essendo 1 mm la semi-larghezza del braccio principale.

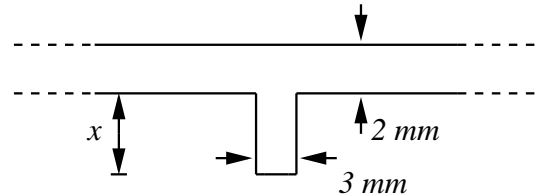


Fig 9

40 PERDITE SUI CONDUTTORI

Valutiamo l'effetto delle perdite sui conduttori, se questi non sono perfetti, ovvero se la conducibilità σ_c è finita. Assumiamo comunque che il materiale sia un *buon conduttore*, ovvero che

$$\frac{\sigma_c}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_c} \gg 1$$

dove ε_c è la costante dielettrica relativa del conduttore stesso. In tal caso possiamo includere le perdite nel modello delle linee di trasmissione aggiungendo una resistenza R per unità di lunghezza nel modello circuitale di linea, oppure una attenuazione $-j\alpha_c$ alla costante di propagazione della linea con conducibilità infinita. Si noti comunque che la disuguaglianza precedente può essere verificata, alle frequenze di nostro interesse, solo da conduttori metallici, con conducibilità superiori a qualche kS/m . Conseguenza della ipotesi di buon conduttore è che la attenuazione è piccola: $\alpha_c \ll \beta$.

Per un cavo coassiale la resistenza per unità di lunghezza è data da

$$R = \frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{r_e} + \frac{1}{r_i} \right) \quad (187)$$

dove R_s , detta resistenza superficiale del conduttore vale

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta}$$

e δ è la profondità di penetrazione (o *skin depth*), data da

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_c}}$$

e che misura lo spessore della zona superficiale del conduttore effettivamente interessata dal campo, e dalla corrente. Per i conduttori e le frequenze di interesse δ è tipicamente dell'ordine dei micron, e di conseguenza R_s è dell'ordine dei $m\Omega$.

Per una guida d'onda, stante la particolare forma della costante di propagazione, risulta più semplice calcolare direttamente α_c .

Risulta

$$\alpha_c = \frac{R_s}{\zeta b} \sqrt{\varepsilon_r} \frac{1 + 2\frac{b}{a} \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (188)$$

essendo f_c la frequenza di taglio, data da

$$f_c = \frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon_r}}$$

e ε_r la costante dielettrica del materiale che riempie la guida.

L'andamento in frequenza di α_c è quello riportato in Fig. 9 *, per vari valori del rapporto a/b .

* Si tenga conto che anche R_s dipende da f , ed è anzi proporzionale a \sqrt{f}

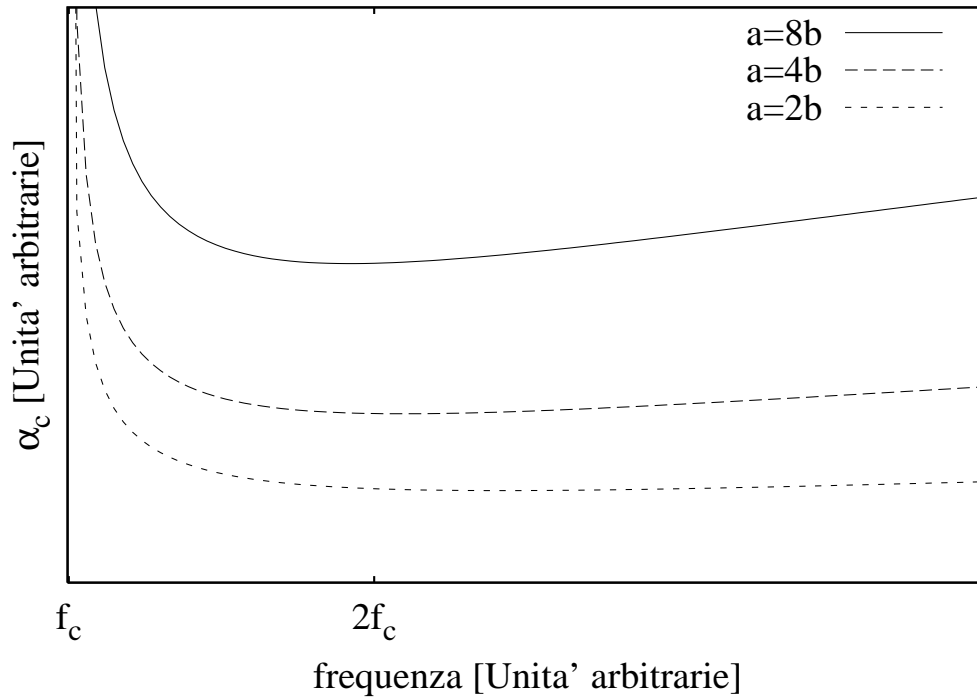


Fig.9: Andamento della attenuazione in una guida al variare della frequenza.

Dalla Fig. 9 si vede che l'attenuazione aumenta al diminuire di b a causa del fattore $1/b$ a denominatore della (188). Per il resto la dipendenza da b è soprattutto a basse frequenze. Tutte le curve riportate hanno un minimo, per una frequenza dipendente da b , ma per b non troppo piccolo, l'attenuazione è costante in tutta la banda utile ($1.15f_c, 0.85(2f_c)$). La Fig. 9 mostra però anche chiaramente perchè le guide non si usano per f prossima a f_c : in tale regione le perdite dovute al conduttore diventano molto grandi. Per $b = a/8$ la regione utilizzabile inizia intorno a $f = 1.4f_c$ e non intorno al valore di $f = 1.15f_c$ come negli altri casi.

APPENDICE 1: DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

In molte applicazioni è utile la seguente relazione, detta disuguaglianza di *Schwartz*:

$$\left| \int f(x)g(x) dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \cdot \int |g(x)|^2 dx$$

La uguaglianza si ha *se e solo se* $f(x)$ e $g(x)$ sono tra loro **proporzionali**.

Consideriamo in particolare una funzione $f(t)$ a banda limitata a Ω , ovvero tale che la sua trasformata $F(\omega)$ soddisfi a

$$F(\omega) = 0 \quad \omega \notin (-\Omega, \Omega)$$

Applicando la disuguaglianza di Schwartz a

$$f(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) \frac{e^{j\omega t}}{2\pi} d\omega$$

segue

$$|f(t)|^2 \leq \int |F(\omega)|^2 d\omega \cdot \frac{2\Omega}{(2\pi)^2}$$

L'integrale è la norma al quadrato di $F(\omega)$:

$$\|F(\omega)\|^2 = \int |F(\omega)|^2 d\omega$$

che, per la identità di Parseval, risulta proporzionale alla norma di $f(t)$:

$$\|f(t)\|^2 = \int |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \|F(\omega)\|^2$$

Segue quindi

$$|f(t)|^2 \leq \frac{\Omega}{\pi} \|f(t)\|^2$$

Più interessanti sono le limitazioni sulle variazioni di $f(t)$.

Da

$$f'(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} j\omega F(\omega) \frac{e^{j\omega t}}{2\pi} d\omega$$

segue

$$|f'(t)|^2 \leq \|F(\omega)\|^2 \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} d\omega = \frac{\Omega^3}{3\pi} \|f(t)\|^2$$

mentre da

$$f(t+T) - f(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{j\omega t} \frac{e^{j\omega T} - 1}{2\pi} d\omega$$

segue, per $\forall T$:

$$|f(t+T) - f(t)|^2 \leq \|F(\omega)\|^2 \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{|e^{j\omega T} - 1|^2}{(2\pi)^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \|f(t)\|^2 \int_{-\Omega}^{\Omega} 2 \sin^2 \frac{\omega T}{2} d\omega$$

avendo utilizzato in entrambi i casi l'identità di Parseval. L'integrale dell'ultima espressione può essere calcolato e vale

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} 2 \sin^2 \frac{\omega T}{2} d\omega = \frac{4}{T} (\Omega T - \sin \Omega T)$$

Ora

$$\sin \Omega T = \Omega T - \frac{1}{6} (\Omega T)^3 + R$$

dove il resto R è positivo.

Pertanto

$$\frac{4}{T} (\Omega T - \sin \Omega T) = \frac{4}{T} \left(\frac{1}{6} (\Omega T)^3 - R \right) < \frac{2}{3T} (\Omega T)^3$$

e sostituendo

$$|f(t+T) - f(t)|^2 < \frac{\Omega^3 T^2}{3\pi} \|f(t)\|^2$$

Da queste due relazioni si vede che la velocità di variazione di una funzione a banda limitata è tanto più grande quanto più grande è la banda.

APPENDICE 2: SEGNALI A BANDA STRETTA

I segnali di interesse nelle telecomunicazioni (e non solo) non sono mai sinusoidali puri, ma hanno una estensione finita in banda. In particolare molti segnali sono a *banda stretta*, ovvero sono segnali per i quali lo spettro è diverso da zero solo in un intervallo $2\Delta\omega$ (detta banda del segnale), centrato intorno a una frequenza ω_0 (detta frequenza centrale o *portante*), con la condizione

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$$

Per tali segnali esiste una rappresentazione standard, che vedremo essere molto simile alla rappresentazione dei segnali sinusoidali (di cui i segnali a banda stretta sono una generalizzazione) mediante numeri complessi.

Sia $v(t)$ un segnale *reale* a banda stretta. La sua trasformata $V(\omega)$ è allora *hermitiana*:

$$V(-\omega) = V^*(\omega)$$

e quindi:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} V(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

L'integrale può essere esteso alla sola banda di $v(t)$ e segue (con un opportuno cambio di variabili $\sigma = \omega - \omega_0$)

$$v(t) = 2 \operatorname{Re} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} V(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \operatorname{Re} \left[\int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} 2V(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma t} \frac{d\sigma}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \right]$$

L'integrale è una funzione di t a banda limitata, con banda $\Delta\omega$, ed è complesso. Se lo poniamo uguale a $v_c(t) + jv_s(t)$, dove $v_c(t)$ e $v_s(t)$ sono anch'esse funzioni a banda limitata, ma reali, troviamo infine

$$v(t) = \operatorname{Re}[(v_c(t) + jv_s(t)) e^{j\omega_0 t}] = v_c(t) \cos \omega_0 t - v_s(t) \sin \omega_0 t$$

che chiaramente generalizza la rappresentazione di segnali sinusoidali mediante numeri complessi. La differenza è che ora abbiamo una funzione complessa del tempo al posto di un numero complesso.

In realtà le due rappresentazioni sono molto più simili di quanto non appaia. Infatti se consideriamo $v_c(t)$ (ma per $v_s(t)$ si possono fare analoghe considerazioni), questa è una funzione a banda limitata, con banda $\Delta\omega$. Su di un periodo T_0 della sinusoide portante a frequenza ω_0 , la sua variazione relativa soddisfa a

$$T_0 \frac{|v_c(t + T_0) - v_c(t)|^2}{||v_c(t)||^2} \leq \frac{\Delta\omega^3 T_0^3}{3\pi}$$

Il termine a secondo membro vale

$$\frac{\Delta\omega^3 T_0^3}{3\pi} = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{2\pi\Delta\omega}{\omega_0} \right)^3 = \frac{8\pi^2}{3} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^3$$

ed è quindi molto più piccolo di 1. Pertanto, su di un periodo T_0 della sinusoide portante a frequenza ω_0 , $v_c(t)$ e $v_s(t)$ possono essere considerate **costanti**. Naturalmente il valore di tali costanti è diverso periodo per periodo.

QUindi la differenza tra la rappresentazione di una funzione sinusoidale e di una a banda stretta sta nel fatto che la costante complessa della rappresentazione di segnali sinusoidali viene sostituita da una funzione complessa *lentamente variabile* (ovvero costante se osservata su di un periodo, variabile se osservata su molti periodi).

Valutiamo ora la potenza media su di un periodo (della portante) di un segnale a banda stretta. Poichè il segnale varia nel tempo in modo non sinusoidale tale valor medio dipende dal periodo scelto. Indichiamo allora con $P(t)$ la potenza media per il periodo centrato intorno a t :

$$P(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) i(t) dt$$

Anche la corrente sarà a banda stretta, e quindi rappresentabile mediante due funzioni a banda limitata $i_c(t)$ e $i_s(t)$. Quindi

$$P(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [v_c i_c \cos^2 \omega_0 t + v_s i_s \sin^2 \omega_0 t - (v_c i_s + v_s i_c) \cos \omega_0 t \sin \omega_0] dt$$

Ricordiamo ora che v_c , v_s , i_c , i_s sono tutte funzioni a banda limitata, con banda $\Delta\omega \ll 1/T$, e quindi possono essere portate fuori dall'integrale. Si ottiene così :

$$P(t) = \frac{1}{2} [v_c(t)i_c(t) + v_s(t)i_s(t)]$$

e quindi anche $P(t)$ è una funzione lentamente variabile del tempo, e più precisamente è a banda limitata, con banda $2\Delta\omega$.

Ricordando che $P(t)$ è il valor medio su di un periodo della potenza istantanea si può anche scrivere:

$$P(t) = \langle v(t) i(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\left(v_c(t) + jv_s(t) \right) \left(i_c(t) + ji_s(t) \right)^* \right]$$

che mostra ancora la similitudine tra il caso sinusoidale e quello a banda stretta.

APPENDICE 3: MATRICE DI DIFFUSIONE

Le reti due-porte possono essere descritte, in termini di comportamento alle porte, da due equazioni lineari che collegano tra loro 4 grandezze elettriche, due a ciascuna porta.

Tali relazioni vengono normalmente scritte in forma matriciale, e quindi una rete due-porte verrà caratterizzata da una opportuna matrice (complessa) 2×2 ¹.

Le rappresentazioni più diffuse, soprattutto a bassa frequenza, sono quelle che utilizzano la matrice delle impedenze \mathcal{Z} e delle ammettenze \mathcal{Y} , che collegano tra loro il vettore delle tensioni alle porte \mathbf{v} e quello delle correnti **entranti** nelle porte \mathbf{i} :

$$\mathbf{v} = \mathcal{Z} \cdot \mathbf{i} \quad \mathbf{i} = \mathcal{Y} \cdot \mathbf{v}$$

Dalla relazione precedente risulta immediatamente che le matrici \mathcal{Z} e \mathcal{Y} sono l'una l'inversa dell'altra. Le due descrizioni sono quindi del tutto equivalenti. Cambia soltanto la grandezza che viene interpretata come causa e quella che viene interpretata come effetto.

L'equivalenza delle descrizioni cade se una delle due non è invertibile, in quanto allora l'altra non esiste. Si può anche vedere che ci sono dei casi in cui nessuna delle due esiste, ad esempio il caso in cui la rete due porte sia costituita solo da una connessione tra le due

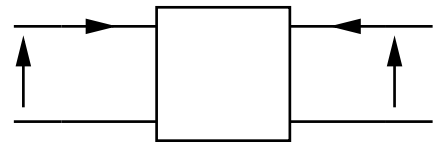


Fig 1
Definizione di tensioni e correnti per le matrici \mathcal{Z} e \mathcal{Y} .

¹ Noi ci limitiamo qui a considerare reti due-porte, ma evidentemente le considerazioni qui esposte possono essere generalizzate anche al caso di reti a più porte.

porte. Tuttavia tali casi sono abbastanza rari, e possono essere evitati in quanto le reti corrispondenti non sono in realtà vere reti due-porte.

Si può dimostrare che se una rete è reciproca, allora le matrici \mathcal{Z} e \mathcal{Y} sono simmetriche:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^T \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}^T$$

dove l'apice T indica la trasposta di una matrice.

Si dimostra inoltre che se una rete reciproca è anche priva di perdite, allora gli elementi di entrambe le matrici sono immaginari puri.

Nelle applicazioni ad alta frequenza, che coinvolgono anche linee di trasmissione, l'utilizzo delle matrici di impedenza ed ammettenza, pur abbastanza diffuso, presenta due grossi inconvenienti. Il primo è la non esistenza di entrambe le matrici per circuiti effettivi, ad esempio una rete due porte contenente un tratto di linea di trasmissione lungo λ . Il secondo è che ad alta frequenza misurare tensioni e correnti è abbastanza difficile, mentre risulta molto più semplice misurare ampiezze di onde viaggianti sulle linee.

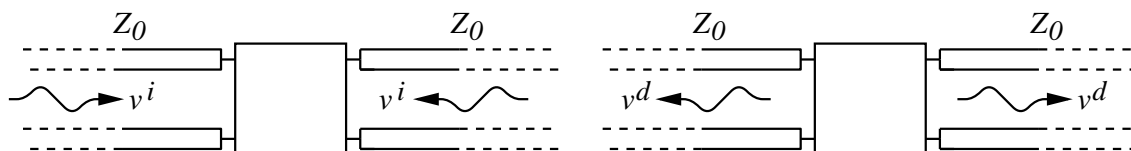


Fig. 2: Definizione delle onde incidenti e diffuse

Conviene allora descrivere la rete due-porte utilizzando come cause le onde di tensione che viaggiano² verso le porte, di ampiezza \mathbf{v}^i , e come effetti le onde di tensione che sono prodotte dalla rete, e quindi escono dalle porte stesse \mathbf{v}^d , come indicato nella figura 1. Si introduce così la matrice di diffusione, o **matrice S**, dal termine inglese *scattering matrix*, definita da

$$\mathbf{v}^d = \mathcal{S} \cdot \mathbf{v}^i$$

La prima cosa da notare è che, per poter definire delle onde viaggianti, si deve sempre considerare che le due porte siano collegate a linee di trasmissione. Pertanto la definizione di matrice S, al contrario di quelle di impedenza ed ammettenza, presuppone aver definito prima le impedenze delle porte. Talvolta si utilizzano impedenze diverse alle varie porte, ma la scelta più comune è quella di utilizzare la stessa impedenza per tutte le porte, che indicheremo con Z_0 .

Per definire gli elementi della matrice S si procede analogamente a quanto si fa per le altre matrici. Si fissa pari a zero una delle due cause e si valutano gli effetti dell'altra. Ad esempio:

$$S_{11} = \left[\begin{array}{c} v_1^d \\ v_1^i \end{array} \right]_{v_2^i=0} \quad S_{21} = \left[\begin{array}{c} v_2^d \\ v_1^i \end{array} \right]_{v_2^i=0}$$

Vediamo però cosa significano queste due definizioni. Iniziamo dalla condizione $v_2^i = 0$: questa condizione indica che sulla linea connessa alla porta 2 non vi è alcuna onda che viaggia

² Nella letteratura tecnica le onde incidenti e diffuse sono universalmente indicate con \mathbf{v}^+ e \mathbf{v}^- . Questo conduce, visivamente, ad avere una tensione v_2^- che viaggia da sinistra a destra. Per evitare ambiguità si è preferito cambiare, in questo corso, il simbolismo

verso la rete due-porte. Pertanto la linea connessa alla porta 2 è indefinita. La condizione che si utilizza per calcolare S_{11} e S_{21} è quindi quella di porta 2 adattata (alla impedenza Z_0).

Ne segue che S_{11} è il coefficiente di riflessione alla porta 1 quando la porta 2 è adattata. Invece S_{21} è il *coefficiente di trasmissione* tra l'onda incidente alla porta 1 e quella prodotta alla porta 2. Analoga definizione e significato per gli altri due elementi di S .

Si vede da questo che, come le matrici \mathcal{Z} e \mathcal{Y} generalizzano la descrizione di una rete una-porta (ovvero di un singolo componente concentrato) mediante impedenza o ammettenza, la matrice S generalizza la descrizione del medesimo componente mediante il coefficiente di riflessione.

Notiamo esplicitamente che S_{11} fornisce l'onda riflessa alla porta 1 solo se la porta 2 è adattata. Al variare delle condizioni di carico alla porta 2, varia anche il coefficiente di riflessione Γ_{IN} che si vede alla porta 1. Per calcolare tale variazione indichiamo con Γ_L il coefficiente di riflessione che la porta 2 vede guardando verso la linea cui è connessa, e che ovviamente dipende dal carico su cui tale linea è chiusa. In base alla definizione di onda incidente e riflessa deve risultare³

$$v_2^i = \Gamma_L v_2^d$$

Dalla definizione di matrice S , sostituendo v_2^i segue

$$v_1^d = S_{11} v_1^i + S_{12} v_2^i = S_{11} v_1^i + S_{12} \Gamma_L v_2^d$$

$$v_2^d = S_{21} v_1^i + S_{22} v_2^i = S_{21} v_1^i + S_{22} \Gamma_L v_2^d$$

e dalla seconda

$$v_2^d = \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_L} v_1^i$$

che fornisce la *amplificazione* nelle condizioni di carico effettivo. Sostituendo nella prima e dividendo per v_1^i si ha

$$\Gamma_{IN} = S_{11} + \frac{S_{21} S_{12} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

che si riduce a S_{11} per $\Gamma_L = 0$, come deve.

La matrice S si può ovviamente ottenere da \mathcal{Z} (o da \mathcal{Y}). Partiamo da:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^i + \mathbf{v}^d \quad \mathbf{i} = \frac{1}{Z_0} (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^d)$$

e utilizziamo la definizione di matrice S :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^i + \mathcal{S} \cdot \mathbf{v}^i = (\mathcal{I} + \mathcal{S}) \mathbf{v}^i$$

$$\mathbf{i} = \frac{1}{Z_0} (\mathbf{v}^i - \mathcal{S} \cdot \mathbf{v}^i) = \frac{1}{Z_0} (\mathcal{I} - \mathcal{S}) \mathbf{v}^i$$

essendo \mathcal{I} la matrice identica di ordine 2.

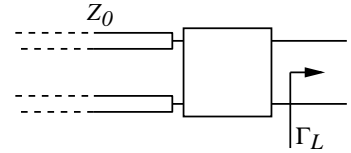


Fig 3
Definizione di Γ_L .

³ Questa definizione sembra errata. Invece è corretta se si guardano alle direzioni delle onde coinvolte (Fig.2), e si ci ricorda che Γ_L si ottiene guardando verso sinistra (Fig. 3).

Ricavando \mathbf{v}^i dalla seconda

$$\mathbf{v}^i = Z_0 (\mathcal{I} - \mathcal{S})^{(-1)} \mathbf{i}$$

e sostituendo nella prima si ottiene

$$\mathcal{Z} = Z_0 (\mathcal{I} + \mathcal{S}) \cdot (\mathcal{I} - \mathcal{S})^{(-1)}$$

Invertendo tale relazione segue anche

$$\mathcal{S} = (Z_0 \mathcal{I} + \mathcal{Z})^{(-1)} \cdot (Z_0 \mathcal{I} - \mathcal{Z})$$

Da tali relazioni è possibile dimostrare che se \mathcal{Z} è simmetrica, ovvero se la rete è reciproca, anche \mathcal{S} è simmetrica.

Vediamo infine le proprietà della matrice \mathcal{S} se la rete è, oltre che reciproca, anche priva di perdite.

La potenza attiva entrante nella rete due-porte vale

$$P = \frac{1}{2Z_0} (|v_1^i|^2 - |v_1^d|^2) + \frac{1}{2Z_0} (|v_2^i|^2 - |v_2^d|^2)$$

In termini vettoriali si ha

$$2Z_0 P = (\mathbf{v}^i)^T \cdot (\mathbf{v}^i)^* - (\mathbf{v}^d)^T \cdot (\mathbf{v}^d)^*$$

Sostituiamo la definizione di \mathcal{S} nella relazione precedente e imponiamo la condizione $P = 0$, $\forall \mathbf{v}^i$ che caratterizza la rete priva di perdite

$$(\mathbf{v}^i)^T \cdot (\mathbf{v}^i)^* - (\mathcal{S} \cdot \mathbf{v}^i)^T \cdot (\mathcal{S} \cdot \mathbf{v}^i)^* = 0 \quad \forall \mathbf{v}^i$$

Sviluppando il trasposto e mettendo \mathbf{v}^i in evidenza si ha

$$(\mathbf{v}^i)^T \cdot \left[\mathcal{I} - (\mathcal{S})^T \cdot \mathcal{S}^* \right] \cdot (\mathbf{v}^i)^* = 0 \quad \forall \mathbf{v}^i$$

che è verificata solo se la matrice in parentesi quadra è identicamente nulla

$$(\mathcal{S})^T \cdot (\mathcal{S})^* = \mathcal{I}$$

ovvero se l'inversa di \mathcal{S} coniugata coincide con la trasposta di \mathcal{S} ⁴

$$(\mathcal{S}^*)^{(-1)} = (\mathcal{S})^T$$

Indicato con \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_1 le due colonne di \mathcal{S} , la relazione precedente indica che

$$\|\mathbf{s}_1\|^2 = (\mathbf{s}_1)^T \cdot (\mathbf{s}_1)^* = 1 \quad \|\mathbf{s}_1\|^2 = (\mathbf{s}_1)^T \cdot (\mathbf{s}_1)^* = 1$$

ovvero che le colonne di \mathcal{S} sono di modulo unitario, e che sono tra loro *ortogonali*

$$(\mathbf{s}_1)^T \cdot (\mathbf{s}_1)^* = 0$$

⁴ Matematicamente questa relazione indica che la matrice \mathcal{S} appartiene all'insieme delle matrici *unitarie*, generalizzazione complessa delle matrici ortogonali.

41 LARGHEZZA DI BANDA DEGLI ADATTAMENTI

La larghezza di banda degli adattamenti dipende ovviamente dal tipo di circuito adottato, e dal carico che occorre adattare. Ma dipende anche dalla *Return Loss*, ovvero dalla efficienza η che si considera accettabile in una data situazione.

Nel seguito vogliamo dare qualche esempio di risposta in frequenza degli adattamenti studiati, e valutarne la larghezza di banda, scegliendo come *Return Loss* accettabile -20 dB, ovvero $\eta = 99\%$.

Ci limitiamo a considerare carichi reali, in quanto, per carichi complessi, la variazione della loro impedenza con la frequenza non può essere predetta dal valore che tale impedenza assume a frequenza centrale ¹

La prima analisi riguarda gli adattamenti a $\lambda/4$, al variare del carico Z_C , il cui circuito è riportato in Fig. 1. Dagli andamenti riportati in Fig. 2, si vede chiaramente che la larghezza di banda aumenta quanto più generatore e carico sono vicini.

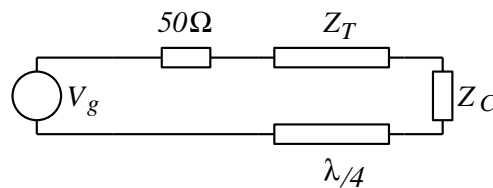


Fig 1: Adattamento a $\lambda/4$

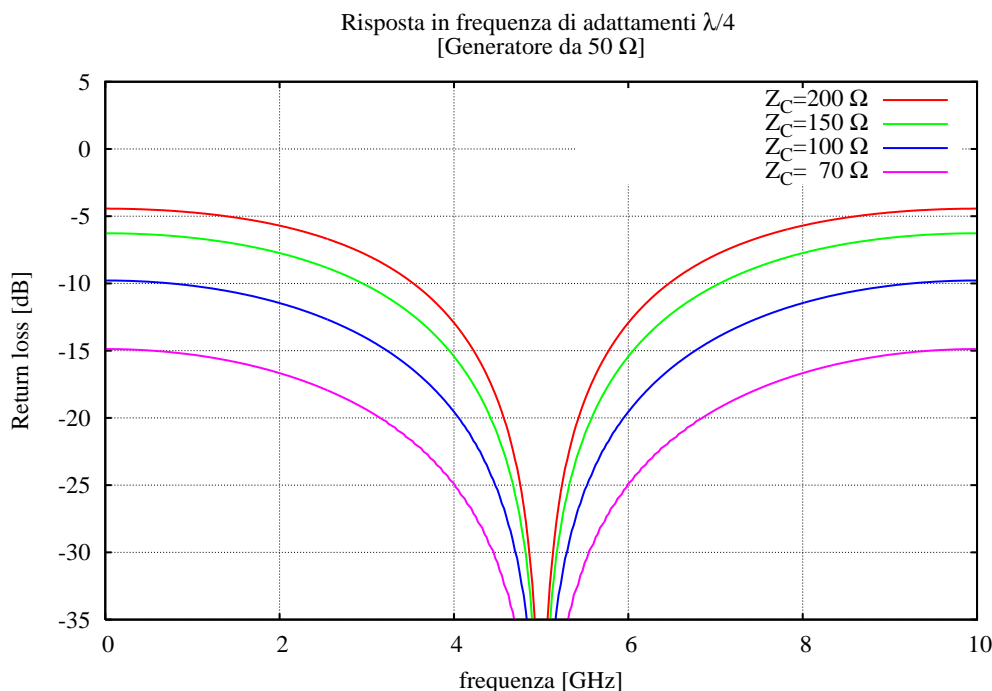


Fig. 2: Risposta in frequenza di adattamenti a $\lambda/4$ al variare del carico Z_C

¹ La variazione dipende dal *fattore di merito* del carico, ovvero dalla energia elettromagnetica che il carico ha immagazinata. Per una discussione più ampia di questo aspetto, si rimanda ai paragrafi sul collegamento dei risuonatori

La banda passante a -20 dB passa dal 16% per un carico $Z_C = 200 \Omega$, fino al 72% per un carico $Z_C = 70 \Omega$.

Passiamo ora a considerare adattamenti a singolo stub, il cui circuito è riportato in Fig. 3 (e supponendo che lo stub possa essere sia aperto, sia chiuso in corto circuito). Per ciascuna configurazione dello stub, esistono due possibili soluzioni per le lunghezze x e y , con larghezze di banda differenti.

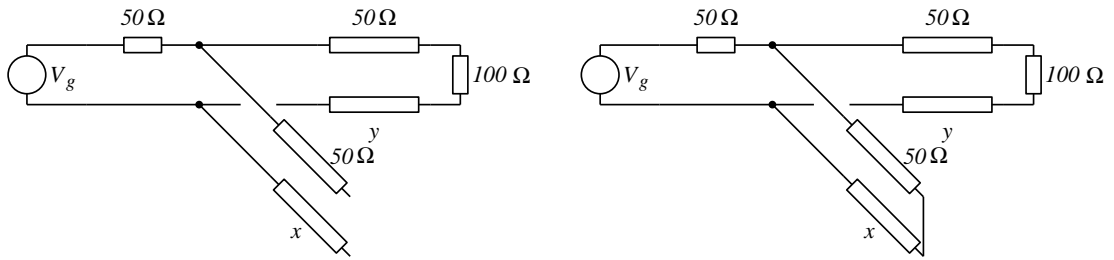


Fig. 3: Adattamento a singolo stub in parallelo, a sinistra aperto (A), e destra in corto circuito (C)

La risposta in frequenza è riportata in figura 4, per i vari casi riassunti nella tabella I, in cui è calcolata anche la larghezza di banda. Per confronto è riportata anche la risposta in frequenza di un adattamento $\lambda/4$ per lo stesso carico.

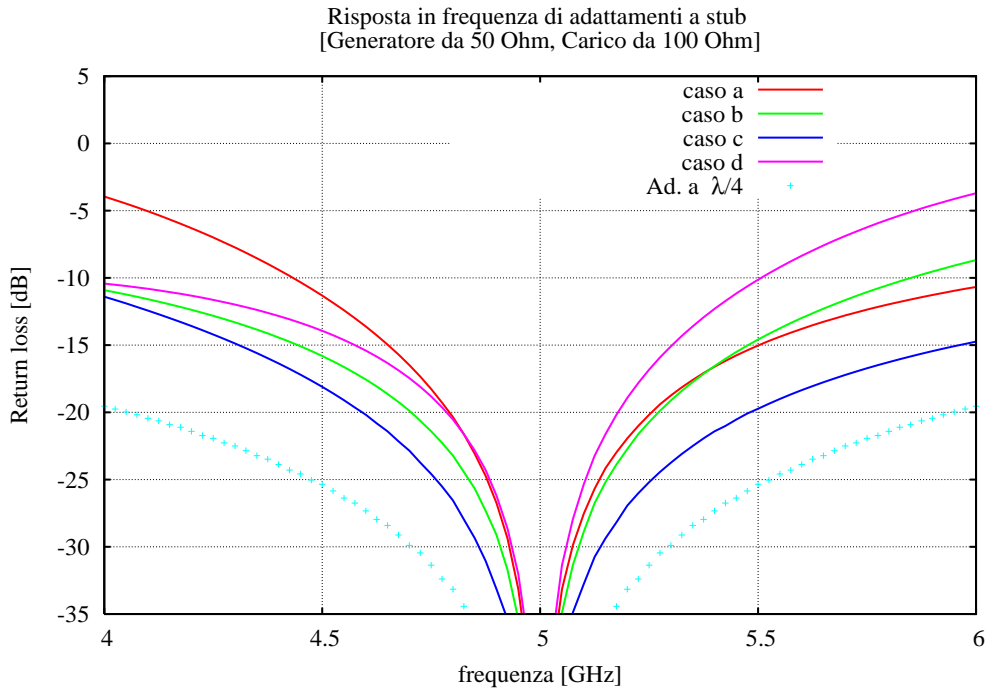


Fig. 4: Risposta in frequenza di adattamenti a stub (legenda in Tabella I)

Tabella I
Legenda, e risultati, di Fig. 4

Caso	Stub	y	x	banda passante	
a	A	54°	146°	0.45 GHz	9%
b	A	125°	34°	0.56 GHz	11%
c	C	54°	56°	0.90 GHz	18%
d	C	125°	124°	0.39 GHz	8%

Dalla analisi di tabella I si vede che la banda passante non solo è molto inferiore a quella di un adattamento $\lambda/4$, pari nel nostro caso al 38%, ma dipende in maniera sostanziale dalla lunghezza delle linee coinvolte x e y . Infatti nell'unico caso in cui tali lunghezze sono intorno ai 55° , ovvero nel caso c, la banda passante risulta quasi doppia di tutti gli altri casi, in cui una, o entrambe le linee, sono circa triple. Si può anche notare che la banda dipende più dalla lunghezza x dello stub che da y . In realtà la banda passante si riduce al crescere della energia immagazzinata nel circuito di adattamento. Qualitativamente, si può considerare che, a parità di lunghezza della linea, l'energia aumenti con il ROS sulla linea. Quindi la lunghezza dello stub (ROS = ∞) conta più della lunghezza della linea verso il carico, che ha un ROS di 2.

Consideriamo poi gli adattamenti a carichi concentrati, e quelli *stepped*, riportati in Figura 5 e 6.

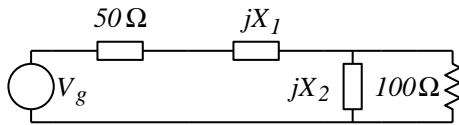


Fig. 5: Adattamento a carichi concentrati

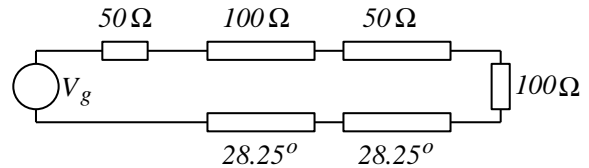


Fig. 6: Adattamento stepped

La risposta in frequenza è riportata in figura 7, per le due possibili configurazioni di reattanze (riepilogate in tabella II) e per l'adattamento stepped. Per confronto è riportata anche la risposta in frequenza di un adattamento $\lambda/4$ per lo stesso carico. Nella Tabella II sono anche calcolate le larghezze di banda.

Tabella II
Legenda, e risultati, di Fig. 7

Caso	jX_1	jX_2	banda passante	
a	-49Ω	100Ω	1.60 GHz	32 %
b	49Ω	-100Ω	1.45 GHz	29 %
<i>stepped</i>			1.60 GHz	32 %

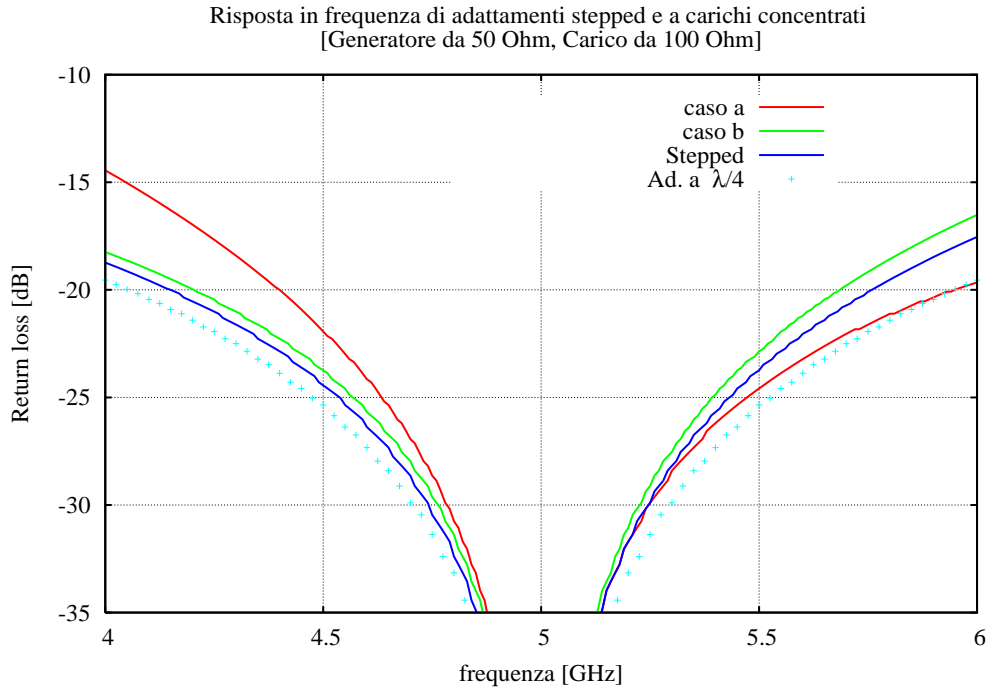


Fig. 7: Risposta in frequenza di adattamenti a carichi concentrati (legenda in Tabella II) e stepped

Si nota in entrambi i casi una banda passante prossima (anche se inferiore) a quella di un adattamento $\lambda/4$. Segno di una minore energia immagazinata nella rete di adattamento. Nel caso dell'adattamento stepped ciò deriva dalla piccola lunghezza della struttura mentre, nel caso di carichi concentrati, dal fatto che ogni carico immagazina solo una energia, mentre una linea immagazina sempre sia energia elettrica, sia energia magnetica.

INDICE

1. LINEE DI TRASMISSIONE: TEORIA CIRCUITALE	1
2. PROPAGAZIONE PER ONDE	5
3. ONDE SINUSOIDALI	8
4. RAPPRESENTAZIONE STAZIONARIA	11
5. DISCONTINUITA'	13
6. LINEA CHIUSA SU DI UN CARICO	15
7. IMPEDENZA DI INGRESSO DI UNA LINEA DI TRASMISSIONE	17
8. VARIAZIONE DELLE GRANDEZZE ELETTRICHE	19
9. FLUSSO DI POTENZA IN UNA LINEA DI TRASMISSIONE	22
10. BILANCIO DI POTENZA IN UNA LINEA IDEALE	25
11. BILANCIO DI POTENZA IN PRESENZA DI CARICHI CONCENTRATI	28
12. MASSIMIZZAZIONE DELLA POTENZA	29
13. ALIMENTAZIONE CON LINEA SEMI-INFINITA	31
14. SCELTA DELLA SEZIONE PER L'ADATTAMENTO CONIUGATO	32
15. ADATTAMENTO CON TRASFORMATORE	34
16. ADATTAMENTI CON STUB	36
17. ADATTAMENTI A CARICHI CONCENTRATI	38
18. LARGHEZZA DI BANDA DEGLI ADATTAMENTI	41
19. MEZZI DISPERSIVI	46
20. CONDUCIBILITA'	48
21. EQUAZIONI DELLE LINEE CON DIELETTRICO DISPERSIVO E PERDITE	49
22. PROPAGAZIONE DISPERSIVA	51
23. PERDITE NEI CONDUTTORI	54
24. PROPAGAZIONE IN PRESENZA DI PICCOLE PERDITE	56
25. GENERATORI	57
26. CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA E TEOREMA DI POYNTING	58
27. ESISTENZA E UNICITA'	61
28. IL SIGNIFICATO DELL'UNICITA'	61
29. CONDIZIONI DI UNICITA' NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA	62
30. RISONANZE SULLE LINEE DI TRASMISSIONE	65
31. RISONANZE REALI	68
32. COLLEGAMENTO DEI RISUONATORI	71
33. ALTRE CONFIGURAZIONI DI ALIMENTAZIONE	75
34. STRUTTURE TEM	78
35. MICROSTRIP	82
36. PERDITE NELLE MICROSTRIP	85
37. DISPERSIONE NELLE MICROSTRIP	87
38. GUIDE D'ONDA	88
39. DISCONTINUITA'	90
40. PERDITE SUI CONDUTTORI	95
App. 1. DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ	97
App. 2. SEGNALI A BANDA STRETTA	98
App. 3. MATRICE DI DIFFUSIONE	100

41. LARGHEZZA DI BANDA DEGLI ADATTAMENTI 103