

1. PROPAGAZIONE TEM

- 1.1 Campi TEM
- 1.2 Proprietà di un campo TEM
- 1.3 Cavo Coassiale
- 1.4 Stripline

2. PROPAGAZIONE QUASI TEM

- 2.1 Microstriscie
- 2.2 Campi quasi-TEM
- 2.3 Analisi e progetto di linee a microstriscia
- 2.4 Perdite nelle microstriscie
- 2.5 Dispersione nelle microstriscie
- 2.6 Discontinuità
- 2.7 Metodo delle differenze finite

3. PROPAGAZIONE IN STRUTTURE A PIU' CONDUTTORI

- 3.1 Richiami sulle linee di trasmissione
- 3.2 Linee TEM a N+1 conduttori
- 3.3 Propagazione in strutture a N+1 Conduttori
- 3.4 Linee accoppiate

4. PROPRIETA' GENERALI DELLE RETI

- 4.1 Matrice Z e Y
- 4.2 Matrice di Scattering
- 4.3 Matrice di Trasmissione
- 4.4 Proprietà delle reti due porte
- 4.5 Proprietà delle reti tre porte
- 4.6 Proprietà delle reti quattro porte
- 4.7 Esempi

5. DIVISORI, IBRIDI E ACCOPPIATORI IN TECNOLOGIA PLANARE

- 5.1 Divisore a T senza perdite
- 5.2 Divisore di Wilkinson
- 5.3 Ibrido a 90°
- 5.4 Ibrido ad anello
- 5.5 Accoppiatore a linee accoppiate
- 5.6 Accoppiatore multisezione

6. ADATTAMENTI BANDA LARGA

- 6.1 Larghezza di banda degli adattamenti
- 6.2 Linee con impedenza costante a tratti
- 6.3 Trasformatore binomiale
- 6.4 Trasformatore di Chebyshev

7. FILTRI A MICROONDE IN TECNOLOGIA PLANARE

- 7.1 Filtri a bassa frequenza
- 7.2 Trasformazioni di filtri
- 7.3 Implementazione a microonde di filtri passabasso – identità di Kuroda
- 7.4 Implementazione a microonde di filtri passabasso – filtri a scala
- 7.5 Prototipi di filtri passabanda ed eliminabanda con invertitori di impedenza
- 7.6 Implementazione a microonde di filtri passabanda – Filtri a linee accoppiate
- 7.7 Implementazione a microonde di filtri passabanda ed eliminabanda – Filtri a stub
- 7.8 Implementazione a microonde di filtri passabanda – Filtri a risuonatori accoppiati

8. GUIDE D'ONDA

- 8.1 Propagazione nelle guide d'onda metalliche
- 8.2 Guida d'onda rettangolare
- 8.3 Caratteristiche della propagazione nelle guide d'onda
- 8.4 Configurazione trasversa dei modi in guida
- 8.5 Potenza nelle guide
- 8.6 Eccitazione delle guide metalliche
- 8.7 Transizione guida-cavo coassiale
- 8.8 Perdite nelle guide
- 8.9 Identificazione di un diaframma in guida d'onda
- 8.10 Accoppiamento tramite fori
- 8.11 Componenti in guida d'onda
- 8.12 Mode matching
- 8.13 Guida a pareti magnetiche

9. RISUNATORI IN LINEA DI TRASMISSIONE

APPENDICE I: TEOREMA DI RECIPROCITA'

APPENDICE II: TEOREMA DI EQUIVALENZA

1. PROPAGAZIONE TEM

1.1 Campi TEM

Consideriamo le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti, nel dominio della frequenza, per un mezzo lineare e omogeneo:

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{E} &= -j\omega\mu\underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} &= j\omega\varepsilon\underline{E}\end{aligned}\quad (1.1)$$

Poichè ci interessa studiare la propagazione in una struttura guidante, la direzione di propagazione, che assumiamo come direzione z di un sistema di riferimento ($\underline{i}_x, \underline{i}_y, \underline{i}_z$), dovrà essere una direzione preferenziale del problema. Conviene quindi decomporre tutti i vettori della (1.1) in una componente trasversa e una lungo z : $\underline{E} = \underline{E}_t + E_z \underline{i}_z$, e analogamente per \underline{H} . Allo stesso modo conviene separare la parte trasversa e quella longitudinale dell'operatore ∇ : $\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \underline{i}_z$. Possiamo sostituire queste espressioni nelle equazioni di Maxwell (1.1):

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{E} &= \left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \underline{i}_z \right) \times \underline{E} = -j\omega\mu\underline{H}_t - j\omega\mu H_z \underline{i}_z \\ \left\{ \begin{aligned} \nabla_t \times \underline{E}_t + \underline{i}_z \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} + \nabla_t \times (E_z \underline{i}_z) + 0 &= -j\omega\mu\underline{H}_t - j\omega\mu H_z \underline{i}_z \\ \nabla_t \times \underline{H}_t + \underline{i}_z \times \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} + \nabla_t \times (H_z \underline{i}_z) &= j\omega\varepsilon \underline{E}_t + j\omega\varepsilon E_z \underline{i}_z \end{aligned} \right. \quad (1.2)\end{aligned}$$

La forma (1.2) delle Equazioni di Maxwell è quella che utilizzeremo nel seguito. Cominciamo qui ad occuparci di campi TEM (Trasversi ElettroMagnetici), ovvero campi per cui

$$\begin{cases} E_z = 0 \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Per tali campi le (1.2) forniscono:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t + \underline{i}_z \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\underline{H}_t \\ \nabla_t \times \underline{H}_t + \underline{i}_z \times \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon \underline{E}_t \end{cases} \quad (1.4)$$

In ogni equazione (1.4) il primo termine è longitudinale, mentre gli altri sono trasversi. Separando le componenti trasverse e longitudinali, segue:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = 0 \\ \nabla_t \times \underline{H}_t = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \underline{i}_z \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\underline{H}_t \\ \underline{i}_z \times \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon \underline{E}_t \end{cases} \quad (1.6)$$

Deriviamo la prima delle (1.6), riscritta come

$$\underline{i}_z \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} \times \underline{i}_z = -j\omega\mu \underline{H}_t \times \underline{i}_z$$

$$\frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu \underline{H}_t \times \underline{i}_z$$

rispetto a z :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_t}{\partial z^2} = -j\omega\mu \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} \times \underline{i}_z \quad (1.7)$$

Infine, sostituendo la seconda delle (1.6) nella (1.7) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_t}{\partial z^2} = -j\omega\mu \left(\frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} \times \underline{i}_z \right) = -j\omega\mu (-j\omega\epsilon \underline{E}_t) = -\omega^2 \epsilon\mu \underline{E}_t$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_t}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon\mu \underline{E}_t = 0 \quad (1.8)$$

Introduciamo la costante $k_z^2 = \omega^2 \epsilon\mu$ che prende il nome di costante di propagazione e, in caso di propagazione TEM coincide con la costante di propagazione del mezzo.

La soluzione dell'equazione (1.8) è

$$\underline{E}_t = \underline{E}_{t0}^+ \exp(-jk_z z) + \underline{E}_{t0}^- \exp(jk_z z) \quad (1.9)$$

con \underline{E}_{t0}^+ , \underline{E}_{t0}^- vettori costanti.

L'equazione (1.8) e la soluzione (1.9) valgono per strutture con un dielettrico trasversalmente omogeneo.

Se il dielettrico non è trasversalmente omogeneo non possono esistere campi TEM. Infatti, in questo caso, si ha almeno una interfaccia tra due mezzi con costante dielettrica diversa ma, in presenza di costanti di propagazione differenti, i campi all'interfaccia tra i due mezzi non rispettano la condizione di continuità in direzione longitudinale (la diversa velocità di propagazione ai due lati dell'interfaccia produrrebbe lo scorrimento dei campi).

Rimane la possibilità che sulla sezione trasversa vi siano dei CEP su cui deve valere la condizione:

$$\underline{E} \cdot \underline{i}_c = 0 \quad (1.10)$$

In assenza di conduttori, l'unica soluzione possibile è un'onda piana generica in direzione z , soluzione che qui non interessa. Pertanto possiamo sempre supporre che vi siano uno o più conduttori.

Per determinare la soluzione notiamo che dalla prima delle (1.5), $\nabla_t \times \underline{E}_t = 0$, segue:

$$\underline{E}_t = -\nabla_t \Phi(t, z) \quad (1.11)$$

e da $\nabla \cdot \underline{E} = \nabla_t \cdot \underline{E}_t = 0$ si ottiene:

$$\nabla_t \cdot \nabla_t \Phi(\underline{t}, z) = \nabla_t^2 \Phi(\underline{t}, z) = 0 \quad (1.12)$$

Le equazioni trovate sono esattamente le equazioni per la determinazione del campo elettrostatico bidimensionale nella medesima struttura. In particolare, il potenziale Φ ha lo stesso ruolo del potenziale elettrostatico, ed è quindi ovviamente definito a meno di una costante. Per mantenere l'analogia sceglieremo $\Phi = 0$ sul contorno all'infinito (nel caso di problemi aperti) e, ovviamente, su tutti i conduttori che si estendono all'infinito. Per problemi chiusi, invece, assumeremo $\Phi = 0$ sul conduttore di chiusura del problema (conduttore di massa).

Per quanto riguarda gli altri conduttori, occorre imporre la condizione (1.10) che, in termini di Φ , diventa, su (ciascun) contorno (connesso):

$$\underline{E} \cdot \underline{i}_c = \nabla_t \Phi \cdot \underline{i}_c = \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \quad (1.13)$$

L'equazione (1.12) prende il nome di equazione di Laplace, e le sue soluzioni sono dette funzioni armoniche.

Una funzione $f(\underline{t})$ armonica in un dominio D , gode di varie proprietà tra cui:

- a) Se P è un punto interno a D , allora $f(P)$ è la media dei valori che la $f(\underline{t})$ assume su di una circonferenza (interna a D) di centro P .
- b) Come conseguenza del punto precedente, il massimo e il minimo di $f(\underline{t})$ in D sono punti della frontiera di D , ∂D . Infatti se P fosse un massimo, $f(P)$ non potrebbe essere la media dei valori della funzione sulla circonferenza, analogamente se P fosse un minimo. Rimangono i punti sulla frontiera che non soddisfano la a).

La condizione (1.13) implica che Φ è costante separatamente su ogni conduttore del contorno. Se il contorno è singolo, ovvero abbiamo un solo conduttore, allora su di esso $\Phi = 0$. Ma poichè massimo e minimo devono trovarsi sul contorno, sono entrambi nulli e quindi Φ è nullo ovunque e non vi sono campi TEM.

Se invece i conduttori sono due o più, vi è almeno un conduttore su cui $\Phi \neq 0$ e quindi esistono campi TEM.

Se i conduttori sono $N+1$, possiamo fissare ad arbitrio N valori di potenziale sui conduttori, ottenendo N diversi campi TEM, tra loro linearmente indipendenti. Poichè ogni campo TEM ha la stessa costante di propagazione (1.8), questi N campi costituiscono una base dello spazio vettoriale di tutti i campi TEM.

Nel seguito considereremo prima un singolo campo TEM in una struttura con due soli conduttori e poi vedremo la relazione tra gli N campi di un caso con $N+1$ conduttori.

1.2 Proprietà di un campo TEM

Consideriamo una struttura con due conduttori, ad esempio un cavo coassiale (Fig. 1).

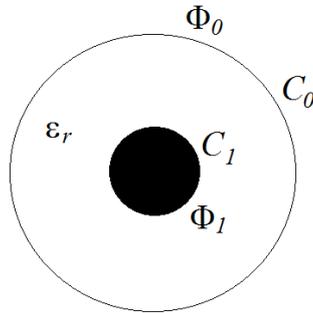


Figura 1. Struttura TEM con due conduttori: cavo coassiale.

In questo caso uno solo dei due conduttori (contrassegnato con C_1 in Fig. 1), ha potenziale diverso da zero. La soluzione sarà pertanto proporzionale, per ogni valore di z , al valore di Φ sul conduttore C_1 . L'altro conduttore (C_2) è il conduttore di riferimento con potenziale nullo:

Poniamo dunque:

$$\begin{cases} \Phi|_{C_1} = \text{costante} = V(z) \\ \Phi|_{C_0} = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Poiché stiamo considerando un problema elettrostatico bidimensionale, nella (1.14) la variabile z è un parametro, e, fissato il valore di z , il potenziale su C_1 è una costante, $V(z)$, rispetto alla sezione trasversa.

Di conseguenza, la soluzione del problema sarà necessariamente proporzionale a $V(z)$, perché da $V(z)$ dipende linearmente, e potrà essere scritta nella forma fattorizzata:

$$\Phi(\underline{t}, z) = V(z)\varphi(\underline{t}) \quad (1.15)$$

Dove $\varphi(\underline{t})$ è la funzione armonica (reale) corrispondente a $V(z) = 1$, ossia $\Phi|_{C_1} = 1$ e soluzione dell'equazione $\nabla_t^2 \Phi(\underline{t}, z) = \nabla_t^2 V(z)\varphi(\underline{t}) = V(z)\nabla_t^2 \varphi(\underline{t}) = 0 \Rightarrow \nabla_t^2 \varphi(\underline{t}) = 0$.

Di conseguenza

$$\underline{E}_t = -\nabla_t \Phi(\underline{t}, z) = -\nabla_t [V(z)\varphi(\underline{t})] = V(z)[- \nabla_t \varphi(\underline{t})]$$

da cui

$$\underline{E}_t = V(z)\underline{e}(\underline{t}) \quad (1.16)$$

con $\underline{e}(\underline{t}) = -\nabla_t \varphi(\underline{t})$

Dalla (1.16) risulta che, oltre al potenziale, anche il campo elettrico trasverso è fattorizzato. Sostituendo la (1.16) nella prima delle (1.6) si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{i}_z \times \frac{\partial}{\partial z} [V(z)\underline{e}(t)] &= -j\omega\mu\underline{H}_t \\ \frac{dV(z)}{dz} [\underline{i}_z \times \underline{e}(t)] &= -j\omega\mu\underline{H}_t \end{aligned} \quad (1.17)$$

ovvero anche \underline{H}_t è fattorizzato e può essere scritto nella forma

$$\underline{H}_t = I(z)\underline{h}(t) \quad (1.18)$$

Quindi, dalla (1.17), risulta:

$$\frac{dV(z)}{dz} [\underline{i}_z \times \underline{e}(t)] = -j\omega\mu I(z)\underline{h}(t) \quad (1.19)$$

I vettori $\underline{i}_z \times \underline{e}(t)$ e $\underline{h}(t)$ sono pertanto paralleli e quindi esiste una costante A tale che

$$A\underline{h}(t) = \underline{i}_z \times \underline{e}(t) \quad (1.20)$$

Sostituendo le (1.16) e (1.18) nella seconda delle (1.6) si ha:

$$\frac{dI(z)}{dz} [\underline{i}_z \times \underline{h}(t)] = j\omega\varepsilon V(z)\underline{e}(t) \quad (1.21)$$

Le (1.19) e (1.21) forniscono

$$\begin{cases} \frac{dV}{dz} [\underline{i}_z \times \underline{e}] = -j\omega\mu I(z)\underline{h} \\ \frac{dI}{dz} [\underline{i}_z \times \underline{h}] = j\omega\varepsilon V \underline{e} \end{cases} \quad (1.22)$$

Tenendo presente la (1.20), che può essere scritta anche nella forma $\underline{e}(t) = -A\underline{i}_z \times \underline{h}(t)$, le (1.22) forniscono le equazioni delle linee di trasmissione:

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dz} = j\frac{\omega\mu}{A} I \\ -\frac{dI}{dz} = j\omega\varepsilon AV \end{cases} \quad (1.23)$$

in cui ε e μ possono essere anche funzioni di z . Se sono costanti le (1.23) diventano le equazioni standard dei telegrafisti con

$$\begin{cases} C = \varepsilon A \\ L = \frac{\mu}{A} \end{cases} \quad (1.24)$$

La costante di propagazione è data da $\beta = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, come trovato anche in precedenza (1.8, 1.9), e non dipende dalla costante A.

L'impedenza caratteristica è:

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon A}} = \frac{\zeta}{A} \quad (1.25)$$

A è un parametro arbitrario costante sulla sezione trasversa. In generale è una funzione di z . E' possibile scegliere a piacere l'impedenza caratteristica e ricavare, di conseguenza, il valore di A . Tuttavia, nel caso di propagazione TEM esiste una definizione *naturale* dell'impedenza che consente di interpretare le grandezze V ed I nelle (23) rispettivamente come la tensione e la corrente sulla linea di trasmissione. In questo caso la capacità C definita nella (1.24) rappresenta la capacità per unità di lunghezza relativa al problema elettrostatico bidimensionale.

Per calcolare A possiamo quindi richiedere che il flusso di potenza (attraverso la sezione trasversa S_t)

$$P = \frac{1}{2} \int_{S_t} \underline{E} \times \underline{H}^* \cdot \underline{i}_z dS = \frac{1}{2} VI^* \int_{S_t} \underline{e} \times \underline{h} \cdot \underline{i}_z dS \quad (1.26)$$

sia calcolabile mediante la linea di trasmissione (equivalente). Il che significa $P = \frac{1}{2} VI^*$,

che implica, dalla (1.26)

$$\int_{S_t} \underline{e} \times \underline{h} \cdot \underline{i}_z dS = 1 \quad (1.27)$$

Sostituendo la (1.20) nella (1.27) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{S_t} \underline{e} \times \underline{h} \cdot \underline{i}_z dS = 1 &\Rightarrow \int_{S_t} \underline{i}_z \cdot \underline{e} \times \underline{h} dS = 1 \Rightarrow \int_{S_t} \underline{i}_z \times \underline{e} \cdot \underline{h} dS = 1 \Rightarrow \\ \int_{S_t} \underline{i}_z \times \underline{e} \cdot \left(\frac{1}{A} \underline{i}_z \times \underline{e} \right) dS &= 1 \\ \int_{S_t} \underline{i}_z \times \underline{e} \cdot \left(\frac{1}{A} \underline{i}_z \times \underline{e} \right) dS &= \frac{1}{A} \int_{S_t} |\underline{i}_z \times \underline{e}|^2 dS = 1 \end{aligned}$$

e quindi

$$A = \int_{S_t} |\underline{i}_z \times \underline{e}|^2 dS = \int_{S_t} |\underline{e}|^2 dS = \int_{S_t} |\nabla_t \phi|^2 dS \quad (1.28)$$

In conclusione la costante A dipende solo dalla geometria dei conduttori.

1.3 Cavo coassiale

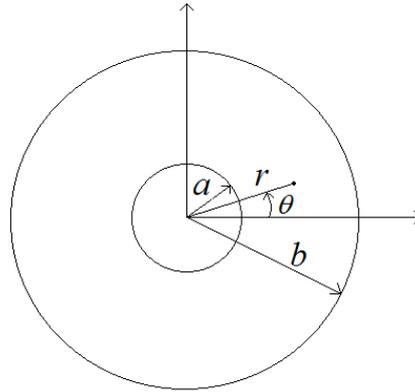


Figura 2. Geometria del cavo coassiale

Il cavo coassiale è costituito da un conduttore cilindrico a sezione circolare, coassiale ad un conduttore esterno, anch'esso circolare. Il conduttore interno ha raggio a , il conduttore esterno ha raggio b (Fig. 2), e la zona tra i due conduttori è riempita con un mezzo omogeneo di costante dielettrica ϵ_r . E' evidente la convenienza di studiare i campi all'interno di un cavo coassiale utilizzando un sistema di riferimento in coordinate cilindriche $[(r, \theta)]$ in Fig. 2]. Infatti, per simmetria, il potenziale Φ è indipendente dall'angolo θ .

Per il cavo coassiale si ha dunque:

$$\nabla_t^2 \varphi(\underline{t}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.29)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \varphi(a) = 1 \\ \varphi(b) = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Nella (1.29) è possibile eliminare $1/r$ al di fuori dal segno di derivata perché nel dominio di interesse r è sempre diverso da zero ($a < r < b$):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = k_1 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{k_1}{r} \quad (1.31)$$

con k_1 costante.

Integrando la (1.30) si ottiene:

$$\varphi(r) = k_1 \ln(r) + k_2 \quad (1.32)$$

con k_2 costante.

Le condizioni al contorno (1.30) forniscono:

$$\begin{cases} \varphi(a) = k_1 \ln(a) + k_2 = 1 \\ \varphi(b) = k_1 \ln(b) + k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_2 = -k_1 \ln(b) \quad (1.33)$$

Sostituendo la seconda delle (1.33) nella prima si ottiene

$$k_1 \ln(a) - k_1 \ln(b) = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

La costante k_2 è inutile perché il potenziale è definito a meno di una costante.

Quindi:

$$\underline{e} = -\nabla \varphi(\underline{t}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \underline{i}_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln(r) \right] \underline{i}_r = \frac{1}{r} \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \underline{i}_r \quad (1.34)$$

Per determinare il campo magnetico \underline{h} e l'impedenza caratteristica occorre calcolare la costante A (1.28). Si ha dunque:

$$A = \int_{S_i} |\underline{e}|^2 dS = \int_{S_i} |\nabla_i \varphi|^2 dS$$

In coordinate cilindriche:

$$A = \frac{1}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r dr d\theta = \frac{2\pi}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{2\pi}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} [\ln(b) - \ln(a)] = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Quindi:

$$\underline{h} = \frac{1}{A} \underline{i}_z \times \underline{e} = \left[\frac{1}{A} \right] \frac{1}{r} \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \underline{i}_z \times \underline{i}_r = \left[\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi} \right] \frac{1}{r} \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \underline{i}_\theta = \frac{1}{2\pi r} \underline{i}_\theta$$

$$\begin{cases} \underline{e} = \frac{1}{r} \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \underline{i}_r \\ \underline{h} = \frac{1}{2\pi r} \underline{i}_\theta \end{cases} \quad (1.35)$$

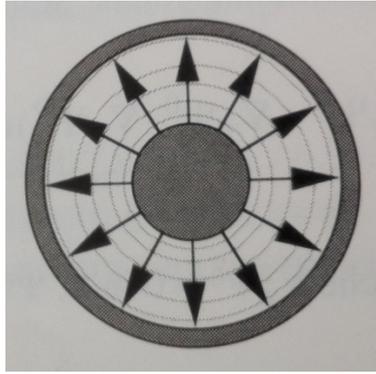


Figura 3. Campo elettrico e magnetico trasverso all'interno di un cavo coassiale. L'impedenza caratteristica è data da:

$$Z = \frac{\zeta}{A} = \frac{\zeta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\zeta_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (1.36)$$

e dipende dalla geometria della sezione trasversa.

La costante di propagazione dipende invece solo dal mezzo presente all'interno del coassiale:

$$\beta = \omega\sqrt{\epsilon_r}\sqrt{\epsilon_0\mu} = \sqrt{\epsilon_r}k_0 \quad (1.37)$$

Il campo TEM è presente nel cavo coassiale a tutte le frequenze. Tuttavia, come vedremo nel seguito, esistono anche altri campi che possono propagarsi nel cavo coassiale a partire da una certa frequenza f_L e, dato che il cavo coassiale viene utilizzato quando si propaga solo il campo TEM, la frequenza più bassa f_L a cui, oltre al campo TEM, si propaga anche un campo non TEM, determina la frequenza limite di utilizzo del cavo coassiale. In particolare si ha:

$$f_L = \frac{c_0}{4\pi\sqrt{\epsilon_r}(r_e + r_i)} \quad (1.38)$$

Chiaramente, per determinare le caratteristiche di un cavo coassiale da impiegare in una determinata applicazione, occorre stabilire un margine di sicurezza rispetto al valore di f_L .

1.4 Stripline

Il cavo coassiale non si presta a realizzare circuiti, sia perchè la realizzazione di linee con impedenza diversa è abbastanza difficoltoso (richiede dielettrici con varie costanti dielettriche, o la realizzazione di strutture con raggi interni o esterni variabili), sia perchè è abbastanza complesso connettere altri tratti di cavo coassiale in serie o in parallelo alla linea principale.

Questi problemi vengono superati utilizzando strutture di tipo planare, ovvero costituite da una piastrina di materiale dielettrico (substrato), sulle cui facce vengono praticate delle metallizzazioni. La principale struttura planare TEM è la stripline (Fig. 4), che è costituita da due substrati dello stesso materiale, e in genere uguali, uniti insieme. La struttura è completamente metallizzata alle due estremità, mentre al centro tra i due substrati è posta una ulteriore metallizzazione che ha lo stesso ruolo del conduttore centrale di un cavo coassiale, ovvero quello di guidare il campo elettromagnetico.

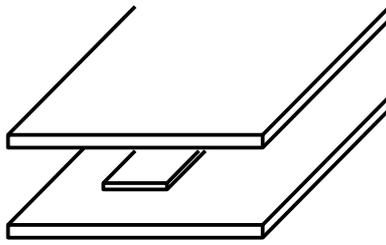


Figura 4. Stripline

Poichè le due metallizzazioni esterne sono idealmente infinite, esse sono allo stesso potenziale (il potenziale nullo dell'infinito) e quindi equivalgono ad un unico conduttore. In un certo senso, si può quindi dire che una stripline è l'equivalente planare di un cavo coassiale.

L'impedenza caratteristica di una stripline dipende esclusivamente dal rapporto tra la larghezza W della linea di guida e lo spessore del substrato. Poichè quest'ultimo è fissato, è possibile modificare l'impedenza caratteristica di una stripline semplicemente agendo su W .

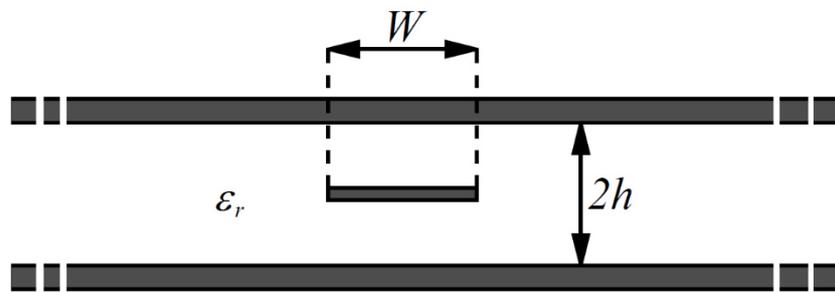


Figura 5. Geometria di una stripline: sezione trasversa.

Risulta inoltre molto semplice collegare in uno stesso nodo tre o più linee in parallelo, in modo da realizzare divisori oppure stub. Non è invece possibile collegare stub in serie.

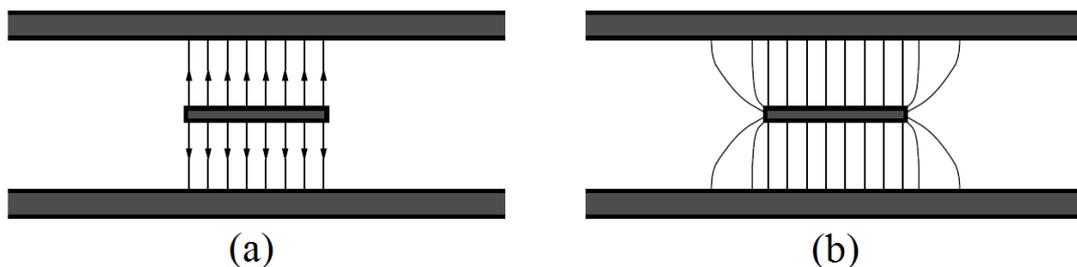


Figura 6. Campo elettrico di un condensatore a facce piane parallele (a sinistra) e campo elettrico vero di una stripline (a destra).

Uno svantaggio delle stripline è che non è possibile determinare in maniera semplice la distribuzione del campo all'interno di tale struttura, diversamente, ad esempio, da un cavo coassiale. Infatti, nonostante una stripline assomigli ad un condensatore a facce piane parallele, il campo non risulta concentrato sotto la strip centrale (come in Figura 6a), ma deborda lateralmente (Figura 6b). La capacità di una stripline è quindi maggiore, e di questo si può tenere conto introducendo una larghezza efficace W_e , definita in modo che la capacità di una stripline di larghezza W sia pari a quella di un condensatore a facce piane parallele di larghezza W_e .

$$C = 2\epsilon_r \frac{W_e}{h} \epsilon_0 \quad (1.39)$$

Nella (1.39) il fattore 2 tiene conto che, nella struttura, consideriamo due condensatori in parallelo.

Per una stripline la costante di propagazione vale

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\epsilon_0 \mu} = \omega \sqrt{LC} \quad (1.40)$$

$$\text{da cui } \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\epsilon_0 \mu} = \sqrt{LC} \Rightarrow L = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \mu}{C} \quad (1.41)$$

L'impedenza caratteristica è pertanto

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0 \mu}{C^2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\epsilon_0 \mu}}{C} = \frac{1}{2} h \frac{1}{W_e \sqrt{\epsilon_r}} \zeta_0 = \frac{1}{2} \frac{\zeta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{h}{W_e} \quad (1.42)$$

Dalla (1.42) è evidente che il problema si è spostato al calcolo di W_e . Da una analisi matematica del problema si trova che, per una strip infinitamente sottile⁽¹⁾, la larghezza equivalente è molto ben approssimata da

$$W_e = W + \frac{4 \ln 2}{\pi} h \quad (1.43)$$

Il concetto della larghezza efficace è utile in molti casi, ed è quindi ampiamente usato. Ad esempio, si assume che due stripline affiancate interagiscano in maniera consistente se la loro distanza è tale che le loro larghezze W_e si sovrappongano, e sono invece abbastanza indipendenti se ciò non avviene.

Per quanto riguarda i piani di massa, questi dovrebbero essere infiniti. Tuttavia si assume che, se la distanza tra la stripline e il bordo di piani di massa è di almeno 6 volte la dimensione della zona centrale (ovvero del più grande tra W ed h), allora il piano di massa si comporta come se fosse infinito. Per distanze più piccole, ovviamente, l'approssimazione insita nel considerare infinito un piano di massa che è in realtà finito risulta via via meno buona. Comunque tale approssimazione risulta accettabile se la distanza è di almeno 4 volte la dimensione della zona centrale.

Come per il cavo coassiale, anche per una stripline esiste una frequenza limite che può essere calcolata a partire da W_e . Si trova che la frequenza limite deve essere significativamente più piccola (60%-70%) di

$$f_L = \frac{c_0}{2W_e \sqrt{\epsilon_r}} \quad (1.44)$$

Ad esempio, una stripline in Teflon ($\epsilon_r = 2.2$) con larghezza pari a 5 mm può essere usata sino a una frequenza limite di circa 14 GHz, avendo utilizzato un margine di sicurezza del 30%. Per alzare la frequenza limite occorre ridurre la larghezza della stripline. Ciò è possibile, mantenendo inalterata l'impedenza, solo se si riduce proporzionalmente lo spessore del substrato.

Si vede cioè che lo spessore del substrato va scelto sulla base della massima frequenza a cui si vuole utilizzare la struttura, oltrechè per considerazioni di tipo economico e costruttivo. Stripline a

¹ Lo spessore tipico della metallizzazione è di 30–50 μm . L'ipotesi di metallizzazione infinitamente sottile è una ragionevole approssimazione solo se W risulta molto più grande dello spessore, altrimenti occorre utilizzare espressioni più complesse che tengono conto anche dello spessore.

frequenze molto elevate (100 GHz o più) richiederebbero substrati molto sottili. Poiché tali substrati sono di difficile realizzazione (e di conseguenza costosi), ne segue che a tali frequenze si preferisce utilizzare strutture guidanti diverse.

Il principale svantaggio dell'uso di una stripline è la necessità di avere un ulteriore piano di massa al di sopra della struttura. Oltre a una certa maggiore difficoltà realizzativa, e al maggior costo dovuto al substrato di elettrico che va posto sopra le linee di guida, quest'ulteriore piano di massa impedisce completamente l'inserzione di componenti concentrati (sia passivi, sia attivi), e, inoltre, non consente una messa a punto del circuito, mediante modifica meccanica delle linee di guida (eliminazione o aggiunta di metallizzazione).

2. PROPAGAZIONE QUASI TEM

2.1 Microstriscie

Gli svantaggi della stripline sono legati alla presenza del secondo substrato e relativo piano di massa. Ovviamente questi inconvenienti possono essere superati eliminando completamente sia il dielettrico superiore, sia il piano di massa di chiusura, ottenendo una struttura che prende il nome di *microstriscia* o *microstrip*. Naturalmente, per una tale struttura, l'ipotesi di dielettrico trasversalmente omogeneo cade in quanto il campo elettromagnetico si sviluppa in parte tra la microstriscia di guida e il piano di massa inferiore (quindi nel dielettrico), e in parte al di sopra della microstriscia stessa, quindi nel vuoto. La propagazione in una microstrip non può quindi essere di tipo TEM, almeno se la frequenza è maggiore di zero, il che è ovviamente il caso che ci interessa.

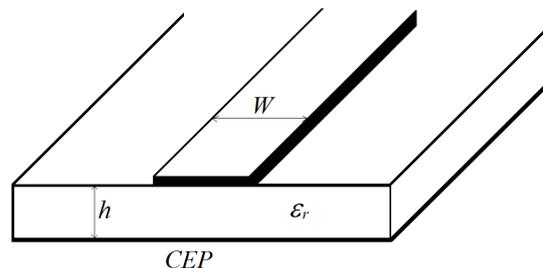


Figura 7. Microstriscia.

Se però le dimensioni trasverse della struttura (W ed h in Fig. 7) sono considerevolmente più piccole della lunghezza d'onda, il campo elettromagnetico in una microstrip è molto simile a un campo TEM, nel senso che le componenti longitudinali del campo elettrico e del campo magnetico sono molto più piccole di quelle trasverse. Questo tipo di campo prende il nome di campo quasi-TEM, e esiste, *più o meno con le stesse caratteristiche*, non solo in una microstrip, ma in qualunque struttura planare con dielettrico non omogeneo, purchè tale struttura supporti, a frequenza nulla, un campo elettrostatico.

Oltre ad avere le componenti longitudinali dei campi molto più piccole di quelle trasverse, la principale caratteristica di un campo quasi-TEM è quella di avere una costante di propagazione sostanzialmente indipendente dalla frequenza, e intermedia tra le costanti di propagazione dei materiali che riempiono la struttura stessa. Se prendiamo in considerazione strutture prive di perdite, la costante di propagazione β viene normalmente scritta nella forma

$$\beta = \sqrt{\epsilon_e} \beta_0 \quad (2.1)$$

dove β_0 è la costante di propagazione nel vuoto alla stessa frequenza, e la costante dielettrica efficace ϵ_e assume un valore intermedio tra le costanti dielettriche relative dei vari mezzi. Per capire meglio le caratteristiche della propagazione in una microstriscia, nel paragrafo precedente verranno studiate le caratteristiche generali della propagazione quasi-TEM.

2.2 Campi quasi-TEM

Nelle strutture con un dielettrico trasversalmente non omogeneo (come ad esempio nelle microstriscie), non sono possibili campi TEM, eccetto che per frequenza nulla. E' ragionevole tuttavia supporre che, per *basse* frequenze, il campo sia molto simile ad un campo TEM ovvero:

- abbia le stesse caratteristiche trasverse;

- le componenti longitudinali siano sufficientemente piccole e possano essere trascurate.
 Per studiare questo caso consideriamo le equazioni di Maxwell, di cui però cerchiamo direttamente soluzioni che varino con z come $\exp(-j\beta z)$ in modo tale che:

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -j\beta \quad (2.2)$$

La costante β è ovviamente da determinare.

Utilizzando le espressioni (1.2), e separando le componenti trasverse e quelle longitudinali, le equazioni di Maxwell diventano, rispettivamente:

$$\begin{cases} \underline{i}_z \times (-j\beta \underline{E}_t) + \nabla_t E_z \times \underline{i}_z = -j\omega\mu \underline{H}_t \\ \underline{i}_z \times (-j\beta \underline{H}_t) + \nabla_t H_z \times \underline{i}_z = j\omega\varepsilon \underline{E}_t \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = -j\omega\mu H_z \underline{i}_z \\ \nabla_t \times \underline{H}_t = j\omega\varepsilon E_z \underline{i}_z \end{cases} \quad (2.4)$$

Per semplificare, sia pure in modo approssimato, queste equazioni, occorre valutare l'ordine di grandezza delle derivate spaziali rispetto alle coordinate trasverse. Per fare ciò consideriamo una funzione generica $f(x)$ e sia

Δx un intervallo in cui questa funzione varia in modo *significativo*.

Si può scrivere in modo approssimato:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.5)$$

Dire che in Δx la funzione $f(x)$ varia in modo *significativo* equivale a dire che

$$f(x + \Delta x) - f(x) = O[f(x)] \quad (2.6)$$

e quindi

$$\frac{df(x)}{dx} = O\left[\frac{f(x)}{\Delta x}\right] \quad (2.7)$$

Esempio

$$f(x) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

Un intervallo Δx è una frazione *significativa* di λ , ad esempio $\lambda/8$. Pertanto l'ordine di grandezza di $f'(x)$ valutato tramite la (2.7) è $8/\lambda$. In realtà $f'(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$ ed ha un ordine di grandezza pari a $\frac{2\pi}{\lambda}$ che è perfettamente coerente con la stima precedente.

Nel caso della microstriscia la scala di variazione che interessa è dell'ordine di grandezza di una frazione di W o di h (Fig. 7). Detta "s" tale scala di variazione risulta:

$$\nabla_t \times \underline{E}_t = O \left[\frac{|\underline{E}_t|}{s} \right]$$

$$\nabla_t E_z = O \left[\frac{|E_z|}{s} \right]$$

Ricordando che $\underline{H}_{t,z} = O \left[\frac{|\underline{E}_{t,z}|}{\zeta} \right]$, per la prima delle (2.3) si ottiene:

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{i}_z \times (-j\beta \underline{E}_t) + \nabla_t E_z \times \underline{i}_z = -j\omega\mu \underline{H}_t & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \frac{2\pi}{\lambda} O[|\underline{E}_t|] & O \left[\frac{|E_z|}{s} \right] & \omega\mu O[|\underline{H}_t|] \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \frac{2\pi}{\lambda} O[|\underline{E}_t|] & O \left[\frac{|E_z|}{s} \right] & \frac{\omega\mu}{\zeta} O[|\underline{E}_t|] \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \frac{2\pi}{\lambda} O[|\underline{E}_t|] & O \left[\frac{|E_z|}{s} \right] & \frac{2\pi}{\lambda} O[|\underline{E}_t|]
 \end{array} \tag{2.8}$$

Abbiamo detto che s è dell'ordine di grandezza di W e h . Quindi, se $\lambda \gg \max(W, h)$ il primo e il terzo termine della (2.8), che dipendono da $1/\lambda$, sono trascurabili rispetto al secondo termine, che dipende da $1/s$. Dalla (2.8) rimane pertanto:

$$\nabla_t E_z = 0 \tag{2.9}$$

Analogamente dalla seconda delle (2.3) si ottiene

$$\nabla_t H_z = 0 \tag{2.10}$$

Per quanto riguarda le (2.4)

$$\begin{array}{ccc}
 \nabla_t \times \underline{E}_t = -j\omega\mu H_z \underline{i}_z & & \\
 \downarrow & \downarrow & \\
 O \left[\frac{|\underline{E}_t|}{s} \right] & O \left[\frac{|E_z|}{\lambda} \right] & \\
 & & \tag{2.11}
 \end{array}$$

Da cui deriva, per $\lambda \gg s$,

$$\nabla_t \times \underline{E}_t = 0$$

e, analogamente, $\nabla_t \times \underline{H}_t = 0$.

In conclusione, con l'approssimazione di *bassa* frequenza, ossia che la lunghezza d'onda sia molto maggiore rispetto alle dimensioni trasverse della struttura, si ottiene:

$$\begin{cases} \nabla_t E_z = 0 \\ \nabla_t H_z = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t = 0 \\ \nabla_t \times \underline{H}_t = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Dalla (2.12) deriva che E_z ed H_z sono costanti e quindi nulli (sono nulli all'infinito e quindi sono nulli dappertutto), e dalla (2.13) che \underline{E}_t ed \underline{H}_t sono separatamente irrotazionali. Mentre nel caso dei campi TEM, \underline{E}_t ed \underline{H}_t sono collegati dalle equazioni di Maxwell (1.4), nel caso quasi-TEM le equazioni per \underline{E}_t ed \underline{H}_t sono disaccoppiate.

Poiché le equazioni alle divergenze forniscono:

$$\begin{cases} \nabla_t \cdot \underline{E}_t = 0 \\ \nabla_t \cdot \underline{H}_t = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

allora \underline{E}_t può essere determinato risolvendo lo stesso problema elettrostatico del caso TEM, ovviamente in una struttura che presenta un dielettrico non omogeneo.

Occorre precisare che, dal momento che nel caso quasi-TEM \underline{E}_t ed \underline{H}_t non sono collegati, sarà necessario risolvere anche l'equazione per \underline{H}_t . Tuttavia, per determinare \underline{H}_t , non si risolve il problema magnetostatico, che spesso risulta di difficile soluzione, ma si procede in modo indiretto. In particolare, si risolve un secondo problema elettrostatico in una struttura con gli stessi conduttori e con la stessa geometria della struttura guidante di partenza, ma con un dielettrico omogeneo (il vuoto). In altre parole, la struttura utilizzata per il calcolo del campo \underline{H}_t viene creata a partire dalla struttura di partenza, sostituendo il vuoto al posto di tutti i dielettrici presenti. Nel caso della microstriscia, ad esempio, il secondo problema elettrostatico è relativo alla struttura mostrata in Figura 8, dove il dielettrico ϵ_r è stato sostituito dal vuoto.

È facile capire che il campo \underline{H}_t è lo stesso nella struttura di partenza e nella struttura resa omogenea, perché non dipende dal valore di ϵ_r . Chiamiamo $\underline{E}_t^{(o)}, \underline{H}_t^{(o)}$ il campo calcolato nella struttura resa omogenea. Questo campo è un campo TEM, e quindi, dalla soluzione del problema elettrostatico, possiamo determinare $\underline{E}_t^{(o)}$ e, di conseguenza, anche $\underline{H}_t^{(o)}$, perché nel caso TEM il campo magnetico è legato al campo elettrico dalle equazioni di Maxwell (1.4). Per quanto detto, $\underline{H}_t = \underline{H}_t^{(o)}$ ed è quindi possibile determinare il campo magnetico \underline{H}_t dalla soluzione di un secondo problema elettrostatico.

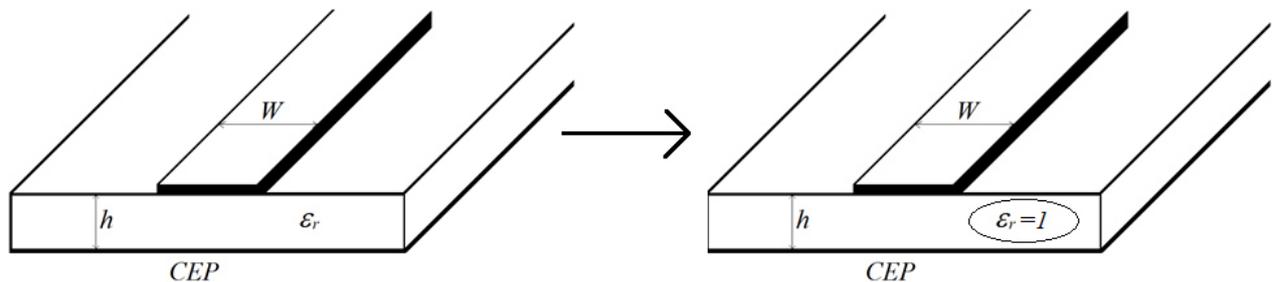


Figura 8. Microstriscia (sinistra) e struttura modificata per il calcolo del campo \underline{H}_t

Dalla soluzione del problema elettrostatico nella struttura con dielettrico inhomogeneo trovo una capacità $C = \epsilon A$

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \int_{S_i} |\underline{e}|^2 dS = \varepsilon_r \varepsilon_0 \int_{S_i} |\nabla_t \varphi|^2 dS \quad (2.15)$$

Dalla soluzione del problema elettrostatico nella struttura resa omogenea, con il vuoto al posto del dielettrico, trovo una capacità C_0

$$C^{(o)} = \varepsilon_0 \int_{S_i} |\underline{e}^{(o)}|^2 dS = \varepsilon_0 \int_{S_i} |\nabla_t \varphi^{(o)}|^2 dS \quad (2.16)$$

In quest'ultimo caso risulta

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \omega \sqrt{L^{(o)} C^{(o)}} \rightarrow L^{(o)} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{C^{(o)}} \quad (2.17)$$

Poiché l'induttanza L , così come il campo magnetico \underline{H}_t non dipende dal dielettrico, si ottiene:

$$L = L^{(o)} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{C^{(o)}} \quad (2.18)$$

Noti C ed L per la struttura quasi-TEM di partenza (rispettivamente dalle (2.15 e 2.18) si ha:

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{C^{(o)}} C} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\frac{C}{C^{(o)}}} = \beta_0 \sqrt{\varepsilon_e} \quad (2.19)$$

$$\text{con } \varepsilon_e = \frac{C}{C^{(o)}}.$$

Tutto questo discorso vale ovviamente a patto che la frequenza sia sufficientemente bassa (cioè $\lambda \gg \max(W, h)$). Per frequenze più alte la propagazione diventa dispersiva e insorgono dei campi le cui componenti longitudinali non possono essere trascurate.

In conclusione si può dire che la costante dielettrica efficace è una media delle costanti dielettriche relative dei vari mezzi, pesata sulla distribuzione del campo elettrico. In altri termini, nel calcolare tale media, le zone in cui il campo elettrico è elevato pesano più delle zone in cui il campo elettrico è piccolo. Nel caso di una microstrip, poichè il campo elettrico è principalmente concentrato tra la striscia metallica di guida e il piano di massa (Fig. 9), la costante dielettrica efficace risulta più vicina alla costante dielettrica del substrato piuttosto che a 1 (costante dielettrica relativa del vuoto). Ovviamente, quanto più è larga la striscia di guida rispetto allo spessore del substrato, tanto più il campo risulta confinato all'interno del substrato stesso, e quindi tanto più la costante dielettrica efficace si avvicina a quella relativa del substrato.

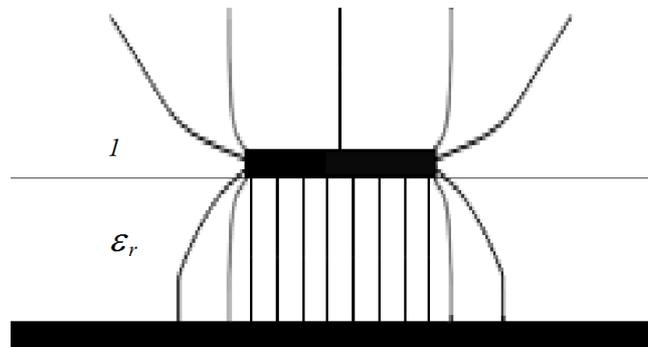


Figura 9. Distribuzione del campo in una microstriscia.

2.3 Analisi e progetto di linee a microstriscia

Per una microstrip, e per tutte le altre strutture quasi-TEM, esistono un certo numero di espressioni approssimate che legano la costante dielettrica efficace ai parametri geometrici ed elettromagnetici della struttura. Tali espressioni hanno precisioni diverse, e complessità diversa: normalmente le formule più precise sono anche quelle più complesse. Una espressione sufficientemente precisa della costante dielettrica efficace per una microstriscia è la seguente:

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 12 \frac{h}{W}}} + \Xi \left(\frac{W}{h} \right) \right] \quad (2.20)$$

$$\text{dove } \Xi \left(\frac{W}{h} \right) = \begin{cases} 0.04 \left(1 - \frac{W}{h} \right)^2 & \frac{W}{h} < 1 \\ 0 & \frac{W}{h} \geq 1 \end{cases}$$

Da tale espressione, e dall'andamento della costante dielettrica efficace al variare di W/h , riportato in Figura 10, si vede immediatamente quando detto sopra relativamente alla interpretazione della costante dielettrica efficace come media pesata delle costanti dielettriche relative. In particolare, ε_e risulta maggiore della media aritmetica delle costanti dielettriche relative (il primo termine della 2.20), ed è tanto maggiore quanto più grande è il rapporto W/h , che (sotto radice) risulta a fattore del secondo addendo della (2.20).

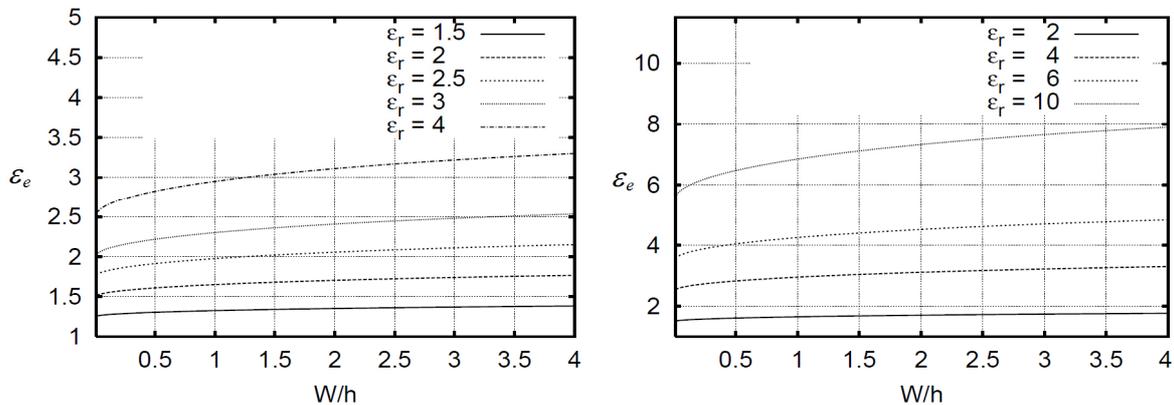


Figura 10. Andamento della costante dielettrica efficace per una microstrip.

Per linee molto larghe $W \gg h$, la costante dielettrica efficace tende ad ε_r . Ha quindi interesse la differenza tra ε_e e ε_r , che è mostrata in Figura 11.

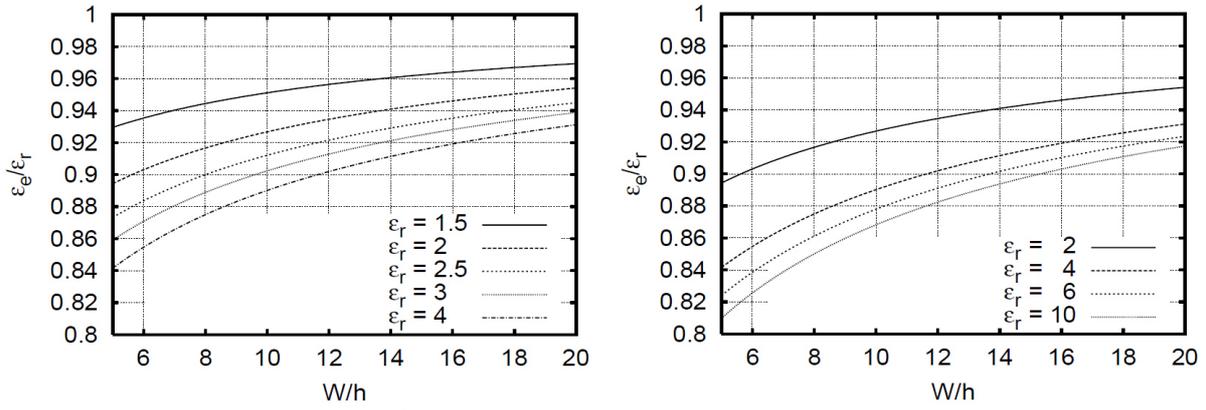


Figura 11. Valore del rapporto $\varepsilon_e/\varepsilon_r$ per una microstriscia.

La costante dielettrica efficace può anche essere espressa tramite il cosiddetto fattore di riempimento q , definito da

$$\varepsilon_e = q\varepsilon_r + (1-q) \cdot 1 \quad (2.21)$$

Per quanto riguarda l'impedenza di una microstriscia, questa è legata, oltre che alla costante dielettrica efficace, anche al rapporto tra la larghezza della linea e lo spessore del substrato. Analogamente alle stripline (1.37), anche per una microstriscia è utile definire una larghezza efficace W_e , con la quale è possibile esprimere la capacità nella forma

$$C = \varepsilon_e \frac{W_e}{h} \varepsilon_0 \quad (2.22)$$

e quindi l'impedenza nella forma

$$Z = \frac{\zeta_0}{\sqrt{\varepsilon_e}} \frac{h}{W_e} \quad (2.23)$$

Per calcolare la larghezza efficace possono essere utilizzate le equazioni seguenti, in dipendenza dal valore di W/h

$$W_e = \begin{cases} W + \left[1.393 + 0.667 \ln \left(\frac{W}{h} + 1.444 \right) \right] h & W > h \\ \frac{2\pi}{\ln \left[\frac{8h}{W} + \frac{W}{4h} \right]} h & W < h \end{cases} \quad (2.24)$$

Come già detto per ε_e , queste sono espressioni approssimate, ricavate a partire dai risultati di analisi elettromagnetiche accurate, adattando a tali risultati delle espressioni semplici. In particolare, le espressioni precedenti, e le altre che vedremo, forniscono risultati con un errore massimo del 2%.

La larghezza efficace di una microstriscia è evidentemente maggiore della sua larghezza fisica W , ma la differenza dipende anche dal valore di W . Per microstrip abbastanza sottili ($W < 2h$), tale differenza è prossima a $2h$, e poi aumenta con W . In Fig. 12 è riportata la differenza normalizzata tra la larghezza efficace e quella vera, limitatamente al caso di microstrip larghe.

Anche per le microstrip la larghezza efficace può essere utilizzata per valutare se due microstrip parallele interagiscono oppure no.

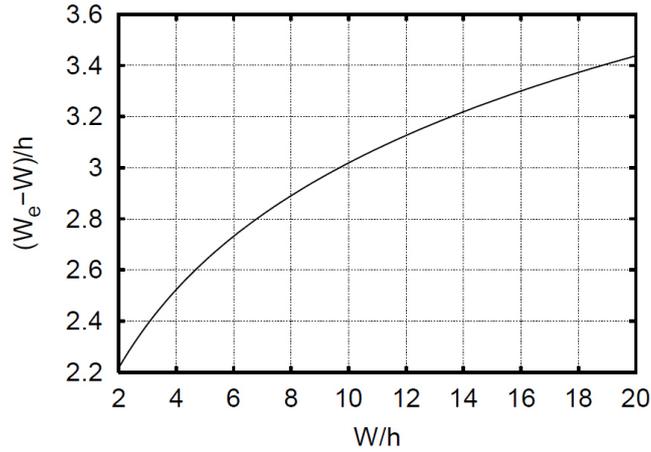


Figura 12. Allargamento di una microstriscia.

Una differenza sostanziale tra microstrip e stripline è nella sintesi, ovvero nella determinazione della larghezza W necessaria per ottenere una data impedenza. Nel caso di una stripline, il procedimento è molto semplice (tramite le equazioni 1.37 e 1.38), mentre la dipendenza di ε_e da W in una microstrip rende molto più complicato invertire le equazioni di analisi.

Sono quindi state sviluppate delle equazioni di sintesi, che forniscono direttamente W in funzione della impedenza Z_0 che si vuole ottenere

$$Z_0 \sqrt{\varepsilon_e} > 89.91 \quad \frac{W}{h} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} \quad (2.25)$$

$$Z_0 \sqrt{\varepsilon_e} < 89.91 \quad \frac{W}{h} = \frac{2}{\pi} \left\{ B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r} \left[\ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\varepsilon_r} \right] \right\} \quad (2.26)$$

con

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\varepsilon_r + 1}{2}} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \left[0.23 + \frac{0.11}{\varepsilon_r} \right]$$

$$B = \frac{60\pi^2}{Z_0 \sqrt{\varepsilon_r}}$$

Si noti che la scelta tra le due equazioni di sintesi 2.25 e 2.26 dipende da un parametro incognito, ovvero ε_e , che dipende da W . Poiché $\varepsilon_e < \varepsilon_r$, se $Z_0 \sqrt{\varepsilon_r} < 89.91$, può comunque essere usata la seconda. Negli altri casi andrebbero utilizzate entrambe, per vedere, a posteriori, quale delle due è applicabile. Tuttavia una stima del valore di ε_e è possibile (vedi Figg. 10, 11), e quindi, in genere, è possibile valutare quale delle due equazioni è probabilmente quella da utilizzare.

2.4 Perdite nelle microstriscie

La presenza di perdite nel dielettrico o nel metallo conduce evidentemente ad una dissipazione di potenza. Esaminiamo in dettaglio i due meccanismi.

Le perdite nel dielettrico possono essere modellate tramite una σ_d oppure una parte immaginaria di ε_r . Non è però possibile utilizzare le espressioni generali delle linee con perdite nel dielettrico (che invece valgono nei cavi coassiali e nelle stripline) in quanto le perdite ci sono solo in parte della sezione trasversa. Se ne può tener conto (analogamente a quanto fatto per la costante dielettrica)

introducendo nel calcolo della costante di propagazione una conducibilità efficace σ_e , media pesata delle conducibilità delle due zone, che può essere semplicemente calcolata tramite il fattore di riempimento

$$\sigma_e = q\sigma_d + (1-q) \cdot 0 \quad (2.27)$$

in quanto la conducibilità dell'aria è pari a 0. Partendo dalla parte immaginaria di ε_r , occorre prima ricavarsi la σ_d e poi calcolare σ_e . Tuttavia alcune espressioni di ε_e , come quelle da noi utilizzate, consentono di calcolare la costante dielettrica efficace complessa utilizzando quest'espressione in cui, al posto di ε_r , va inserita la costante dielettrica equivalente (complessa) del substrato, ovvero quella che tiene conto delle perdite.

Più complesso è il discorso relativo alle perdite sul metallo. Dal discorso generale sulle perdite nei conduttori, sappiamo che se il conduttore è un buon conduttore, ovvero se la sua conducibilità σ_c soddisfa a

$$\frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_c} \gg 1 \quad (2.28)$$

dove ε_c è la costante dielettrica relativa del conduttore stesso, allora possiamo includere le perdite nel modello delle linee di trasmissione aggiungendo una resistenza R per unità di lunghezza nel modello circuitale di linea, oppure una attenuazione $-j\alpha_c$ alla costante di propagazione della linea con conducibilità infinita.

Nella valutazione di tali parametri occorre considerare che il campo nel conduttore risulta confinato in una zona molto sottile vicino alla superficie del conduttore. La profondità di tale zona è dell'ordine di grandezza di alcune volte la profondità di penetrazione (o skin depth)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_c}} \quad (2.29)$$

che per i conduttori e le frequenze di interesse è tipicamente dell'ordine dei micron. Pertanto interverrà, nella valutazione di α_c , sia lo spessore della metallizzazione, sia la eventuale tolleranza di lavorazione (quest'ultima specie a frequenza elevata).

Trascurando la tolleranza di lavorazione, l'attenuazione α_c per una microstrip può essere calcolata da

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_0 W_e} K_i \quad (2.30)$$

dove R_s prende il nome di resistenza superficiale del metallo:

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta} \quad (2.31)$$

ed è tipicamente dell'ordine dei $m\Omega$, Z_0 è l'impedenza caratteristica della linea a microstrip e K_i tiene conto della effettiva distribuzione (non uniforme) della corrente che scorre nel conduttore. Infatti la dissipazione dipende dal quadrato della corrente e, a parità di corrente media, la dissipazione è più grande se la corrente è distribuita in maniera molto variabile. Una espressione ragionevolmente approssimata per K_i , valida per spessori della metallizzazione di 30-50 μm , e per spessori del dielettrico almeno dieci volte più grandi è

$$K_i = 128 \frac{\exp\left(-4\pi \frac{h}{W_e}\right)}{4\pi \frac{h}{W_e}} \left(\frac{h}{W}\right)^2 \left(1 + 2.18 \frac{h}{W}\right) \quad (2.32)$$

Nell'espressione di α_c si osserva che l'attenuazione è inversamente proporzionale all'impedenza caratteristica della linea. Infatti quanto più alta è tale impedenza, tanto più piccola è la corrente che scorre sui conduttori per una data potenza trasmessa. Ovviamente, più piccola è la corrente, più piccola è la dissipazione. Questa dipendenza dall'impedenza caratteristica è presente sostanzialmente per tutte le strutture TEM e quasi-TEM.

Per quanto riguarda le costanti primarie in presenza di perdite sui conduttori, i valori di C ed L si possono calcolare in assenza di perdite (in quanto le perdite sui conduttori, valutate secondo quanto esposto in questo paragrafo, sono piccole). Anche l'eventuale G , che dipende solo dalle perdite nel dielettrico, può essere calcolata assumendo i conduttori privi di perdite.

Resta il calcolo di R che si ottiene facilmente da

$$k^2 = \omega^2 \left(L - j \frac{R}{\omega} \right) C = \omega^2 LC - j(\omega RC) \quad (2.33)$$

ricordando che in tali condizioni $k = \beta - j\alpha_c = \omega\sqrt{LC} - j\alpha_c$. Sviluppando segue:

$$k^2 = \beta^2 - \alpha_c^2 - j2\beta\alpha_c \cong \omega^2 LC - j2\omega\alpha_c\sqrt{LC} \quad (2.34)$$

avendo trascurato α_c^2 rispetto a β^2 , e, per confronto:

$$R = 2Z_0\alpha_c \quad (2.35)$$

2.5 Dispersione nelle microstriscie

Anche per le microstrip esiste una frequenza limite di utilizzo, valutabile in maniera analoga a quella delle stripline. Tuttavia, al contrario delle strutture TEM pure, la dipendenza dalla frequenza è molto più complessa, in quanto anche le caratteristiche propagative di una microstriscia dipendono da essa. Più precisamente, se la frequenza è molto più piccola della frequenza limite

$$f_L = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_e}} \frac{1}{2W_e} \quad (2.36)$$

allora costante dielettrica efficace, larghezza efficace, e quindi impedenza, sono indipendenti dalla frequenza. Per frequenze più elevate, ovvero che siano una frazione significativa di f_L , una microstriscia può essere ancora trattata come una linea di trasmissione (e quindi utilizzando le equazioni dei telegrafisti) ma i parametri di tale linea diventano dipendenti dalla frequenza, ovvero la propagazione nella linea di trasmissione è dispersiva. Pertanto per una microstriscia, e più in generale per qualunque struttura quasi-TEM, al variare della frequenza di utilizzo si ha dapprima una zona in cui la propagazione è quella di una linea di trasmissione non dispersiva, poi la propagazione diventa dispersiva, ma può essere ancora descritta mediante una linea di trasmissione, dopo di che il campo nella microstriscia comincia ad avere componenti longitudinali non più trascurabili e infine si supera la frequenza limite di utilizzo (2.36).

Per valutare i parametri al variare della frequenza si possono utilizzare delle espressioni approssimate, che forniscono direttamente la costante dielettrica equivalente $\epsilon_e(f)$, e l'impedenza

caratteristica $Z(f)$ al variare della frequenza, in funzione dei parametri geometrici, e di quelli propagativi ε_e , W_e , Z_0 , valutati però a bassa frequenza. Se occorre la larghezza efficace, poi, questa può essere calcolata da $Z(f)$ e $\varepsilon_e(f)$.

Per la costante dielettrica equivalente si ha:

$$\varepsilon_e(f) = \varepsilon_r + \frac{\varepsilon_e(0) - \varepsilon_r}{1 + G \frac{f^2}{f_p^2}} \quad (2.37)$$

$$\text{dove } f_p = f_L \text{ e } G = \sqrt{\frac{Z_0 - 50}{60}} - 0.004 Z_0$$

Per l'impedenza si ha invece:

$$Z(f) = Z_s + \frac{Z_0 - Z_s}{1 + G_M \frac{f^2}{f_g^2}} \quad (2.38)$$

$$\text{dove } Z_s = \frac{\zeta}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{h}{W + \frac{4 \ln(2)}{\pi} h} \text{ e } f_g = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{1}{2W}$$

mentre

$$G_M = \begin{cases} G & \frac{W}{h\sqrt{\varepsilon_r}} > \frac{2}{3} \\ \sqrt{\frac{Z_0 + 35}{20}} + 0.05 Z_0 & \frac{W}{h\sqrt{\varepsilon_r}} \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Dalle espressioni di costante dielettrica e impedenza al variare della frequenza, si vede che un ruolo importante è giocato dalla frequenza limite f_p e da f_g , che però risulta più alta di f_p . Infatti la propagazione può essere considerata non dispersiva se la frequenza è molto più bassa di f_p , o più precisamente di f_p/G (che sostanzialmente coincide con f_p , salvo che per linee con impedenza caratteristica molto bassa). In particolare, se $f < 0.15f_p/G$, la variazione di costante dielettrica è del 2% della differenza $\varepsilon_r - \varepsilon_e(0)$, e quindi l'errore che si commette in tal caso è quasi sempre trascurabile. Per l'impedenza possono essere trascurate variazioni anche del 2-3%, e quindi si può utilizzare l'impedenza statica Z_0 se $f < 0.25 f_g/G_M$.

Notiamo infine che le frequenze limite aumentano se si riduce W , o si riduce ε_r .

2.6 Discontinuità

Studieremo come si può tenere conto della presenza di discontinuità nella configurazione geometrica di una linea di trasmissione. Considereremo in dettaglio, e quantitativamente, il solo caso di una microstriscia ma le considerazioni generali valgono anche per le altre strutture guidanti che abbiamo considerato.

Per discontinuità nella configurazione geometrica intendiamo modifiche della forma dei conduttori, come ad esempio cambi di larghezza, terminazioni brusche, giunzioni tra più linee, curve e così via. Le discontinuità che hanno, invece, esattamente la forma trasversa della struttura, come ad esempio discontinuità di materiale (e quindi di costante dielettrica) o conduttori elettrici che *tappano* un cavo coassiale o una guida d'onda, non rientrano in tale classificazione e vengono trattati semplicemente con un salto brusco di impedenza della struttura guidante, o con un collegamento in cortocircuito dei due conduttori.

2.6.1 Terminazione aperta in microstriscia

La discontinuità più semplice è la terminazione brusca di una microstriscia (Fig. 1). In prima approssimazione questa terminazione, alla quale la corrente che scorre nella microstriscia si annulla bruscamente, può essere considerata come una terminazione aperta. Tuttavia, se è vero che la corrente di conduzione si interrompe bruscamente, è altrettanto vero che oltre la terminazione è presente una *corrente di spostamento* legata alla differenza di potenziale che ci sarà tra la terminazione della microstriscia e il piano di massa (Figura 13).

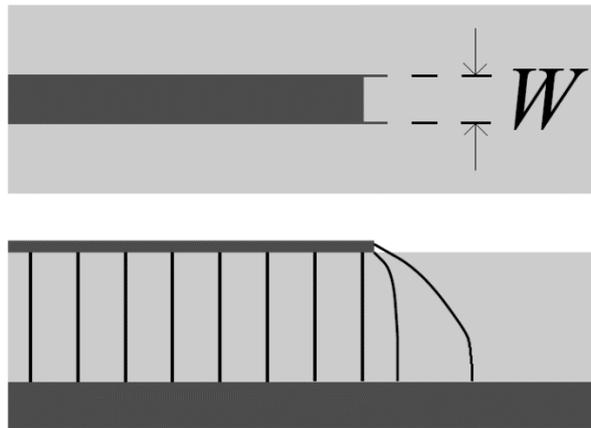


Figura 13. Terminazione aperta in microstriscia vista dall'alto e in sezione.

Tale corrente di spostamento è responsabile di un accumulo di energia elettrica attorno alla terminazione. Un miglior circuito equivalente della terminazione brusca sarà allora costituito da un condensatore. In altri termini, un tratto di linea a microstriscia di lunghezza L_f dovrà essere rappresentato con un tratto di linea di trasmissione di lunghezza L_f , terminato su un condensatore C_a , ovvero su di una impedenza (elevata) pari a $(j\omega C_a)^{-1}$ (Figura 14a). Poiché la stessa impedenza capacitiva può essere ottenuta con un piccolo tratto di linea chiuso su di un circuito aperto, una rappresentazione della linea a microstriscia aperta del tutto equivalente a quella di linea più capacità si ottiene considerando un unico tratto di linea (quindi senza la capacità) ma con una lunghezza maggiore di quella fisica L_f , ovvero con un allungamento ΔL (Figura 14b).

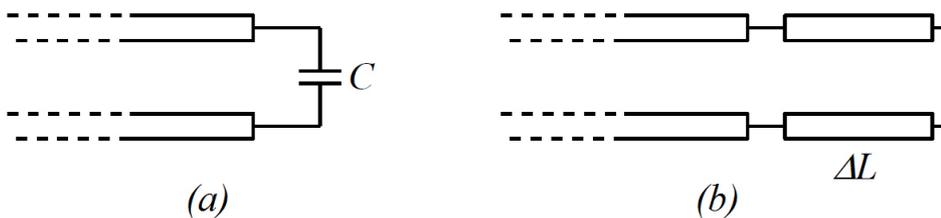


Figura 14. Possibili circuiti equivalenti di una terminazione aperta.

L'allungamento ΔL dipende dalle caratteristiche geometriche ed elettromagnetiche della microstriscia e può essere calcolato in modo approssimato usando la seguente espressione a seguente espressione:

$$\Delta L = 0.412 \left(\frac{\epsilon_e + 0.3}{\epsilon_e - 0.258} \right) \left(\frac{\frac{W}{h} + 0.264}{\frac{W}{h} + 0.813} \right) h \quad (2.39)$$

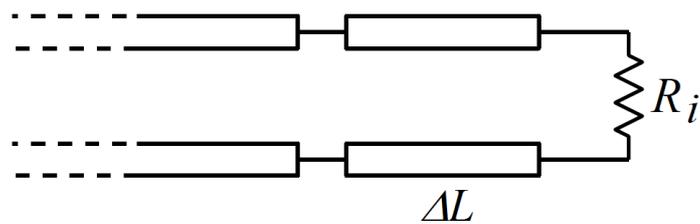


Figura 15. Circuito equivalente di un terminazione aperta.

Nella maggior parte dei casi l'allungamento della terminazione aperta è sufficiente a fornire risultati accurati. Tuttavia, se la linea è molto larga è necessario includere una resistenza alla fine del tratto di linea aggiuntivo di lunghezza ΔL (come mostrato in Figura 15):

$$R_{irr} = 90 \left(\frac{\lambda}{W_e} \right)^2 \Omega \quad (2.40)$$

Questa resistenza tiene conto della inevitabile perdita di potenza per irradiazione che si ha alla terminazione stessa.

2.6.2 Salto di impedenza

Anche nel caso di un cambio brusco di larghezza di una microstriscia (Figura 16), come nel caso di una terminazione aperta, si ha un accumulo di energia elettrica, che sarà però presente solo in corrispondenza delle parti della linea più larga che si estende oltre la linea più sottile. La capacità corrispondente (da collegarsi in parallelo alla giunzione delle due linee, ovvero in corrispondenza della sezione A–A) potrà pertanto essere ottenuta a partire dalla capacità di una terminazione aperta di larghezza pari alla linea più larga e riducendola del rapporto tra la linea più sottile e quella più larga.

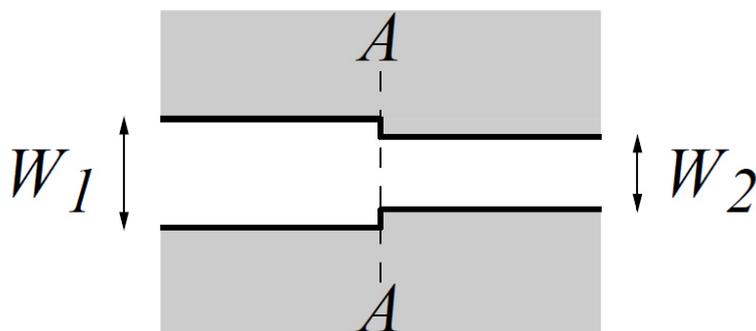


Figura 16. Salto di impedenza in microstriscia.

Si può ragionare anche in termini di allungamenti, il che fornisce un circuito equivalente notevolmente più maneggevole. In particolare, si trova che la linea più larga si allunga di un tratto ΔL_1 , e quella più sottile si accorcia di un tratto ΔL_2 , come mostrato nella Figura 17.

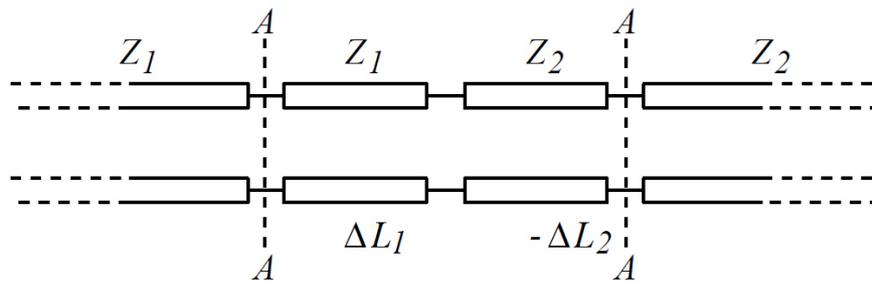


Figura 17. Circuito equivalente di un salto di impedenza.

Allungamento e accorciamento sono diversi tra loro, e proporzionali entrambi all'allungamento ΔL_0 di una terminazione aperta in una linea di larghezza pari alla linea più larga ($W_1 > W_2$ nel nostro caso).

Se W_{e1} e W_{e2} sono le larghezze efficaci delle due linee, si ha:

$$\Delta L_1 = \Delta L_0 \frac{W_{e1}}{W_{e1} + W_{e2}} \quad (2.41)$$

$$\Delta L_2 = \Delta L_0 \frac{W_{e2}}{W_{e1} + W_{e2}} \quad (2.42)$$

In particolare, si vede da tali espressioni che se una linea è molto più larga dell'altra, allora la linea sottile mantiene inalterata la sua lunghezza, e quella larga subisce esattamente lo stesso allungamento della corrispondente terminazione aperta.

2.6.3 Discontinuità trasverse

Le discontinuità viste fino ad ora risultano essere discontinuità longitudinali, ovvero estese solo nel senso di propagazione del campo nella linea. Possono quindi essere trattate cambiando semplicemente la lunghezza delle linee. Vi sono poi anche discontinuità trasversali, come ad esempio curve o giunzioni tra più linee, che richiedono una maggiore cura. Per tali discontinuità, infatti, occorre tener conto che le linee fisiche hanno una estensione trasversa finita, mentre il modello linea di trasmissione (essendo monodimensionale) prevederebbe una estensione trasversa infinitesima.

Si può tener conto di ciò mediante un passaggio intermedio tra la struttura fisica in microstrip e la linea di trasmissione, trasformando prima la struttura fisica in un insieme di linee infinitesime (mantenendo lunghezze e connessioni) corrispondenti alla mezzera della struttura fisica. Successivamente questo insieme di linee infinitesime viene trasformato nel circuito il linea di trasmissione. In tal modo si ottiene il circuito equivalente in assenza di correzioni. Infine a tale circuito vanno applicate le correzioni, che nel nostro caso saranno essenzialmente correzioni di lunghezza.

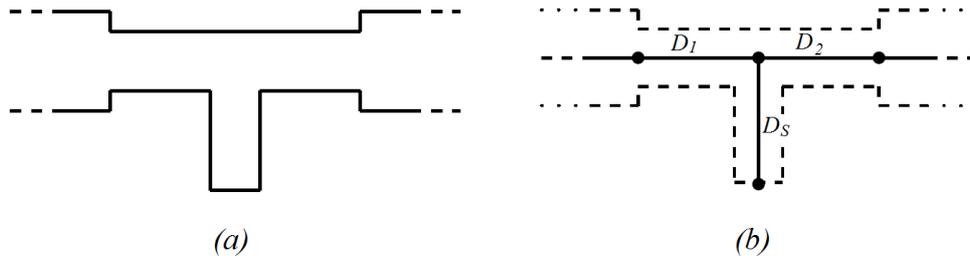


Figura 18. Microstrip con giunzione a T (sinistra) e linee infinitesime corrispondenti.

In Figura 18a è riportato un esempio per un circuito con discontinuità longitudinali e stub. In Fig. 18b è riportato il circuito tracciato con linee infinitesime, ed il circuito effettivo è disegnato tratteggiato. Si notino i punti che corrispondono a tutte le discontinuità (o meglio, ai punti centrali delle stesse). Ogni tratto di linea infinitamente sottile diventa un tratto di linea di trasmissione (con costanti opportune), e la sua lunghezza, senza correzioni, è quella tra i due punti. Il corrispondente circuito equivalente è mostrato in Figura 19. Le lunghezze D_1 e D_2 sono (in assenza di correzioni) le distanze tra il centro della giunzione a T e le due discontinuità di impedenza, mentre D_s , sempre in assenza di correzioni, è la lunghezza dello stub misurata tra il *centro* della giunzione a T e l'estremità della microstrip.

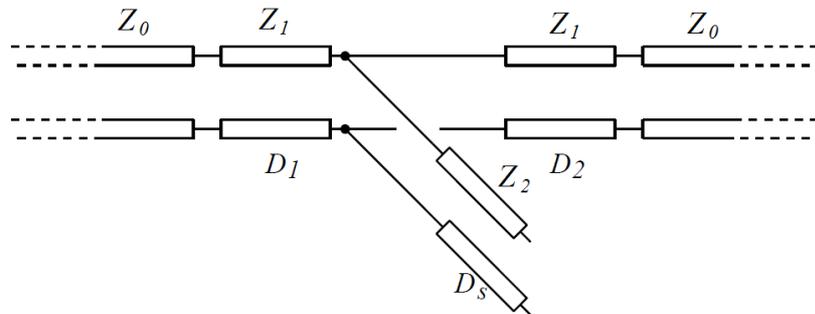


Figura 19. Circuito equivalente della rete in Figura 18 senza correzioni.

A questo punto vanno inserite le correzioni. Noi consideriamo qui solo la curva ad angolo retto e la giunzione a T simmetrica, in cui il ramo passante ha la stessa larghezza da entrambi i lati. Per quest'ultima, l'effetto principale è un accorciamento del ramo derivato, pari a

$$d_T = \frac{\zeta_0}{Z_1 \sqrt{\epsilon_{e,1}}} \left\{ 0.5 - 0.16 \frac{Z_1}{Z_2} \left[1 - \ln \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) \right] \right\} h \quad (2.43)$$

con Z_1 impedenza caratteristica della linea principale e $\epsilon_{e,1}$ la sua costante dielettrica efficace, e Z_2 l'impedenza della linea derivata. Ovviamente, per quanto riguarda il circuito in Figura 18, occorre poi tenere conto anche dell'allungamento dovuto alla terminazione aperta dello stub derivato, e dell'allungamento/accorciamento dovuto ad i salti di impedenza Z_0/Z_1 sulla linea principale.

L'accorciamento del ramo derivato (2.43) può essere spiegato considerando che un segnale lanciato su questo ramo, e prelevato sui due lati del ramo passante, non procede in realtà sul percorso al centro delle linee, ma tende a seguire un percorso curvo (per accoppiamento capacitivo) il quale risulta più corto del precedente.

Per quanto riguarda la curva ad angolo retto, invece, questa può essere pensata come una giunzione a T simmetrica in cui uno dei lati del ramo passante è in realtà uno stub aperto di lunghezza fisica pari a metà della larghezza del ramo derivato, come si vede dal disegno delle linee infinitamente sottili di Figura 20.

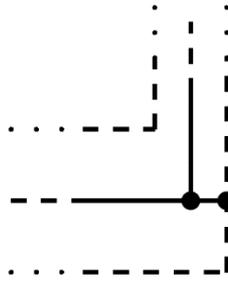


Figura 20. Schema di una curva ad angolo retto in microstriscia.

Pertanto la lunghezza totale, calcolata sui centri delle microstrisce, va ridotta dell'accorciamento della giunzione a T, e poi occorre aggiungere una impedenza capacitiva, pari all'impedenza di ingresso dello stub, di lunghezza pari alla sua lunghezza fisica più l'allungamento di un circuito aperto.

Gli stessi ragionamenti possono essere utilizzati per passare dal circuito in linea di trasmissione alla struttura in microstrip (sintesi). Per prima cosa si determinano i valori delle lunghezze delle microstrip senza correzioni. Ovviamente un allungamento (ad es., terminazione aperta) implica che la lunghezza della microstrip da realizzare sia più corta, mentre un accorciamento (ad es., braccio derivato della T) implica che la linea è più lunga. Dopodichè si traccia il circuito in microstrip con linee infinitamente sottili e infine si tiene conto dello spessore delle microstrip (simmetricamente dai due lati).

2.7 Metodo delle differenze finite

La tecnica delle differenze finite è una procedura impiegata per risolvere le equazioni differenziali in modo numerico e si basa sull'approssimazione delle derivate con equazioni alle differenze finite. Nel nostro caso questo metodo verrà utilizzato per soluzione delle equazioni di Maxwell (o delle equazioni per il potenziale) per una struttura guidante TEM o quasi-TEM.

Consideriamo come esempio una Stripline, che, come noto, è una struttura che supporta un campo TEM.

Come è noto per lo studio delle caratteristiche di una struttura guidante TEM occorre risolvere un problema elettrostatico bidimensionale. Partiamo dunque dalla sezione trasversa della stripline, che è mostrata in Figura 21.

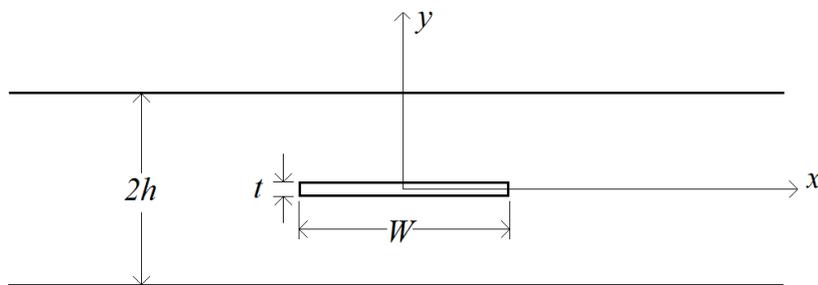


Figura 21. Sezione trasversa di una stripline

Per calcolare il campo nella stripline occorre risolvere l'equazione di Laplace:

$$\nabla_t^2 \varphi(x, y) = 0 \quad (2.44)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \varphi = 1 & \text{sul conduttore interno} \\ \varphi = 0 & \text{sul conduttore esterno} \end{cases} \quad (2.45)$$

La soluzione della (2.44) sarà ovviamente una funzione delle variabili continue x e y .

L'approssimazione che viene introdotta dalla tecnica delle differenze finite consiste nel valutare la funzione $\varphi(x, y)$ solamente nei punti di una griglia regolare di spaziatura Δx , Δy (Figura 22).

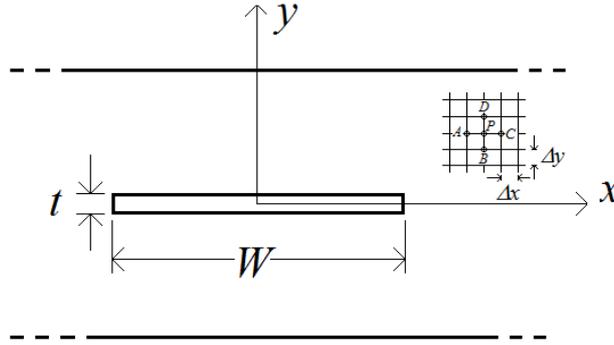


Figura 22. Schema di discretizzazione della sezione trasversale della stripline.

Applicando la formula di Taylor nei punti A, B, C, e D della griglia mostrata in Figura 22 si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi_A &\cong \varphi_P + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_P (-\Delta x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_P (-\Delta x)^2 \\ \varphi_C &\cong \varphi_P + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_P (\Delta x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_P (\Delta x)^2 \\ \varphi_B &\cong \varphi_P + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_P (-\Delta y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_P (-\Delta y)^2 \\ \varphi_D &\cong \varphi_P + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_P (\Delta y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_P (\Delta y)^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Sommando membro a membro la prima con la seconda e la terza con la quarta si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_P &\cong \frac{1}{(\Delta x)^2} (\varphi_A + \varphi_C - 2\varphi_P) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_P &\cong \frac{1}{(\Delta y)^2} (\varphi_B + \varphi_D - 2\varphi_P) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Quindi, sommando le (2.31)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_P + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_P = \Delta_t^2 \varphi \Big|_P \cong \frac{1}{(\Delta x)^2} (\varphi_A + \varphi_C - 2\varphi_P) + \frac{1}{(\Delta y)^2} (\varphi_B + \varphi_D - 2\varphi_P) \quad (2.48)$$

In tutti i punti P interni al dielettrico l'equazione di Laplace può essere sostituita dal secondo membro della (2.48) eguagliato a zero:

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}(\varphi_A + \varphi_C - 2\varphi_P) + \frac{1}{(\Delta y)^2}(\varphi_B + \varphi_D - 2\varphi_P) = 0 \quad (\text{per ogni } P \text{ interno}) \quad (2.49)$$

Si osservi che, per $\Delta x = \Delta y$, la (2.48) può essere scritta nella forma $\varphi_P = \frac{\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C + \varphi_D}{4}$, che è coerente con la proprietà *a*) delle funzioni armoniche.

L'errore commesso con l'approssimazione (2.48) dipende dalla derivata quarta del potenziale moltiplicata per $(\Delta x)^4$ o $(\Delta y)^4$. Se i punti di campionamento vengono scelti anche sui conduttori (Δy è sottomultiplo di t e di $2h$), in tali punti i valori di φ sono fissati dalle condizioni al contorno.

In pratica abbiamo sostituito l'equazione differenziale (2.44) con un sistema lineare di infinite equazioni (il dielettrico è teoricamente illimitato in direzione x) formato dalle (2.49) (una equazione per ogni punto P). È evidente che il sistema lineare dovrà essere opportunamente troncato ad un numero finito di equazioni, a cui corrisponde un numero finito di punti P .

La simmetria della struttura considerata rispetto ad entrambi gli assi (si veda figura 21) consente di ridurre il numero di equazioni.

Il potenziale φ è infatti simmetrico rispetto a x che rispetto a y :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(-x, y) \\ \varphi(x, y) &= \varphi(x, -y) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Consideriamo, ad esempio, un punto P sull'asse x , come mostrato in figura 23:

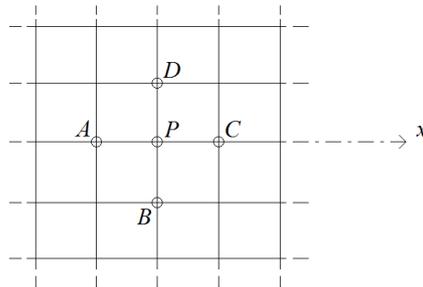


Figura 23. Schema di discretizzazione con il punto P sull'asse x .

Per il punto P sull'asse x , risulta ovviamente $\varphi_D = \varphi_B$, pertanto $\Delta_t^2 \varphi|_P$ può essere espresso solamente in funzione di φ_A , φ_C e φ_B . Analogamente se il punto P appartiene all'asse y .

Come conseguenza di questa simmetria risulta che, se un punto P appartiene ad un certo quadrante (assi inclusi), l'equazione di Laplace in quel punto riguarda solo i valori di potenziale nello stesso quadrante. Quindi è sufficiente limitarsi alle sole equazioni di questo quadrante per risolvere il sistema.

Una ulteriore conseguenza se il punto P appartiene all'asse x è che

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right|_P = 0$$

Infatti, dato che $\varphi_D = \varphi_B$

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right|_P = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi_D - \varphi_B}{\Delta y} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_t \varphi \cdot \underline{i}_y|_P = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{e} \cdot \underline{i}_y|_P = 0 \quad (2.51)$$

Questo significa che, sull'asse x , il campo elettrico \underline{e} è tutto tangente e quindi l'asse x può essere sostituito da un CMP. Lo stesso discorso può essere fatto per l'asse y .

Come detto in precedenza, per poter risolvere il sistema (2.49) occorre troncare il numero di equazioni ad un valore finito N . Avremo così un sistema lineare di N equazioni (una per ognuno degli N punti P considerati) in N incognite (i valori del potenziale nei punti P). Il termine noto di questo sistema è fornito dalle condizioni al contorno per il potenziale.

Ovviamente è necessario definire un criterio ragionevole per troncare le equazioni del sistema. A tal proposito sappiamo che il campo elettrico decresce al crescere di $|x|$ e quindi sarà possibile definire un criterio che consenta di individuare un valore x_M tale che

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{per } x > x_M$$

Per determinare il valore di x_M si procede per iterazioni successive dopo aver definito una soglia per la quale si può assumere $\varphi \equiv 0$ (ad esempio se $\varphi < 0.01$).

Dopo aver calcolato il potenziale $\varphi(x, y)$ la capacità C della struttura può essere determinata utilizzando la (1.24) che equivale, dal punto di vista fisico, al calcolo dell'energia elettrica

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \int_{S_t} |\underline{e}|^2 dS \quad (2.52)$$

Poiché $V=1$, costante sulla strip centrale, dalla 2.52 si ottiene:

$$C = \varepsilon \int_{S_t} |\underline{e}|^2 dS \quad (2.53)$$

Ricordiamo anche che, dalla (1.24), si ha

$$C = \varepsilon A = \varepsilon \int_{S_t} |\underline{e}|^2 dS = \varepsilon \int_{S_t} |\nabla_t \varphi|^2 dS \quad (2.54)$$

La tecnica delle differenze finite può essere utilizzata anche per determinare le caratteristiche di strutture quasi TEM. In questo caso, è sufficiente risolvere due problemi elettrostatici, il primo nella struttura di partenza per determinare C , e il secondo nella struttura resa omogenea (TEM), per determinare $C^{(o)}$, e quindi $L^{(o)} = L$.

Tuttavia nel caso quasi-TEM, per il calcolo del potenziale occorre modificare l'equazione (2.49) per tenere conto dei diversi dielettrici presenti sulla sezione trasversa.

Se ci sono dielettrici diversi, l'equazione di Laplace (2.44) deve essere sostituita dalla seguente:

$$\nabla_t \cdot [\varepsilon(x, y) \nabla_t \varphi(x, y)] = 0 \quad (2.55)$$

La equazione (2.55) consente di determinare l'equivalente della (2.49) per i punti all'interfaccia tra due dielettrici, ovvero le condizioni di raccordo tra i due dielettrici. Chiaramente, nelle regioni omogenee di ciascun dielettrico, continua a valere la (2.49).

Applichiamo dunque la (2.55) ad una superficie (intermedia tra due linee del reticolo, indicata con S in figura 24) tagliata a metà dalla superficie di separazione tra due dielettrici diversi.

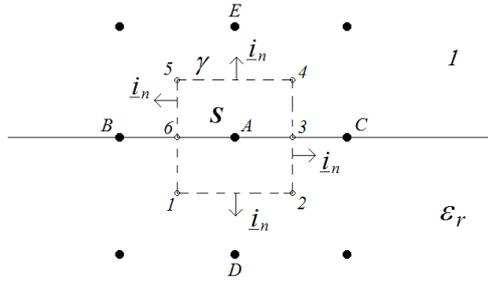


Figura 24 Schema per la valutazione delle equazioni di continuità all'interfaccia tra due dielettrici. La curva γ tratteggiata racchiude la superficie S .

A questo punto integriamo la (2.55) sulla superficie S

$$\int_S \nabla_t \cdot (\epsilon_r \nabla_t \varphi) dS = 0 \quad (2.56)$$

Per il teorema della divergenza dalla (2.56) si ottiene:

$$\int_{\gamma} \epsilon_r \nabla_t \varphi \cdot \underline{i}_n dl = \int_{\gamma} \epsilon_r \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = 0 \quad (2.57)$$

Possiamo dividere l'integrale (2.57) in 6 contributi (Figura 24, ipotizzando $\Delta x = \Delta y$)

$$\begin{aligned} \text{tratto 1-2} & \quad \epsilon_r (\varphi_D - \varphi_A) \frac{1}{\Delta x} \Delta x \\ \text{tratto 2-3} & \quad \epsilon_r (\varphi_C - \varphi_A) \frac{1}{\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \\ \text{tratto 3-4} & \quad 1(\varphi_C - \varphi_A) \frac{1}{\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \\ \text{tratto 4-5} & \quad 1(\varphi_E - \varphi_A) \frac{1}{\Delta x} \Delta x \\ \text{tratto 5-6} & \quad 1(\varphi_B - \varphi_A) \frac{1}{\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \\ \text{tratto 6-1} & \quad \epsilon_r (\varphi_B - \varphi_A) \frac{1}{\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Risulta quindi, dalla (2.41)

$$\epsilon_r (\varphi_D - \varphi_A) + \epsilon_r (\varphi_C - \varphi_A) \frac{1}{2} + (\varphi_C - \varphi_A) \frac{1}{2} + (\varphi_E - \varphi_A) + (\varphi_B - \varphi_A) \frac{1}{2} + \epsilon_r (\varphi_B - \varphi_A) \frac{1}{2} = 0 \quad (2.59)$$

da cui l'equazione:

$$\varphi_A = \frac{\varphi_E + \epsilon_r \varphi_D + \frac{\epsilon_r + 1}{2} (\varphi_C + \varphi_B)}{2(\epsilon_r + 1)} \quad (2.60)$$

che vale per i punti di interfaccia. Ovviamente nelle regioni omogenee continua a valere la (2.49).

3. PROPAGAZIONE IN STRUTTURE A PIU' CONDUTTORI

3.1 Richiami sulle linee di trasmissione

Abbiamo visto che, nel caso di onde sinusoidali, le equazioni dei telegrafisti (o equazioni delle linee di trasmissione) prendono la forma

$$\begin{aligned} -\frac{dV(z)}{dz} &= j\omega LI(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} &= j\omega CV(z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove $V(z)$ e $I(z)$ sono numeri complessi che rappresentano $v(z,t)$ e $i(z,t)$ rispettivamente (ovvero tensione e corrente nel dominio della frequenza). Sappiamo anche che le (1) soddisfano l'equazione delle onde

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(z)}{dz^2} + \beta^2 V(z) &= 0 \\ \text{con } \beta^2 &= \omega^2 LC \end{aligned} \quad (3.2)$$

Definiamo inoltre una impedenza caratteristica per la linea di trasmissione $Z_0 = \frac{\omega L}{\beta}$.

Ricordiamo che la soluzione delle equazioni delle onde (6.2) e quindi delle (6.1) è stata data sia nella forma viaggiante che nella forma stazionaria sia per la tensione $V(z)$ che per la corrente $I(z)$. L e C prendono il nome di costanti primarie della linea di trasmissione e sono una induttanza per unità di lunghezza e una capacità per unità di lunghezza. Z_0, β prendono il nome di costanti secondarie della linea di trasmissione.

- **Discontinuità**

Si considera l'interfaccia di separazione tra due linee di trasmissione di impedenza caratteristica rispettiva Z_1 e Z_2 . Dalla continuità di campo elettrico e magnetico segue la continuità di tensione e corrente all'interfaccia. La discontinuità viene caratterizzata tramite il coefficiente di riflessione $\Gamma = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$ e il coefficiente di trasmissione $\tau = 1 + \Gamma$.

- **Linea chiusa su un carico**

Se una linea di trasmissione di impedenza caratteristica Z_0 termina su un carico di impedenza di ingresso Z_{in} le proprietà del carico sono caratterizzate dal coefficiente di riflessione $\Gamma = (Z_{in} - Z_0)/(Z_{in} + Z_0)$.

- **Potenza complessa sulla linea**

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2Z_0} |V^+|^2 \left[1 - |\Gamma|^2 - 2j \operatorname{Im}(\Gamma e^{2j\beta z}) \right] \quad (3.3)$$

- **Impedenza di ingresso**

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = Z_0 \frac{Z_C + jZ_0 \tan(\beta L)}{Z_0 + jZ_C \tan(\beta L)} \quad (3.4)$$

- **Rapporto d'onda stazionaria**

$$ROS = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (3.5)$$

3.2 Linee TEM ad N+1 conduttori

Consideriamo il caso in cui le (3.1) e (3.2) vengano utilizzate per descrivere la propagazione in una struttura con due soli conduttori che supporta un campo TEM (es: cavo coassiale e stripline). Una volta fissato il riferimento z è possibile dimostrare che, al fine del calcolo delle costanti primarie C e L della linea, il problema elettromagnetico è equivalente ad un problema elettrostatico bidimensionale.

Nelle (3.1) V è dunque la differenza di potenziale tra i due conduttori (uno dei quali assunto a potenziale nullo di riferimento) mentre I è la corrente concatenata con uno dei due conduttori.

C ha il significato di capacità del problema elettrostatico bidimensionale ed è quindi una capacità per unità di lunghezza definita da

$$Q = CV$$

$$Q = \epsilon \oint_{\Gamma} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dl$$

dove Q è la carica elettrostatica per unità di lunghezza sul conduttore (Fig. 3.1).

L'induttanza L è invece legata a $\Phi = LI$ che è il flusso per unità di lunghezza del campo magnetico in direzione \mathbf{i}_n e valutato sulla superficie $s \Delta z$ con Δz che tende a zero (Fig. 3.2).

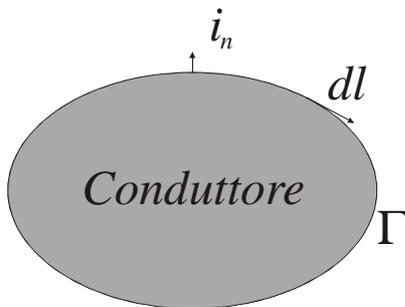


Figura 3.1

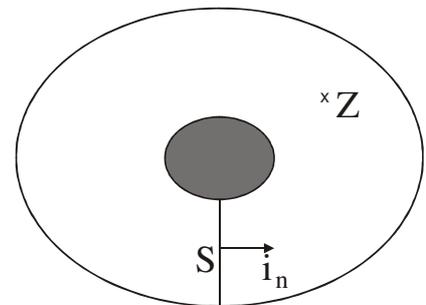


Figura 3.2

Il campo elettrostatico \underline{E} è ovviamente proporzionale al potenziale. Se indichiamo con \underline{e} il campo per potenziale unitario, risulterà

$$\underline{E} = V(z) \underline{e} \quad (3.6)$$

dove \underline{e} è ovviamente funzione delle sole coordinate trasverse x, y .

Per la similitudine tra problema elettromagnetico e problema elettrostatico, $\underline{E}(x,y,z)$ non è altro che il campo elettrico che si propaga nella linea di trasmissione con una velocità di fase che dipende solo dal mezzo omogeneo tra i conduttori.

Dalla (3.6) possiamo anche concludere che, nel caso di una linea di trasmissione costituita da due conduttori in cui si propaga un campo TEM, il campo elettrico \underline{E} è ovviamente tutto trasverso

rispetto alla direzione di propagazione z ed è fattorizzabile nel prodotto di due funzioni: $V(z)$ e $\underline{e}(x,y)$.

Il caso di $N+1$ conduttori è la generalizzazione del caso di due soli conduttori e il problema elettromagnetico, per z fissata, è ancora equivalente ad un problema elettrostatico bidimensionale con $N+1$ conduttori. Quindi, se abbiamo più di due conduttori ($N+1$ ad esempio), possiamo scegliere un conduttore di riferimento a potenziale nullo e analizzare i casi in cui, volta per volta, scegliamo potenziale Φ_i unitario su un conduttore e nullo su tutti gli altri:

$$\begin{cases} \Phi_i = 1 \\ \Phi_{j \neq i} = 0 & j = 1, \dots, N \\ \text{con } \Phi_{N+1} = 0 & (\text{cond. di rifer.}) \end{cases} \quad (3.7)$$

A ciascuna di queste N configurazioni corrisponde un campo *TEM* che si propaga con la velocità di fase del mezzo omogeneo in cui si trovano i conduttori.

Dunque la costante di propagazione β è la stessa per tutti gli N modi *TEM di base* indipendenti e per ciascuno di essi è possibile scrivere una relazione del tipo (6). Ne segue che qualunque campo dato dalla sovrapposizione di questi N campi di base è un campo *TEM* con costante di propagazione β e fattorizzabile come

$$\underline{E} = \sum_{i=1}^N V_i(z) \underline{e}_i(x, y) \quad (3.8)$$

Possiamo dunque concludere che:

- Qualunque configurazione di potenziale genera un campo *TEM*
- $N+1$ conduttori forniscono N campi *TEM* indipendenti

Possiamo ora far riferimento alla generalizzazione delle equazioni (3.1) e (3.2) per il caso di $N+1$ conduttori. Il che equivale a descrivere la struttura tramite una matrice delle capacità \underline{C} . Se $\Phi_{N+1} = 0$ è il conduttore di riferimento, le cariche per unità di lunghezza Q_i su ciascun conduttore, sono legate alle capacità per unità di lunghezza da

$$Q_i = C_{i0} \Phi_i + \sum_{n=1}^N C_{in} (\Phi_i - \Phi_n) \quad (3.9)$$

dove

- C_{i0} è la capacità del conduttore “ i ” riferita a massa.
- C_{in} è la capacità mutua dei conduttori “ i ” ed “ n ”.

Consideriamo ora la configurazione di potenziale $\Phi_n = \delta_{in}$. Definiamo le *capacità attive* C_i^A, C_j^A rispettivamente per il conduttore “ i ” e per i conduttori “ $j \neq i$ ”:

$$C_i^A = \left. \frac{Q_i}{\Phi_i} \right|_{\Phi_n = \delta_{in}} = C_{i0} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N C_{in} \quad (3.10)$$

$$C_j^A = \left. \frac{Q_j}{\Phi_i} \right|_{\Phi_n = \delta_{in}} = -C_{ij} \quad (3.11)$$

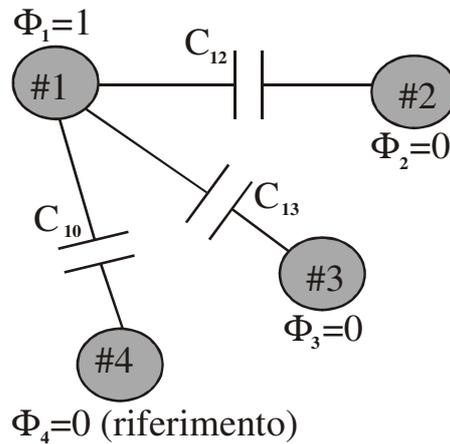
Le (3.10) e (3.11) si ottengono facilmente dalla (3.9).

C_i^A, C_j^A rappresentano le capacità da inserire nell'equazione delle linee per descrivere tensione e corrente sui conduttori "i" e "j" rispettivamente.

Esempio

$i=1$

$$\Phi_n = \delta_{1n}$$



Le capacità attive per questa configurazione sono:

$$C_1^A = C_{10} + C_{12} + C_{13}$$

$$C_2^A = -C_{12}$$

$$C_3^A = -C_{13}$$

A questa configurazione delle Φ_n corrisponde un campo TEM e C_1^A è la capacità da inserire nella equazione delle linee per descrivere la propagazione di questo modo.

3.3 Propagazione in strutture con N+1 conduttori

Nel caso di strutture a più conduttori ($N+1$), le equazioni delle linee di trasmissione devono essere scritte considerando vettori numerici di tensione e corrente con N componenti: $\underline{V}(z)$ e $\underline{I}(z)$. Si introducono inoltre le matrici di capacità e induttanza statiche della struttura: $\underline{\underline{C}}$ ed $\underline{\underline{L}}$.

Le equazioni delle linee generalizzate sono pertanto:

$$\begin{aligned} -\frac{d\underline{V}(z)}{dz} &= j\omega\underline{\underline{L}} \cdot \underline{I}(z) \\ -\frac{d\underline{I}(z)}{dz} &= j\omega\underline{\underline{C}} \cdot \underline{V}(z) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Per risolvere queste equazioni possiamo derivare la prima e sostituire nella seconda, ottenendo:

$$-\frac{d^2\underline{V}(z)}{dz^2} = \omega^2 \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{V}(z) \tag{3.13}$$

La soluzione generale della (2) (limitatamente alla sola onda progressiva) è del tipo

$$\underline{V}(z) = \underline{V}^+ \exp(-j\beta z) \quad (3.14)$$

con \underline{V}^+ vettore costante e β da determinare.

La soluzione (3.14) costituisce un *modo* ovvero una configurazione di campo che:

- a) può esistere da solo nella struttura;
- b) si propaga con una velocità di propagazione unica.

Il vettore \underline{V}^+ descrive la configurazione traversa del modo in quanto è proporzionale alle condizioni al contorno usate per calcolare il campo elettrico normalizzato \underline{e} .

Sostituendo la (3.14) nella equazione (3.13) si trova:

$$\underline{L} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V}^+ = \frac{\beta^2}{\omega^2} \underline{V}^+ \quad (3.15)$$

Poiché stiamo cercando vettori \underline{V}^+ diversi da zero la (3.15) è una equazione agli autovalori. Ad ogni autovalore β^2/ω^2 e autovettore \underline{V}^+ della matrice $\underline{L} \cdot \underline{C}$ (di ordine N) corrisponde un modo

della struttura. Tale modo ha una configurazione di campo traversa determinabile da \underline{V}^+ e una costante di propagazione pari a β . Ovviamente ciascun modo è definito a meno della sua ampiezza e ha entrambi i versi di propagazione.

A questo punto occorre distinguere il caso TEM dal caso quasi-TEM.

Se la struttura accetta campi TEM (ovvero il dielettrico è trasversalmente omogeneo) allora $\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ per ogni modo. Pertanto la matrice $\underline{L} \cdot \underline{C}$ ha tutti gli autovalori uguali ed ogni vettore è un autovettore. Da ciò segue che la matrice $\underline{L} \cdot \underline{C}$ è proporzionale alla matrice identità:

$$\underline{L} \cdot \underline{C} = \epsilon\mu_0 \underline{I}_N \quad (3.16)$$

Questo significa che la sola conoscenza della matrice delle capacità \underline{C} consente di calcolare tutte le grandezze di interesse poiché $\underline{L} = \epsilon\mu \underline{C}^{-1}$.

Nel caso quasi-TEM, invece, esistono solamente N modi (definiti sempre a meno di una costante) ciascuno con la sua costante di propagazione². Le costanti di propagazione sono gli autovalori della (3.15) mentre gli autovettori forniscono ancora la configurazione traversa del modo.

Anche nel caso quasi-TEM per descrivere la propagazione è sufficiente la conoscenza di sole matrici di capacità. Infatti se sostituiamo tutti i dielettrici della struttura con il vuoto otteniamo una nuova struttura con matrici \underline{C}_A ed \underline{L}_A , che accetta modi TEM. Quindi $\underline{L}_A = \epsilon_0\mu_0 \underline{C}_A^{-1}$. D'altra parte la matrice \underline{L} non dipende dal dielettrico (è una matrice di induttanze statiche) e quindi $\underline{L} = \underline{L}_A$. L'equazione agli autovalori diventa pertanto:

$$\epsilon_0\mu_0 \underline{C}_A^{-1} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V}^+ = \frac{\beta^2}{\omega^2} \underline{V}^+ \rightarrow \underline{C}_A^{-1} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V}^+ = \frac{\beta^2}{\epsilon_0\mu_0\omega^2} \underline{V}^+ \rightarrow \underline{C}_A^{-1} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V}^+ = \frac{\beta^2}{\beta_0^2} \underline{V}^+$$

² La somma di due modi quasi-TEM non è un modo in quanto i due modi componenti hanno ciascuno la propria velocità di propagazione.

$$\underline{\underline{C}}_A^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{V}^+ = \frac{\beta^2}{\beta_0^2} \underline{V}^+ = \varepsilon_{eff} \underline{V}^+ \quad (3.17)$$

dove β_0 è la costante di propagazione nel vuoto e l'autovalore fornisce direttamente la costante dielettrica efficace del modo e quindi la sua costante di propagazione.

3.3.1 Corrente e impedenza - modi pari e dispari

La corrente può essere facilmente ricavata dalle equazioni delle linee. Dalla prima delle (3.12) si ottiene infatti:

$$\underline{I}(z) = -\frac{1}{j\omega} \underline{L}^{-1} \frac{d\underline{V}(z)}{dz} \rightarrow \underline{I}^+ = \frac{\beta}{\omega} \underline{L}^{-1} \underline{V}^+ = \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \underline{\underline{C}}_A \underline{V}^+ \quad (3.18)$$

Nel solo caso TEM, poichè $\underline{\underline{C}}_A = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \underline{\underline{C}}$ e $\beta = \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0}$, la (3.18) diventa

$$\underline{I}^+ = \frac{\omega \beta}{\omega^2 \varepsilon \mu_0} \underline{\underline{C}} \cdot \underline{V}^+ = \frac{\omega}{\beta} \underline{\underline{C}} \cdot \underline{V}^+ \quad (3.19)$$

Dalla (3.19) è facile dedurre che l'impedenza caratteristica ha natura matriciale (si tratta della grandezza che collega i vettori \underline{V}^+ e \underline{I}^+), e pertanto è di difficile utilizzo.

Fanno eccezione i seguenti casi:

a) *Un solo conduttore viene alimentato (possibile in genere solamente nel caso TEM)*

In questo caso una definizione ragionevole di impedenza è il rapporto tra tensione e corrente su quel conduttore. Nel caso TEM, per il conduttore p si ha:

$$\underline{I}^+ = \frac{\omega}{\beta} \underline{\underline{C}} \cdot \underline{V}^+ \rightarrow Z_p = \frac{V_p^+}{I_p^+} = \frac{\beta}{\omega} C_{pp} \quad (3.20)$$

b) *La struttura ha due conduttori simmetrici.*

Le matrici $\underline{\underline{C}}$ ed \underline{L} coinvolte sono simmetriche e hanno i due elementi della diagonale principale uguali. In tal caso conviene usare le seguenti configurazioni trasverse:

$$\underline{V}_p^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{V}_d^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

che prendono il nome di modi pari e dispari. Questi sono ovviamente autovettori per il caso TEM (tutte le configurazioni di campo trasverso costituiscono un modo e sono soluzione dell'equazione agli autovalori). Nel caso quasi-TEM i modi pari e dispari sono invece i soli due autovettori e quindi i due soli modi che si possono propagare nella struttura con costante di propagazione fornita dai corrispondenti autovalori.

Per simmetria, anche la corrente sui due conduttori è proporzionale ai vettori (3.21) e pertanto il rapporto tra tensione e corrente ha (a parte un segno) lo stesso valore per entrambi i conduttori e questo valore viene assunto come impedenza caratteristica del modo.

La matrice delle capacità può essere ottenuta a partire dal diagramma delle capacità:

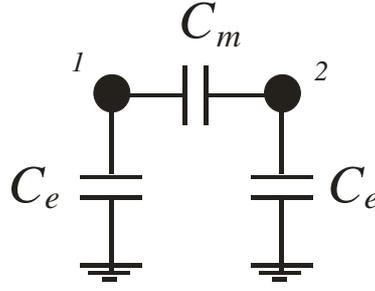


Figura 3.3: diagramma delle capacità per il caso $N=2$ con due conduttori uguali.

Sappiamo che $\underline{Q} = \underline{C} \cdot \underline{V} \rightarrow \begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$ ovvero, coerentemente con il diagramma delle capacità in figura si ha:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \left. \frac{Q_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = C_e + C_m \\ C_{22} &= \left. \frac{Q_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = C_e + C_m \\ C_{21} = C_{12} &= \left. \frac{Q_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = -C_m \end{aligned} \quad (3.22)$$

NB: Si osservi che $C_{21} < 0$ perché C_{21} è la carica sul conduttore 1 quando il conduttore 1 è a massa ed è quindi una carica negativa opposta a quella presente sul conduttore 2, che è a potenziale unitario.

Nel caso TEM si ha:

$$\begin{bmatrix} I_1^+ \\ I_2^+ \end{bmatrix} = \frac{\omega}{\beta} \underline{C} \cdot \underline{V}^+ = \frac{\omega}{\beta} \begin{bmatrix} C_e + C_m & -C_m \\ -C_m & C_e + C_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{bmatrix} = \frac{\omega}{\beta} \begin{bmatrix} (C_e + C_m)V_1^+ - C_m V_2^+ \\ (C_e + C_m)V_2^+ - C_m V_1^+ \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

e, per il modo pari:

$$\begin{bmatrix} I_1^+ \\ I_2^+ \end{bmatrix} = \frac{\omega}{\beta} \underline{C} \cdot \underline{V}^+ = \frac{\omega}{\beta} \begin{bmatrix} (C_e + C_m) - C_m \\ (C_e + C_m) - C_m \end{bmatrix} V^+ = \frac{\omega}{\beta} \begin{bmatrix} C_e \\ C_e \end{bmatrix} V^+ \text{ con } V_p^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} V^+ \quad (3.24)$$

mentre, per il modo dispari

$$\begin{bmatrix} I_1^+ \\ I_2^+ \end{bmatrix} = \frac{\omega}{\beta} \underline{C} \cdot \underline{V}^+ = \frac{\omega}{\beta} \begin{bmatrix} C_e + 2C_m \\ -C_e - 2C_m \end{bmatrix} V^+ \text{ con } V_d^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} V^+ \quad (3.25)$$

Dalle (3.24) e (3.25) si ottengono quindi

$$Z_p = \frac{\beta}{\omega C_e}; \quad Z_d = \frac{\beta}{\omega(C_e + 2C_m)} \quad (3.26)$$

che prendono rispettivamente il nome di impedenze caratteristiche di modo pari e dispari. Risulta evidentemente che Z_p è maggiore di Z_d . Z_p è prossimo a Z_d quando $C_m \ll C_e$ ovvero quando i due conduttori sono molto distanti. Se invece C_m è grande (conduttori vicini) Z_p sarà molto più grande di Z_d .

Nel caso quasi-TEM interessa il calcolo della matrice $\underline{\underline{C}}_A^{-1} \cdot \underline{\underline{C}}$:

$$\underline{\underline{C}}_A^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} = \frac{1}{C_{Ae}(C_{Ae} + 2C_{Am})} \begin{bmatrix} C_{Ae} + C_{Am} & C_{Am} \\ C_{Am} & C_{Ae} + C_{Am} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_e + C_m & -C_m \\ -C_m & C_e + C_m \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

L'equazione agli autovalori (3.17) fornisce la costante dielettrica efficace per il modo pari e per il modo dispari.

Per il modo pari troviamo

$$\begin{aligned} \epsilon_{eff}^p \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underline{\underline{C}}_A^{-1} \underline{\underline{C}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{C_{Ae}(C_{Ae} + 2C_{Am})} \begin{bmatrix} C_{Ae} + C_{Am} & C_{Am} \\ C_{Am} & C_{Ae} + C_{Am} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_e \\ C_e \end{bmatrix} = \\ &= \frac{C_e}{C_{Ae}(C_{Ae} + 2C_{Am})} \begin{bmatrix} C_{Ae} + 2C_{Am} \\ C_{Ae} + 2C_{Am} \end{bmatrix} = \frac{C_e}{C_{Ae}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \epsilon_{eff}^p = \frac{C_e}{C_{Ae}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

mentre, per il modo dispari

$$\epsilon_{eff}^d = \frac{C_e + 2C_m}{C_{Ae} + 2C_{Am}} \quad (3.29)$$

In modo analogo si procede per il calcolo della impedenza caratteristica; ricordando la definizione di ϵ_{eff} (3.17), dalla (3.19) si ottiene:

$$\underline{I}^+ = \frac{\beta}{\omega \epsilon \mu} \underline{\underline{C}}_A \underline{V}^+ = \frac{\beta_0 \sqrt{\epsilon_{eff}}}{\omega \epsilon \mu} \underline{\underline{C}}_A \underline{V}^+ \quad (3.30)$$

Da quest'ultima si ottiene, con procedimento analogo al caso TEM:

$$Z_p = \frac{\beta_0}{\omega C_{Ae} \sqrt{\epsilon_{eff}^p}} = \frac{\beta_0}{\omega \sqrt{C_{Ae} C_e}} = \frac{\beta}{\omega C_e} \quad (3.31)$$

$$Z_d = \frac{\beta_0}{\omega (C_{Ae} + 2C_{Am}) \sqrt{\epsilon_{eff}^d}} = \frac{\beta_0}{\omega \sqrt{(C_{Ae} + 2C_{Am})(C_e + 2C_m)}} = \frac{\beta}{\omega (C_e + 2C_m)} \quad (3.32)$$

Si osservi che, sia nel caso TEM che nel caso quasi TEM, le espressioni di Z per i modi pari e dispari sono del tutto analoghe a quelle di una linea ad un solo conduttore, a patto di usare C_e e $C_e + 2C_m$ come capacità. Ciò segue anche dalla manipolazione del diagramma delle capacità:

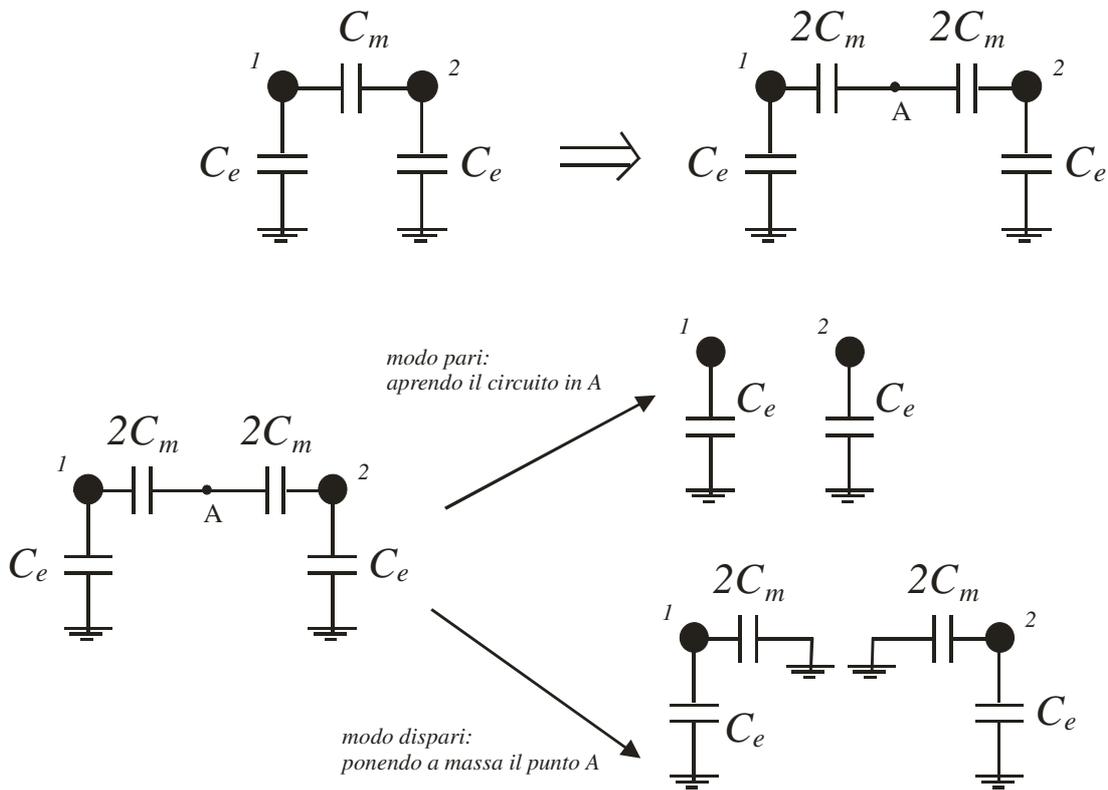


Figura 3.4: diagramma delle capacità per il caso $N=2$ con due conduttori uguali, analisi del modo pari e del modo dispari.

3.4 Linee accoppiate

Consideriamo una struttura simmetrica costituita da due conduttori identici più uno di riferimento a massa. Il diagramma delle capacità è mostrato in Figure 3.3 e 3.4 e l'analisi della struttura è stata effettuata nel caso *b*) del paragrafo precedente. Come detto, questa struttura supporta due modi indipendenti sia nel caso TEM che nel caso quasi-TEM. Possiamo scegliere i modi pari e dispari (scelta obbligatoria nel caso quasi-TEM). In entrambi i casi abbiamo definito le impedenze caratteristiche di modo pari e dispari (3.26 e 3.31, 3.32) e le rispettive costanti di propagazione:

$$\begin{aligned}
 \text{TEM)} \quad & \beta_p = \beta_d = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} = \sqrt{\epsilon_r} \beta_0 \\
 q\text{-TEM)} \quad & \begin{cases} \beta_p = \sqrt{\epsilon_{eff}^p} \beta_0 \\ \beta_d = \sqrt{\epsilon_{eff}^d} \beta_0 \end{cases} \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la propagazione dei modi pari e dispari in questo tipo di struttura valgono ovviamente le equazioni delle linee con costanti $\beta_{p/d}$ e $Z_{p/d}$.

Per il modo pari si ha dunque (i pedici 1 e 2 indicano i due conduttori):

$$\begin{aligned}
 V_1^p(z) &= V_1^p(0) \cos(\beta_p z) - jZ_p I_1^p(0) \sin(\beta_p z) \\
 V_2^p(z) &= V_2^p(0) \cos(\beta_p z) - jZ_p I_2^p(0) \sin(\beta_p z)
 \end{aligned} \quad (3.34)$$

(e analoghe per le correnti)

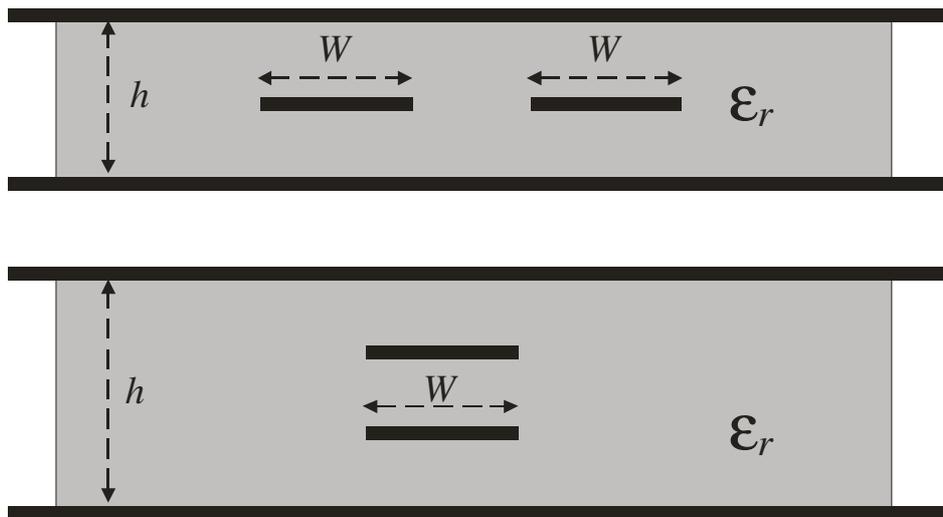
Ovviamente $V_1^p = V_2^p$ e $I_1^p = I_2^p$ lungo tutte le linee.

Per quanto riguarda il modo dispari:

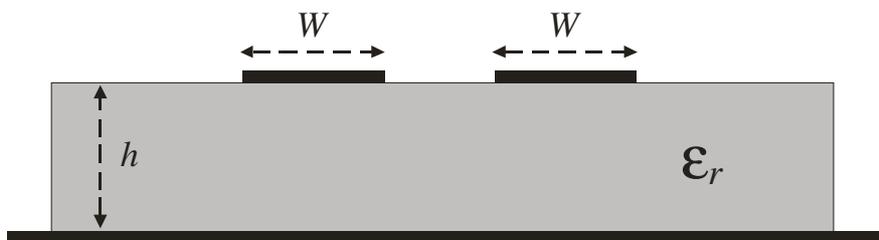
$$\begin{aligned} V_1^d(z) &= V_1^d(0) \cos(\beta_d z) - jZ_d I_1^d(0) \text{sen}(\beta_d z) \\ V_2^d(z) &= V_2^d(0) \cos(\beta_d z) - jZ_d I_2^d(0) \text{sen}(\beta_d z) \end{aligned} \quad (3.35)$$

con $V_2^d = -V_1^d$ e $I_2^d = -I_1^d$ lungo tutte le linee

Esempio 1: linee accoppiate in stripline (TEM)



Esempio 2: linee accoppiate in microstriscia (quasi-TEM)



4. PROPRIETA' GENERALI DELLE RETI

4.1 Matrice \underline{Z} e \underline{Y} .

Una rete N-porte può essere descritta da matrici $N \times N$ che legano le grandezze esterne. Sono ben note le matrici di impedenza \underline{Z} e di ammettenza \underline{Y} definite da

$$\underline{V} = \underline{Z} \cdot \underline{I}, \underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{V} \quad (4.1)$$

Ovviamente se \underline{Y} è invertibile, allora $\underline{Z} = \underline{Y}^{-1}$ (altrimenti \underline{Z} non esiste) e viceversa.

Si noti che il vettore \underline{I} è formato da correnti entranti.

Se la rete è reciproca allora le matrici \underline{Z} e \underline{Y} sono simmetriche.

Se la rete è priva di perdite allora

$$\text{Re}(P_{tot}) = 0 \quad (4.2)$$

dove la potenza totale entrante vale:

$$P_{tot} = \frac{1}{2} \underline{I}^H \cdot \underline{V} = \frac{1}{2} \underline{I}^H \cdot \underline{Z} \cdot \underline{I} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} z_{i,j} I_i^* I_j \quad (4.3)$$

Poiché \underline{I} è arbitrario, se si sceglie $I_n = I_k \delta_{nk}$ (per ogni $k = 1, \dots, N$) dalla condizione (4.2) si trova:

$$\text{Re}(z_{kk}) = 0$$

Se invece si scelgono solamente le correnti I_h e I_k (h, k , generici) diverse da zero si ottiene:

$$\text{Re} \left\{ \frac{1}{2} (Z_{hk} I_h^* I_k + Z_{kh} I_h I_k^*) \right\} = 0 \quad (4.4)$$

Se le due correnti sono tali che $I_h = I_k$ segue $\text{Re}\{Z_{hk} + Z_{kh}\} = 0$; se le due correnti sono tali che $I_h = jI_k$ segue $\text{Re}\{jZ_{hk} - jZ_{kh}\} = 0$, ovvero: $\text{Re}\{Z_{hk}\} = -\text{Re}\{Z_{kh}\}$ e $\text{Im}\{Z_{hk}\} = \text{Im}\{Z_{kh}\}$

Se, in particolare, la rete è reciproca dalla prima segue che $\text{Re}\{Z_{hk}\} = 0$ e quindi, per una rete *reciproca e priva di perdite*, gli elementi delle matrici \underline{Z} e \underline{Y} sono immaginari puri.

4.2 Matrice di Scattering

La matrice di scattering (diffusione) lega onde incidenti e onde riflesse. La definizione della matrice di scattering per una rete N porte necessita della definizione di una impedenza caratteristica di riferimento per ogni porta.

Nel seguito supporremo impedenze di riferimento uguali per tutte le porte (ma sono possibili anche scelte differenti e si parla di matrice di scattering generalizzata).

La matrice \underline{S} è tale che $\underline{V}^- = \underline{S} \cdot \underline{V}^+$

$$\begin{bmatrix} V_1^- \\ V_2^- \\ \cdot \\ \cdot \\ V_N^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2N} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ S_{N1} & S_{N2} & \dots & S_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ \cdot \\ \cdot \\ V_N^+ \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

dove ovviamente: $S_{ij} = \frac{V_i^-}{V_j^+} \Big|_{\substack{V_k^+ = 0 \\ k \neq j}}$

In altre parole S_{ij} viene determinato alimentando alla porta j con onda incidente unitaria e misurando l'ampiezza dell'onda riflessa V_i^- alla porta i , quando tutte le porte ad eccezione della porta j non sono alimentate e quindi risultano chiuse su un carico adattato (cioè pari all'impedenza caratteristica di riferimento scelta per le porte).

S_{ii} è il coefficiente di riflessione alla porta "i" quando tutte le altre porte sono chiuse su un carico adattato. Se $S_{ii} = 0$ per ogni i , ovvero gli elementi diagonali della matrice (4.5) sono tutti nulli, diremo che la rete è adattata a tutte le porte.

Tensioni e correnti alle porte valgono: $\underline{V} = \underline{V}^+ + \underline{V}^-$ e $\underline{I} = \underline{I}^+ - \underline{I}^-$, ovvero $Z_0 \underline{I} = \underline{V}^+ - \underline{V}^-$, essendo Z_0 l'impedenza di riferimento. Da queste relazioni si può ottenere la relazione tra la matrice di scattering \underline{S} e \underline{Z} (o \underline{Y}).

Quindi

$$\underline{V} = \underline{V}^+ + \underline{V}^- = \underline{V}^+ + \underline{S} \cdot \underline{V}^+ = (\underline{I}_{\underline{N}} + \underline{S}) \cdot \underline{V}^+ \quad (4.6)$$

$$\underline{V} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = \frac{1}{Z_0} \underline{Z} \cdot (\underline{V}^+ - \underline{V}^-) = \frac{1}{Z_0} \underline{Z} \cdot (\underline{I}_{\underline{N}} - \underline{S}) \cdot \underline{V}^+ \quad (4.7)$$

Dalle (4.6) e (4.7)

$$Z_0 (\underline{I}_{\underline{N}} + \underline{S}) \cdot \underline{V}^+ = \underline{Z} \cdot (\underline{I}_{\underline{N}} - \underline{S}) \cdot \underline{V}^+ \quad (4.8)$$

Ossia

$$\underline{Z} = Z_0 (\underline{I}_{\underline{N}} + \underline{S}) \cdot (\underline{I}_{\underline{N}} - \underline{S})^{-1} \quad (4.9)$$

In modo analogo si ottiene la relazione inversa:

$$\underline{S} = (\underline{Z} + Z_0 \underline{I}_{\underline{N}})^{-1} \cdot (\underline{Z} - Z_0 \underline{I}_{\underline{N}}) \quad (4.10)$$

da cui segue che in una rete reciproca anche \underline{S} è simmetrica.

Per determinare le condizioni per cui una rete è priva di perdite occorre calcolare la potenza complessa entrante in termini di \underline{S} e imporre che sia nulla:

$$\begin{aligned}
P_{tot} &= \frac{1}{2} \underline{I}^H \cdot \underline{V} = \frac{1}{2Z_0} (\underline{V}^+ - \underline{V}^-)^H \cdot (\underline{V}^+ + \underline{V}^-) = \\
&= \frac{1}{2Z_0} (\underline{I}_{\underline{N}} \cdot \underline{V}^+ - \underline{S} \cdot \underline{V}^+)^H \cdot (\underline{I}_{\underline{N}} \cdot \underline{V}^+ + \underline{S} \cdot \underline{V}^+) = \\
&= \frac{1}{2Z_0} (\underline{V}^+)^H (\underline{I}_{\underline{N}} - \underline{S})^H \cdot (\underline{I}_{\underline{N}} + \underline{S}) \cdot \underline{V}^+ = \\
&= \frac{1}{2Z_0} (\underline{V}^+)^H (\underline{I}_{\underline{N}} - \underline{S}^H \cdot \underline{S} - \underline{S}^H + \underline{S}) \cdot \underline{V}^+
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Se la rete è reciproca ovvero la matrice \underline{S} è simmetrica, le matrici \underline{S}^H e \underline{S} , hanno la stessa parte reale e parti immaginarie opposte. Dunque prendendo la parte reale della (4.11):

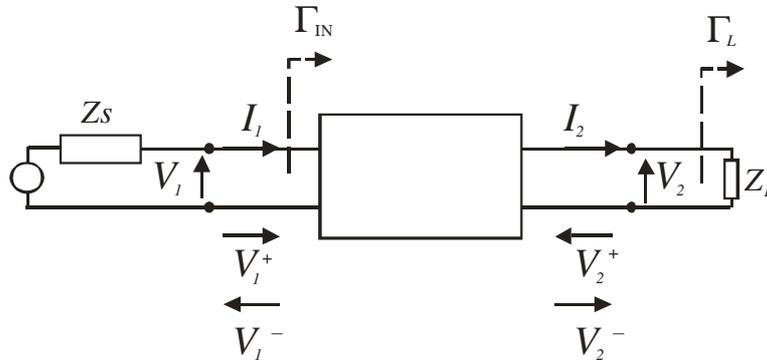
$$\text{Re}(P_{tot}) = \frac{1}{2Z_0} (\underline{V}^+)^H (\underline{I}_{\underline{N}} - \underline{S}^H \cdot \underline{S}) \cdot \underline{V}^+ = 0 \tag{4.12}$$

ovvero

$$\underline{S}^H \cdot \underline{S} = \underline{I}_{\underline{N}} \tag{4.13}$$

Se la rete è priva di perdite le colonne della matrice \underline{S} costituiscono un sistema ortonormale.

Esempio: analisi di una rete due porte



$$\begin{cases} V_1^- = S_{11}V_1^+ + S_{12}V_2^+ \\ V_2^- = S_{21}V_1^+ + S_{22}V_2^+ \end{cases} \tag{4.14}$$

$$\begin{cases} \Gamma_L = \frac{V_2^-}{V_2^+} \rightarrow V_2^- = \Gamma_L V_2^+ \\ \Gamma_{IN} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = S_{11} \frac{V_1^+}{V_1^+} + S_{12} \frac{V_2^+}{V_1^+} = S_{11} + S_{12} \frac{V_2^+}{V_1^+} \end{cases} \tag{4.15}$$

sostituendo la prima delle (4.15) nella seconda delle (4.14) si ha:

$$V_2^+ = \frac{S_{12}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} V_1^+ \tag{4.16}$$

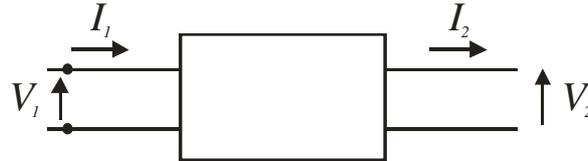
e quindi

$$\Gamma_{IN} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \quad (4.17)$$

4.3 Matrice di Trasmissione

Per reti a due porte è utile considerare la matrice di trasmissione (o matrice ABCD) definita da

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 + BI_2 \\ I_1 = CV_2 + DI_2 \end{cases} \quad (4.18)$$



NB: la convenzione sulle correnti è diversa da quella usata per le matrici \underline{Z} e \underline{Y} .

La matrice di trasmissione di due, o N, reti in cascata è il prodotto matriciale delle singole matrici, ordinate come il flusso di potenza (la prima matrice del prodotto è quella relativa all'ingresso). I vari termini (A , B , C , D) si ottengono con l'uscita aperta o in corto; dalla (4.18) si ha:

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}, \quad C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad (4.19)$$

$$B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}, \quad D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \quad (4.20)$$

A e D sono adimensionali, B è una impedenza, C è una ammettenza.

La matrice di trasmissione è evidentemente collegata a \underline{Z} , a \underline{Y} e a \underline{S} . Per quanto riguarda la relazione con \underline{Z} partiamo da

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 - Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 - Z_{22}I_2 \end{cases} \quad (4.21)$$

con la diversa convenzione sulla corrente uscente I_2 .

Per definizione si ha:

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}, \quad C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{Z_{21}} \quad (4.22)$$

B e D richiedono $V_2=0$ e, in tal caso, dalla prima delle (4.21) si ha $I_2 = \frac{Z_{21}}{Z_{22}}I_1$

Pertanto:

$$B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = Z_{11} \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} - Z_{12} = \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} - Z_{12}, \quad D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \quad (4.23)$$

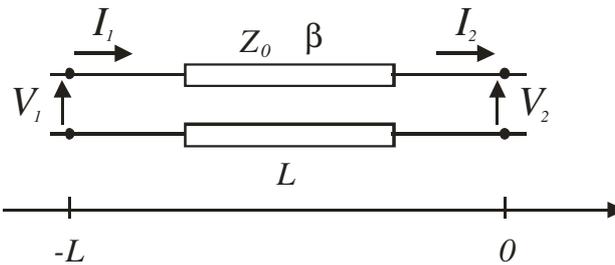
Per una rete reciproca ($Z_{21}=Z_{12}$) si ha

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC = \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{12}^2} - \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{12}^2} + \frac{Z_{12}}{Z_{21}} = \frac{Z_{12}}{Z_{21}} = 1 \quad (4.24)$$

Se la rete è anche priva di perdite allora A, D sono reali e B, C immaginari puri (4.19, 4.20) perché la matrice $\underline{\underline{Z}}$ ha tutti gli elementi immaginari puri.

Ovviamente l'eguaglianza di due reti reciproche si ha se tre elementi della matrice di trasmissione sono uguali. Se le reti sono anche speculari sono sufficienti due soli parametri (purchè non A e D) in quanto in questo caso $A=D$.

Esempio 1: matrice di trasmissione di un tratto di linea di trasmissione



Con l'uscita è aperta ($I_2=0$) determino A e C :

$$AV_2 = V_1 = V(-L) = V_2 \cos(\beta(-L)) = V_2 \cos(\beta L) \rightarrow A = \cos(\beta L)$$

$$CV_2 = I_1 = I(-L) = -j \frac{1}{Z_0} V_2 \sin(\beta(-L)) = j \frac{1}{Z_0} V_2 \sin(\beta L) \rightarrow C = j \frac{1}{Z_0} \sin(\beta L)$$

Con l'uscita in corto circuito ($V_2=0$) determino A e C :

$$BI_2 = V_1 = V(-L) = jZ_0 I_2 \sin(\beta L) \rightarrow B = jZ_0 \sin(\beta L)$$

$$DI_2 = I_1 = I(-L) = I_2 \cos(\beta L) \rightarrow D = \cos(\beta L)$$

Esempio 2: matrice ABCD di una impedenza Z in serie

$$A = 1$$

$$B = Z$$

$$C = 0$$

$$D = 1$$

Esempio 3: matrice ABCD di una ammettenza Y in parallelo

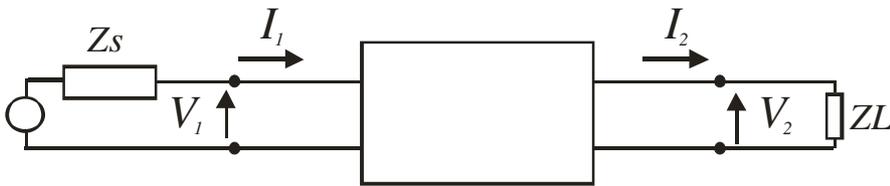
$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$C = Y$$

$$D = 1$$

Esempio 4: impedenza di ingresso di una rete due porte



Per definizione:

$$Z_{IN} = \frac{AV_2 + BI_2}{CV_2 + DI_2} = \frac{A \frac{V_2}{I_2} + B}{C \frac{V_2}{I_2} + D} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \quad (4.25)$$

4.4 Proprietà delle reti due porte

Una rete due porte può essere caratterizzata da una delle matrici viste nei paragrafi precedenti. Se la rete è reciproca, la presenza di due relazioni (una relazione complessa) tra gli elementi di questa matrice mostra che essa è costituita da 6 parametri reali. Pertanto è possibile costruire (ad una frequenza fissata) un circuito equivalente contenente 6 gradi di libertà (ovvero 6 parametri liberi).

Due possibili circuiti equivalenti sono quello a T e quello a Π .

Per il circuito a T si ha:

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_A + Z_C, \quad Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_B + Z_C, \quad Z_{12} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_C \quad (4.26)$$

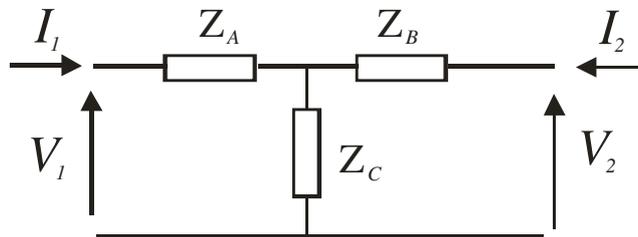


Figura 4.1

Dalle (2.1) si ottengono facilmente le relazioni inverse:

$$\begin{aligned} Z_C &= Z_{12} \\ Z_A &= Z_{11} - Z_{12} \\ Z_B &= Z_{22} - Z_{12} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ovviamente se la rete è priva di perdite queste le tre impedenze Z_A , Z_B , Z_C sono reattanze.

4.5 Proprietà delle reti tre porte

Le reti tre porte sono utilizzate come divisori (o sommatore), come circolatori o per altri scopi che vedremo nel seguito.

La condizione ideale è quella di avere una rete tre porte priva di perdite ed adattata ad ogni porta. Tutto ciò **non** è possibile se la rete è anche reciproca.

Infatti, per una rete adattata a tutte le porte e reciproca si ha:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Ma se la rete è anche priva di perdite occorre aggiungere la richiesta che le colonne siano ortonormali (4.13). L'ortogonalità fornisce quindi $S_{12}S_{13}^* = S_{12}S_{23}^* = S_{13}S_{23}^* = 0$. Tuttavia, per soddisfare quest'ultima relazione almeno due parametri devono essere nulli e quindi una colonna avrà tutti gli elementi nulli e non potrà avere norma unitaria. Il che impedisce di soddisfare la (4.13).

Supponiamo invece che la rete sia **non reciproca** (cioè contenga, ad esempio, un materiale anisotropo). In questo caso la forma generale della matrice di scattering è la seguente:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Quest'ultima rete è adattata a tutte le porte e la condizione di rete priva di perdite fornisce:

$$\begin{aligned} S_{12}S_{13}^* = 0 & & |S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1 \\ S_{21}S_{23}^* = 0 & & |S_{12}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \\ S_{31}S_{32}^* = 0 & & |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dalle (4.30) si osserva che sono possibili due soluzioni:

- a) $S_{12} = 0 \rightarrow |S_{32}| = 1 \rightarrow S_{31} = 0 \rightarrow |S_{21}| = 1 \rightarrow S_{23} = 0 \rightarrow |S_{13}| = 1$
- b) $S_{13} = 0 \rightarrow |S_{23}| = 1 \rightarrow S_{21} = 0 \rightarrow |S_{31}| = 1 \rightarrow S_{32} = 0 \rightarrow |S_{12}| = 1$

Le reti corrispondenti sono dette circolatori ideali in quanto la potenza che entra ad una porta esce alla successiva (tabella 4.1)

Tabella 4.1	Configurazione a)	Configurazione b)
Matrice di Scattering	$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Schema circuitale		

Nelle matrici di scattering corrispondenti alle due configurazioni mostrate in tabella 4.1, i termini diversi da zero possono sempre essere scelti pari ad 1 con una scelta opportuna del riferimento di fase.

4.6 Proprietà delle reti quattro porte

Una rete quattro porte può essere *reciproca, senza perdite e adattata a tutte le porte* ($S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0$). Si dimostra che ognuna di tali reti è un accoppiatore direzionale, ovvero una rete in cui $S_{14} = 0$ e $S_{23} = 0$. La potenza che entra dalla porta 1 va in parte verso la porta 2 e in parte verso la porta 3 mentre la porta 4 è isolata. Il simbolo di un accoppiatore direzionale è il seguente:

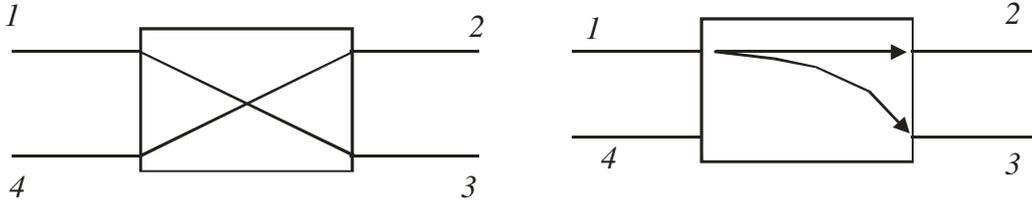


Figura 4.2

In genere la porta 1 è detta porta di ingresso, la 2 è detta porta di uscita (o porta passante), la porta 3 prende il nome di porta di accoppiamento e la porta 4 è la porta isolata. Un esempio tipico di utilizzo di un accoppiatore direzionale è la misura dell'onda incidente e riflessa da un carico. La matrice di scattering di un accoppiatore direzionale è la seguente:

$$\begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{24} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

La rete quattro porte rappresentata dalla (4.31), reciproca e adattata a tutte le porte, è univocamente determinata se conosco i 4 parametri complessi S_{12} , S_{13} , S_{24} e S_{34} . Sono pertanto 8 i gradi di libertà. Imponendo anche le condizioni di rete priva di perdite (4.13):

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \quad (4.32)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \quad (4.33)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (4.34)$$

$$|S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (4.35)$$

$$S_{12}S_{13}^* + S_{24}S_{34}^* = 0 \quad (4.36)$$

$$S_{12}S_{24}^* + S_{13}S_{34}^* = 0 \quad (4.37)$$

Si dimostra facilmente che di queste 6 equazioni solamente 4 sono tra loro indipendenti. Si possono scegliere ad esempio la (4.32), (4.33), (4.34) e la (4.36): segue che una rete *reciproca, adattata a tutte le porte e priva di perdite* ha **4 gradi di libertà** (4 parametri complessi, con 4 equazioni reali indipendenti: nel seguito a, b, c, e d).

$$\text{Dalle (4.32) e (4.33) si ottiene: } |S_{24}| = |S_{13}| \quad (a)$$

$$\text{Dalle (4.32) e (4.34) si ottiene: } |S_{12}| = |S_{34}| \quad (b)$$

$$\text{Ponendo } \alpha = |S_{12}| \text{ e } \beta = |S_{13}| \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (c)$$

E' possibile fissare i piani di riferimento all'interno del componente in modo che $S_{12} = S_{34} = \alpha$

reale (il che fissa le differenze tra gli spostamenti di 1 e 2 e di 3 e 4). Quest'ultima relazione **blocca due parametri liberi** (due fasi reali). Inoltre si può scrivere $S_{13} = \beta e^{j\theta}$ (che fissa la differenza tra gli spostamenti di 1 e 3 e completa i gradi di libertà utilizzabili: β e θ fissati).

Posto $S_{24} = \beta e^{j\varphi}$ (ovviamente non posso **scegliere** φ visto che ho già completato i gradi di libertà disponibili), la (4.36) diventa $\alpha\beta e^{-j\theta} + \beta e^{j\varphi}\alpha = 0$ ossia

$$e^{j\varphi} = e^{-j(\theta+\pi)} \rightarrow \varphi + \theta = \pi \text{ (a meno di multipli di } 2\pi) \quad (d)$$

Ricapitolando, posso scegliere liberamente i valori di β (oppure α) e θ .

La scelta di θ è libera ma nella pratica si usano due soli casi:

- Accoppiatore simmetrico $\varphi = \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta e^{j\theta} & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta e^{j\phi} \\ \beta e^{j\theta} & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta e^{j\phi} & \alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & j\beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & j\beta \\ j\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & j\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

- Accoppiatore antisimmetrico $\theta = 0, \varphi = \pi$

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta e^{j\theta} & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta e^{j\phi} \\ \beta e^{j\theta} & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta e^{j\phi} & \alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\beta \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

Con la scelta di θ (ossia di un piano di riferimento), l'unico gradi di libertà è β . Per l'accoppiatore ideale β prende il nome di accoppiamento ed è espresso in decibel:

$$C = -20 \log_{10} \beta \quad (4.40)$$

Per un accoppiatore non ideale si definiscono anche:

- Isolamento: $I = -20 \log_{10} |S_{14}|$ (4.41)

- Direttività: $D = I - C = -20 \log_{10} \frac{\beta}{|S_{14}|}$ (4.42)

Accoppiatori con $C = 3 \text{ dB}$ $\left(\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ vengono detti *ibridi*. Gli ibridi simmetrici sono detti

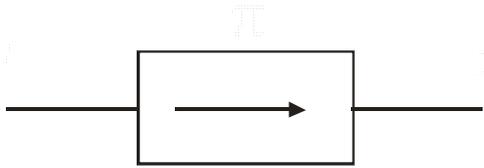
ibridi a 90° (sfasamento di 90° tra le porte 2 e 3), gli ibridi antisimmetrici (sfasamento di 180° tra le porte 2 e 3) sono detti a T magica o "rat race".

4.7 Esempi

Esempio 1: Giratore

Il più semplice esempio di componente NON RECIPROCO privo di perdite è il giratore, la cui matrice di scattering è la seguente:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



In altri termini un giratore sfasa di 180° l'onda diretta e lascia inalterata l'onda riflessa. Più in generale possiamo considerare gli sfasatori, ovvero reti che sfasino in modo diverso le due onde diretta e riflessa. Tramite un giratore, almeno in linea di principio, possono essere realizzati altri componenti non reciproci.

Esempio 2: Isolatore

Analizziamo ad esempio il seguente circuito, contenente due accoppiatori a 3dB a 90° :

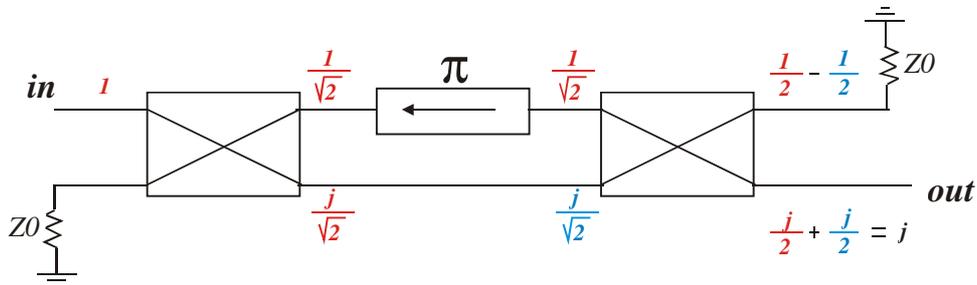


Figura 4.3

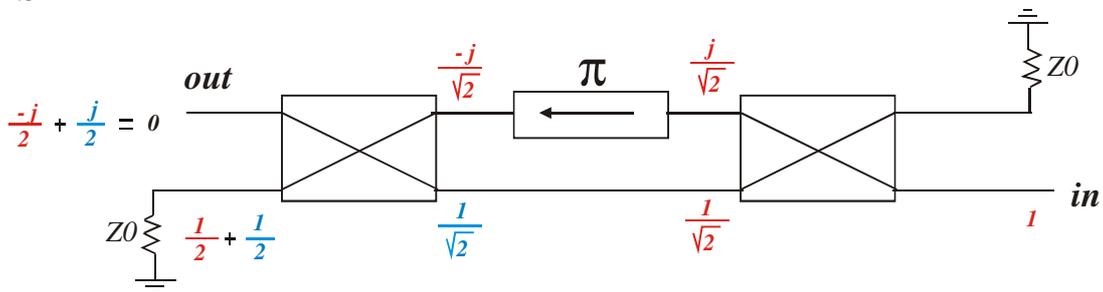


Figura 4.4

Alimentiamo con un onda di ampiezza unitaria da sinistra (Figura 4.3). All'uscita del primo accoppiatore si hanno come tensioni incidenti in ingresso al secondo accoppiatore $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{j}{\sqrt{2}}\right)$. La

prima produce sulle uscite del secondo accoppiatore delle tensioni pari a $\left(\frac{1}{2}, \frac{j}{2}\right)$. La seconda invece produce $\left(\frac{-1}{2}, \frac{j}{2}\right)$. La tensione totale è quindi nulla sulla prima porta di uscita e si ha il passaggio completo di potenza da sinistra (in) a destra (out).

Se invece si alimenta da destra (Figura 4.4) con un'onda incidente unitaria, le onde incidenti da sinistra sul primo accoppiatore sono $\left(\frac{-j}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e quelle sulle uscite rispettivamente $\left(\frac{-j}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{j}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Pertanto tutta la potenza viene dissipata. Si è quindi ottenuto un isolatore, con matrice di scattering:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio 3: Circolatore

Consideriamo ora il seguente schema:

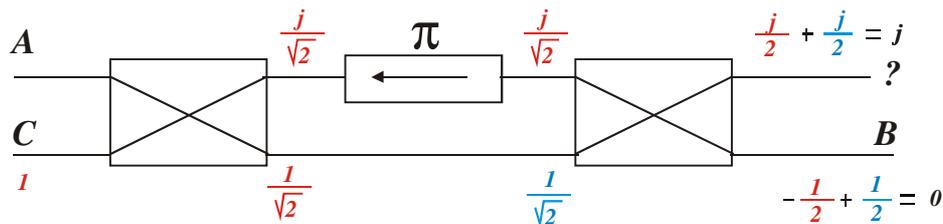


Figura 4.5

e alimentiamo dalla porta inferiore di sinistra (porta C). Le tensioni incidenti sul secondo accoppiatore sono $\left(\frac{j}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e quelle in uscita rispettivamente $\left(\frac{j}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ e $\left(\frac{j}{2}, \frac{1}{2}\right)$ per cui ora tutta la potenza va sul carico superiore (Figura 4.5). Se questo è costituito da un corto circuito la tensione viene interamente riflessa e ci troviamo ad analizzare la seguente situazione:

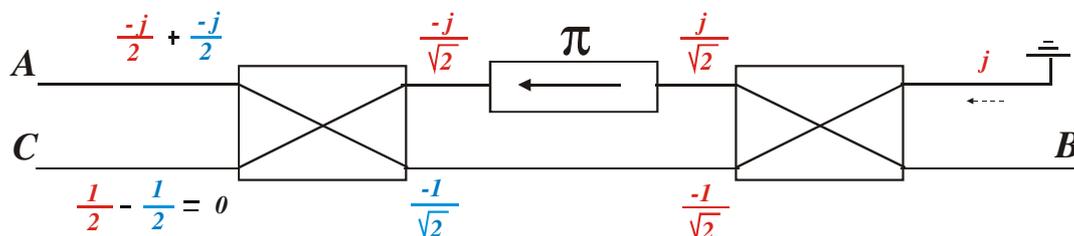


Figura 4.6

Ovverossia la potenza in ingresso da C esce tutta dal terminale A.

Si dimostra analogamente che la potenza in ingresso da A esce tutta dal terminale B (si veda schema in Figura 4.3) e la potenza in ingresso da B esce tutta dal terminale C (si veda schema in Figura 4.4).

5. DIVISORI, IBRIDI e ACCOPPIATORI IN TECNOLOGIA PLANARE

5.1 Divisore a T senza perdite

Un divisore a T ha come circuito equivalente quello mostrato in Fig. 5.1.

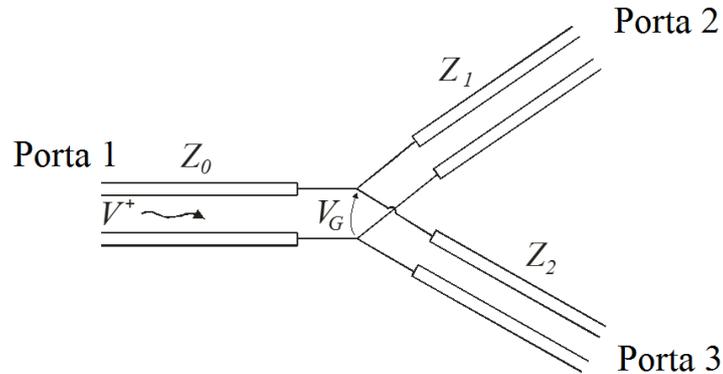


Figura 5.1. Circuito equivalente del divisore a T senza perdite.

Ad esso in genere va aggiunta una reattanza jB in parallelo alla giunzione che tiene conto della energia immagazzinata nei modi superiori alla giunzione stessa.

Se il circuito è privo di perdite, oltre che reciproco, non può essere adattato a tutte e tre le porte, come detto nel paragrafo 4.5. Ciò che però è importante è che sia adattato l'ingresso, cioè la porta 1. Quindi:

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (5.1)$$

Per ottenere l'adattamento (5.1) è comunque richiesto l'inserimento di elementi reattivi che compensino jB (ovviamente su una banda di frequenze più o meno stretta). Nel seguito, per semplicità, supporremo $B=0$, ipotizzando di aver provveduto preliminarmente a compensare tale reattanza.

La potenza su ciascuno dei due rami di uscita vale:

$$P_i = \frac{1}{2} \frac{|V_G|^2}{Z_i} \quad (5.2)$$

essendo V_G la tensione alla giunzione (ovvero V^+ se vale la condizione di adattamento alla porta 1). Risulta allora:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{Z_2}{Z_1} \Rightarrow \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_2} \left(\frac{Z_2}{Z_1} + 1 \right) = \frac{1}{Z_2} \left(\frac{P_1}{P_2} + 1 \right) \quad (5.3)$$

che, fissato il rapporto tra le potenze, consente di calcolare i valori di Z_1 e Z_2 .

In molti casi le linee di uscita devono avere impedenza pari a Z_0 e occorre quindi un trasformatore (ad esempio un tratto di linea $\frac{\lambda}{4}$) su ciascuna delle due porte in uscita.

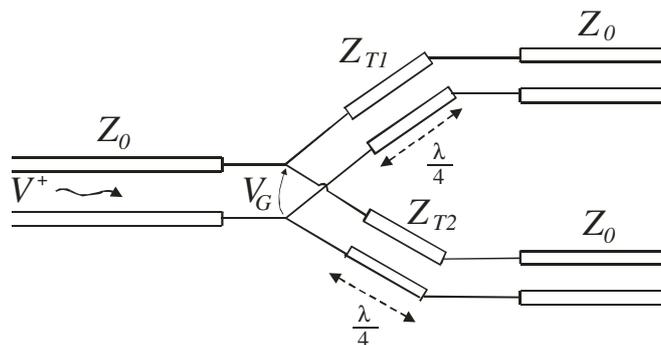


Figura 5.2. Circuito equivalente del divisore a T senza perdite con trasformatori in uscita.

con $Z_{T1} = \sqrt{Z_1 Z_0}$ e $Z_{T2} = \sqrt{Z_2 Z_0}$. Un divisore di potenza si avrà dunque con $Z_{T1} = Z_{T2} = Z_0 \sqrt{2}$. Si osservi che, nel divisore reattivo, le porte di uscita non sono adattate né isolate.

5.2 Divisore di Wilkinson

Il divisore di Wilkinson si ottiene aggiungendo al divisore a T una resistenza. Il risultato è una rete adattata a tutte le porte, con le due uscite isolate e, per quanto riguarda la potenza in ingresso, privo di perdite. La sola potenza dissipata è quella in ingresso dalle porte di uscita (cioè riflessa dagli utilizzatori).

In Fig. 5.3 è mostrato lo schema in microstriscia di un divisore per due.

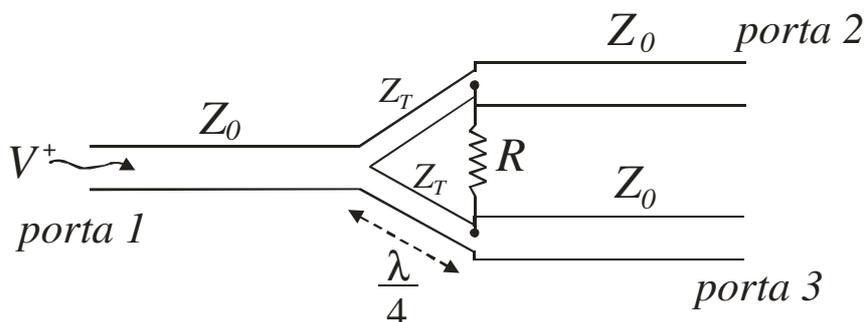


Figura 5.3. Schema di un divisore di Wilkinson realizzato in microstrip.

Si dovranno determinare i valori di Z_T e di R in modo da avere adattamento a tutte e tre le porte e garantire l'isolamento tra le due porte di uscita (2 e 3).

Poiché la rete tre porte di un divisore di Wilkinson è simmetrica rispetto allo scambio delle porte 2 e 3, per progettare e analizzarne il funzionamento è opportuno ricorrere alla tecnica delle eccitazioni pari e dispari, in cui una eccitazione generica viene decomposta nella somma di una eccitazione simmetrica (pari) e di una antisimmetrica (dispari).

Poiché il circuito è reciproco e simmetrico, la matrice di scattering può essere ottenuta alimentando solo la porta 2 (Fig. 5.4).

Per semplicità in Fig. 5.4 non sono mostrati i fili di ritorno delle linee di trasmissione, ovvero le linee sono rappresentate come se fossero microstriscie e tutte le impedenze sono normalizzate rispetto a Z_0 .

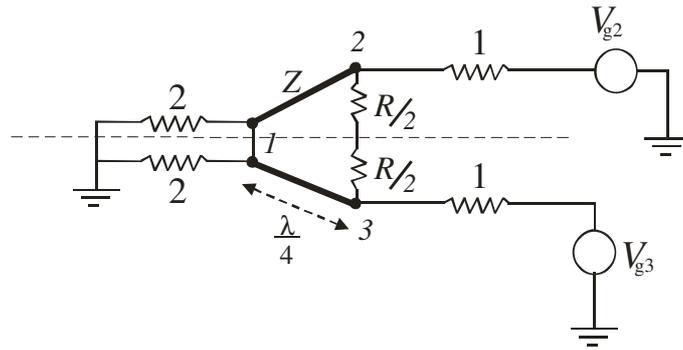


Figura 5.4. Schema del divisore di Wilkinson con alimentazione alle porte 2 e 3.

Una eccitazione con $\begin{cases} V_{g2} = 4 \\ V_{g3} = 0 \end{cases}$ può essere ottenuta come somma di $\begin{cases} V_{g2}^p = 2 \\ V_{g3}^p = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} V_{g2}^d = 2 \\ V_{g3}^d = -2 \end{cases}$

(ovvero lanciando sulle porte di uscita tensioni unitarie, una volta in fase e una in opposizione). Esaminiamo ora separatamente le due eccitazioni:

a) *eccitazione pari*

Si ha $V_2 = V_3$, e la tensione sulle due linee è la medesima. Non vi è quindi corrente nei due rami verticali e questi possono essere aperti (Fig. 5.5). Ne segue che la rete da analizzare è la seguente:

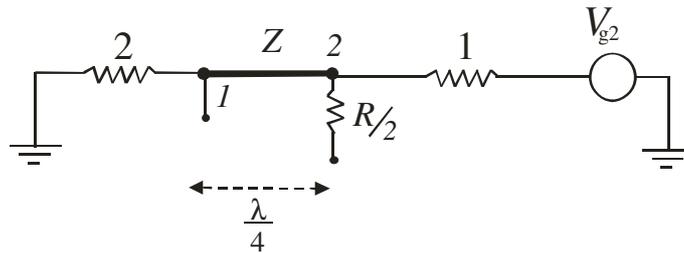


Figura 5.5. Circuito equivalente per l'eccitazione pari.

L'impedenza di ingresso alla porta 2 è $Z^2/2$, quindi

$$\Gamma_p = \frac{V_{2p}^-}{V_{2p}^+} = V_{2p}^- = \frac{Z^2/2 - 1}{Z^2/2 + 1} \quad (5.3)$$

ossia, se $Z = \sqrt{2}$ si ha $V_{2p}^- = 0$.

Per quanto riguarda invece il valore di V_1 consideriamo l'equazione delle linee con riferimento al circuito in Fig. 5.5 (tensioni e correnti sono mostrate in Fig. 5.6):

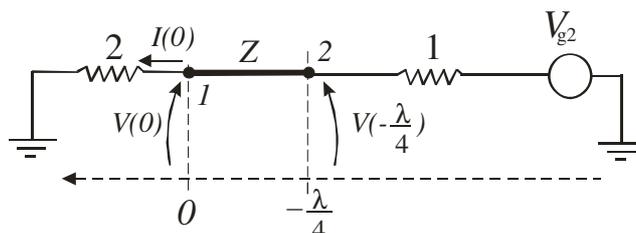


Figura 5.6. Circuito equivalente per l'eccitazione pari.

Dall'analisi del circuito in Figura 5.6 si ottiene:

$$V(z) = V(0) \cos(\beta z) - jZI(0) \operatorname{sen}(\beta z)$$

$$V\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = -jZI(0)(-1) = jZI(0) \quad (5.4)$$

Dato che $V_{g2}^p = 2$ e $V_{2p}^- = 0$ risulta $V_2 = \frac{V_{g2}^p}{2} = 1$. Quindi:

$$V\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = V_2 = 1 = jZI(0) \Rightarrow I(0) = \frac{1}{jZ} = \frac{1}{j\sqrt{2}} \quad (5.5)$$

da cui, ovviamente,

$$V(0) = V_1 = 2I(0) = \frac{2}{j\sqrt{2}} \quad (5.6)$$

Poiché stiamo alimentando dalla porta 2 (solo onda progressiva in uscita da 1) si ha:

$$V_{1p}^- = \frac{-j2}{\sqrt{2}} \quad (5.7)$$

b) *eccitazione dispari*

In questo caso $V_3 = -V_2$, cioè la tensione sulle due linee è opposta e, per simmetria, i due rami verticali possono essere cortocircuitati al centro.

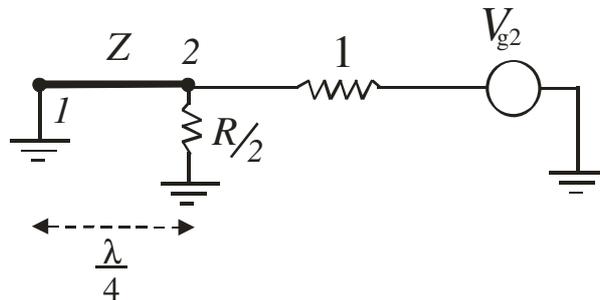


Figura 5.7: Circuito equivalente per eccitazione dispari.

Alla porta 2, immediatamente a sinistra della resistenza, la linea ha impedenza infinita. Poiché sulla porta 1 è presente un corto circuito, in questa configurazione risulta $V_{1d}^- = 0$. L'impedenza di ingresso alla porta due è invece $\frac{R}{2}$ (cioè $\frac{R}{2}$ in parallelo con una impedenza infinita), dunque scegliendo $R=2$ si ha $V_{2d}^- = 0$.

In conclusione:

$$S_{22} = \frac{V_{2p}^- + V_{2d}^-}{V_2^+} = 0 \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow S_{33} = 0 \quad (\text{per simmetria})$$

$$S_{23} = S_{32} = \frac{V_{3p}^- + V_{3d}^-}{V_2^+} = \frac{V_{2p}^- - V_{2d}^-}{V_2^+} = 0 \quad (5.9)$$

$$S_{21} = S_{12} = \frac{V_{1p}^- + V_{1d}^-}{V_2^+} = \frac{-j2/\sqrt{2} + 0}{2} = -j/\sqrt{2} (= S_{31} = S_{13}) \quad (5.10)$$

A questo punto manca solo il valore di S_{11} per completare la matrice di scattering:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \frac{-j}{\sqrt{2}} & \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ \frac{-j}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{-j}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Poiché risulta (conservazione dell'energia in una rete passiva):

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 \leq 1 \quad (5.12)$$

segue $S_{11} = 0$ perché $|S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1$.

5.3 Ibrido a 90°

L'ibrido a 90° è un accoppiatore direzionale simmetrico (paragrafo 4.6) con uscite a -3dB, costituito da linee lunghe $\lambda/4$ collegate in modo simmetrico, come mostrato in Fig. 5.8.

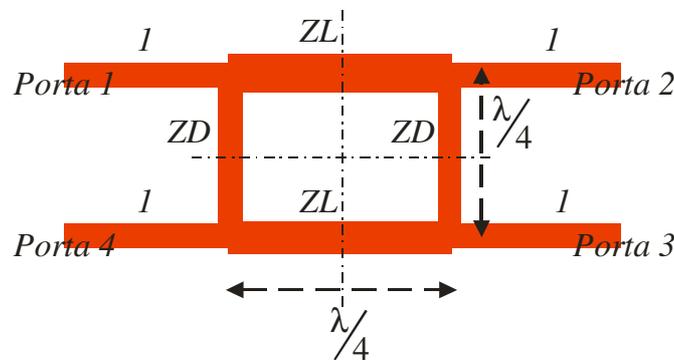


Figura 5.8. Schema planare in microstriscia dell'Ibrido a 90°.

La porta 1 è la porta di alimentazione, le porte 2 e 3 sono le porte di uscita mentre la porta 4 è isolata.

Le quattro porte hanno impedenza normalizzata pari ad 1 e il circuito è simmetrico rispetto a due assi (Fig. 5.8) in quanto il suo comportamento rimane invariato a seguito delle seguenti trasformazioni: 1-4 e 2-3, 1-2 e 4-3, 1-3 e 4-2. Questo implica che, per caratterizzare in modo completo la rete quattro porte, è sufficiente determinare la prima riga della matrice di scattering e cioè quella corrispondente ad una alimentazione $V_1^+ = 1$, $V_p^+ = 0$, $p \neq 1$. La simmetria della rete consiglia di decomporre tale eccitazione nella sovrapposizione di una eccitazione pari ($V_{1p}^+ = V_{4p}^+ = 1/2$) e di una eccitazione dispari ($V_{1d}^+ = -V_{4d}^+ = 1/2$), che possono essere analizzate separatamente.

Per quanto riguarda l'eccitazione pari non vi è corrente al centro dei tratti di impedenza ZD che quindi possono essere divisi a metà con un circuito aperto. Per l'eccitazione dispari invece è nulla la tensione al centro dei tratti di impedenza ZD e quindi a metà dei rami in derivazione può essere posto un corto circuito.

Si ha quindi:

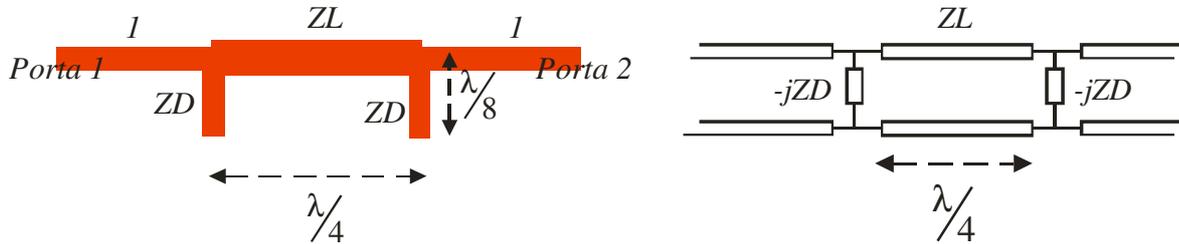


Figura 5.9. Schema planare risultante per eccitazione pari e circuito equivalente.

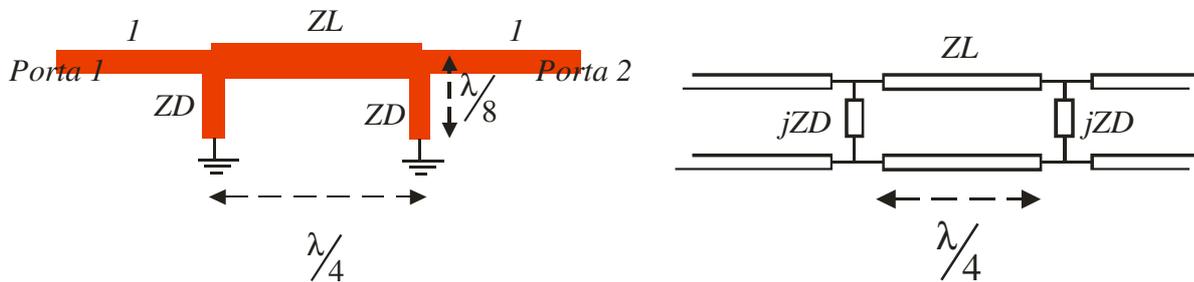


Figura 5.10. Schema planare risultante per eccitazione dispari e circuito equivalente.

La matrice ABCD per il caso pari (Fig. 5.9) vale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j}{ZD} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & jZL \\ \frac{j}{ZL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j}{ZD} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-ZL}{ZD} & jZL \\ \frac{j}{ZL} - \frac{jZL}{ZD^2} & \frac{-ZL}{ZD} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

mentre quella per il caso dispari (Fig. 5.10) si ottiene cambiando il segno a ZD .

Dalle matrici ABCD è possibile determinare la matrice di Scattering utilizzando le seguenti formule di trasformazione valide per una rete due porte:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \Gamma & T \\ T & \Gamma \end{bmatrix} \text{ con } \Gamma = \frac{(A+B)-(C+D)}{(A+B)+(C+D)}; \quad T = \frac{2}{(A+B)+(C+D)} \quad (5.14)$$

Infine, ricordando che $V_{1p/d}^- = \Gamma_{p/d} V_{1p/d}^+ = \frac{1}{2} \Gamma_{p/d}$ e $V_{2p/d}^- = T_{p/d} V_{1p/d}^+ = \frac{1}{2} T_{p/d}$, dalla sovrapposizione delle eccitazioni pari e dispari si ottiene

$$S_{11} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{V_{1p}^- + V_{1d}^-}{V_{1p}^+ + V_{1d}^+} = \frac{V_{1p}^- + V_{1d}^-}{1} = \frac{1}{2} \Gamma_p + \frac{1}{2} \Gamma_d = \frac{1}{2} (\Gamma_p + \Gamma_d) \quad (5.15)$$

$$S_{21} = \frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{V_{2p}^- + V_{2d}^-}{V_{1p}^+ + V_{1d}^+} = \frac{V_{2p}^- + V_{2d}^-}{1} = \frac{1}{2} T_p + \frac{1}{2} T_d = \frac{1}{2} (T_p + T_d) \quad (5.16)$$

$$S_{31} = \frac{V_3^-}{V_1^+} = \frac{V_{3p}^- + V_{3d}^-}{V_{1p}^+ + V_{1d}^+} = \frac{V_{2p}^- - V_{2d}^-}{1} = \frac{1}{2}(T_p - T_d) \quad (5.17)$$

$$S_{41} = \frac{V_4^-}{V_1^+} = \frac{V_{4p}^- + V_{4d}^-}{V_{1p}^+ + V_{1d}^+} = \frac{V_{1p}^- - V_{1d}^-}{1} = \frac{1}{2}(\Gamma_p - \Gamma_d) \quad (5.18)$$

Come detto l'ibrido a 90° è un accoppiatore direzionale simmetrico con uscite a -3dB e pertanto alla frequenza di progetto si richiede che:

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{41} &= 0 \\ S_{31} &= -jS_{21} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Dalla prima delle (5.19), utilizzando la (5.15) e la (5.18) segue immediatamente che $\Gamma_p = \Gamma_d = 0$ ovvero, per la (5.14):

$$(A+B)_p = (C+D)_p \quad \text{e} \quad (A+B)_d = (C+D)_d \quad (5.20)$$

Ma $A=D$ sia per la matrice pari che per quella dispari (5.13) mentre B e C contengono solamente ZD^2 (e sono uguali per il caso pari e dispari). Quindi, dalle (5.20) rimane solamente $B=C$, ovvero:

$$ZL = \frac{1}{ZL} - \frac{ZL}{ZD^2} \Rightarrow \frac{1}{ZD^2} = \frac{1}{ZL^2} - 1 \quad (5.21)$$

Per quanto riguarda invece la seconda delle (5.19), sfruttando la (5.16) e la (5.17) si ha:

$$(T_p - T_d) = -j(T_p + T_d) \Rightarrow T_p(1+j) = T_d(1-j) \quad (5.22)$$

ovvero, per la (5.14):

$$\frac{(A+B)_d}{(A+B)_p} = \frac{1-j}{1+j} \quad (5.23)$$

che consente di determinare le impedenze. Sostituendo i valori di A e B ottenuti dalle (5.13) nella (5.23) si ottiene infatti:

$$\frac{\frac{ZL}{ZD} + jZL}{-\frac{ZL}{ZD} + jZL} = \frac{1-j}{1+j} \Rightarrow \frac{2ZL}{ZD} = 2ZL \Rightarrow ZD = 1 \quad (5.24)$$

e, dalla (5.21)

$$ZL = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.25)$$

A questo punto sostituendo la (5.24) e la (5.25) nella (5.16) si ottiene il valore di S_{21} , che completa l'analisi:

$$S_{21} = \frac{1}{2}(T_p + T_d) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(A+B)_p} + \frac{1}{(A+B)_d} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{-ZL}{ZD} + jZL} + \frac{1}{\frac{ZL}{ZD} + jZL} \right) = \frac{-j}{\sqrt{2}} \quad (5.26)$$

In conclusione, la matrice di scattering del divisore ibrido a 90° è la seguente:

$$S \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & j & 1 & 0 \\ j & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & j & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

L'analisi in frequenza dell'ibrido a 90° si ottiene considerando le lunghezze elettriche delle linee pari a ϑ e non a $\pi/2$. In particolare, si dimostra che questo tipo di struttura è a banda stretta e, ipotizzando che $\vartheta = \pi/2 + \Delta\vartheta$, con $\Delta\vartheta$ sufficientemente piccolo, nell'analisi del circuito si può porre

$$\cos(\vartheta) = \cos(\pi/2 + \Delta\vartheta) = -\sin(\Delta\vartheta) \approx -\Delta\vartheta, \quad \sin(\vartheta) = \sin(\pi/2 + \Delta\vartheta) = \cos(\Delta\vartheta) \approx 1$$

$$\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} = \frac{1}{-\Delta\vartheta} \approx -\frac{1}{\Delta\vartheta}$$

Bande più larghe si possono ottenere con ibridi a più sezioni (Fig. 9.4), in cui la presenza di più parametri liberi consente una ottimizzazione in frequenza.

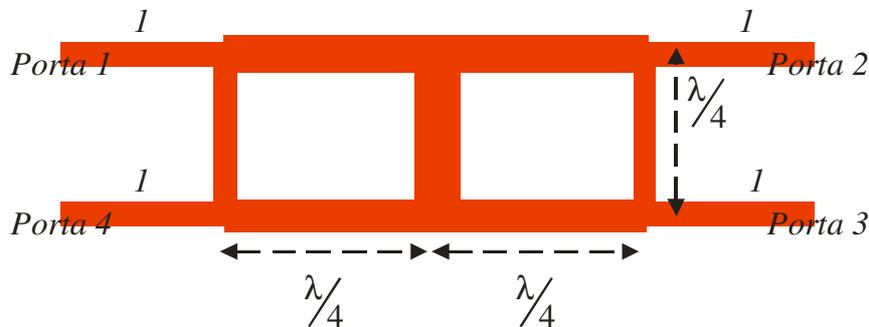


Figura 5.11. Ibrido a 90° a due sezioni.

5.4 Ibrido ad anello

L'ibrido ad anello, detto anche “rat race”, è un accoppiatore direzionale antisimmetrico con uscite a -3dB. Esso è costituito da un anello lungo $3\lambda/2$ e di impedenza caratteristica $Z_0\sqrt{2}$, con quattro porte equispaziate su mezza circonferenza e di impedenza Z_0 (Fig. 5.12).

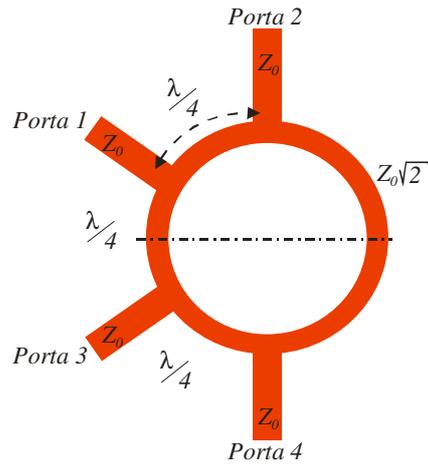


Figura 5.12. Schema planare in microstriscia di un ibrido ad anello.

Un segnale in ingresso alla porta 1 (porta somma) si divide in fase tra le porte 2 e 3 mentre un segnale in ingresso alla porta 4 (porta differenza) si divide in due segnali in opposizione di fase alle porte 2 e 3. Le porte 1 e 4, così come le porte 2 e 3 sono isolate.

Come nel caso dell'Ibrido a 90°, l'analisi e il progetto di questo componente si ottiene decomponendo l'analisi in quella relativa ad una eccitazione pari e ad una eccitazione dispari. Un'onda unitaria in ingresso alla porta 1 può essere decomposta nella somma di $(V_{1p}^+ = V_{3p}^+ = 1/2)$ e $(V_{1d}^+ = -V_{3d}^+ = 1/2)$ a cui corrispondono rispettivamente le configurazioni in Fig. 5.13 (circuitto aperto o C.M.P. in corrispondenza all'asse di simmetria) e in Fig. 5.14 (cortocircuito o C.E.P. in corrispondenza all'asse di simmetria).

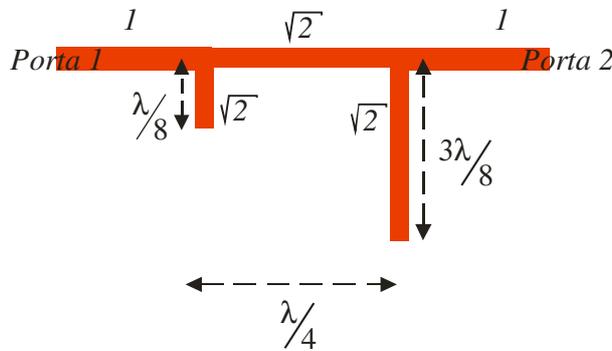


Figura 5.13. Schema planare risultante per eccitazione pari.

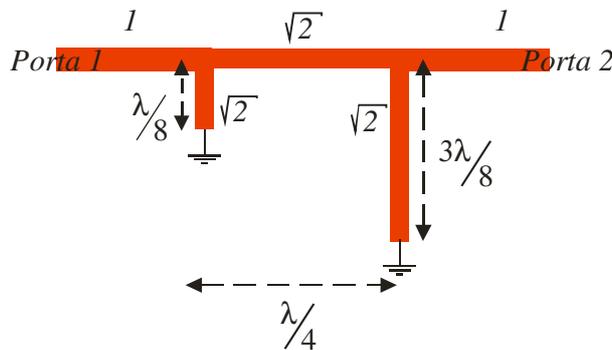


Figura 5.14: Schema planare risultante per eccitazione dispari.

Le matrici ABCD per alimentazione dalla porta 1 sono:

$$\underline{T}_p = \begin{bmatrix} 1 & j\sqrt{2} \\ j\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}; \underline{T}_d = \begin{bmatrix} -1 & j\sqrt{2} \\ j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Da queste si ottengono i parametri di scattering:

$$V_1^- = V_4^- = 0; V_2^- = V_3^- = \frac{-j}{\sqrt{2}} \quad (5.29)$$

Analogo procedimento può essere fatto per il caso di alimentazione dalla porta 4 (o equivalentemente dalla porta 2). In questo caso i circuiti in Figg. 5.13 e 5.14 rimangono inalterati ma le onde incidono da destra anzi che da sinistra. Le corrispondenti matrici ABCD sono:

$$\underline{T}_p = \begin{bmatrix} -1 & j\sqrt{2} \\ j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}; \underline{T}_d = \begin{bmatrix} 1 & j\sqrt{2} \\ j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

e risulta

$$V_1^- = V_4^- = 0; V_2^- = -V_3^- = \frac{j}{\sqrt{2}} \quad (5.31)$$

In conclusione la matrice di scattering dell'ibrido ad anello è la seguente:

$$\underline{S} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

NB: con l'alimentazione dalla porta 1 e dalla porta 4 sono state determinate la prima e la quarta colonna della matrice di Scattering. Per simmetria, è immediato ricavare la terza colonna dalla prima ($S_{13}=S_{31}$, $S_{23}=S_{41}$, $S_{33}=S_{11}$, $S_{43}=S_{21}$) e la seconda dalla quarta ($S_{12}=S_{34}$, $S_{22}=S_{44}$, $S_{32}=S_{14}$, $S_{42}=S_{24}$)

5.5 Accoppiatore a linee accoppiate

Una sezione di linee accoppiate di lunghezza elettrica $\vartheta = \beta L$ costituisce, con una scelta opportuna di ϑ e delle impedenze caratteristiche di modo pari e dispari, un accoppiatore direzionale simmetrico (paragrafo 4) in cui la porta 1 è la porta di ingresso; la porta 2 è la porta passante; la porta 3 è la porta accoppiata e la 4 la porta isolata (Fig. 5.15). Supponiamo inizialmente che la struttura sia di tipo TEM e quindi con $\beta_p = \beta_d = \omega \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

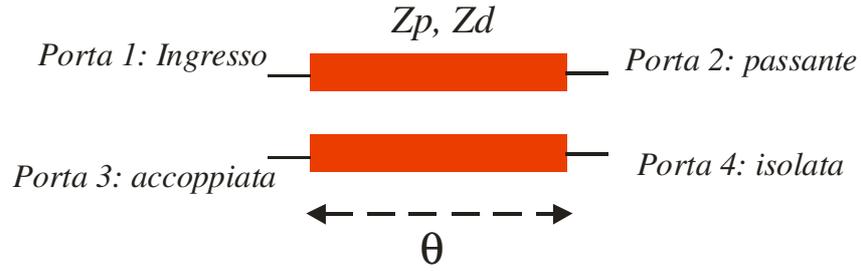


Figura 5.15. Schema planare di una sezione di linee accoppiate di lunghezza elettrica $\vartheta = \beta L$

Per determinare la matrice di scattering di questa rete 4 porte conviene utilizzare i modi pari e dispari. Risulta pertanto, per ciascuna delle 4 porte ($n=1, \dots, 4$),

$$\begin{aligned} V_n^+ &= V_{np}^+ + V_{nd}^+ \\ V_n^- &= V_{np}^- + V_{nd}^- \end{aligned} \quad (5.33)$$

D'altra parte, sia il modo pari, sia quello dispari, sono tali che ciascuna delle due linee di cui è costituita la struttura, può essere considerata isolata (sia pure con la impedenza caratteristica e la costante di propagazione del modo). Risulta pertanto:

$$\begin{pmatrix} V_{1p}^- \\ V_{2p}^- \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}^p \begin{pmatrix} V_{1p}^+ \\ V_{2p}^+ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} V_{1d}^- \\ V_{2d}^- \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}^d \begin{pmatrix} V_{1d}^+ \\ V_{2d}^+ \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

e analoghe per le porte 3 e 4:

$$\begin{pmatrix} V_{3p}^- \\ V_{4p}^- \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}^p \begin{pmatrix} V_{3p}^+ \\ V_{4p}^+ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} V_{3d}^- \\ V_{4d}^- \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}^d \begin{pmatrix} V_{3d}^+ \\ V_{4d}^+ \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

dove $\underline{\underline{S}}^p$ e $\underline{\underline{S}}^d$ sono le matrici di scattering di una linea lunga $\vartheta = \beta L$ di impedenza caratteristica Z_p e Z_d rispettivamente.

D'altra parte risulta:

$$\begin{cases} V_1 = V_{1p} + V_{1d} \\ V_3 = V_{3p} + V_{3d} = V_{1p} - V_{1d} \end{cases} \quad \begin{cases} V_2 = V_{2p} + V_{2d} \\ V_4 = V_{4p} + V_{4d} = V_{2p} - V_{2d} \end{cases} \quad (5.36)$$

Valide sia per onde progressive che per onde riflesse. Invertendo le 5.36 si ottiene:

$$\begin{cases} V_{1p} = \frac{V_1 + V_3}{2} \\ V_{1d} = \frac{V_1 - V_3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} V_{2p} = \frac{V_2 + V_4}{2} \\ V_{2d} = \frac{V_2 - V_4}{2} \end{cases} \quad (5.37)$$

e pertanto:

$$\begin{pmatrix} V_{1p}^+ \\ V_{2p}^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_1^+ + V_3^+ \\ V_2^+ + V_4^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ V_3^+ \\ V_4^+ \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

$$\begin{pmatrix} V_{1d}^+ \\ V_{2d}^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_1^+ - V_3^+ \\ V_2^+ - V_4^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ V_3^+ \\ V_4^+ \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Quindi usando le 5.33 e 5.34, le 5.38 e 5.39 si ottiene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_1^- \\ V_2^- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V_{1p}^- \\ V_{2p}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{1d}^- \\ V_{2d}^- \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}^p \begin{pmatrix} V_{1p}^+ \\ V_{2p}^+ \end{pmatrix} + \underline{\underline{S}}^d \begin{pmatrix} V_{1d}^+ \\ V_{2d}^+ \end{pmatrix} = \\ &= \left[\underline{\underline{S}}^p \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \underline{\underline{S}}^d \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ V_3^+ \\ V_4^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{S}}^p + \underline{\underline{S}}^d \mid \underline{\underline{S}}^p - \underline{\underline{S}}^d \right) \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ V_3^+ \\ V_4^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.40)$$

e, per le 5.36,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_3^- \\ V_4^- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V_{3p}^- \\ V_{4p}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{3d}^- \\ V_{4d}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{1p}^- \\ V_{2p}^- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_{1d}^- \\ V_{2d}^- \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}^p \begin{pmatrix} V_{1p}^+ \\ V_{2p}^+ \end{pmatrix} - \underline{\underline{S}}^d \begin{pmatrix} V_{1d}^+ \\ V_{2d}^+ \end{pmatrix} = \\ &= \left[\underline{\underline{S}}^p \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \underline{\underline{S}}^d \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ V_3^+ \\ V_4^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{S}}^p - \underline{\underline{S}}^d \mid \underline{\underline{S}}^p + \underline{\underline{S}}^d \right) \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ V_3^+ \\ V_4^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Dalle 5.40 e 5.41 si ottiene dunque la matrice di scattering della rete quattro porte:

$$\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}^p + \underline{\underline{S}}^d & \underline{\underline{S}}^p - \underline{\underline{S}}^d \\ \underline{\underline{S}}^p - \underline{\underline{S}}^d & \underline{\underline{S}}^p + \underline{\underline{S}}^d \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Ricordando che $\underline{\underline{S}}^p$ e $\underline{\underline{S}}^d$ sono le matrici di scattering di una linea lunga ϑ di impedenza Z_p o Z_d , si ha:

$$\underline{\underline{S}}^{p/d} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_{p/d} & T_{p/d} \\ T_{p/d} & \Gamma_{p/d} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

dove

$$\Gamma_{p/d} = \frac{(A_{p/d} + B_{p/d}) - (C_{p/d} + D_{p/d})}{(A_{p/d} + B_{p/d}) + (C_{p/d} + D_{p/d})} \quad T_{p/d} = \frac{2}{(A_{p/d} + B_{p/d}) + (C_{p/d} + D_{p/d})} \quad (5.44)$$

Sappiamo che, per una linea lunga ϑ

$$ABCD_{p/d} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & jZ_{p/d} \operatorname{sen} \vartheta \\ \frac{j}{Z_{p/d}} \operatorname{sen} \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

quindi:

$$\Gamma_{p/d} = \frac{j \operatorname{sen} \vartheta \left(Z_{p/d} - \frac{1}{Z_{p/d}} \right)}{2 \cos \vartheta + j \operatorname{sen} \vartheta \left(Z_{p/d} + \frac{1}{Z_{p/d}} \right)} \quad (5.46)$$

$$T_{p/d} = \frac{2}{2 \cos \vartheta + j \operatorname{sen} \vartheta \left(Z_{p/d} + \frac{1}{Z_{p/d}} \right)} \quad (5.47)$$

La prima richiesta affinché la sezione di linee accoppiate si comporti come un accoppiatore direzionale è che ci sia adattamento alla porta 1 (e quindi per simmetria anche a tutte le altre porte). L'adattamento alla porta 1 richiede (5.42 e 5.43):

$$\Gamma_p + \Gamma_d = 0 \quad (5.48)$$

ossia

$$\frac{j \operatorname{sen} \vartheta \left(Z_p - \frac{1}{Z_p} \right)}{2 \cos \vartheta + j \operatorname{sen} \vartheta \left(Z_p + \frac{1}{Z_p} \right)} + \frac{j \operatorname{sen} \vartheta \left(Z_d - \frac{1}{Z_d} \right)}{2 \cos \vartheta + j \operatorname{sen} \vartheta \left(Z_d + \frac{1}{Z_d} \right)} = 0 \quad (5.49)$$

$$2 \cos \vartheta \left(Z_p + Z_p - \frac{1}{Z_p} - \frac{1}{Z_p} \right) + j \operatorname{sen} \vartheta \left[\left(Z_d + \frac{1}{Z_d} \right) \left(Z_p - \frac{1}{Z_p} \right) + \left(Z_p + \frac{1}{Z_p} \right) \left(Z_d - \frac{1}{Z_d} \right) \right] = 0 \quad (5.50)$$

La scelta $Z_p Z_d = 1$ (con impedenze normalizzate) annulla sia il coefficiente del $\cos \vartheta$, sia il coefficiente del $\operatorname{sen} \vartheta$ e quindi garantisce adattamento a tutte le frequenze.

Le 5.42 e 5.43 forniscono inoltre

$$\begin{aligned} S_{21} &= \frac{1}{2} (T_p + T_d) \\ S_{31} &= \frac{1}{2} (\Gamma_p - \Gamma_d) \\ S_{41} &= \frac{1}{2} (T_p - T_d) \end{aligned} \quad (5.51)$$

e, poiché $Z_p Z_d = 1$

$$\Gamma_p = \frac{j \operatorname{sen} \vartheta (Z_p - Z_d)}{2 \cos \vartheta + j \operatorname{sen} \vartheta (Z_p + Z_d)} = -\Gamma_d \quad (5.52)$$

$$T_p = \frac{2}{2 \cos \vartheta + j \operatorname{sen} \vartheta (Z_p + Z_d)} = T_d$$

per cui, sostituendo nelle 5.51,

$$S_{21} = \frac{1}{2}(T_p + T_d) = T_p = \frac{2}{2 \cos \vartheta + j \operatorname{sen} \vartheta (Z_p + Z_d)} = \frac{\sqrt{1-C^2}}{\sqrt{1-C^2} \cos \vartheta + j \operatorname{sen} \vartheta}$$

$$S_{31} = \frac{1}{2}(\Gamma_p - \Gamma_d) = \Gamma_p = \frac{j \operatorname{sen} \vartheta (Z_p - Z_d)}{2 \cos \vartheta + j \operatorname{sen} \vartheta (Z_p + Z_d)} = \frac{j C \operatorname{sen} \vartheta}{\sqrt{1-C^2} \cos \vartheta + j \operatorname{sen} \vartheta} \quad (5.53)$$

$$S_{41} = \frac{1}{2}(T_p - T_d) = 0$$

con

$$C = \frac{Z_p - Z_d}{Z_p + Z_d} \quad (5.54)$$

L'accoppiamento S_{31} è massimo per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ e vale C (Fig. 5.16). Si sceglie pertanto la lunghezza della sezione di linee accoppiate in modo tale che risulti $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ a centro banda (ossia alla frequenza di progetto). Quindi

$$S_{21} \left(\vartheta = \frac{\pi}{2} \right) = -j \sqrt{1-C^2} \quad S_{31} \left(\vartheta = \frac{\pi}{2} \right) = C \quad (5.55)$$

con uno sfasamento di 90° tra V_2^- e V_3^- (Fig. 5.17), che, in teoria, ne consente l'uso come ibrido a 90° (per $C = 1/\sqrt{2} = -3dB$).

L'accoppiatore a linee accoppiate ha il vantaggio di separare fisicamente la linea accoppiata da quella principale. Tuttavia, il valore dell'accoppiamento massimo C non può essere troppo grande. Infatti C grande vorrebbe dire Z_p molto grande rispetto a Z_d (ossia C_m elevato in 3.26) e quindi le linee potrebbero risultare troppo vicine e pertanto difficilmente realizzabili. Valori di accoppiamento di $-8 dB$ sono spesso già troppo grandi per poter essere ottenuti.

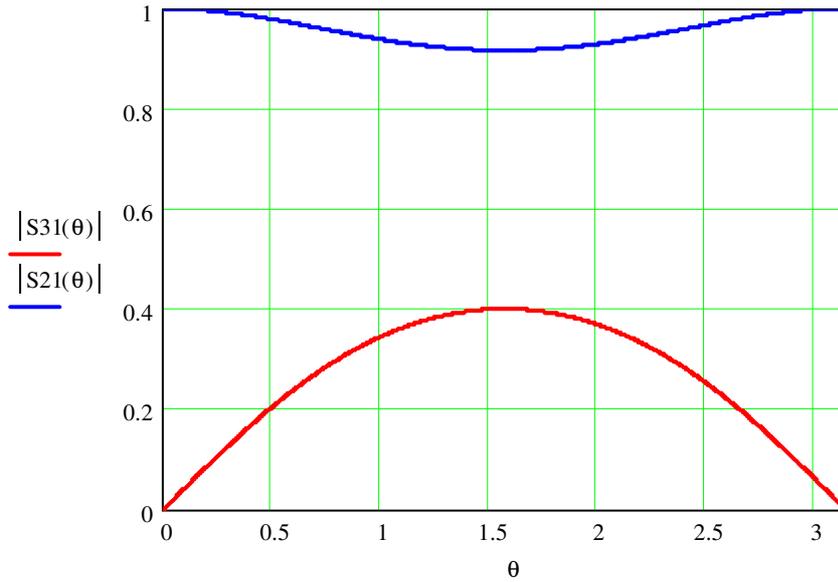


Figura 5.16: Ampiezza di S_{21} e S_{31} al variare della lunghezza elettrica per $C = 0.4$.

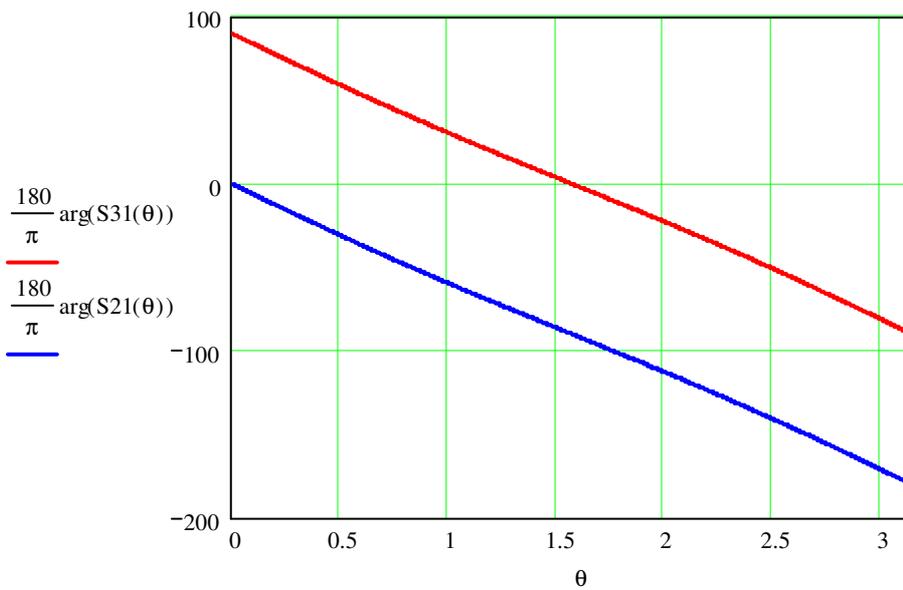


Figura 5.17. Fase di S_{21} e S_{31} al variare della lunghezza elettrica per $C = 0.4$.

Fino ad ora abbiamo ipotizzato che le linee accoppiate siano state realizzate in una struttura che supporta modi TEM. Ovviamente i risultati ottenuti non valgono più se la struttura non è trasversalmente omogenea e supporta solamente modi quasi TEM. In questo caso la 5.45 (e di conseguenza tutte le formule seguenti) devono essere modificate per tenere conto che $\beta_p \neq \beta_d$ e quindi $\vartheta_p \neq \vartheta_d$.

Mentre per i valori di S_{21} ed S_{31} si possono continuare ad utilizzare, con buona approssimazione, le 5.53, la differenza tra le velocità di fase dei modi pari e dispari modifica in modo sostanziale il valore dell'isolamento alla porta 4 (S_{41}).

Infatti, nel caso TEM l' S_{41} è nullo perché T_p e T_d sono uguali. In altri termini

$$V_4^- = \frac{1}{2}(T_p - T_d)V_1^+ = \frac{1}{2}T_p V_1^+ - \frac{1}{2}T_d V_1^+ \quad (5.56)$$

Ma le due ampiezze $T_p V_1^+$ e $T_d V_1^+$ sono grandi e quindi V_4^- è la differenza di due numeri grandi e uguali. E' sufficiente quindi una piccola variazione relativa di una delle due tensioni, come ad esempio quella dovuta alla diversa velocità di fase delle due onde pari e dispari, per degradare in modo significativo la direttività.

D'altra parte nel caso quasi TEM T_p è diverso da T_d perché $\vartheta_p \neq \vartheta_d$ e la 5.56 non fornisce più zero.

Nel caso non sia possibile utilizzare strutture TEM, per migliorare il valore dell'isolamento e quindi della direttività dell'accoppiatore direzionale a linee accoppiate, si può pensare di compensare la differenza di velocità di fase tra il modo pari e il modo dispari. Nel caso di linee accoppiate in microstriscia è possibile ricorrere all'uso di superstrati dielettrici o a substrati anisotropi in modo da abbassare la differenza tra la ϵ_{eff}^p e la ϵ_{eff}^d (Fig. 5.18). In alternativa si può pensare a delle modifiche circuitali come ad esempio all'inserimento di condensatori connessi in parallelo alle estremità della sezione di linee accoppiate (Fig. 5.19). Il valore di C_T viene determinato in modo iterativo, attraverso un procedimento di sintesi per tentativi che coinvolge anche i parametri geometrici della struttura (tipicamente la spaziatura tra le linee e la larghezza), in modo da minimizzare l' S_{41} mantenendo inalterato il valore dell'accoppiamento a centro banda.

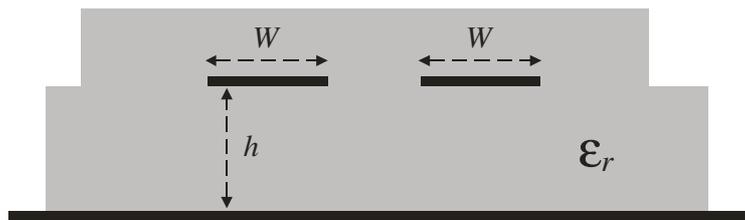


Figura 5.18. Linee accoppiate in una microstriscia modificata con l'inserimento di un superstrato dielettrico.

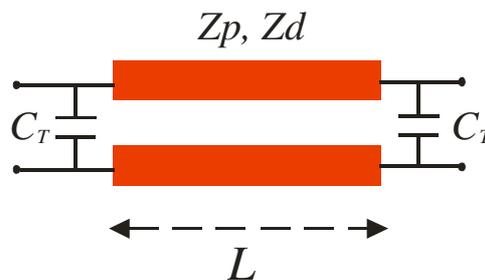


Figura 5.19. Modifica circuitali per la compensazione delle velocità di fase.

5.6 Accoppiatore multisezione

La banda passante di un accoppiatore a linee accoppiate può essere incrementata (se le velocità di fase sono uguali) usando un trasformatore multisezione.

Si considera un accoppiatore direzionale a linee accoppiate con accoppiamento $C \ll 1$. In questo caso le 5.53 possono essere approssimate come segue ($\sqrt{1-C^2} \approx 1$):

$$S_{21} = \frac{\sqrt{1-C^2}}{\sqrt{1-C^2} \cos \vartheta + j \text{sen} \vartheta} \approx e^{-j\vartheta}$$

$$S_{31} = \frac{jC \text{sen} \vartheta}{\sqrt{1-C^2} \cos \vartheta + j \text{sen} \vartheta} \approx j e^{-j\vartheta} C \text{sen} \vartheta$$
(5.57)

Le 5.57 implicano che non vi è perdita di potenza per effetto del prelievo effettuato alla porta 3. Ovviamente questo viola la conservazione della potenza ma costituisce, in molti casi, una buona approssimazione.

Supponiamo ora di inserire due linee in cascata con accoppiamenti a centro banda pari a C_1 e C_2 :

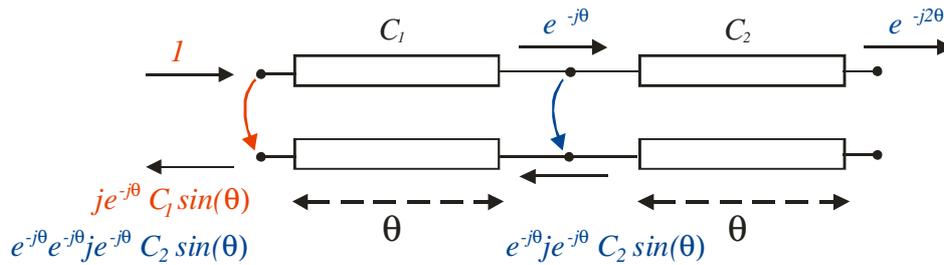


Figura 5.20. Linee accoppiate collegate in cascata.

Dallo schema in Fig. 5.20 risulta:

$$S_{21} \approx e^{-j2\vartheta}$$

$$S_{31} \approx j e^{-j\vartheta} C_1 \text{sen} \vartheta + j e^{-j3\vartheta} C_2 \text{sen} \vartheta = j e^{-j\vartheta} \text{sen} \vartheta [C_1 + C_2 e^{-j2\vartheta}]$$
(5.58)

In generale, per un accoppiatore direzionale a linee accoppiate ad N stadi simmetrico (Fig. 5.21) si ha (N dispari con $C_1=C_N, C_2=C_{N-1}, \dots$):

$$S_{31} \approx 2j e^{-j\vartheta} \text{sen} \vartheta \left[C_1 \cos(N-1)\vartheta + C_2 \cos(N-3)\vartheta + \dots + \frac{1}{2} C_M \right] e^{-j(N-1)\vartheta}$$
(5.59)

con $M = \frac{N+1}{2}$

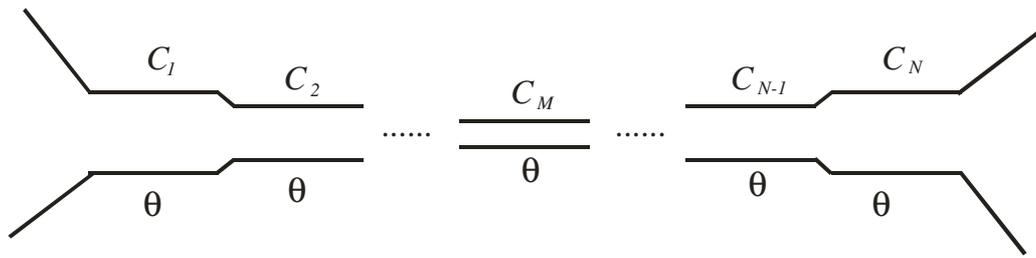


Figura 5.21. Accoppiatore a linee accoppiate multisezione ad N stadi.

La 5.59 è una serie di Fourier per l'accoppiamento S_{31} in funzione della frequenza. Pertanto è possibile sintetizzare la risposta in frequenza desiderata, e quindi, ad esempio, incrementare la banda passante, scegliendo i coefficienti di accoppiamento C_1, C_2, \dots, C_M in modo opportuno.

6. ADATTAMENTI A BANDA LARGA

6.1 Larghezza di banda degli adattamenti

Lo schema di base di un adattamento è mostrato in Figura 6.1. La rete di adattamento è ovviamente priva di perdite e Z_L è il carico da adattare. Supponiamo che alla frequenza di progetto ω_0 il coefficiente di riflessione $\Gamma = 0$. Si vuole determinare la larghezza di banda dell'adattamento.

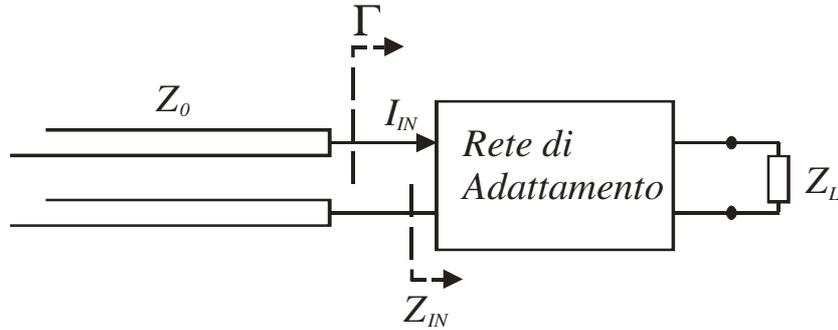


Figura 6.1. Schema di un adattamento.

Se $\Delta\omega \ll \omega_0$ allora:

$$Z_{IN}(\omega + \Delta\omega) \approx Z_{IN}(\omega) + \frac{\partial Z_{IN}(\omega)}{\partial \omega} \Delta\omega \approx Z_{IN}(\omega) + \frac{\partial R_{IN}(\omega)}{\partial \omega} \Delta\omega + j \frac{\partial X_{IN}(\omega)}{\partial \omega} \Delta\omega \quad (6.1)$$

Si può assumere che R_{IN} non vari in modo apprezzabile con ω per cui $R_{IN} = Z_0$. Per quanto riguarda invece la variazione della X_{IN} con la frequenza si dimostra che (Teorema di Foster):

$$\frac{\partial X_{IN}(\omega)}{\partial \omega} = \frac{4(W_e + W_m)}{|I_{IN}|^2} = \frac{4W_{em}}{|I_{IN}|^2} \quad (6.2)$$

Dove W_e , W_m , e W_{em} sono rispettivamente l'energia elettrica, quella magnetica e quella elettromagnetica complessiva immagazzinata nella rete (per calcolare la larghezza di banda occorre tenere conto anche dell'energia immagazzinata nel carico). Quindi:

$$Z_{IN} \approx Z_0 + j \frac{4W_{em}}{|I_{IN}|^2} \Delta\omega \quad (6.3)$$

D'altra parte, poichè $|I_{IN}|^2 = \frac{2P_L}{R_{IN}}$ (la rete di adattamento è priva di perdite quindi P_L è la potenza dissipata sul carico Z_L), si ha:

$$Z_{IN} \approx Z_0 + j2\Delta\omega \frac{W_{em}}{P_L} R_{IN} \quad (6.4)$$

A questo punto possiamo introdurre un "fattore di merito" $Q = \frac{\omega_0 W_{em}}{P_L}$ e si ottiene

$$Z_{IN} \approx Z_0 + j \frac{2Z_0 \Delta \omega}{\omega_0} Q \quad (6.5)$$

Q prende il nome di fattore di merito del circuito, considerato a vuoto, ovvero senza tenere conto dell'effetto di carico della linea di alimentazione.

Se $\Delta \omega \ll \omega_0$ si ha anche:

$$\Gamma = \frac{Z_{IN} - Z_0}{Z_{IN} + Z_0} \approx jQ \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \quad (6.6)$$

La (6.6), fissato il valore massimo del coefficiente di riflessione $|\Gamma_M|$, fornisce la banda passante dell'adattamento:

$$\frac{2\Delta \omega}{\omega_0} \approx \frac{2\Gamma_M}{Q} \quad (6.7)$$

6.2 Linee con impedenza costante a tratti

Se vengono utilizzate linee con impedenza costante a tratti e con discontinuità piccole tra i vari tratti, è possibile una valutazione approssimata del coefficiente di riflessione all'ingresso (approssimazione di piccole riflessioni).

Consideriamo come punto di partenza una struttura con due discontinuità (Figura 6.2):

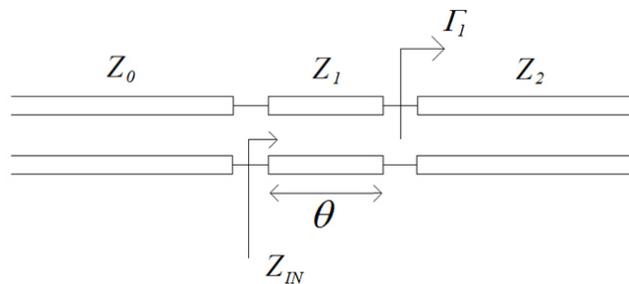


Figura 6.2. Linea di trasmissione con due salti di impedenza ($Z_0 = 1$).

Il coefficiente di riflessione alla seconda interfaccia vale:

$$\Gamma_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (6.8)$$

L'impedenza alla prima interfaccia è pertanto:

$$Z_{IN} = Z_1 \frac{1 + \Gamma_T}{1 - \Gamma_T} \quad (6.9)$$

dove $\Gamma_T = \Gamma_1 \exp(-2j\theta)$

Il coefficiente di riflessione corrispondente vale dunque:

$$\Gamma_{IN} = \frac{Z_{IN} - Z_0}{Z_{IN} + Z_0} = \frac{Z_1 \frac{1+\Gamma_T}{1-\Gamma_T} - Z_0}{Z_1 \frac{1+\Gamma_T}{1-\Gamma_T} + Z_0} = \frac{Z_1(1+\Gamma_T) - Z_0(1-\Gamma_T)}{Z_1(1+\Gamma_T) + Z_0(1-\Gamma_T)} \quad (6.10)$$

Si può introdurre il parametro

$$\Gamma_0 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \quad (6.11)$$

che prende il nome di “coefficiente di riflessione locale” e che sarebbe il coefficiente di riflessione all’ingresso se la linea di impedenza Z_1 fosse illimitata. Dalla (6.11) risulta:

$$Z_1 = Z_0 \frac{1+\Gamma_0}{1-\Gamma_0} \quad (6.12)$$

Sostituendo la (6.12) nella (6.10) si ottiene:

$$\Gamma_{IN} = \frac{Z_0 \frac{1+\Gamma_0}{1-\Gamma_0} (1+\Gamma_T) - Z_0(1-\Gamma_T)}{Z_0 \frac{1+\Gamma_0}{1-\Gamma_0} (1+\Gamma_T) + Z_0(1-\Gamma_T)} = \frac{(1+\Gamma_0)(1+\Gamma_T) - (1-\Gamma_T)(1-\Gamma_0)}{(1+\Gamma_0)(1+\Gamma_T) + (1-\Gamma_T)(1-\Gamma_0)} = \frac{2(\Gamma_0 + \Gamma_T)}{2 + 2\Gamma_0\Gamma_T} \quad (6.13)$$

Se i salti di impedenza sono piccoli allora anche i coefficienti di riflessione saranno piccoli e, a denominatore della (6.13) possiamo trascurare il termine $2\Gamma_0\Gamma_T$ rispetto a 2. Si ha quindi:

$$\Gamma_{IN} \approx \Gamma_0 + \Gamma_T = \Gamma_0 + \Gamma_1 \exp(-2j\theta) \quad (6.14)$$

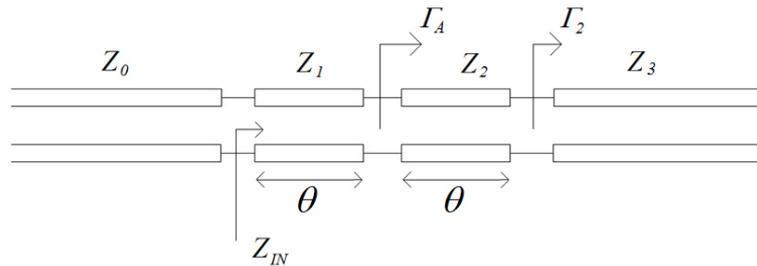


Figura 6.3. Linea di trasmissione con tre salti di impedenza ($Z_0 = 1$) e due linee di lunghezza θ .

Nel caso di tre salti di impedenza (come mostrato in figura 6.2) definiamo i tre coefficienti di riflessione locali:

$$\Gamma_0 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}, \quad \Gamma_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad \Gamma_2 = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}$$

Per la (6.14), applicata agli ultimi due salti di impedenza, si ha:

$$\Gamma_A \approx \Gamma_1 + \Gamma_2 \exp(-2j\theta) \quad (6.15)$$

Sempre utilizzando la (6.14) applicata ai primi due salti di impedenza si ottiene:

$$\Gamma_{IN} \approx \Gamma_0 + \Gamma_A \exp(-2j\theta) \quad (6.16)$$

Infine, sostituendo la (6.15) nella (6.16)

$$\Gamma_{IN} \approx \Gamma_0 + [\Gamma_1 + \Gamma_2 \exp(-2j\theta)] \exp(-2j\theta) = \Gamma_0 + \Gamma_1 \exp(-2j\theta) + \Gamma_2 \exp(-4j\theta) \quad (6.17)$$

L'espressione (6.14) è relativa a due salti di impedenza, ossia con una linea di lunghezza elettrica θ (Figura 6.2): assumiamo $N = 1$; l'espressione (6.17) è relativa a tre salti di impedenza, ossia con due linee di lunghezza elettrica θ (Figura 6.3): assumiamo $N = 2$. E' possibile generalizzare le approssimazioni (6.14) e (6.17) al caso di N linee, con N generico, tutte con la stessa lunghezza elettrica θ . Si ha quindi (Figura 6.4):

$$* \Gamma_{IN} \approx \sum_{n=0}^N \Gamma_n \exp(-2nj\theta) \quad (6.18)$$

$$\text{con } \Gamma_n = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n}, \quad n=1, \dots, N; \quad \text{coefficienti di riflessione locale.} \quad (6.19)$$

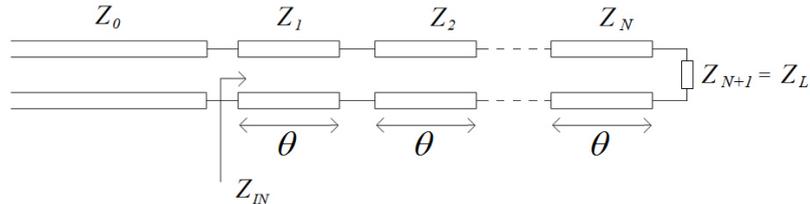


Figura 6.3. Linea di trasmissione con $N+1$ salti di impedenza ($Z_0 = 1$) e N linee di lunghezza θ .

Mediante la (6.18) è possibile *sintetizzare* qualsiasi coefficiente di riflessione al variare della frequenza (θ), scegliendo opportunamente i valori dei coefficienti di riflessione locali Γ_n , e utilizzando un numero (N) “sufficiente” di linee. Infatti, una serie di Fourier, come la (6.18), è in grado di rappresentare qualunque funzione purchè si usi un numero di termini sufficiente.

Sfruttando questo fatto, è chiaro che, tramite un trasformatore ad N sezioni, come quello mostrato in Figura 6.3, è possibile realizzare un adattamento la larga banda del carico finale Z_L .

Nei paragrafi successivi mostreremo come usare questa teoria per progettare “trasformatori multisezione” per due delle risposte “passabanda” più usate: la risposta binomiale (*maximally flat*) e la risposta di Chebyshev (*equal ripple*)

6.3 Trasformatore binomiale

Un trasformatore molto usato è quello che ha, alla frequenza centrale, $N-1$ derivate di $|\Gamma(\theta)|$ nulle (filtro a massima piattezza). Per esso risulta dunque:

$$\Gamma(\theta) = A(1 + e^{-2j\theta})^N = A e^{-jN\theta} 2^N (\cos \theta)^N \quad (6.20)$$

$$|\Gamma(\theta)| = 2^N |A| |\cos \theta|^N \quad (6.21)$$

$|\Gamma(\theta)| = 0$ per $\theta = \frac{\pi}{2}$ che fissa la frequenza centrale (ovviamente quella per cui la lunghezza fisica

$L = \lambda/4$). Dalla (6.21) è poi evidente che le prime $N-1$ derivate sono nulle in $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Per determinare la costante A notiamo che, se la frequenza tende a zero, anche la lunghezza elettrica θ tende a zero e quindi

$$|\Gamma(0)| = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 2^N |A| \quad (6.22)$$

Ricordando la formula binomiale (da cui il nome di trasformatore binomiale):

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a^n b^{N-n} \quad (6.23)$$

Si ottiene (con $a = e^{-2j\theta}$ e $b = 1$)

$$\Gamma(\theta) = A(1 + e^{-2j\theta})^N = A \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} e^{-2jn\theta} \quad (6.24)$$

I valori (approssimati) di Γ_n si ottengono confrontando con la (6.24) con la (6.18) ottenuta con la approssimazione di piccole riflessioni:

$$\Gamma_n = A \binom{N}{n} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \frac{1}{2^N} \binom{N}{n} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \frac{1}{2^N} \frac{N!}{(N-n)!n!} \quad (6.25)$$

A partire dai valori di Γ_n si possono poi calcolare le impedenze Z_n delle linee utilizzando le (6.19). Ovviamente è possibile calcolare le impedenze Z_n senza l'approssimazione di piccole riflessioni utilizzando le equazioni delle linee per ogni "sezione" θ e risolvendole numericamente [*Microwave Filters, Impedance Matching Networks, and Coupling Structures*, Artech House Books, Dedham, Mass. 1980]. In particolare, la tabella 6.1 fornisce gli *esatti* valori di impedenza normalizzata per $N = 2, 3, 4, 5, 6$, e per diversi valori dell'impedenza di carico normalizzata.

Z_L/Z_0	$N = 2$		$N = 3$			$N = 4$			
	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.5	1.1067	1.3554	1.0520	1.2247	1.4259	1.0257	1.1351	1.3215	1.4624
2.0	1.1892	1.6818	1.0907	1.4142	1.8337	1.0444	1.2421	1.6102	1.9150
3.0	1.3161	2.2795	1.1479	1.7321	2.6135	1.0718	1.4105	2.1269	2.7990
4.0	1.4142	2.8285	1.1907	2.0000	3.3594	1.0919	1.5442	2.5903	3.6633
6.0	1.5651	3.8336	1.2544	2.4495	4.7832	1.1215	1.7553	3.4182	5.3500
8.0	1.6818	4.7568	1.3022	2.8284	6.1434	1.1436	1.9232	4.1597	6.9955
10.0	1.7783	5.6233	1.3409	3.1623	7.4577	1.1613	2.0651	4.8424	8.6110

Z_L/Z_0	$N = 5$					$N = 6$					
	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0	Z_5/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0	Z_5/Z_0	Z_6/Z_0
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.5	1.0128	1.0790	1.2247	1.3902	1.4810	1.0064	1.0454	1.1496	1.3048	1.4349	1.4905
2.0	1.0220	1.1391	1.4142	1.7558	1.9569	1.0110	1.0790	1.2693	1.5757	1.8536	1.9782
3.0	1.0354	1.2300	1.7321	2.4390	2.8974	1.0176	1.1288	1.4599	2.0549	2.6577	2.9481
4.0	1.0452	1.2995	2.0000	3.0781	3.8270	1.0225	1.1661	1.6129	2.4800	3.4302	3.9120
6.0	1.0596	1.4055	2.4495	4.2689	5.6625	1.0296	1.2219	1.8573	3.2305	4.9104	5.8275
8.0	1.0703	1.4870	2.8284	5.3800	7.4745	1.0349	1.2640	2.0539	3.8950	6.3291	7.7302
10.0	1.0789	1.5541	3.1623	6.4346	9.2687	1.0392	1.2982	2.2215	4.5015	7.7030	9.6228

Tabella 6.1. Valori delle impedenze di progetto per un trasformatore binomiale.

Sia Γ_m il massimo accettabile di $\Gamma(\theta)$ all'interno della banda scelta e θ_m la lunghezza elettrica a cui si ha tale valore. Allora:

$$|\Gamma_m| = 2^N |A| |\cos \theta_m|^N \quad (6.26)$$

ovvero

$$\theta_m = \cos^{-1} \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\Gamma_m}{A} \right|^{\frac{1}{N}} \right] = \cos^{-1} \left[\left| \frac{\Gamma_m}{\Gamma(0)} \right|^{\frac{1}{N}} \right] \quad (6.27)$$

La lunghezza elettrica è uguale a $\theta = \beta L = \frac{2\pi f}{v_f} L \rightarrow f = \frac{v_f \theta}{2\pi L}$

$$\text{Quindi} \begin{cases} f_0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_f \frac{\pi}{2}}{2\pi L} \\ f_m = f(\theta_m) = \frac{v_f \theta_m}{2\pi L} \end{cases}$$

che fornisce la banda passante bilatera:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2|f_m - f_0|}{f_0} = \frac{2 \left| \frac{v_f}{2\pi L} \theta_m - \frac{v_f}{4L} \right|}{\frac{v_f}{4L}} = 2 \left| \frac{v_f}{2\pi L} \frac{4L}{v_f} \theta_m - 1 \right| = \left| \frac{4}{\pi} \theta_m - 2 \right| \quad (6.28)$$

Viceversa a partire dalla banda richiesta $\frac{\Delta f}{f_0}$ si può determinare θ_m e quindi Γ_m (tramite la 6.26) e, da questo e da Γ_0 , si ottiene l'ordine N (6.27).

6.4 Trasformatore di Chebyshev

A differenza del trasformatore binomiale, il trasformatore di Chebyshev ottimizza la banda dell'adattamento con la richiesta di un "ripple" fissato, infatti è anche detto "trasformatore equiripple". Se questo tipo di risposta può essere accettata, la banda di un trasformatore di Chebyshev sarà sostanzialmente maggiore rispetto a quella di un trasformatore binomiale, a parità di numero di sezioni N . Il trasformatore di Chebyshev viene progettato eguagliando la risposta $\Gamma(\theta)$ ad un polinomio di Chebyshev, che possiede le caratteristiche richieste per una risposta di tipo "equiripple".

6.3.1 Polinomi di Chebyshev

I polinomi di Chebyshev, denotati con $T_n(x)$, sono dei polinomi dotati della proprietà di oscillare in $(-1, 1)$ per $x \in (-1, 1)$ con n zeri e quindi $n+1$ tra massimi e minimi (Figura 6.4).

Figura 6.4. Polinomi di Chebishev.

I primi due polinomi sono:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \end{aligned} \quad (6.29)$$

mentre i successivi si ottengono da:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (6.30)$$

Se in particolare poniamo $x = \cos(\theta)$ (possibile in $|x| < 1$) si ha:

$$T_n(\theta) = \cos(n\theta) \quad (6.31)$$

oppure, equivalentemente, dato che $\theta = \cos^{-1}(x)$

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1} x) & |x| < 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1} x) & |x| > 1 \end{cases} \quad (6.32)$$

che mostra più chiaramente le suddette proprietà.

Le proprietà di uguale oscillazione (equiripple) rende questi polinomi utili per ottenere coefficienti di riflessione “ottimali” in base al criterio di Bode-Fano (un criterio che consente di fissare dei limiti sulla possibilità di adattare, con una rete priva di perdite, un carico complesso su una determinata banda) [X].

6.3.2 Trasformatore di Chebyshev

Un trasformatore equiripple a N sezioni può essere ottenuto con

$$\Gamma(\theta) = AT_N(u_m \cos \theta) e^{-jN\theta} \quad (6.33)$$

in cui il termine $e^{-jN\theta}$ serve ad ottenere un $\Gamma(\theta)$ funzione solo di θ .

Il centro banda si ha per $\theta = \frac{\pi}{2}$ e la banda passante θ_m è tale che

$$u_m \cos \theta_m = 1 \quad \rightarrow \quad u_m = \frac{1}{\cos \theta_m} \quad (6.34)$$

infatti, per le proprietà dei polinomi di Chebyshev, siamo agli estremi della banda passante quando l'argomento del polinomio T_N vale 1.

A frequenza nulla ($\theta = 0$) si ha

$$\Gamma(0) = AT_N(u_m) = AT_N\left(\frac{1}{\cos \theta_m}\right) \quad (6.35)$$

e quindi

$$A = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \frac{1}{T_N\left(\frac{1}{\cos \theta_m}\right)} \quad (6.36)$$

D'altra parte, dalla (6.33) è evidente che $A = \Gamma_m$, cioè il massimo di $\Gamma(\theta)$ in banda passante perché $\max |T_N(\theta)| = 1$, e quindi vale la relazione:

$$T_N\left(\frac{1}{\cos \theta_m}\right) = \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right| \frac{1}{\Gamma_m} \quad (6.37)$$

ovvero, usando la (6.32)

$$T_N\left(\frac{1}{\cos\theta_m}\right) = \cosh\left[N \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\cos\theta_m}\right)\right] \quad (6.38)$$

Dalle (6.37) e (6.38) si ottiene:

$$\begin{aligned} \cosh\left[N \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\cos\theta_m}\right)\right] &= \left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right| \frac{1}{\Gamma_m} \\ N \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\cos\theta_m}\right) &= \cosh^{-1}\left[\left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right| \frac{1}{\Gamma_m}\right] \\ \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\cos\theta_m}\right) &= \frac{1}{N} \cosh^{-1}\left[\left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right| \frac{1}{\Gamma_m}\right] \\ \frac{1}{\cos\theta_m} &= \cosh\left\{\frac{1}{N} \cosh^{-1}\left[\left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right| \frac{1}{\Gamma_m}\right]\right\} \end{aligned} \quad (6.39)$$

che, fissato N , collega la banda passante e il ripple massimo in banda.

I coefficienti si ottengono sviluppando il polinomio di Chebyshev ed uguagliandolo a $\Gamma(\theta)$ oppure da apposite tabelle (si veda ad esempio la tabella 6.2) [*Microwave Filters, Impedance Matching Networks, and Coupling Structures*, Artech House Books, Dedham, Mass. 1980].

Z_L/Z_0	$N = 2$				$N = 3$					
	$\Gamma_m = 0.05$		$\Gamma_m = 0.20$		$\Gamma_m = 0.05$			$\Gamma_m = 0.20$		
	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.5	1.1347	1.3219	1.2247	1.2247	1.1029	1.2247	1.3601	1.2247	1.2247	1.2247
2.0	1.2193	1.6402	1.3161	1.5197	1.1475	1.4142	1.7429	1.2855	1.4142	1.5558
3.0	1.3494	2.2232	1.4565	2.0598	1.2171	1.7321	2.4649	1.3743	1.7321	2.1829
4.0	1.4500	2.7585	1.5651	2.5558	1.2662	2.0000	3.1591	1.4333	2.0000	2.7908
6.0	1.6047	3.7389	1.7321	3.4641	1.3383	2.4495	4.4833	1.5193	2.4495	3.9492
8.0	1.7244	4.6393	1.8612	4.2983	1.3944	2.8284	5.7372	1.5766	2.8284	5.0742
10.0	1.8233	5.4845	1.9680	5.0813	1.4385	3.1623	6.9517	1.6415	3.1623	6.0920

Z_L/Z_0	$N = 4$							
	$\Gamma_m = 0.05$				$\Gamma_m = 0.20$			
	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.5	1.0892	1.1742	1.2775	1.3772	1.2247	1.2247	1.2247	1.2247
2.0	1.1201	1.2979	1.5409	1.7855	1.2727	1.3634	1.4669	1.5715
3.0	1.1586	1.4876	2.0167	2.5893	1.4879	1.5819	1.8965	2.0163
4.0	1.1906	1.6414	2.4369	3.3597	1.3692	1.7490	2.2870	2.9214
6.0	1.2290	1.8773	3.1961	4.8820	1.4415	2.0231	2.9657	4.1623
8.0	1.2583	2.0657	3.8728	6.3578	1.4914	2.2428	3.5670	5.3641
10.0	1.2832	2.2268	4.4907	7.7930	1.5163	2.4210	4.1305	6.5950

Tabella 6.2. Valori delle impedenze di progetto per un trasformatore di Chebyshev.

7. FILTRI A MICROONDE IN TECNOLOGIA PLANARE

7.1 Filtri a bassa frequenza

I filtri a microonde vengono in genere costruiti a partire da un prototipo a bassa frequenza (e quindi a costanti concentrate) che viene poi trasformato in un circuito a microonde. Pertanto esamineremo dapprima il progetto di filtri LC.

Si definisce perdita di potenza P_{LR} il reciproco del guadagno totale di potenza del filtro:

$$P_{LR} = \frac{P_{incidente}}{P_{carico}} = \frac{1}{1 - |\Gamma(\omega)|^2} \quad (7.1)$$

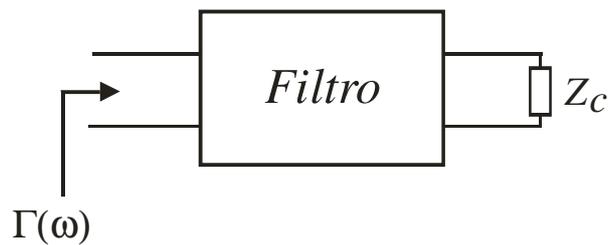


Figura 7.1. Schema di un filtro

La funzione $\Gamma(\omega)$ è una funzione Hermitiana [ovvero $\Gamma(\omega) = \Gamma^*(-\omega)$] e quindi $|\Gamma(\omega)|^2$ è necessariamente una funzione pari di ω e può essere scritta come rapporto di funzioni pari di ω :

$$|\Gamma(\omega)|^2 = \frac{M(\omega^2)}{M(\omega^2) + N(\omega^2)} \quad (7.2)$$

$$P_{LR} = 1 + \frac{M(\omega^2)}{N(\omega^2)} \quad (7.3)$$

La funzione $P_{LR}(\omega)$ dovrebbe essere pari a "1" nella banda passante del filtro e a " ∞ " fuori di questa (Figura 7.2), e inoltre dovrebbe avere una fase lineare con la frequenza per evitare distorsioni. Queste specifiche non sono però ottenibili e occorre approssimare $P_{LR}(\omega)$ con un andamento realizzabile in cui M ed N sono polinomi.

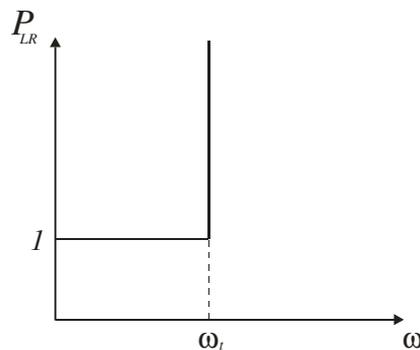


Figura 7.2. Risposta ideale di un filtro passa-basso.

Per un filtro passa-basso consideriamo le seguenti configurazioni:

Filtro di Butterworth (o maximally flat)

Si può dimostrare che, per un filtro di Butterworth di ordine N , ossia con N componenti concentrati di tipo induttanza o capacità, si ha:

$$P_{LR} = 1 + k^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \quad (7.4)$$

dove ω_c è la frequenza di taglio e $2N-1$ derivate di P_{LR} sono nulle per $\omega = 0$.
 Se si fissa la frequenza di taglio ω_c come la frequenza in cui $P_{LR} = 3 \text{ dB}$ allora $k = 1$.
 Per $\omega \gg \omega_c$ si ha:

$$P_{LR} \approx \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \quad (7.5)$$

Ha interesse la velocità di aumento di P_{LR} (che si misura in genere in dB per decade):

$$\frac{P_{LR}(\omega_0)}{P_{LR}(10\omega_0)} \approx \frac{1}{(10)^{2N}} \quad (7.6)$$

ossia una variazione di $20N \text{ dB/decade}$

Filtro di Chebyshev (o equi-ripple)

Per un filtro di Chebyshev di ordine N , ossia con N componenti concentrati di tipo induttanza o capacità, si ha:

$$P_{LR} = 1 + k^2 T_N^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad (7.7)$$

ω_c è la frequenza di taglio e P_{LR} ha un andamento oscillante tra 1 e $1+k^2$ nella banda passante del filtro. Il valore di k^2 fissa pertanto il *ripple* in tale zona.
 Per $\omega \gg \omega_c$ si ha:

$$P_{LR} \approx \frac{k^2}{4} \left(\frac{2\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \quad (7.8)$$

per cui la variazione è ancora di $20N \text{ dB/decade}$ ma la risposta è sempre $\frac{k^2}{4}(2)^{2N}$ più grande (ovvero il filtro di Chebyshev attenua di più rispetto al corrispondente filtro di Butterworth dello stesso ordine).

Filtro a fase lineare

La fase della funzione di trasferimento di un filtro $\phi(\omega)$ entra nella risposta sfasando le varie componenti armoniche di un segnale. Se $\phi(\omega)$ è lineare rispetto a ω tale sfasamento è costante, altrimenti provoca una distorsione all'uscita. I filtri introdotti in precedenza (in particolare quello di Chebyshev) hanno una fase non lineare.

Per ottenere una fase sufficientemente lineare (ma con un taglio della risposta molto meno netto) occorre utilizzare filtri a "fase lineare" in cui

$$\phi(\omega) = A\omega \left[1 + p \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \right] \quad (7.9)$$

ovvero si richiede che il comportamento di $\frac{\phi(\omega)}{\omega}$ sia a "massima piattezza".

Per quanto riguarda la realizzazione, un filtro passabasso è costituito da condensatori in parallelo e induttanze in serie e quindi può essere di due tipi:

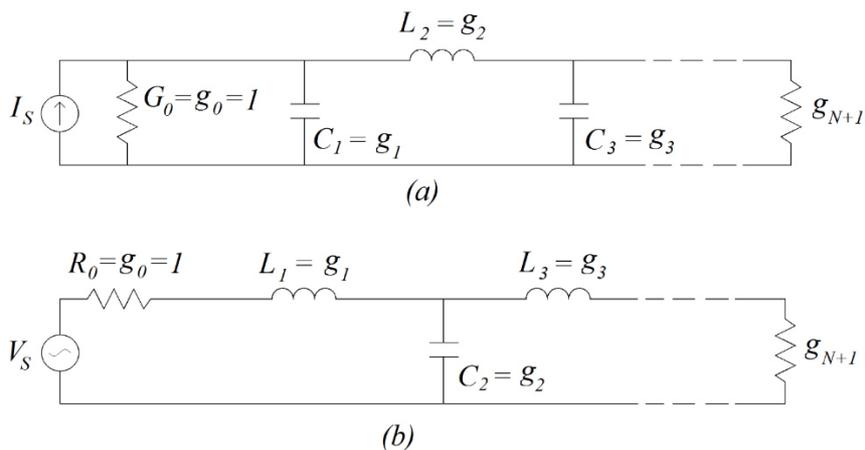


Figura 7.3. Prototipi di filtri passabasso e definizione degli elementi. (a) prototipo che inizia con elemento parallelo: g_0 è una conduttanza (b) prototipo che inizia con elemento serie: g_0 è una resistenza.

In Figura 7.3:

$$g_0 = \begin{cases} \text{conduttanza del generatore per il circuito in Figura 7.3(a)} \\ \text{resistenza del generatore per il circuito in Figura 7.3(b)} \end{cases}$$

$$g_k = \begin{cases} \text{induttanza normalizzata per gli induttori in serie} \\ \text{capacità normalizzata per i condensatori in parallelo} \end{cases} \quad k=1, \dots, N$$

$$g_{N+1} = \begin{cases} \text{resistenza se } g_N \text{ è un condensatore in parallelo} \\ \text{conduttanza se } g_N \text{ è un induttore in serie} \end{cases}$$

Poiché la risposta in frequenza del filtro dipende dal rapporto reciproco delle impedenze, è sempre possibile fissarne una. In genere si sceglie $g_0 = 1$ (1 S o 1 Ω nei due casi) e, salvo che per i filtri di Chebyshev con N pari anche il carico è unitario nei due casi (in S o Ω).

Esistono delle tabelle che forniscono i valori delle induttanze serie e delle capacità in parallelo per i

vari filtri (Tabelle 7.1 e 7.2), nonché il carico richiesto (che, ricordiamo, è in S o Ω , rispettivamente nei due circuiti base (a) e (b) in Figura 7.3) se il filtro non ha uscita adattata. In quest'ultimo caso occorre un opportuno circuito di adattamento (trasformatore $\lambda/4$ o simile) che però ha una risposta in frequenza che può alterare quella del filtro. Conviene quindi evitare questo caso.

L'ordine del filtro va preventivamente scelto in modo da avere la richiesta attenuazione fuori banda. I dati sono sempre relativi a $\omega_c = 1$ ma questo non lede la generalità in quanto è sempre possibile scalare i componenti per modificare ω_c .

N	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
1	2.0000	1.0000									
2	1.4142	1.4142	1.0000								
3	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000							
4	0.7654	1.8478	1.8478	0.7654	1.0000						
5	0.6180	1.6180	2.0000	1.6180	0.6180	1.0000					
6	0.5176	1.4142	1.9318	1.9318	1.4142	0.5176	1.0000				
7	0.4450	1.2470	1.8019	2.0000	1.8019	1.2470	0.4450	1.0000			
8	0.3902	1.1111	1.6629	1.9615	1.9615	1.6629	1.1111	0.3902	1.0000		
9	0.3473	1.0000	1.5321	1.8794	2.0000	1.8794	1.5321	1.0000	0.3473	1.0000	
10	0.3129	0.9080	1.4142	1.7820	1.9754	1.9754	1.7820	1.4142	0.9080	0.3129	1.0000

Tabella 7.1. Elementi g_n per un filtro "Maximally flat" per $g_0 = 1$ e $\omega_c = 1$, N da 1 a 10.

ELEMENT VALUES FOR TCHEBYSCHIEFF FILTERS HAVING $g_0 = 1$, $\omega_c = 1$,
WITH VARIOUS db RIPPLE
Cases of $N = 1$ to 10

VALUE OF N	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6	ϵ_7	ϵ_8	ϵ_9	ϵ_{10}	ϵ_{11}
0.01 db ripple											
1	0.0960	1.0000									
2	0.4488	0.4077									
3	0.6291	0.9702	1.1007								
4	0.7128	1.2003	1.3212	0.6476	1.1007						
5	0.7563	1.3049	1.5773	1.3049	0.7563	1.0000					
6	0.7813	1.3600	1.6896	1.5350	1.4970	0.7098	1.1007				
7	0.7969	1.3924	1.7481	1.6331	1.7481	1.3924	0.7969	1.0000			
8	0.8072	1.4130	1.7824	1.6833	1.8529	1.6193	1.5554	0.7333	1.1007		
9	0.8144	1.4270	1.8043	1.7125	1.9057	1.7125	1.8043	1.4270	0.8144	1.0000	
10	0.8196	1.4369	1.8192	1.7311	1.9362	1.7590	1.9055	1.6527	1.5817	0.7446	1.1007
0.1 db ripple											
1	0.3052	1.0000									
2	0.8430	0.6220									
3	1.0315	1.1474	1.3554								
4	1.1088	1.3061	1.7703	0.8180	1.3554						
5	1.1468	1.3712	1.9750	1.3712	1.1468	1.0000					
6	1.1681	1.4039	2.0562	1.5170	1.9029	0.8618	1.3554				
7	1.1811	1.4228	2.0966	1.5733	2.0966	1.4228	1.1811	1.0000			
8	1.1897	1.4346	2.1199	1.6010	2.1699	1.5640	1.9444	0.8778	1.3554		
9	1.1956	1.4425	2.1345	1.6167	2.2053	1.6167	2.1345	1.4425	1.1956	1.0000	
10	1.1999	1.4481	2.1444	1.6265	2.2253	1.6418	2.2046	1.5821	1.9628	0.8853	1.3554
0.2 db ripple											
1	0.4342	1.0000									
2	1.0378	0.6745									
3	1.2275	1.1525	1.5386	1.0000							
4	1.3028	1.2844	1.9761	0.8468	1.5386						
5	1.3394	1.3370	2.1660	1.3370	1.3394	1.0000					
6	1.3598	1.3632	2.2394	1.4555	2.0974	0.8838	1.5386				
7	1.3722	1.3781	2.2756	1.5001	2.2756	1.3781	1.3722	1.0000			
8	1.3804	1.3875	2.2963	1.5217	2.3413	1.4925	2.1349	0.8972	1.5386		
9	1.3860	1.3938	2.3093	1.5340	2.3728	1.5340	2.3093	1.3938	1.3860	1.0000	
10	1.3901	1.3983	2.3181	1.5417	2.3904	1.5536	2.3720	1.5066	2.1514	0.9034	1.5386
0.5 db ripple											
1	0.6986	1.0000									
2	1.4029	0.7071									
3	1.5963	1.0967	1.9841	1.0000							
4	1.6703	1.1926	2.3661	0.8419	1.9841						
5	1.7058	1.2296	2.5408	1.2296	1.7058	1.0000					
6	1.7254	1.2479	2.6064	1.3137	2.4758	0.8696	1.9841				
7	1.7372	1.2583	2.6381	1.3444	2.6381	1.2583	1.7372	1.0000			
8	1.7451	1.2647	2.6564	1.3590	2.6964	1.3389	2.5093	0.8796	1.9841		
9	1.7504	1.2690	2.6678	1.3673	2.7239	1.3673	2.6678	1.2690	1.7504	1.0000	
10	1.7543	1.2721	2.6754	1.3725	2.7392	1.3806	2.7231	1.3485	2.5239	0.8842	1.9841

Tabella 7.2. Elementi g_n per un filtro di Chebyshev (equiripple) per $g_0 = 1$, $\omega_c = 1$, N da 1 a 10.

7.2 Trasformazioni di filtri

Le tabelle disponibili sono normalizzate a $g_0 = 1$ e $\omega_c = 1$. Per modificare tali valori basta ricordare che le impedenze devono essere uguali nei due casi (quello normalizzato e quello "reale") per avere la stessa risposta. Più precisamente deve essere lo stesso il rapporto tra le impedenze.

Quindi, se un induttore vale L nel caso normalizzato, vuol dire che, alla frequenza di taglio unitaria, deve essere:

$$\frac{Z_L}{g_0} = \frac{Z_L}{1} = jL \quad (7.9)$$

essendo Z_L la sua impedenza e 1 la resistenza (in entrambi i casi) della sorgente.

Nel filtro "reale" si dovrà avere la stessa impedenza alla frequenza di taglio $\bar{\omega}_c$. Quindi il nuovo valore di induttanza \bar{L} sarà tale che

$$jL = \frac{Z_L}{1} = \frac{\bar{Z}_L}{R_0} = \frac{j\bar{\omega}_c \bar{L}}{R_0} \quad (7.10)$$

per cui

$$\bar{L} = \frac{R_0 L}{\omega_c} \text{ e, analogamente } \bar{C} = \frac{C}{R_0 \omega_c} \quad (7.11)$$

essendo R_0 il livello di impedenza necessario.

La scalatura di impedenza e frequenza di taglio può essere sempre eseguita, specie per i filtri a microonde, al termine del progetto. Nell'esaminare quindi gli altri tipi di filtri si manterranno i parametri normalizzati.

Trasformazione passa-basso/passa-alto

La trasformazione

$$\omega = -\frac{1}{\omega'} \quad (7.12)$$

inverte i punti $\omega = 0$ e $\omega = \infty$ e quindi trasforma un filtro passa-basso in un filtro passa-alto (P_{LR} è pari rispetto a ω quindi su di essa il segno negativo non ha alcun effetto).

Per quanto riguarda i componenti reattivi, nel caso di un passa-alto la loro impedenza deve variare in modo opposto con la frequenza rispetto ad un filtro passa-basso.

Se nel caso passa-basso un componente ha impedenza a frequenza ω pari a $j\omega L$, nel caso passa-alto dovrà avere la stessa impedenza a frequenza $\omega' = -\frac{1}{\omega}$. Quindi per esso risulta:

$$Z(\omega') = j\omega L = j\left(-\frac{1}{\omega'}\right)L = \frac{1}{j\omega' \frac{1}{L}} \quad (7.13)$$

Il componente diviene quindi un condensatore con capacità pari a $1/L$.

Allo stesso modo, un condensatore C diviene un induttore con induttanza pari a $1/C$.

Si noti che il segno meno nella trasformazione è necessario per avere il corretto segno delle reattanze (ovvero per avere segno ed andamento in frequenza coerenti).

Trasformazione passa-basso/passa-banda

Consideriamo la trasformazione

$$\omega = \frac{1}{\Delta} \left(\omega' - \frac{1}{\omega'} \right) \quad (7.14)$$

che può essere scritta nella forma

$$(\omega')^2 - \omega' \Delta \omega - 1 = 0 \quad (7.15)$$

Nella (7.15) $\omega=1$ e $\omega=-1$ corrispondono (funzione pari) alla soluzione della equazione in quanto $\omega=1$ e $\omega=-1$ sono le frequenze di taglio del filtro passa-basso. Dobbiamo quindi vedere a cosa corrispondono $\omega=\pm 1$ per il filtro ottenuto con la trasformazione (7.14).

La (7.15) diventa:

$$(\omega')^2 - \omega'\Delta - 1 = 0 \quad \text{per } \omega=1$$

con soluzioni

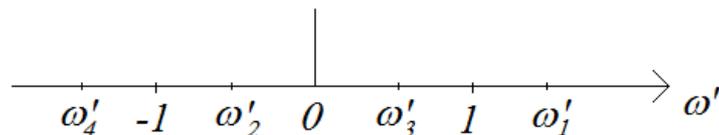
$$\omega' = \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{2}} \rightarrow \begin{cases} \omega'_1 = \frac{\Delta}{2} + \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{2}} \\ \omega'_2 = \frac{\Delta}{2} - \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{2}} \end{cases} \quad (7.16)$$

$$(\omega')^2 + \omega'\Delta - 1 = 0 \quad \text{per } \omega=-1$$

con soluzioni

$$\omega' = -\frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{2}} \rightarrow \begin{cases} \omega'_3 = -\frac{\Delta}{2} + \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{2}} \\ \omega'_4 = -\frac{\Delta}{2} - \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{2}} \end{cases} \quad (7.17)$$

ω'_1 e ω'_3 sono valori centrati attorno a 1, ω'_2 e ω'_4 sono valori centrati attorno a -1. In particolare risulta: $\omega'_1 = -\omega'_4$ e $\omega'_3 = -\omega'_2$.



Quindi la banda passante del filtro è un intervallo centrato su $\omega'=1$ e i limiti della banda (cioè i punti corrispondenti alla frequenza di taglio) sono ω'_1 e ω'_3 , cioè:

$$\left[-\frac{\Delta}{2} + \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{2}}, \frac{\Delta}{2} + \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{2}} \right]$$

Risulta pertanto che $\Delta = \omega'_1 - \omega'_3$ è la larghezza di banda del filtro passabanda espressa in percentuale di quella centrale, che è unitaria.

Per quanto riguarda i componenti, con la trasformazione passa-basso/passa-banda si ha:

$$j\omega L = j \frac{1}{\Delta} \left(\omega' - \frac{1}{\omega'} \right) L = j\omega' \frac{L}{\Delta} + \frac{1}{j\omega' \left(\frac{\Delta}{L} \right)}$$

$$j\omega C = j\omega' \frac{C}{\Delta} + \frac{1}{j\omega' \left(\frac{\Delta}{C} \right)}$$

In conclusione un induttanza diventa un circuito risonante serie con induttanza L/Δ e capacità Δ/L ; una capacità diventa un circuito risonante parallelo con capacità C/Δ e induttanza Δ/C (Figura 7.4)

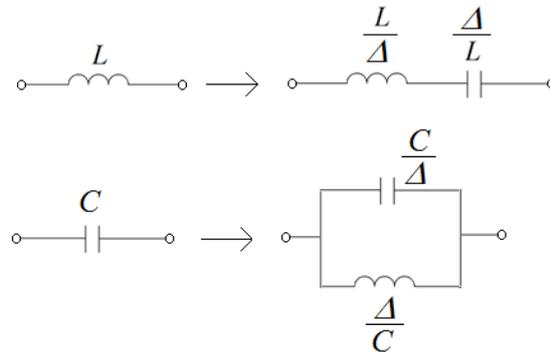


Figura 7.4. Trasformazione dei componenti per la trasformazione passa-basso \rightarrow passa-banda.

Trasformazione passa-basso/elimina-banda

Per un filtro eliminabanda la trasformazione è la seguente:

$$\omega = -\Delta \left(\omega' - \frac{1}{\omega'} \right)^{-1} \quad (7.18)$$

In questo caso l'induttanza diventa un circuito risonante parallelo con induttanza $L\Delta$ e capacità $1/(L\Delta)$; la capacità diventa un circuito risonante serie con capacità $C\Delta$ e induttanza $1/(C\Delta)$ (Figura 7.5).

La scalatura dei nuovi componenti, relativi ad un passa-banda o elimina-banda centrato su $\omega' = 1$ viene effettuata nello stesso modo che per un filtro passa-basso. In particolare occorre passare da $\omega' = 1$ a $\omega' = \omega$, ottenendo così un passa-banda (o elimina banda) centrato su ω .

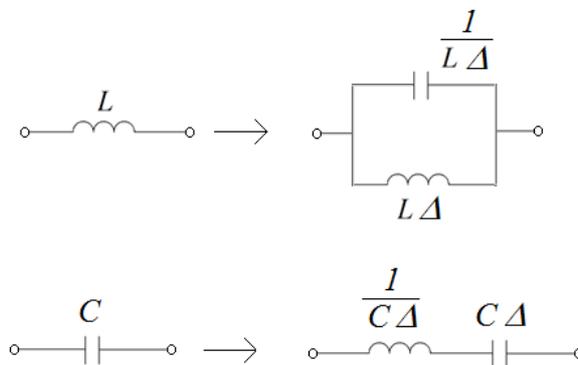


Figura 7.5. Trasformazione dei componenti per la trasformazione passa-basso \rightarrow elimina-banda.

7.2 Implementazione a microonde di filtri passabasso – Identità di Kuroda

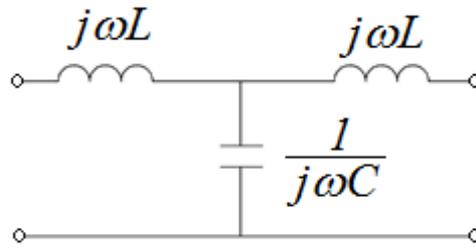


Figura 7.6. Prototipo di un filtro passabasso di ordine 3.

In figura 7.6 è mostrato un esempio di filtro passabasso a componenti concentrati. Tuttavia, ad alta frequenza i componenti concentrati, quali condensatori e induttori, sono in genere molto difficili da realizzare e, in ogni caso, quando è possibile realizzarli, questi sono in grado di coprire un intervallo limitato di valori. Pertanto alle frequenze delle microonde le impedenze capacitive e induttive che costituiscono il prototipo di un filtro vengono approssimate mediante componenti distribuiti, realizzati mediante “linee di trasmissione”.

In particolare, sappiamo che uno stub di impedenza Z_l e di lunghezza fisica l , chiuso in corto circuito, ha una impedenza di ingresso pari a

$$Z_{IN1} = jZ_{01} \tan\left(\frac{\omega l}{c}\right) \quad (7.19)$$

Se lo stub è aperto l’impedenza di ingresso vale:

$$Z_{IN2} = -jZ_2 \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega l}{c}\right)} \quad (7.19)$$

Quindi le reattanze utilizzabili hanno la corretta dipendenza, non da “ ω ” ma da $\Omega = \tan\left(\frac{\omega l}{c}\right)$, e la relazione tra ω e Ω non è lineare. Possiamo accettare di usare Z_{IN1} e Z_{IN2} con alcune precisazioni.

Prima di tutto mettiamo in corrispondenza il segmento $[0, 1]$ in “ ω ” con il segmento $[0, \tan\left(\frac{1l}{c}\right)]$ in “ Ω ” (Figura 7.7).

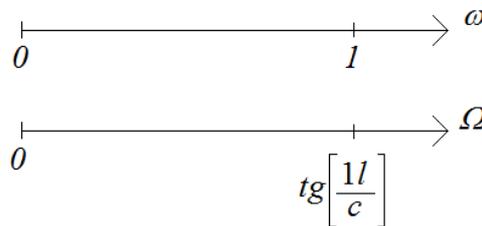


Figura 7.7. Corrispondenza tra ω e Ω .

Come detto, la trasformazione tra ω e Ω è non lineare. Tuttavia, se imponiamo $tg\left(\frac{1l}{c}\right) = 1$, troviamo che la banda passante del filtro espressa in funzione di ω e Ω è la stessa (ovviamente l’andamento in banda è leggermente diverso):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1l}{c}\right)=1 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1l}{c}\right)=\frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad l=\frac{\pi c}{4}=\frac{\lambda}{8} \quad (7.20)$$

In conclusione, è possibile realizzare un filtro passabasso utilizzando il seguente schema:

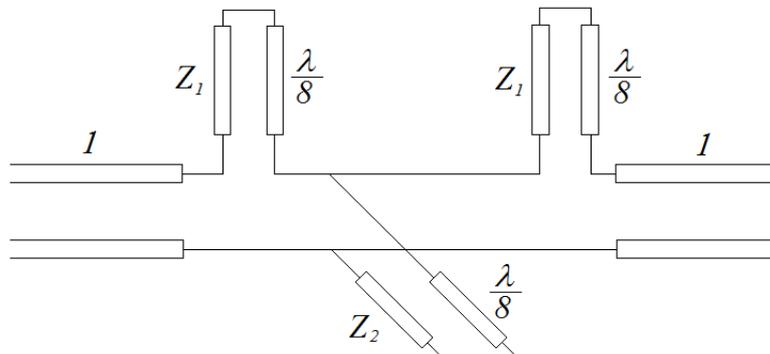


Figura 7.8. Filtro passabasso realizzato tramite stub in linea di trasmissione.

Allo schema in Figura 7.8 corrisponde il seguente circuito:

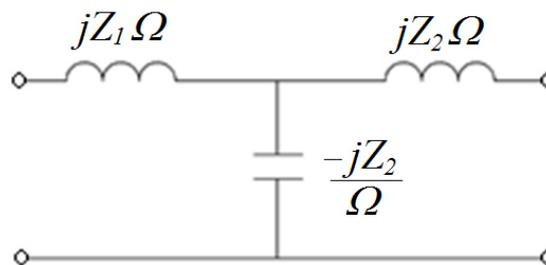


Figura 7.9. Circuito equivalente del filtro passabasso di Figura 7.8.

Se la risposta del filtro in Figura 7.6 è una funzione $F(\omega)$, la risposta del filtro in Figura 7.8 e 7.9 sarà una funzione $F(\Omega)$ purchè $Z_1 = L$ e $Z_2 = 1/C$. Inoltre nei due casi la banda passante coincide perché se ω varia tra 0 e 1 allora Ω varia tra 0 e 1 (7.20).

La trasformazione $\Omega = \tan\left(\frac{\omega l}{c}\right)$ prende il nome di trasformazione di Richard. In Figura 7.10 è mostrato il confronto tra la risposta di ampiezza di un filtro a componenti concentrati e di un filtro in linea di trasmissione.

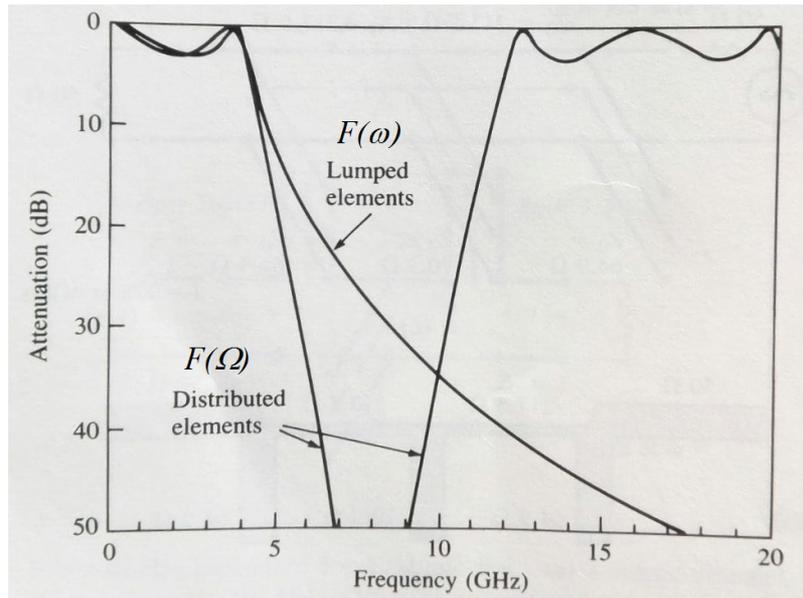


Figura 7.10. Risposta tipica di un filtro passa basso realizzato con componenti concentrati o con linee di trasmissione.

Come si può vedere anche dalla figura 7.10, l'andamento di $F(\Omega)$ è periodico (per effetto della realizzazione tramite linee di trasmissione) mentre $F(\omega)$ si attenua ad alta frequenza.

La scalatura (in frequenza e impedenza) di un filtro passabasso con questo tipo di implementazione è ovvia:

- $Z_1 = L$ e $Z_2 = 1/C$ sono impedenze normalizzate e devono essere moltiplicate per Z_0 ;
- la lunghezza fisica degli stub è pari a $\lambda/8$, con λ calcolato alla frequenza di taglio ω_c .

Si noti che i valori normalizzati di L e C si ricavano dalle tabelle 7.1 e 7.2. In particolare, se si vuole realizzare un filtro a massima piattezza (Tabella 7.1), per l'esempio in Figura 7.8, realizzato secondo il prototipo in Figura 7.3(b), risulta $N = 3$, e quindi $L = g_1 = g_3 = 1$, $C = g_2 = 2$.

I filtri passabasso contengono solamente induttanze in serie e capacità in parallelo, che nella implementazione in linea di trasmissione diventano rispettivamente stub in serie e stub in parallelo. Tuttavia, nelle realizzazioni planari gli stub in serie sono difficili da realizzare e in microstriscia (o stripline) non sono realizzabili.

E' possibile trasformare gli stub in serie in stub in parallelo, mantenendo inalterata la risposta del filtro, utilizzando le "identità di Kuroda".

Consideriamo il filtro in Figura 7.8, se aggiungiamo a destra e a sinistra un tratto di linea di impedenza "1" e di lunghezza $\lambda/8$, la risposta del filtro non cambia, e si ottiene il circuito in Figura 7.11.

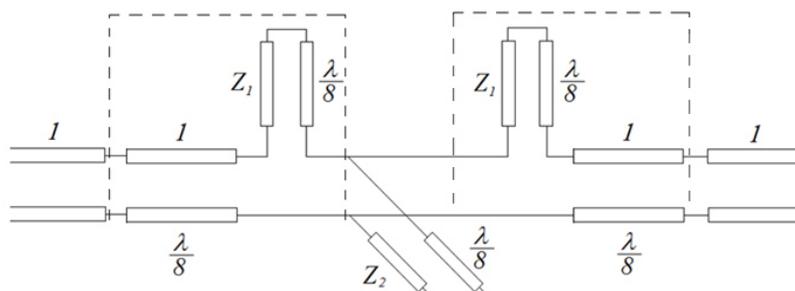


Figura 7.11. Filtro passabasso realizzato tramite stub in linea di trasmissione.

E' possibile trovare una equivalenza tra i due circuiti seguenti:

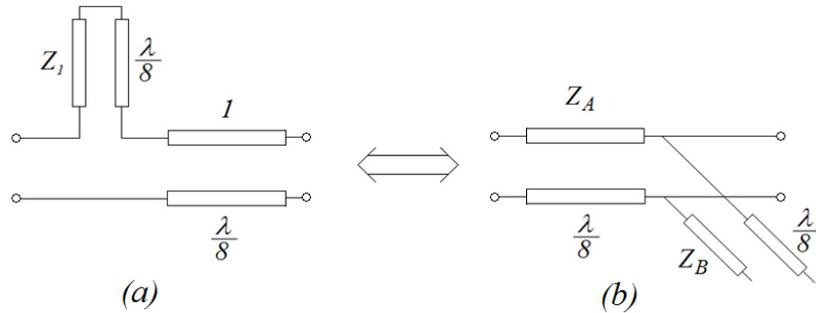


Figura 7.12. Circuiti equivalenti che illustrano una delle identità di Kuroda.

Per fare ciò, sarà necessario determinare i valori di Z_A e Z_B per i quali le matrici di trasmissione delle due reti in Figura 7.12 sono uguali. Se le matrici di trasmissione dei blocchi (a) e (b) in figura 7.12 sono uguali è possibile sostituire il blocco (b) al blocco (a) nello schema in Figura 7.11 senza modificare la risposta del filtro.

La matrice di trasmissione del blocco (a) in Figura 7.12 è la seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & jZ_1\Omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\Omega \\ j\Omega & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} \begin{bmatrix} 1-Z_1\Omega^2 & j\Omega(1+Z_1) \\ j\Omega & 1 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

$$\text{con } \cos\left(\frac{\omega l}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\omega l}{c}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}$$

La matrice di trasmissione del blocco (b) in Figura 7.12 è la seguente:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} \begin{bmatrix} 1 & jZ_A\Omega \\ \frac{j\Omega}{Z_A} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j\Omega}{Z_A} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} \begin{bmatrix} 1-\frac{Z_A}{Z_B}\Omega^2 & jZ_A\Omega \\ j\Omega\left(\frac{1}{Z_A}+\frac{1}{Z_B}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Le matrici 7.21 e 7.22 sono uguali se

$$\begin{cases} Z_A = 1+Z_1 = 1+L \\ Z_B = 1+\frac{1}{Z_1} = 1+\frac{1}{L} \end{cases} \quad (7.23)$$

Il circuito finale del filtro in linea di trasmissione, dopo aver applicato l'identità di Kuroda ai blocchi a destra e a sinistra in Figura 7.11, è il seguente:

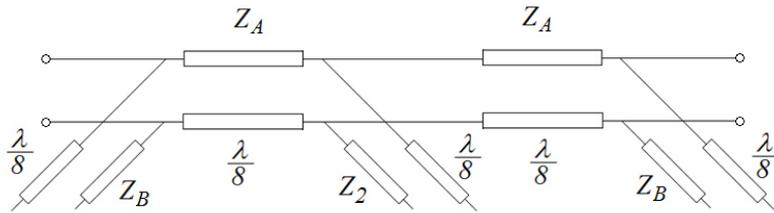
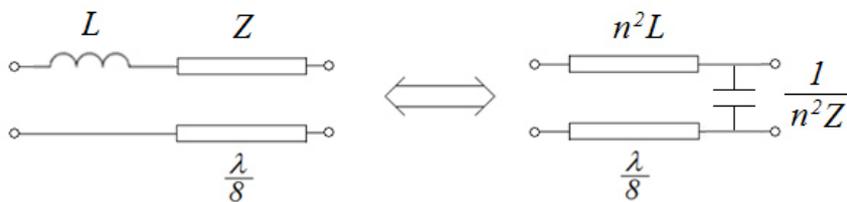


Figura 7.13. Filtro passabasso in linea di trasmissione con tutti gli stub in parallelo.

Dalle 7.23 risulta che Z_A potrebbe essere troppo grande e quindi potrebbe richiedere linee troppo sottili, difficili da realizzare o non realizzabili.

In generale l'identità di Kuroda si può scrivere nella forma:



con $n^2 = 1 + \frac{Z}{L}$

Esempio: trasformazione di un filtro di ordine 5 con l'identità di Kuroda.

7.2 Implementazione a microonde di filtri passabasso – Filtri a scala

Consideriamo una linea di trasmissione *corta* ($\beta l = \theta \ll 1$) e di impedenza Z_H *elevata* (~2, 3, 4) chiusa su un carico Z_C (Figura 7.12)

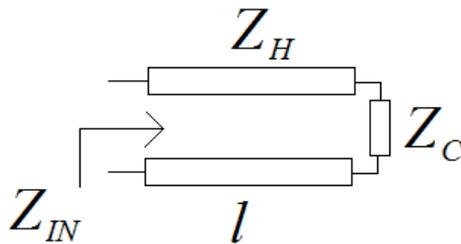


Figura 7.14. Linea corta con impedenza elevata Z_H chiusa su un carico Z_C .

L'impedenza di ingresso del circuito in Figura 7.14 è:

$$Z_{IN} = \frac{Z_H [Z_C + jZ_H \tan(\beta l)]}{Z_H + jZ_C \tan(\beta l)} \tag{7.24}$$

A denominatore della (7.24) $Z_H \gg jZ_C \tan(\beta l)$ quindi

$$Z_{IN} = \frac{\cancel{Z_H} [Z_C + j\cancel{Z_H} \tan(\beta l)]}{\cancel{Z_H} + \cancel{jZ_C \tan(\beta l)}} \approx Z_C + jZ_H \tan(\beta l) \approx Z_C + jZ_H \beta l = Z_C + jZ_H \frac{\omega l}{c} \quad (7.25)$$

L'ultima espressione della (7.25) è l'impedenza del seguente circuito:

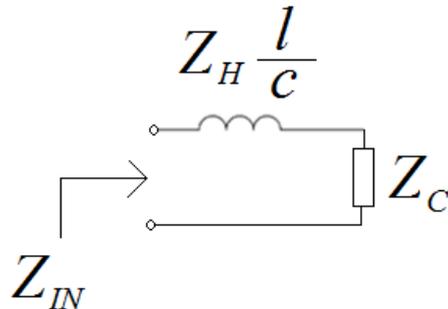


Figura 7.15.

Ossia una induttanza in serie di valore $L = Z_H \frac{l}{c}$.

Se invece consideriamo una linea di trasmissione corta ma di impedenza *piccola* $Z_L \ll 1$, chiusa su un carico Z_C (Figura 7.16), la sua ammettenza di ingresso può essere scritta nella forma:

$$Y_{IN} = \frac{\cancel{1} \left[\frac{1}{Z_C} + j\cancel{1} \frac{\tan(\beta l)}{Z_L} \right]}{\cancel{\frac{1}{Z_L}} + \cancel{j\frac{\tan(\beta l)}{Z_C}}} \approx \frac{1}{Z_C} + j\frac{1}{Z_L} \tan(\beta l) \approx \frac{1}{Z_C} + j\frac{1}{Z_L} \beta l = \frac{1}{Z_C} + j\frac{\omega l}{Z_L c} \quad (7.26)$$

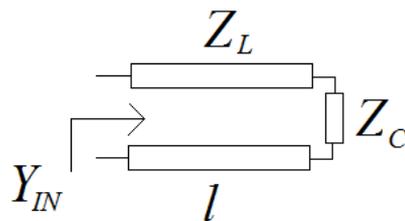


Figura 7.16. Linea corta di impedenza piccola Z_L chiusa su un carico Z_C .

L'ultima espressione della (7.26) è l'impedenza del seguente circuito:

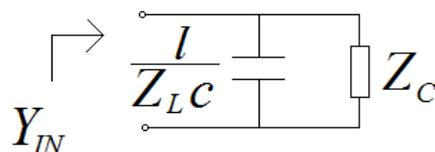
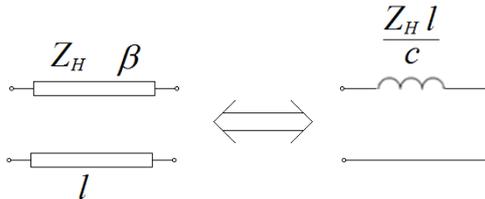


Figura 7.17

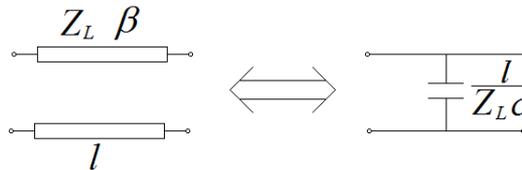
ossia una capacità in parallelo di valore $C = \frac{l}{Z_L c}$.

Si osservi che nelle figure 7.14-7.17 il valore di Z_C rappresenta quello che rimane del filtro a sinistra del componente (L oppure C). In conclusione dal confronto tra le figure 7.14 e 7.15 e tra le figure 7.16 e 7.17, nelle approssimazioni poste ($Z_H \gg 1$, $Z_L \ll 1$, e $\beta l = \theta \ll 1$) si ottengono le seguenti equivalenze:

a) una linea corta di impedenza elevata equivale ad una induttanza serie:



b) una linea corta di impedenza piccola equivale ad una capacità parallelo:



Segue che, con una “cascata” di linee corte di impedenza elevata o piccola, è possibile realizzare un filtro passabasso. Ovviamente la precisione del filtro aumenta al crescere del rapporto Z_H/Z_L e quindi questo rapporto è scelto più grande possibile compatibilmente con i limiti tecnologici (la larghezza minima realizzabile in microstriscia è dell’ordine di 100 micron con tecnologia a basso costo, la larghezza massima è limitata dal fatto che una microstriscia troppo larga ha perdite elevate per irradiazione, oltre al fatto che potrebbe non garantire la sola propagazione quasi TEM).

Si osservi che, alla frequenza $\omega = 1$, $\frac{l}{c} = \frac{\omega l}{c} = \theta$, ossia la lunghezza elettrica della linea.

Quindi il valore dell’induttanza (normalizzata) sarà $Z_H \theta$ (con Z_H normalizzato e θ in radianti) mentre il valore della capacità sarà θ/Z_L . Queste ultime espressioni realizzano in modo automatico la scalatura in frequenza del filtro.

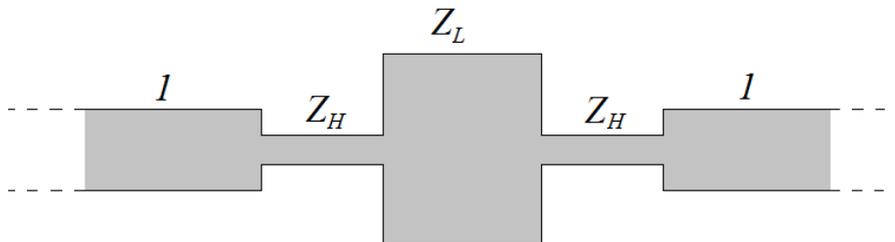


Figura 7.16. Realizzazione planare in microstriscia di un filtro “stepped impedance” tre stadi.

Un grosso vantaggio di un filtro a scala (o “stepped impedance”) rispetto ad un filtro di Kuroda è che ha un piccolissimo ingombro trasversale e, tutto sommato, anche longitudinale. Ad esempio, un filtro di Kuroda di ordine 5 ha una lunghezza elettrica di circa 180° , mentre un filtro stepped impedance di ordine 5 ha una lunghezza elettrica media intorno ai 150° .

Inoltre, mentre per un filtro di Kuroda la linea di impedenza Z_A potrebbe non essere realizzabile (impedenza troppo elevata), nel caso del filtro stepped impedance la realizzazione è garantita a

priori scegliendo Z_L e Z_H realizzabili. Ovviamente più grande è il rapporto Z_H/Z_L più preciso sarà il filtro.

D'altra parte, poiché non è possibile realizzare linee con Z_H molto grande (linee troppo sottili), né Z_L troppo piccolo (linee troppo larghe) il filtro stepped impedance è intrinsecamente impreciso. Inoltre il filtro stepped impedance non è periodico e, superata la frequenza di taglio, si comporta talvolta in modo imprevedibile.

7.3 Prototipi di filtri passabanda ed eliminabanda con invertitori di impedenza

7.3.1 Invertitori di impedenza

Un inverter di impedenza è una rete due porte che trasforma una impedenza in ammettenza e viceversa. Il suo comportamento è quello mostrato in Figura 7.17

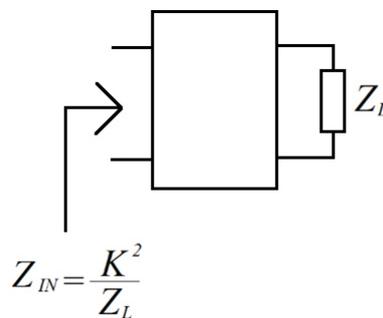


Figura 7.17. Schema di un inverter di impedenza.

Utilizzando la matrice di trasmissione si ha:

$$Z_{IN} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + BI_2}{CV_2 + DI_2} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \quad (7.27)$$

Imponendo $Z_{IN} = \frac{K^2}{Z_L}$ si trova:

$$A = D = 0$$

$$B/C = K^2$$

D'altra parte se consideriamo una rete reciproca si ha $AD - BC = 1$, ossia $-BC = 1$ e, se la rete è anche priva di perdite, segue: $B = \pm jK$, $C = \pm j/K$

Sono possibili due tipi di inverter di impedenza a seconda del segno scelto:

$$\begin{bmatrix} 0 & jK \\ \frac{j}{K} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

$$\begin{bmatrix} K \\ -90^\circ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -jK \\ -\frac{j}{K} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

Evidentemente un tale inverter è equivalente ad una linea lunga $\pm \frac{\pi}{2}$ (a tutte le frequenze) e di impedenza K . Esistono anche inverter di ammettenza, caratterizzati da una ammettenza J , la cui descrizione si ottiene semplicemente sostituendo $K \rightarrow 1/J$.

E' sempre possibile inserire un inverter di impedenza in un circuito a patto di sostituire l'impedenza Z a valle con K^2/Z .

Inoltre è possibile inserire due inverter uguali ai due lati di una linea di lunghezza Ψ , purchè se ne modifichi l'impedenza.

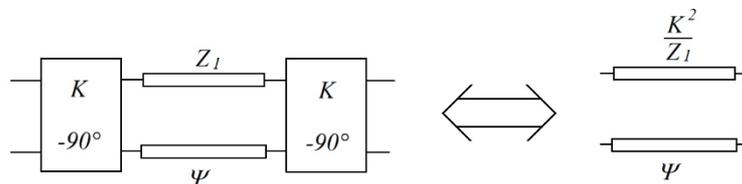


Figura 7.18. Equivalenza tra linee con inverter di impedenza.

La matrice di trasmissione del circuito a sinistra in Figura 7.18 è la seguente:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & -jK \\ -\frac{j}{K} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Psi & jZ_1 \sin \Psi \\ \frac{j \sin \Psi}{Z_1} & \cos \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -jK \\ -\frac{j}{K} & 0 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \frac{K}{Z_1} \sin \Psi & -jK \cos \Psi \\ -j\frac{1}{K} \cos \Psi & \frac{Z_1}{K} \sin \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -jK \\ -\frac{j}{K} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \Psi & -\frac{jK^2}{Z_1} \sin \Psi \\ -j\frac{Z_1}{K^2} \sin \Psi & -\cos \Psi \end{bmatrix} \quad (7.30) \end{aligned}$$

che è la matrice di trasmissione di una linea di lunghezza Ψ e di impedenza caratteristica K^2/Z_1 (Figura 7.18).

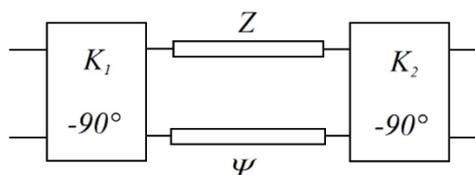


Figura 7.19.

E' anche possibile cambiare i valori di impedenza caratteristica degli inverter, infatti per il circuito in Figura 7.19 si ha la seguente matrice di trasmissione

$$\begin{bmatrix} \frac{K_1}{Z} \sin \Psi & -jK_1 \cos \Psi \\ -j\frac{1}{K_1} \cos \Psi & \frac{Z}{K_1} \sin \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -jK_2 \\ -\frac{j}{K_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{K_2} \cos \Psi & -\frac{jK_1 K_2}{Z} \sin \Psi \\ -j\frac{Z}{K_1 K_2} \sin \Psi & -\frac{K_2}{K_1} \cos \Psi \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

Nella (7.31) possiamo sostituire i valori K_1, K_2, Z con $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{Z}$ purchè

$$\begin{cases} \frac{K_1}{K_2} = \frac{\bar{K}_1}{\bar{K}_2} \\ \frac{K_1 K_2}{Z} = \frac{\bar{K}_1 \bar{K}_2}{\bar{Z}} \end{cases} \quad (7.32)$$

oppure, equivalentemente, in caso di invertori di ammettenza ($J=I/K$):

$$\begin{cases} \frac{J_2}{J_1} = \frac{\bar{J}_2}{\bar{J}_1} \\ J_1 J_2 Z = \bar{J}_1 \bar{J}_2 \bar{Z} \end{cases} \quad (7.33)$$

7.3.2 Prototipi di filtri passabanda ed eliminabanda con invertitori di impedenza

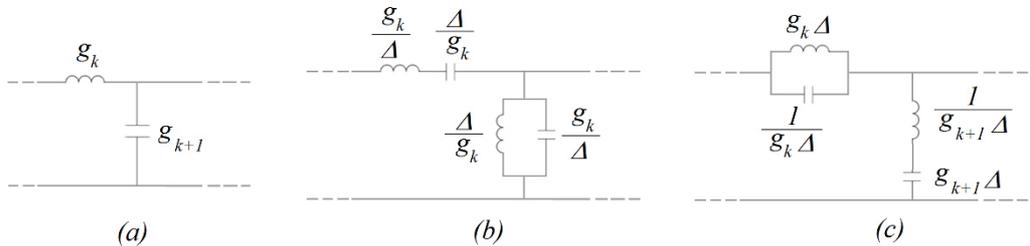
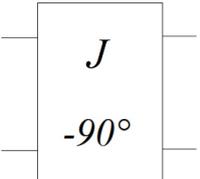


Figura 7.20. (a) schema a due stadi di un prototipo passa basso; (b) schema a due stadi di un prototipo passabanda; (c) schema a due stadi di un prototipo eliminabanda.

In Figura 7.20, $\Delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$ è la larghezza di banda percentuale del filtro centrata su ω ($[\omega_2 - \omega_1]$ è

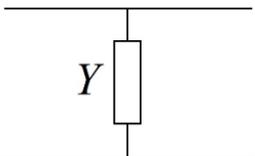
la banda passante), mentre i g_k sono i coefficienti del prototipo passabasso [Figura 7.20(a), Tabelle 7.1 e 7.2].

I prototipi in Figura 7.20(b) e 7.20(c) non possono essere utilizzati per l'implementazione a microonde. Tuttavia è possibile ottenere prototipi diversi, in cui tutti i circuiti risonanti LC (serie o parallelo) siano in parallelo oppure in serie, utilizzando degli invertitori di ammettenza.

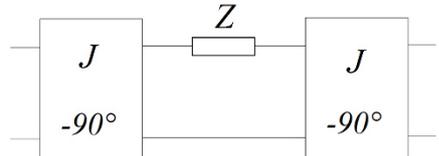


$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{J} \\ -jJ & 0 \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

Proprietà 1: Una ammettenza Y in parallelo diviene una impedenza in serie affiancata da due inverter uguali.



$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \quad (7.35)$$



$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{J} \\ -jJ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{J} \\ -jJ & 0 \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

Eseguendo i prodotti tra le matrici, la matrice di trasmissione (7.36) diventa:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{J} \\ -jJ & -jJZ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{J} \\ -jJ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -J^2Z & -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ J^2Z & 1 \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

Il termine “-1” nella (7.37) è un fattore che si può trascurare (non modifica la risposta del filtro) o, al più, se ne può tenere conto con un trasformatore $-1:1$ posto in un punto qualunque. Confrontando le matrici (7.35) e (7.37) otteniamo la relazione:

$$Y = J^2Z \quad (7.38)$$

che garantisce l’equivalenza tra i due circuiti mostrati nelle (7.35) e (7.36). Se, ad esempio, consideriamo per Y un circuito risonante LC parallelo:

$$Y = j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (7.39)$$

allora, utilizzando la (7.38), si ha:

$$Z = j \frac{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}{J^2} \quad (7.40)$$

che è un circuito risonante “LC serie” con induttanza C/J^2 e capacità LJ^2 . In altre parole, è possibile trasformare un circuito risonante “LC parallelo” in parallelo (Figura in 7.35) in un circuito risonante “LC serie” in serie (Figura in 7.36), affiancato da due inverter di ammettenza (J) uguali.

In modo duale, un circuito risonante “LC serie” in parallelo di ammettenza

$$Y = \left[j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]^{-1} \quad (7.41)$$

diviene, tramite la 7.38, un circuito risonante “LC parallelo” in serie, di impedenza

$$Z = \frac{\left[j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]^{-1}}{J^2} \quad (7.42)$$

ossia con induttanza pari a C/J^2 e capacità LJ^2 , affiancato da due inverter di ammettenza (J) uguali.

Proprietà 2: Una impedenza in serie Z diviene una ammettenza in parallelo affiancata da due inverter uguali.

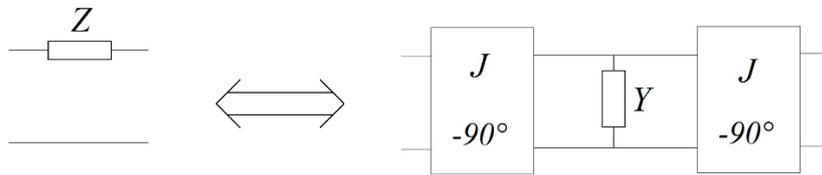


Figura 7.21. Equivalenza tra impedenza in serie e ammettenza in parallelo.

Procedendo in modo analogo a quanto fatto per la proprietà 1, si dimostra l'equivalenza tra i due circuiti in Figura 7.21 con

$$Z = \frac{Y}{J^2} \quad (7.43)$$

Ne consegue che, un circuito risonante “LC serie” in serie di impedenza

$$Z = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (7.44)$$

diviene un circuito risonante “LC parallelo” in parallelo di ammettenza

$$Y = jJ^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (7.45)$$

ovvero con capacità LJ^2 e induttanza C/J^2 , affiancato da due inverter di ammettenza (J) uguali. In modo duale, un circuito risonante “LC parallelo” in serie di impedenza

$$Z = \left[j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]^{-1} \quad (7.46)$$

diviene, tramite la (7.43), un circuito risonante “LC serie” in parallelo, di ammettenza

$$Y = \frac{J^2}{\left[j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]} \quad (7.47)$$

ovvero con induttanza C/J^2 e capacità LJ^2 , affiancato da due inverter di ammettenza (J) uguali. Riassumendo i risultati delle proprietà 1 e 2 si ha:

- a) Un circuito risonante “LC parallelo” in parallelo diventa un circuito risonante serie in serie con induttanza C/J^2 e capacità LJ^2 , affiancato da due inverter di ammettenza (J) uguali.
- b) Un circuito risonante “LC serie” in parallelo diventa un circuito risonante parallelo in serie con capacità LJ^2 e induttanza C/J^2 , affiancato da due inverter di ammettenza (J) uguali.
- c) Un circuito risonante “LC serie” in serie diventa un circuito risonante parallelo in parallelo con capacità LJ^2 e induttanza C/J^2 , affiancato da due inverter di ammettenza (J) uguali.
- d) Un circuito risonante “LC parallelo” in serie diventa un circuito risonante serie in parallelo di induttanza C/J^2 e capacità LJ^2 , affiancato da due inverter di ammettenza (J) uguali.

In tutti questi casi, la frequenza di risonanza del circuito risonante LC non cambia ed è sempre pari a $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

A partire dai prototipi in Figura 7.20 (b) e 7.20 (c), è possibile realizzare, ad esempio, un prototipo di filtro passabanda utilizzando solo circuiti risonanti parallelo in parallelo [utilizzando la (c) e applicandola ai circuiti risonanti serie in serie in Figura 7.20 (b)], o un prototipo di filtro eliminabanda utilizzando solo circuiti risonanti serie in parallelo [utilizzando la (d) e applicandola ai circuiti risonanti parallelo in serie in Figura 7.20 (c)]. Come si vedrà nei paragrafi successivi, questi ultimi due prototipi sono realizzabili alle frequenze delle microonde.

In generale dopo una trasformazione completa di un prototipo di un filtro mediante le (a)-(d), si ottiene un altro prototipo in cui tutti gli inverter di ammettenza sono uguali e tutti i circuiti risonanti LC sono diversi tra loro. E' però possibile ottenere anche circuiti LC tutti uguali (e inverter diversi).

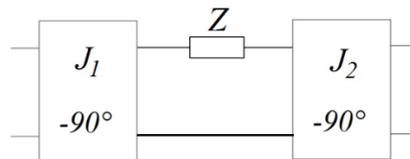


Figura 7.22. Impedenza in serie con due inverter di ammettenza.

Infatti per il circuito in Figura 7.22 si ottiene la seguente matrice di trasmissione:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{J_1} \\ -jJ_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{J_2} \\ -jJ_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{J_1} \\ -jJ_1 & -jJ_1 Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{J_2} \\ -jJ_2 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} \frac{J_2}{J_1} & 0 \\ J_1 J_2 Z & \frac{J_1}{J_2} \end{bmatrix} \quad (7.48)$$

E' quindi possibile sostituire Z con \bar{Z} modificando J_1 e J_2 in \bar{J}_1 e \bar{J}_2 tali che:

$$\begin{cases} \frac{J_2}{J_1} = \frac{\bar{J}_2}{\bar{J}_1} \\ J_1 J_2 Z = \bar{J}_1 \bar{J}_2 \bar{Z} \end{cases} \quad (7.49)$$

Dalle (7.49) per sostituzione si ha:

$$\begin{cases} (\bar{J}_1)^2 = (J_1)^2 \frac{Z}{Z} \\ \bar{J}_2 = \bar{J}_1 \frac{J_2}{J_1} \rightarrow (\bar{J}_2)^2 = (J_2)^2 \frac{Z}{Z} \end{cases} \quad (7.50)$$

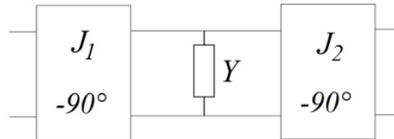


Figura 7.23. Ammettenza in parallelo con due inverter di ammettenza.

Analogamente, per una ammettenza in parallelo (Figura 7.23) si ha:

$$\begin{cases} (\bar{J}_1)^2 = (J_1)^2 \frac{\bar{Y}}{Y} \\ (\bar{J}_2)^2 = (J_2)^2 \frac{\bar{Y}}{Y} \end{cases} \quad (7.51)$$

Infine, come già detto, è possibile cambiare anche la resistenza di carico, tenendo presente che, come mostrato in Figura 7.24, l'impedenza di ingresso di un unverter di ammettenza chiuso su un carico R_L è data da $1/(J^2 R_L)$.

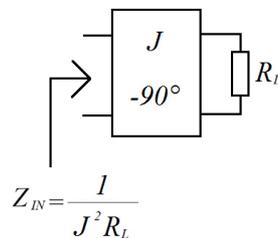


Figura 7.24.

Esempio

Consideriamo il seguente filtro passabanda:

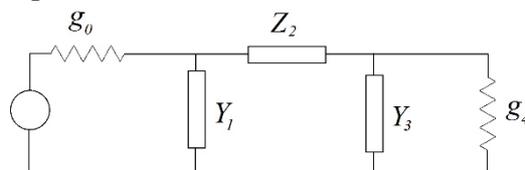


Figura 7.25. Prototipo di un filtro passabanda a 3 stadi.

con

$$\begin{cases} Y_k = j \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \frac{g_k}{\Delta} & k = 1, 3 \\ Z_k = j \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \frac{g_k}{\Delta} & k = 2 \end{cases} \quad (7.52)$$

Si vuole trasformare il prototipo in Figura 7.25 in un filtro con 4 inverter e tre ammettenze in parallelo uguali a

$$Y_k = j \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \frac{\pi}{2} \quad k = 1, 2, 3 \quad (7.53)$$

e con un carico unitario. Si vedrà nel prossimo paragrafo che questo nuovo prototipo può essere utilizzato per l'implementazione di un filtro passabanda a linee accoppiate. Si osservi che, nella (7.53), $\pi/2$ è il valore della capacità normalizzata, che determina univocamente il circuito risonante parallelo, essendo fissata la frequenza di risonanza normalizzata, che è pari ad 1.

Il primo passo consiste nel trasformare Z_2 in una ammettenza in parallelo di valore

$$Y = j \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \frac{\pi}{2}$$

A partire da $Z_2 = j \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \frac{g_k}{\Delta}$, la Y parallela corrispondente viene calcolata utilizzando la (7.43):

$$Y = J^2 Z = j \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \frac{g_k}{\Delta} J^2 \quad (7.54)$$

A questo punto possiamo scegliere $\frac{g_k}{\Delta} J^2 = \frac{\pi}{2}$ che fornisce il valore degli inverter:

$$J = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{g_k}} \quad (7.55)$$

Il prototipo del filtro si trasforma dunque in

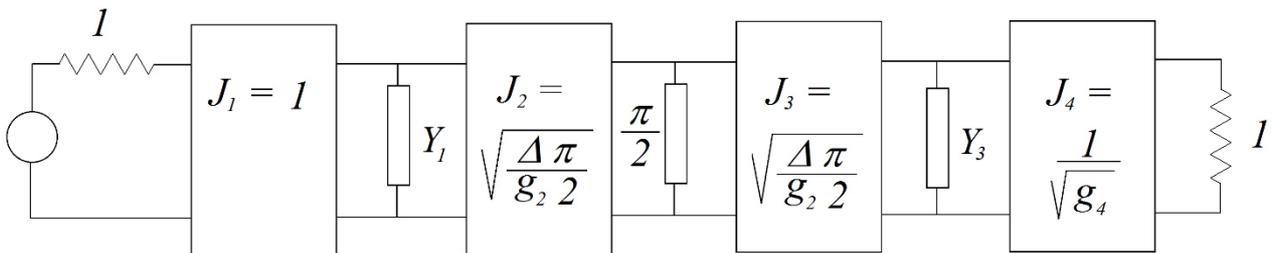


Figura 7.26.

Con riferimento alla Figura 7.26 occorre puntualizzare che un inverter di valore unitario non cambia la risposta del filtro se inserito immediatamente prima o dopo un carico unitario.

A questo punto occorre trasformare i valori di Y_1 e Y_2 in Figura 7.26 nei valori corretti, ovvero in circuiti risonanti LC parallelo con capacità normalizzata pari a $\pi/2$, modificando opportunamente gli inverter adiacenti. In altre parole con riferimento alla (7.52) occorre passare da g_k/Δ a $\pi/2$.

Utilizzando le (7.51), poiché $\frac{\bar{Y}}{Y} = \frac{\pi\Delta}{2g_k}$, si ha:

$$\begin{cases} (\bar{J}_1)^2 = (J_1)^2 \frac{\bar{Y}}{Y} = (J_1)^2 \frac{\pi\Delta}{2g_k} & \rightarrow \bar{J}_1 = J_1 \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_k}} \\ (\bar{J}_2)^2 = (J_2)^2 \frac{\bar{Y}}{Y} = (J_2)^2 \frac{\pi\Delta}{2g_k} & \rightarrow \bar{J}_2 = J_2 \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_k}} \end{cases} \quad (7.56)$$

dove con J_1 si intende l'inverter a sinistra e con J_2 l'inverter a destra del circuito risonante parallelo. Quindi per il primo inverter (alla sinistra di Y_1) nel circuito in Figura 7.26 si ha:

$$\bar{J}_1 = J_1 \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_1}} = 1 \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_1}} = \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_1}} \quad (7.56.1)$$

Per il secondo inverter (alla destra di Y_1) di valore $J_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{g_2}}$ si ha:

$$\bar{J}_2 = J_2 \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_1}} = \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_2}} \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_1}} = \frac{\pi\Delta}{2\sqrt{g_1 g_2}} \quad (7.56.2)$$

Per il terzo inverter (alla sinistra di Y_3) si ha:

$$\bar{J}_3 = J_3 \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_3}} = \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_2}} \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_3}} = \frac{\pi\Delta}{2\sqrt{g_2 g_3}} \quad (7.56.3)$$

Per il quarto inverter (alla destra di Y_3) si ha infine:

$$\bar{J}_4 = J_4 \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_3}} = \sqrt{\frac{1}{g_4}} \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_3}} = \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g_3 g_4}} \quad (7.56.4)$$

Il prototipo finale è dunque il seguente:

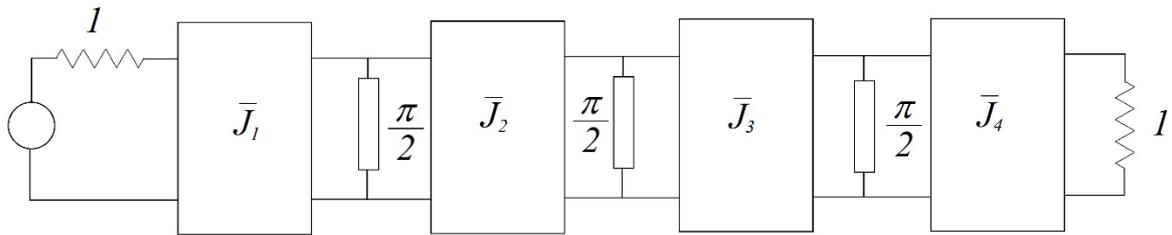


Figura 7.27. Prototipo finale di un filtro passabanda a tre stadi con tutti i circuiti risonanti parallelo uguali e con capacità normalizzata pari a $\pi/2$.

7.4 Implementazione a microonde di filtri passabanda – Filtri a linee accoppiate

Una sezione di linee accoppiate di lunghezza elettrica pari a 90° a centro banda può essere usata come cella elementare di un filtro passabanda o eliminabanda se le due porte sono opportunamente terminate. In Figura 7.28 è riportata la cella elementare per il filtro passabanda. Z_p e Z_d sono le impedenze caratteristiche del modo pari e dispari rispettivamente, e θ è la lunghezza elettrica della sezione di linee accoppiate (assumiamo $\theta_p = \theta_d$, che rappresenta una approssimazione solo nel caso

q-TEM). Le porte 2 e 3 sono aperte, la porta di ingresso è la porta 1 e la porta di uscita è la porta 4. Ovviamente $I_2=I_3=0$.

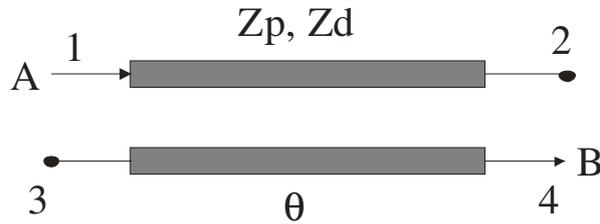


Figura 7.28. Cella elementare di un filtro passabanda a linee accoppiate.

Per caratterizzare la cella elementare in Figura 7.28 posso calcolare la matrice delle impedenze relativa al circuito tra le porte A e B, ovvero 1 e 4:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{14}I_4 \\ V_4 = Z_{41}I_1 + Z_{44}I_4 \end{cases} \quad (7.57)$$

Per calcolare tale matrice, si impone $I_4 = 0$ e si alimenta dalla porta 1 con un generatore di corrente di ampiezza unitaria, come mostrato in Figura 7.29.

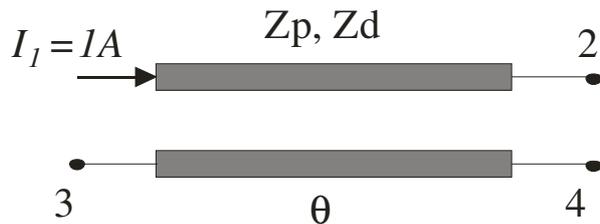


Figura 7.29. Configurazione circuitale per il calcolo della matrice Z.

Questa eccitazione si può decomporre in una eccitazione di modo pari $(I_{1p}, I_{3p}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e in una eccitazione dispari $(I_{1d}, I_{3d}) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, sulle porte 1 e 3.

Quindi risulta (circuito aperto in entrambi i casi):

$$\begin{cases} V_{1p} = -\frac{1}{2} jZ_p \cotg(\theta) \\ V_{1d} = -\frac{1}{2} jZ_d \cotg(\theta) \end{cases} \quad (7.58)$$

E, per l'equazione delle linee, si ha:

$$\begin{cases} V_{2p} = V_{1p} \cos(\theta) - jZ_p I_{1p} \sin(\theta) = V_{4p} \\ V_{2d} = V_{1d} \cos(\theta) - jZ_d I_{1d} \sin(\theta) = -V_{4d} \end{cases} \quad (7.59)$$

sostituendo le (7.58) nelle (7.59) si ottiene:

$$\begin{cases} V_{2p} = -\frac{1}{2} jZ_p \cotg(\theta) \cos(\theta) - jZ_p I_{1p} \sin(\theta) = -\frac{1}{2} jZ_p \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)} - jZ_p \frac{1}{2} \sin(\theta) = V_{4p} \\ V_{2d} = -\frac{1}{2} jZ_d \cotg(\theta) \cos(\theta) - jZ_d I_{1d} \sin(\theta) = -\frac{1}{2} jZ_d \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)} - jZ_d \frac{1}{2} \sin(\theta) = -V_{4d} \end{cases} \quad (7.60)$$

ovvero:

$$\begin{cases} V_{2p} = -\frac{1}{2} jZ_p \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\sin(\theta)} = -jZ_p \frac{1}{2 \sin(\theta)} = V_{4p} \\ V_{2d} = -\frac{1}{2} jZ_d \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\sin(\theta)} = -jZ_d \frac{1}{2 \sin(\theta)} = -V_{4d} \end{cases} \quad (7.61)$$

In conclusione:

$$\begin{cases} V_1 = V_{1p} + V_{1d} = -\frac{1}{2} j \cotg(\theta) (Z_p + Z_d) = Z_{11} = Z_{44} \\ V_4 = V_{4p} + V_{4d} = V_{2p} - V_{2d} = \frac{-j}{2 \sin(\theta)} (Z_p - Z_d) = Z_{41} = Z_{14} \end{cases} \quad (7.62)$$

In forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \frac{-j}{2 \sin(\theta)} \begin{bmatrix} \cos(\theta)(Z_p + Z_d) & (Z_p - Z_d) \\ (Z_p - Z_d) & \cos(\theta)(Z_p + Z_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} \quad (7.63)$$

posto $\cos(\theta_1) = \frac{Z_p - Z_d}{Z_p + Z_d}$ la matrice di trasmissione (ABCD) corrispondente alla 7.63 è la seguente

[D. M. Pozar – Microwave Engineering]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta_1)} & \frac{-j(Z_p - Z_d)}{2 \sin(\theta)} \left[\frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta_1)} - 1 \right] \\ \frac{1}{-j(Z_p - Z_d)} & \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta_1)} \\ \frac{1}{2 \sin(\theta)} & \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta_1)} \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

Se la banda è sufficientemente stretta ($\theta \approx \pi/2$), la matrice (7.64) è una buona *approssimazione* della matrice di trasmissione della rete in Figura 7.30.

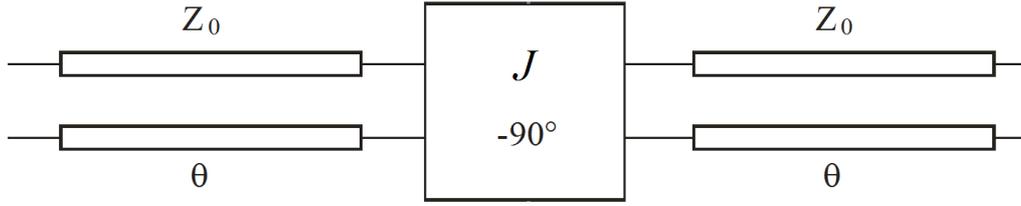


Figura 7.30. Circuito equivalente con inverter e linee.

La matrice di trasmissione della rete in figura 7.30 è la seguente:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & jZ_0 \sin(\theta) \\ \frac{j \sin(\theta)}{Z_0} & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{J} \\ -jJ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & jZ_0 \sin(\theta) \\ \frac{j \sin(\theta)}{Z_0} & \cos(\theta) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(JZ_0 + \frac{1}{JZ_0} \right) \cos(\theta) \sin(\theta) & j \left[JZ_0^2 \sin^2(\theta) - \frac{1}{J} \cos^2(\theta) \right] \\ j \left[\frac{1}{JZ_0^2} \sin^2(\theta) - J \cos^2(\theta) \right] & \left(JZ_0 + \frac{1}{JZ_0} \right) \cos(\theta) \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (7.65)$$

Se $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ ed, in particolare, nella banda $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right]$ (ovvero in una banda massima del 50%), si può porre $\sin(\theta) \approx 1$, $\cos^2(\theta) \approx 0$, e, la matrice 7.65 può essere scritta nella forma:

$$\begin{bmatrix} \left(JZ_0 + \frac{1}{JZ_0} \right) \cos(\theta) & j [JZ_0^2] \\ j \left[\frac{1}{JZ_0^2} \right] & \left(JZ_0 + \frac{1}{JZ_0} \right) \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (7.66)$$

Confrontando la matrice (7.64) con la (7.66) si trova che, nella approssimazione di “banda stretta”, la rete in Figura 7.30 è equivalente alla cella in Figura 7.28 purchè:

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos(\theta_1)} = JZ_0 + \frac{1}{JZ_0} & \rightarrow \frac{Z_p + Z_d}{Z_p - Z_d} = JZ_0 + \frac{1}{JZ_0} \\ \frac{2}{Z_p - Z_d} = \frac{1}{JZ_0^2} \end{cases} \quad (7.67)$$

Si noti che, trattandosi di reti reciproche e prive di perdite (nel caso ideale), per garantire l’equivalenza è sufficiente eguagliare due delle componenti della matrice.

Le (7.67) possono essere riscritte nella forma:

$$\begin{cases} Z_p - Z_d = 2JZ_0^2 \\ Z_p + Z_d = \left(JZ_0 + \frac{1}{JZ_0} \right) (Z_p - Z_d) = \left(JZ_0 + \frac{1}{JZ_0} \right) 2JZ_0^2 = 2J^2 Z_0^3 + 2Z_0 \end{cases} \quad (7.68)$$

da cui segue:

$$\begin{cases} Z_p = Z_0 \left[1 + (JZ_0) + (JZ_0)^2 \right] \\ Z_d = Z_0 \left[1 - (JZ_0) + (JZ_0)^2 \right] \end{cases} \quad (7.69)$$

che è la condizione richiesta per l'equivalenza tra il circuito con inverter e linee in Figura 7.30 e la sezione di linee accoppiate.

Da quanto detto possiamo concludere che, una sequenza di N sezioni di linee accoppiate (si veda Figura 7.31) è equivalente a N inverter e $N-1$ linee lunghe 2θ , tra loro alternate, con due linee lunghe θ alle estremità (Figura 7.32).

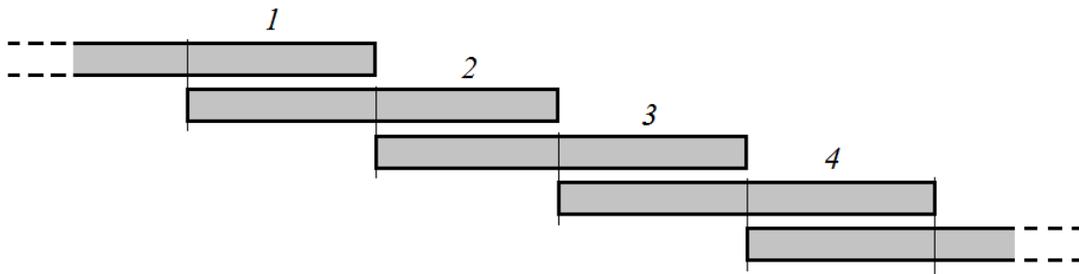


Figura 7.31. Schema planare di un filtro a linee accoppiate con $N = 4$ sezioni di linee accoppiate in cascata.

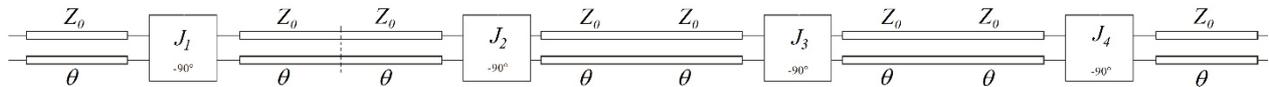


Figura 7.32. Circuito equivalente relativo allo schema planare mostrato in Figura 7.31.

Per studiare il circuito equivalente in Figura 7.32 consideriamo la matrice di trasmissione di una linea lunga 2θ :

$$\begin{bmatrix} \cos(2\theta) & jZ_0 \sin(2\theta) \\ \frac{j \sin(2\theta)}{Z_0} & \cos(2\theta) \end{bmatrix} \quad (7.70)$$

Se $\theta \approx \pi/2$ si ha:

$$\begin{cases} \cos(2\theta) \approx -1 \\ \sin(2\theta) = \sin(\pi + \Delta\theta) = -\sin(\Delta\theta) \approx -\Delta\theta = -\Delta\omega \frac{2l}{c} = -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \left[\frac{\omega_0 2l}{c} \right] = -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \pi \end{cases}$$

essendo a centro banda $\frac{\omega_0 2l}{c} = \pi$ con "l" lunghezza fisica di una sezione di linee accoppiate.

Sostituendo nella (7.70) si ottiene:

$$(-1) \begin{bmatrix} 1 & jZ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \pi \\ j \frac{\Delta\omega}{Z_0 \omega_0} \pi & 1 \end{bmatrix} \quad (7.71)$$

cui corrisponde la seguente matrice $\underline{\underline{Z}}$:

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{Z_0}{j\pi \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} & \frac{Z_0}{j\pi \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} + j \frac{\pi \Delta\omega}{\omega_0} \\ \frac{Z_0}{j\pi \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} & \frac{Z_0}{j\pi \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} \end{bmatrix} \approx \frac{Z_0}{j\pi \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

dato che $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll \frac{1}{\omega_0}$. La (7.72) è la matrice $\underline{\underline{Z}}$ di una ammettenza in parallelo

$$Y = j \frac{\pi}{\omega_0 Z_0} \Delta\omega = j2 \left[\frac{\pi}{2\omega_0 Z_0} \right] \Delta\omega \quad (7.73)$$

che, nella approssimazione di banda *stretta*, è l'ammettenza di un circuito risonante parallelo con capacità $C = \frac{\pi}{2\omega_0 Z_0}$ (*), ovvero, in termini normalizzati ($\omega_0 = 1, Z_0 = 1$), $C = \frac{\pi}{2}$.

Le linee lunghe 2θ nel circuito in Figura 7.32 possono essere approssimate con circuiti risonanti parallelo con capacità pari a $\frac{\pi}{2}$, e quindi il circuito in Figura 7.32 è il prototipo del filtro passabanda mostrato in Figura 7.27, con tutti i circuiti risonanti parallelo uguali e con capacità pari a $\frac{\pi}{2}$. Questo significa che un filtro passabanda può essere realizzato con una sequenza di linee accoppiate (del tipo in Figura 7.28), collegate in cascata come mostrato in Figura 7.31.

In particolare, sempre con riferimento al prototipo in Figura 7.27, per un filtro di ordine N si avranno N circuiti risonanti parallelo ed $N+1$ inverter. Quindi saranno necessarie $N+1$ sezioni di linee accoppiate (si vedano le Figure 7.30, 7.31, 7.32).

Il calcolo delle impedenze pari e dispari richieste per ciascuna sezione di linee accoppiate viene effettuato tramite le (7.69).

(*) Per un circuito risonante parallelo LC si ha:

$$Y = j\omega C - \frac{j}{\omega L} = j\omega C \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} \right) = j\omega C \frac{(\omega - \omega_r)(\omega + \omega_r)}{\omega^2}, \text{ se } \omega \approx \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Y = j\omega C \frac{(\omega - \omega_r)(\omega + \omega_r)}{\omega^2} \approx j\omega_r C \frac{(\omega - \omega_r)(2\omega_r)}{\omega_r^2} = j\cancel{\omega_r} 2C \frac{(\omega - \omega_r)}{\cancel{\omega_r}} = j2C(\omega - \omega_r)$$

Poiché nel prototipo del filtro si ha $J \approx \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g}}$ essendo g un valore medio dei coefficienti del filtro e J un valore medio dei risultati inverter, allora dalle (7.68) per $Z_0 = 1$ si ha:

$$\frac{Z_p - Z_d}{2} = J \approx \sqrt{\frac{\pi\Delta}{2g}}$$

$$\frac{Z_p + Z_d}{2} = J^2 + 1 = 1 + \frac{\pi\Delta}{2g}$$

Ossia valori elevati di Δ richiedono linee molto sottili (impedenze elevate) e molto vicine (Z_p e Z_d molto diversi con accoppiamento elevato), e quindi difficilmente realizzabili.

7.5 Implementazione a microonde di filtri passabanda ed eliminabanda – Filtri a stub

I circuiti risonanti serie e parallelo possono essere realizzati anche tramite stub lunghi *circa* $\lambda/4$. I circuiti equivalenti di tali stub sono infatti celle LC serie (stub aperti) o parallelo (stub in corto circuito). Utilizzando linee $\lambda/4$ per realizzare gli inverter è possibile ottenere filtri passabanda ed eliminabanda. I prototipi che saranno utilizzati per questo tipo di implementazione hanno tutti gli inverter uguali, secondo lo schema mostrato in Figura 7.33 (a) e (b), rispettivamente per il prototipo del filtro eliminabanda e passabanda.

I valori di capacità e induttanza normalizzati nel prototipo passabanda in Figura 7.33 (a) sono ottenuti utilizzando le (7.43), (7.44) e (7.45) con $J = 1$, per trasformare i circuiti risonanti LC serie in serie, presenti nel prototipo di partenza [si veda Figura 7.20 (b) e Figura 7.25], in circuiti risonanti LC parallelo in parallelo. Il prototipo risultante ha tutte le capacità dei circuiti risonanti parallelo in parallelo pari a g_k/Δ [Figura 7.33 (a)] e, di conseguenza, le induttanze pari a Δ/g_k .

I valori di capacità e induttanza normalizzati nel prototipo eliminabanda in Figura 7.33 (b) sono ottenuti utilizzando le (7.43), (7.46) e (7.47) con $J = 1$, per trasformare i circuiti risonanti LC parallelo in serie, presenti nel prototipo di partenza [si veda Figura 7.20 (c)], in circuiti risonanti LC serie in parallelo. Il prototipo risultante ha tutte le induttanze dei circuiti risonanti serie in parallelo pari a $1/(g_k\Delta)$ [Figura 7.33 (b)] e, di conseguenza, le capacità pari a $g_k\Delta$.

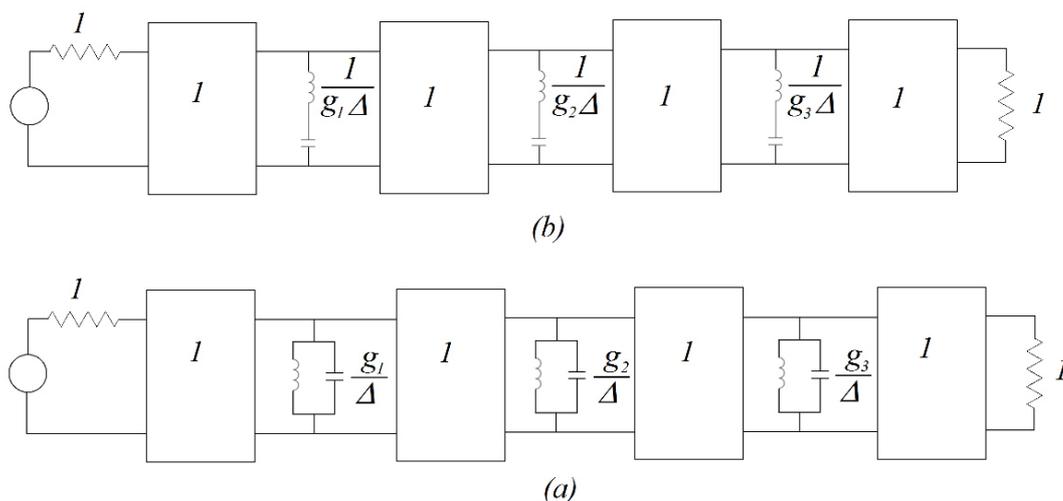


Figura 7.33. Prototipi di un filtro passabanda (a) e eliminabanda (b) a tre stadi con tutti gli inverter uguali.

Consideriamo dunque uno stub aperto di lunghezza elettrica θ (prossima a $\frac{\pi}{2}$) e di impedenza caratteristica Z_{0n} . L'impedenza di ingresso dello stub è:

$$Z_{IN} = -jZ_{0n} \cot \theta = -jZ_{0n} \cot \left(\frac{\pi}{2} + \Delta\theta \right) = jZ_{0n} \tan(\Delta\theta) \approx jZ_{0n} \Delta\theta \quad (7.74)$$

con $\Delta\theta = (\beta - \beta_0)l$ e $\beta_0 l = \frac{\pi}{2}$ (ossia $l = \frac{\lambda}{4}$ a frequenza centrale).

Segue pertanto:

$$Z_{IN} \approx jZ_{0n} \Delta\theta = jZ_{0n} (\omega - \omega_0) \frac{l}{c} \quad (7.75)$$

D'altra parte, per un circuito risonante LC serie, definita la frequenza di risonanza $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_n C_n}}$,

si ha:

$$Z_{IN} = j\omega L_n + \frac{1}{j\omega C_n} = j\sqrt{\frac{L_n}{C_n}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = j\sqrt{\frac{L_n}{C_n}} \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0 \omega} \quad (7.76)$$

e, nell'ipotesi che $\omega \approx \omega_0$, ricordando che $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_n C_n}}$:

$$Z_{IN} \approx 2j\sqrt{\frac{L_n}{C_n}} \frac{(\omega - \omega_0)}{\omega_0} = 2jL_n (\omega - \omega_0) \quad (7.77)$$

Confrontando la (7.75) con la (7.77) si ottiene:

$$L_n = Z_{0n} \frac{l}{2c} = \frac{Z_{0n}}{2\omega_0} \left[\frac{\omega_0 l}{c} \right] = \frac{Z_{0n}}{2\omega_0} \left[\frac{\pi}{2} \right] = \frac{Z_{0n}}{\omega_0} \frac{\pi}{4} \quad (7.78)$$

da cui

$$C_n = \frac{1}{\omega_0^2 L_n} = \frac{4}{\pi \omega_0 Z_{0n}} \quad (7.79)$$

Quindi con uno stub aperto posso ottenere un circuito risonante serie con induttanza $L_n = \frac{Z_{0n}}{\omega_0} \frac{\pi}{4}$. Il

che consente di realizzare il prototipo di un filtro eliminabanda con tutti i circuiti risonanti "LC serie" in parallelo (come quello in Figura 7.33 (b) per un filtro 3 stadi). Tuttavia, i valori di L_n [Henry] nella (7.78) non sono normalizzati mentre i valori riportati nelle tabelle lo sono. Per mantenere inalterata la risposta del filtro, l'impedenza normalizzata a frequenza ω_0 deve essere uguale all'impedenza normalizzata a frequenza 1, ossia:

$$\frac{\omega_0 L_n}{Z_0} = \frac{1}{g_n \Delta} \quad \rightarrow \quad L_n = \frac{Z_0}{\omega_0 g_n \Delta} \quad (7.80)$$

Dalla (7.80) utilizzando la (7.78) è infine possibile ricavare le impedenze caratteristiche Z_{0n} degli stub:

$$L_n = \frac{Z_{0n}}{\omega_0} \frac{\pi}{4} \rightarrow Z_{0n} = \frac{4\omega_0 L_n}{\pi} = \frac{4Z_0}{\pi g_n \Delta} \quad (7.81)$$

In conclusione, per implementare il prototipo di un filtro eliminabanda, è possibile realizzare gli inverter con delle linee di lunghezza elettrica 90° e impedenza caratteristica Z_0 , e i circuiti risonanti “LC serie” in parallelo con degli stub aperti, di lunghezza elettrica 90° e impedenza caratteristica Z_{0n} (Figura 7.34).

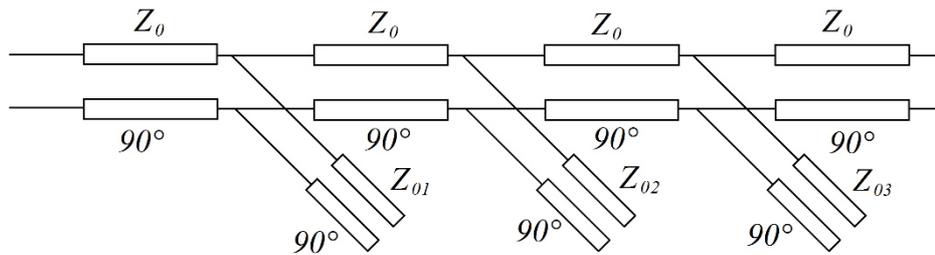


Figura 7.34. Circuito equivalente in linea di trasmissione del filtro eliminabanda in Figura 7.33 (b).

Ovviamente per questo tipo di implementazione i valori di Z_{0n} non possono essere troppo grandi (ne risulterebbero linee troppo sottili) per tanto sono realizzabili solo filtri eliminabanda con Δ relativamente grande [e passabanda con Δ piccolo (7.82)].

Per realizzare un filtro passabanda è possibile usare degli stub $\lambda/4$ chiusi in corto circuito o, equivalentemente, degli stub aperti di lunghezza $\lambda/2$. Quest’ultima soluzione è da preferire, benchè comporti un ingombro trasversale maggiore, perché evita di realizzare “via hole” nel substrato dielettrico.

Per un passabanda con stub $\lambda/4$ chiusi in corto circuito si trova il seguente valore per l’impedenza degli stub (Figura 7.35):

$$Z_{0n} = \frac{\pi Z_0 \Delta}{4g_n} \quad (7.82)$$

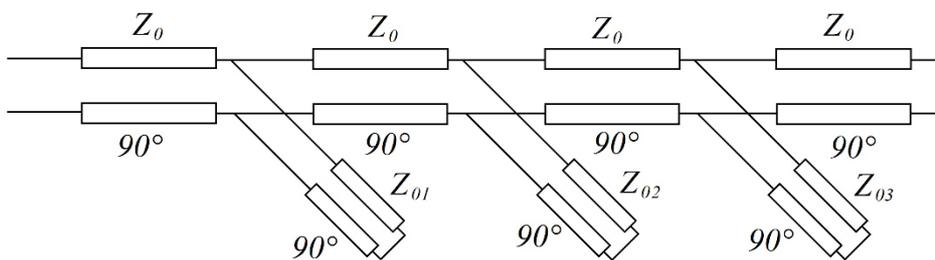


Figura 7.35. Circuito equivalente in linea di trasmissione del filtro passabanda in Figura 7.33 (a).

Come detto, è possibile realizzare un filtro passabanda a stub anche utilizzando stub $\lambda/2$ aperti. L’ammettenza di ingresso di uno stub $\lambda/2$ aperto è la seguente:

$$Y_{IN} = jY_{0n} \tan(\beta l) \quad (7.83)$$

Piochè stiamo considerando uno stub $\lambda/2$, a frequenza centrale si ha $\beta_0 l = \pi$, e possiamo scrivere:

$$\beta l = \beta_0 l + (\beta - \beta_0) l = \pi + (\beta - \beta_0) l$$

ovvero

$$\begin{aligned} Y_{IN} &= jY_{0n} \tan[\pi + (\beta - \beta_0) l] = jY_{0n} \tan[(\beta - \beta_0) l] \\ &\approx jY_{0n} (\beta - \beta_0) l = jY_{0n} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right) \frac{\omega_0 l}{c} = jY_{0n} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right) \pi = jY_{0n} \frac{\pi}{\omega_0} (\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (7.84)$$

D'altra parte abbiamo visto (nota (*) a pagina 107) che, per un circuito risonante LC parallelo, in prossimità della frequenza di centrale ω_0 , si ha:

$$Y = j2C(\omega - \omega_0) \quad (7.85)$$

Quindi confrontando la (7.85) con la (7.84) risulta:

$$2C_n = Y_{0n} \frac{\pi}{\omega_0} \rightarrow C_n = \frac{\pi Y_{0n}}{2\omega_0} \quad (7.86)$$

La (7.86) fornisce una capacità in Farad, mentre i valori tabulati sono normalizzati e a frequenza 1. Anche in questo caso è necessario imporre che l'impedenza nel caso normalizzato e nel caso non normalizzato sia la stessa:

$$\frac{\omega_0 C_n}{Y_0} = \frac{g_n}{\Delta} \rightarrow \frac{\omega_0 \left[\frac{\pi Y_{0n}}{2\omega_0} \right]}{Y_0} = \frac{g_n}{\Delta} \rightarrow Y_{0n} = \frac{2Y_0 g_n}{\pi \Delta} \rightarrow Z_{0n} = \frac{\pi Z_0 \Delta}{2g_n} \quad (7.87)$$

7.6 Implementazione a microonde di filtri passabanda – Filtri a risuonatori accoppiati

Un'altra implementazione di filtri passabanda è quella che si ottiene tramite risuonatori accoppiati. In tecnologia planare tale implementazione è molto vantaggiosa in quanto l'accoppiamento può essere facilmente ottenuto tramite *gap* sulla linea.

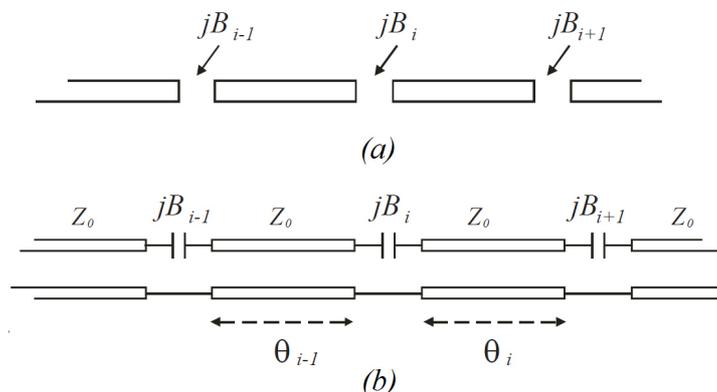


Figura 7.36: Implementazione di filtri a risuonatori accoppiati con realizzazione planare in microstriscia (a); e circuito equivalente in linea di trasmissione (b).

In Figura 7.36 (b) è mostrato il circuito equivalente in linea di trasmissione della struttura planare in Figura 7.36 (a). Le linee di lunghezza elettrica θ_i sono “prossime” a $\lambda/2$ alla frequenza centrale (quindi risuonano, in prossimità di tale frequenza, come circuiti risonanti parallelo con capacità normalizzata pari a $\pi/2$) mentre i *gap* sono equivalenti a condensatori di ammettenza jB (che si assume priva di perdite alle frequenze di interesse).

Il valore di B dipende ovviamente dai parametri del substrato (in caso di realizzazione planare in microstriscia) e dalle dimensioni del *gap*. Le relazioni che collegano B ai parametri geometrici del *gap* sono disponibili in [Microstrip Lines and Slotlines, Atech House, Boston].

Per ottenere il prototipo di un filtro passabanda è necessario che i vari *gap* possano fornire gli inverter da inserire tra le linee (si vedano Figure 7.27 e 7.31).

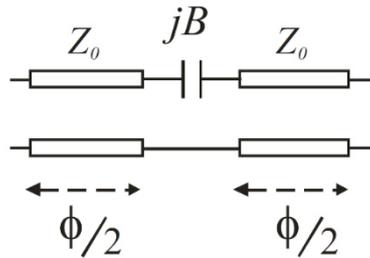


Figura 7.37.

Consideriamo il circuito in Figura 7.37 che può essere facilmente “estratto” dallo schema in Figura 7.36 (b). Dimostreremo che questo circuito è equivalente ad un inverter di ammettenza. La sua matrice di trasmissione è la seguente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) & jZ_0 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \frac{j}{Z_0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (jB)^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) & jZ_0 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \frac{j}{Z_0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi + \frac{\sin\phi}{2BZ_0} & j\left(Z_0 \sin\phi - \frac{1 + \cos\phi}{2B}\right) \\ j\left(\frac{\sin\phi}{Z_0} + \frac{1 - \cos\phi}{2Z_0^2 B}\right) & \cos\phi + \frac{\sin\phi}{2BZ_0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.88)$$

La matrice di un inverter è

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -jJ & 0 \end{bmatrix} \quad (7.89)$$

L'equivalenza tra il circuito in Figura 7.37 e l'inverter di ammettenza richiede che le rispettive matrici di trasmissione (7.88 e 7.89) siano uguali (è sufficiente eguagliare i coefficienti A e C perché la rete è reciproca, priva di perdite e speculare):

$$\begin{cases} A = \cos \phi + \frac{\sin \phi}{2BZ_0} = 0 \rightarrow \tan \phi = -2BZ_0 \\ C = -jJ = j \left(\frac{\sin \phi}{Z_0} + \frac{1 - \cos \phi}{2Z_0^2 B} \right) \end{cases} \quad (7.89)$$

Sostituendo la prima delle (7.89) nella seconda

$$-Z_0 J = \sin \phi - \frac{1 - \cos \phi}{\tan \phi} = \frac{\sin^2 \phi - (1 - \cos \phi) \cos \phi}{\sin \phi} = \frac{1 - \cos \phi}{\sin \phi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}{2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}} = \tan \frac{\phi}{2} \quad (7.90)$$

ovvero:

$$\begin{cases} \tan \phi = -2BZ_0 \\ \tan \frac{\phi}{2} = -Z_0 J \end{cases} \quad (7.91)$$

Ricordando che $\tan \phi = \frac{2 \tan \frac{\phi}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\phi}{2}}$, usando le (7.91) segue

$$\begin{cases} BZ_0 = \frac{Z_0 J}{1 - (Z_0 J)^2} \\ \phi = -2 \arctan(Z_0 J) \end{cases} \quad (7.92)$$

Se valgono le (7.92) il circuito in Figura 7.37 rappresenta un inverter. Si osservi che il valore di ϕ è negativo. Ciò non è un problema se l'inverter è collegato ad una linea: sarà sufficiente ridurre di $\phi/2$ la linea stessa.

In conclusione, il circuito in Figura 7.36 equivale al seguente prototipo:

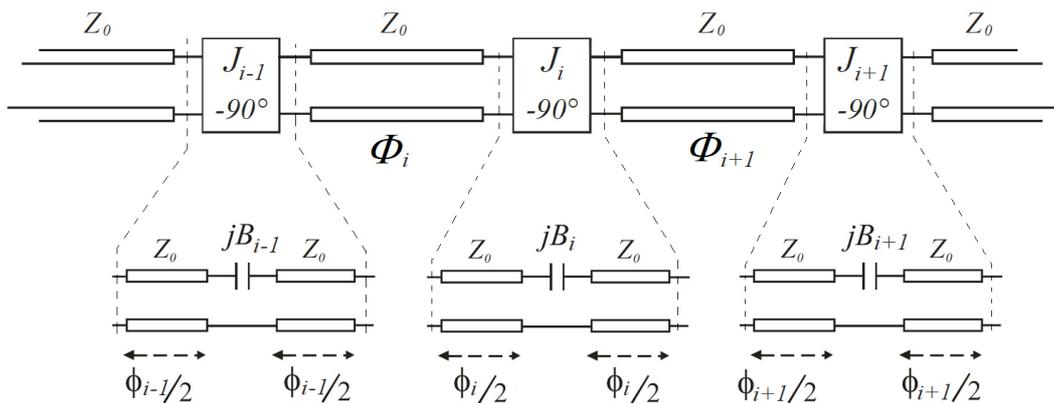


Figura 7.38.

che coincide con il prototipo utilizzato per il filtro passabanda a linee accoppiate (Figura 7.32).

In Figura 7.38, la lunghezza elettrica Φ_i è la stessa per tutti i tratti e vale π alla frequenza centrale. Quindi, alla frequenza centrale, le lunghezze elettriche delle linee nello schema di partenza (Figura 7.36) sono:

$$\theta_i = \pi + \frac{\phi_i}{2} + \frac{\phi_{i+1}}{2} \quad (7.93)$$

dove tutti i valori di ϕ sono negativi.

I valori degli inverter J_i del prototipo in Figura 7.38 vengono calcolati come nelle 7.56 e quindi sono espressi in funzione di g_n e Δ . Noti i valori di J_i si ottengono B_i e ϕ_i . Infine le dimensioni geometriche dei *gap* si ottengono a partire dal valore della capacità $C_i = B_i/\omega$ [Microstrip Lines and Slotlines, Atech House, Boston].

8. GUIDE D'ONDA

Le guide d'onda sono strutture metalliche chiuse, solitamente riempite con un dielettrico omogeneo, con sezione trasversale costante, che vengono utilizzate per trasportare il segnale alle frequenze delle microonde e oltre. Le guide d'onda, e in particolare le guide d'onda rettangolari e circolari (Figura 8.1), vengono utilizzate per svariate applicazioni: accoppiatori, divisori, isolatori, attenuatori e altri componenti vengono comunemente realizzati in guida d'onda nel range di frequenze tra 1 GHz e 100 GHz.

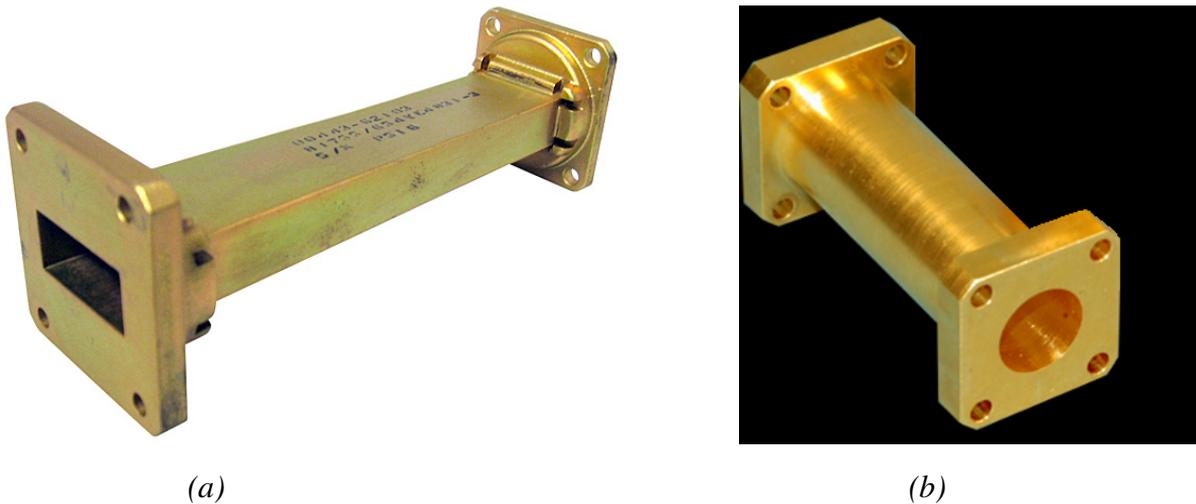


Figura 8.1. Guida d'onda rettangolare (a) e circolare (b).

Grazie ai recenti sviluppi verso la miniaturizzazione e l'integrazione, molti dispositivi e circuiti a microonde vengono realizzati in tecnologia planare (microstrip o stripline), che consente anche un basso costo di produzione, piuttosto che in guida d'onda. Tuttavia, ancora oggi esistono diverse applicazioni che richiedono l'uso di guide d'onda, che vengono impiegate, ad esempio, in sistemi ad alta potenza, in sistemi ad onde millimetriche, e in applicazioni che richiedono elevate prestazioni e basse perdite.

Come abbiamo visto nel paragrafo 1.1, una guida d'onda metallica non supporta la propagazione di campi TEM poiché formata da un solo conduttore (ossia da un solo contorno connesso). I "modi" che si propagano in una guida d'onda sono di tipo TE rispetto alla direzione di propagazione z (trasverso elettrico con $E_z = 0$) e TM (trasverso magnetico con $H_z = 0$).

Per studiare le caratteristiche della propagazione in una guida d'onda occorre risolvere le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti, con opportune condizioni al contorno. Per semplificare la soluzione possiamo scrivere i campi in funzione dei due potenziali, Φ e Ψ , che prendono il nome di potenziali di Hertz-Debye, e che descrivono, rispettivamente (e separatamente), tutti i campi di tipo TE e quelli di tipo TM.

Si dimostra che i campi TE possono essere determinati risolvendo la seguente equazione (equazione di Helmholtz) per il potenziale Φ :

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad (8.1)$$

con

$$\begin{aligned}
\underline{E}_t &= -\nabla_t \times (\Phi \underline{i}_z) \\
\underline{H}_t &= \frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \\
H_z &= -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t^2 \Phi
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Dove k è in numero d'onda del mezzo che riempie il dominio di interesse, il pedice t indica la coordinata trasversa, e si assume come direzione di propagazione l'asse z .

I campi TM possono essere determinati risolvendo la seguente equazione (equazione di Helmholtz) per il potenziale Ψ :

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \tag{8.3}$$

con

$$\begin{aligned}
\underline{H}_t &= \nabla_t \times (\Psi \underline{i}_z) \\
\underline{E}_t &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla_t \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \\
E_z &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla_t^2 \Psi
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Ovviamente, alle 8.1 e 8.3 occorre aggiungere le condizioni al contorno.

Si può dimostrare la seguente *proprietà 8.1*:

Ogni campo elettromagnetico in assenza di sorgenti può sempre essere espresso come somma di un campo TE e di un campo TM.

8.1 Propagazione nelle guide d'onda metalliche

Consideriamo una guida d'onda riempita con un dielettrico omogeneo. In questo caso i campi TE e TM soddisfano separatamente le condizioni al contorno ovvero possono esistere nella struttura gli uni indipendentemente dagli altri.

Così come abbiamo fatto nel caso della propagazione di campi TEM, anche per la propagazione di campi TE e TM cerchiamo delle soluzioni fattorizzate delle equazioni di Maxwell.

Limitandoci ai campi trasversi \underline{E}_t e \underline{H}_t , supponiamo dunque che esistano soluzioni del tipo:

$$\begin{cases} \underline{E}_t = V(z)\underline{e}(t) \\ \underline{H}_t = I(z)\underline{h}(t) \end{cases} \tag{8.5}$$

Consideriamo inizialmente il caso TE. Dalle (8.2) risulta che, se il campo è fattorizzato, deve esserlo anche il potenziale Φ . Possiamo quindi scrivere il potenziale nella forma:

$$\Phi(t, z) = \frac{1}{k_t} V(z) \Phi_0(t) \tag{8.6}$$

con k_t costante da determinare.

Sostituendo le (8.5) e (8.6) nelle (8.2) si ottiene:

$$\begin{cases} V(z)\underline{e}(\underline{t}) = -\frac{1}{k_t} V(z) \nabla_t \Phi_0 \times \underline{i}_z \\ j\omega\mu I(z)\underline{h}(\underline{t}) = \frac{1}{k_t} \frac{\partial V(z)}{\partial z} \nabla_t \Phi_0 \end{cases} \quad (8.7)$$

Dalla prima delle (8.7) si ottiene:

$$\underline{e}(\underline{t}) = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \Phi_0 \times \underline{i}_z \quad (8.8)$$

ovvero:

$$\underline{i}_z \times \underline{e}(\underline{t}) = -\underline{i}_z \times \frac{1}{k_t} \nabla_t \Phi_0 \times \underline{i}_z = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \Phi_0 \quad (8.9)$$

e, sostituendo la (8.9) nella seconda delle (8.7),

$$j\omega\mu I(z)\underline{h}(\underline{t}) = \frac{\partial V(z)}{\partial z} \left[\frac{1}{k_t} \nabla_t \Phi_0 \right] = -\frac{\partial V(z)}{\partial z} [\underline{i}_z \times \underline{e}(\underline{t})] \quad (8.10)$$

La (8.10) ha soluzione solo se i vettori \underline{h} e $[\underline{i}_z \times \underline{e}(\underline{t})]$ sono proporzionali:

$$\underline{h} = \alpha [\underline{i}_z \times \underline{e}(\underline{t})] \quad (8.11)$$

se scegliamo $\alpha = 1$ allora, dalla 8.10, si ottiene:

$$-\frac{dV(z)}{dz} = j\omega\mu I(z) \quad (8.12)$$

Sostituendo le (8.5) e (8.6) nella (8.1):

$$\begin{aligned} \nabla^2 [V(z)\Phi_0(\underline{t})] + k^2 V(z)\Phi_0(\underline{t}) &= 0 \\ V(z)\nabla_t^2 \Phi_0(\underline{t}) + \frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} \Phi_0(\underline{t}) + k^2 V(z)\Phi_0(\underline{t}) &= 0 \end{aligned} \quad (8.13)$$

dividendo tutti i termini della (8.13) per “ $V(z)\Phi_0(\underline{t})$ ”:

$$\frac{\nabla_t^2 \Phi_0(\underline{t})}{\Phi_0} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} + k^2 = 0 \quad \forall(\underline{t}, z) \quad (8.14)$$

Il primo termine della (8.14) dipende solo dalle coordinate trasverse \underline{t} , il secondo termine dipende solo da z . Il terzo termine è costante.

La funzione di \underline{t} e la funzione di z , $\forall(\underline{t}, z)$, sono tra loro indipendenti e, l'unico modo di sommarle e ottenere una costante, è che esse stesse siano costanti. Poniamo dunque:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = -k_z^2 \quad (8.15)$$

e, di conseguenza,

$$\frac{\nabla_t^2 \Phi_0(\underline{t})}{\Phi_0} = k_z^2 - k^2 \quad (8.16)$$

con k_z costante da determinare.

Sostituendo la (8.12) nella (8.15) risulta:

$$V(z) = -\frac{1}{k_z^2} \frac{d^2 V(z)}{dz^2} = -\frac{1}{k_z^2} \frac{d}{dz} [-j\omega\mu I(z)] = \frac{j\omega\mu}{k_z^2} \frac{dI(z)}{dz}$$

ovvero

$$-\frac{dI(z)}{dz} = \frac{jk_z^2}{\omega\mu} V(z) \quad (8.17)$$

La (8.12) e la (8.17) sono le equazioni delle linee di trasmissione, che possiamo riscrivere nella forma:

$$\begin{cases} -\frac{dV(z)}{dz} = j\omega\mu I(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} = j\omega \left(\frac{k_z^2}{\omega^2 \mu} \right) V(z) \end{cases} \quad (8.18)$$

con

$$\begin{cases} L = \mu \\ C = \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu} \end{cases} \quad (8.19)$$

La costante di propagazione è

$$\omega\sqrt{LC} = \cancel{\omega} \sqrt{\frac{\cancel{\mu} k_z^2}{\cancel{\omega^2} \cancel{\mu}}} = k_z \quad (8.20)$$

La costante k_z , introdotta per separare l'equazione differenziale, è la costante di propagazione lungo z . Quindi, se esistono campi TE fattorizzati, questi si propagano lungo z con una costante di propagazione k_z e soddisfano le equazioni delle linee per $V(z)$ e $I(z)$.

L'impedenza caratteristica è data dalla seguente espressione:

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega\mu}{k_z} \quad (8.21)$$

Si osservi che, sulla scelta della impedenza caratteristica Z influisce la scelta della costante arbitraria α , che abbiamo posto pari ad 1 senza imporre alcuna condizione, come invece è stato fatto nel caso TEM (si veda 1.27). In altre parole, l'impedenza caratteristica è definita a meno di una costante arbitraria. Di conseguenza, contrariamente a quanto visto per il caso TEM, Z non è

fisicamente una impedenza, e $V(z)$ e $I(z)$ non sono tensione e corrente sulla linea, ma prendono il nome di “funzioni scalari di modo”.

A questo punto rimane da risolvere la (8.16) per determinare Φ_0 :

$$\frac{\nabla_t^2 \Phi_0(t)}{\Phi_0} + k^2 = k_z^2 \quad (8.22)$$

$$\nabla_t^2 \Phi_0 + k^2 \Phi_0 = k_z^2 \Phi_0 \rightarrow \nabla_t^2 \Phi_0 + (k^2 - k_z^2) \Phi_0 = 0$$

Nella (8.6) abbiamo introdotto la costante k_t , senza specificarne il significato. Scegliamo ora $k_t^2 = k^2 - k_z^2$.

La (8.22) diventa:

$$\nabla_t^2 \Phi_0 + k_t^2 \Phi_0 = 0 \quad (8.23)$$

In conclusione, esistono campi TE fattorizzati se la (8.23) ha soluzione. La (8.23) prende il nome di equazione agli autovalori e ha due incognite: Φ_0 e k_t . Una volta determinate queste due incognite si conosce la forma del campo TE (da Φ_0) e la sua costante di propagazione (da k_t). Per risolvere la (8.23) occorre includere le condizioni al contorno sulla parete di conduttore elettrico perfetto (caso ideale in assenza di perdite) della guida d'onda.

Consideriamo dunque una guida d'onda ideale (Figura 8.2)

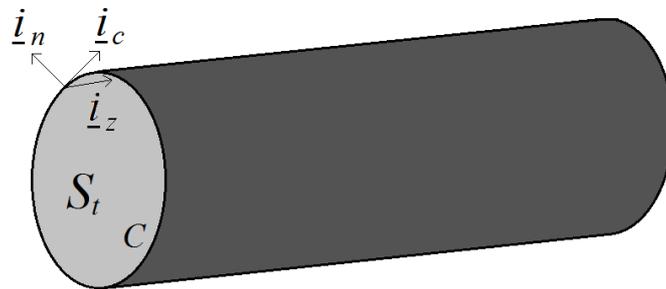


Figura 8.2.

La condizione al contorno per i campi TE è che il campo elettrico trasverso tangente al contorno CEP sia nullo:

$$\underline{E}_t \cdot \underline{i}_c = 0 \rightarrow \underline{e} \cdot \underline{i}_c = 0 \rightarrow \nabla_t \Phi_0 \times \underline{i}_z \cdot \underline{i}_c = 0 \rightarrow \nabla_t \Phi_0 \cdot \underline{i}_z \times \underline{i}_c = 0 \rightarrow \nabla_t \Phi_0 \cdot \underline{i}_n = 0 \quad (8.24)$$

La (8.24) equivale a:

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right|_C = 0 \quad (8.25)$$

In conclusione per i campi TE si ha:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \Phi_0 + k_t^2 \Phi_0 = 0 \\ \left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right|_C = 0 \end{cases} \quad (8.26)$$

$$\begin{cases} \underline{E}_t = V(z)\underline{e}(t) = -\frac{1}{k_t}V(z)\nabla_t\Phi_0 \times \underline{i}_z \\ \underline{H}_t = I(z)\underline{h}(t) = I(z)[\underline{i}_z \times \underline{e}(t)] \\ H_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{V(z)}{k_t} \nabla_t^2\Phi_0 = \frac{k_t}{j\omega\mu} V(z)\Phi_0(t) \end{cases} \quad (8.27)$$

In modo analogo cerchiamo campi TM fattorizzati, quindi, nel caso di campi TM si pone:

$$\begin{aligned} E_t &= V(z)\underline{e}(t) \\ H_t &= I(z)\underline{h}(t) \\ \Psi(t, z) &= \frac{1}{k_t} I(z)\Psi_0(t) \end{aligned} \quad (8.28)$$

e si ottiene:

$$\begin{cases} \underline{e} = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \Psi_0(t) \\ \underline{h} = \underline{i}_z \times \underline{e} = \frac{1}{k_t} \nabla_t \Psi_0(t) \times \underline{i}_z \end{cases} \quad (8.29)$$

Mentre, dalla (8.4), si ottiene:

$$E_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla_t^2 \Psi = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{I(z)}{k_t} \nabla_t^2 \Psi_0 = -\frac{1}{j\omega\epsilon} k_t I(z) \Psi_0 \quad (8.30)$$

In questo caso le equazioni delle linee sono:

$$\begin{cases} -\frac{dI(z)}{dz} = j\omega\epsilon V(z) \\ -\frac{dV(z)}{dz} = j\omega \left(\frac{k_z^2}{\omega^2 \epsilon} \right) I(z) \end{cases} \quad (8.31)$$

con

$$\begin{cases} C = \epsilon \\ L = \frac{k_z^2}{\omega^2 \epsilon} \end{cases} \quad (8.32)$$

Dalle (8.31) si ottiene:

$$\begin{cases} \omega\sqrt{LC} = k_z \\ Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{k_z}{\omega\epsilon} \end{cases} \quad (8.33)$$

Per determinare il potenziale Ψ_0 occorre risolvere la seguente equazione agli autovalori:

$$\nabla_t^2 \Psi_0 + k_t^2 \Psi_0 = 0 \quad (8.34)$$

Le condizioni al contorno per i campi TM sono due (oltre ad E_t , in questo caso esiste anche E_z). Si ha pertanto:

$$\underline{e} \cdot \underline{i}_c = 0 \rightarrow \nabla_t \Psi_0 \cdot \underline{i}_c = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial \Psi_0}{\partial C} \right|_C = 0 \quad (8.35)$$

e, dalla (8.30),

$$E_z|_C = 0 \rightarrow k_t \Psi_0|_C = 0 \quad (8.36)$$

Le condizioni al contorno 8.35 e 8.36 devono essere soddisfatte contemporaneamente:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \Psi_0}{\partial C} \right|_C = 0 \\ k_t \Psi_0|_C = 0 \end{cases} \quad (8.37)$$

Se $k_t \neq 0$, le due condizioni 8.37 forniscono

$$\Psi_0|_C = 0 \quad (8.38)$$

Se invece $k_t = 0$ deve valere la prima delle (8.37), ma in questo caso, dalla 8.34, risulta $\nabla^2 \Psi_0 = 0$. Riotteniamo dunque le equazioni per i modi TEM come caso particolare delle equazioni per i campi TM quando il valore di k_t è nullo.

Comunque, poiché sappiamo che in una guida d'onda non sono possibili modi TEM, per determinare il potenziale Ψ_0 , che fornisce i modi TM in guida d'onda, si deve risolvere il seguente problema agli autovalori:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \Psi_0 + k_t^2 \Psi_0 = 0 \\ \Psi_0|_C = 0 \end{cases} \quad (8.39)$$

8.1.1 Proprietà dell'espansione modale

Le equazioni (8.26) e (8.39), riportate anche di seguito:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \Phi_0 + k_t^2 \Phi_0 = 0 \\ \left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right|_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \Psi_0 + k_t^2 \Psi_0 = 0 \\ \Psi_0|_C = 0 \end{cases},$$

prendono il nome di equazioni agli autovalori, le cui soluzioni sono coppie (*autovalore*, *autofunzione*). k_t è l'autovalore, detto anche autovalore trasverso, e rappresenta fisicamente la variazione trasversa del campo in guida. Le autofunzioni sono le soluzioni Φ_0 (per i modi TE) e Ψ_0 per i modi TM.

Si dimostrano le seguenti proprietà per le equazioni agli autovalori nelle guide metalliche (escludendo dunque i campi TEM):

- 1) Ogni autofunzione dà luogo ad un modo, ossia ad un campo che può esistere da solo nella struttura guidante.
- 2) Gli autovalori k_t^2 sono reali positivi (escludendo i modi TEM).

Dimostriamo questa proprietà nel caso dei modi TE. Dalla (8.26) si ha:

$$\nabla_t^2 \Phi_0 = -k_t^2 \Phi_0 \quad (8.40)$$

Moltiplicando primo e secondo membro della (8.40) per Φ_0^* si ha:

$$\Phi_0^* \nabla_t^2 \Phi_0 = -k_t^2 |\Phi_0|^2 \quad (8.41)$$

$$\Phi_0^* \nabla_t \cdot \nabla_t \Phi_0 = -k_t^2 |\Phi_0|^2 \quad (8.42)$$

Tenendo presente che:

$$\nabla_t \cdot (\Phi_0^* \nabla_t \Phi_0) = \Phi_0^* \nabla_t \cdot \nabla_t \Phi_0 + \nabla_t \Phi_0^* \cdot \nabla_t \Phi_0 \quad (8.43)$$

ovvero

$$\Phi_0^* \nabla_t \cdot \nabla_t \Phi_0 = \nabla_t \cdot (\Phi_0^* \nabla_t \Phi_0) - \nabla_t \Phi_0^* \cdot \nabla_t \Phi_0 = \nabla_t \cdot (\Phi_0^* \nabla_t \Phi_0) - |\nabla_t \Phi_0|^2 \quad (8.44)$$

Confrontando la (8.42) con la (8.44) si ottiene:

$$-k_t^2 |\Phi_0|^2 = \nabla_t \cdot (\Phi_0^* \nabla_t \Phi_0) - |\nabla_t \Phi_0|^2 \quad (8.45)$$

Integrando primo e secondo membro della (8.45) sulla sezione trasversa della guida S_t , e applicando il teorema della divergenza al primo termine del secondo membro:

$$-k_t^2 \int_{S_t} |\Phi_0|^2 dS = \int_{C(\partial S_t)} (\Phi_0^* \nabla_t \Phi_0) \cdot i_n dl - \int_{S_t} |\nabla_t \Phi_0|^2 dS \quad (8.46)$$

$$-k_t^2 \int_{S_t} |\Phi_0|^2 dS = \int_{C(\partial S_t)} \Phi_0^* \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} dl - \int_{S_t} |\nabla_t \Phi_0|^2 dS \quad (8.47)$$

Il primo termine a secondo membro della (8.47) è nullo per la condizione al contorno nella (8.26). Per i modi TM si ottiene la stessa espressione (8.47) ma con Ψ_0 al posto di Φ_0 e il primo termine a secondo membro è ancora nullo perché la condizione al contorno fornisce $\Psi_0|_C = 0$.

In conclusione, dalla (8.47), si ottiene:

$$k_t^2 = \frac{\int_{S_t} |\nabla_t \Phi_0|^2 dS}{\int_{S_t} |\Phi_0|^2 dS} \quad (8.48)$$

In (8.48) k_t^2 è il rapporto di due funzionali quadratici ed è quindi positivo (con l'esclusione dei modi TEM).

Si può dimostrare che la (8.48) è una espressione variazionale per i modi TE, e, sotto opportune condizioni, l'espressione analoga con Ψ_0 al posto di Φ_0 è una espressione variazionale per i modi TM.

- 3) Ad ogni autovalore corrisponde un autospazio di autofunzioni linearmente indipendenti di dimensione finita, in cui è sempre possibile scegliere una base ortonormale. La dimensione di questo autospazio prende il nome di *molteplicità* dell'autovalore.
- 4) Definito il prodotto scalare tra due autofunzioni, f_n e f_m , come $(f_n, f_m) = \int_{S_i} f_n f_m dS$, risulta che autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.
- 5) Modi TE e TM sono mutuamente ortogonali.
- 6) Le autofunzioni corrispondenti ai modi TE o TM costituiscono separatamente un insieme completo sulla sezione trasversa. Il che significa che qualunque campo TE in guida d'onda può essere espresso come somma di modi TE, e qualunque campo TM può essere espresso come somma di modi TM. Inoltre, per la *proprietà 8.1*, un generico campo in guida d'onda può essere espresso come somma di un campo TE e di un campo TM.

8.2 Guida d'onda rettangolare

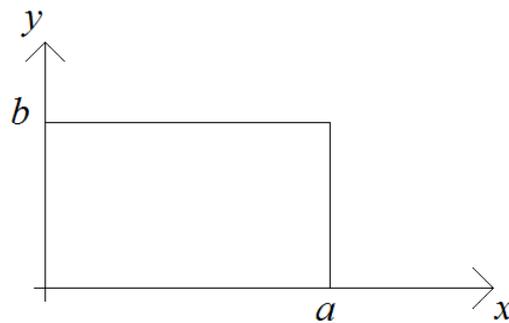


Figura 8.3. Sezione trasversa di una guida d'onda rettangolare.

In figura 8.3 è mostrata la sezione trasversa di una guida d'onda rettangolare di dimensioni $a \times b$ con $a > b$.

8.2.1 Modi TE

Per determinarne i modi TE di questa guida dobbiamo risolvere la seguente equazione:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \Phi_0 + k_t^2 \Phi_0 = 0 \\ \left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right|_c = 0 \end{cases} \quad (8.49)$$

L'equazione differenziale (8.49) alle derivate parziali può essere risolta con il metodo di separazione delle variabili scegliendo cioè per Φ_0 una soluzione nella forma:

$$\Phi_0(x, y) = X(x)Y(y) \quad (8.50)$$

Sostituendo la (8.50) nella (8.49) si ha:

$$\frac{\partial^2 \Phi_0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0(x, y)}{\partial y^2} + k_t^2 \Phi_0(x, y) = 0$$

$$Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_t^2 X(x)Y(y) = 0 \quad (8.51)$$

Dividendo la (8.51) per $X(x)Y(y)$ si ottiene:

$$\frac{X''(x)}{X} + \frac{Y''(y)}{Y} + k_t^2 = 0 \quad \text{qualunque } (x, y) \text{ con } x \text{ e } y \text{ variabili indipendenti} \quad (8.52)$$

Il primo termine della (8.52) dipende solo dalla variabile x , il secondo termine dipende solo dalla variabile y , mentre k_t è costante. L'unica soluzione possibile, visto che i primi due termini sono indipendenti tra di loro, è che ciascuno dei due sia uguale ad una costante:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -k_x^2 \\ \frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \end{cases} \quad \text{con } k_x \text{ e } k_y \text{ costanti e tali che } k_x^2 + k_y^2 = k_t^2 \quad (8.53)$$

$$\begin{cases} X'' + k_x^2 X = 0 \\ Y'' + k_y^2 Y = 0 \end{cases} \quad (8.54)$$

Le condizioni al contorno fornisce:

per $y = 0$

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right|_C = \left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \rightarrow \quad X(x)Y'(0) = 0 \quad \forall x$$

per $y = b$

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right|_C = \left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \quad \rightarrow \quad X(x)Y'(b) = 0 \quad \forall x$$

per $x = 0$

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right|_C = \left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad Y(y)X'(0) = 0 \quad \forall y$$

per $x = a$

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right|_C = \left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad \rightarrow \quad Y(y)X'(a) = 0 \quad \forall y$$

Riassumendo, le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} X'(0) = X'(a) = 0 \\ Y'(0) = Y'(b) = 0 \end{cases} \quad (8.55)$$

La soluzione generale della (8.54) è:

$$\begin{cases} X(x) = A_x \cos(k_x x) + B_x \sin(k_x x) \\ Y(y) = A_y \cos(k_y y) + B_y \sin(k_y y) \end{cases} \quad (8.56)$$

Consideriamo dapprima la $Y(y)$. Dalle (8.56) si ha:

$$Y'(y) = \frac{\partial Y(y)}{\partial y} = -A_y k_y \sin(k_y y) + k_y B_y \cos(k_y y) \quad (8.57)$$

Quindi, utilizzando la seconda delle (8.55)

$$Y'(0) = -k_y B_y = 0 \quad \leftarrow \text{-----} \quad (8.58)$$

$$Y'(b) = -A_y k_y \sin(k_y b) + \cancel{k_y B_y \cos(k_y b)} = 0 \quad (8.59)$$

La (8.58) fornisce: $k_y = 0$ e/oppure $B_y = 0$. In ogni caso il termine in seno della $Y(y)$ in (8.56) è nullo. Rimane dunque:

$$Y(y) = A_y \cos(k_y y) \quad (8.60)$$

La (8.59) fornisce: $A_y = 0$ e/oppure $k_y \sin(k_y b) = 0$. Tuttavia A_y deve necessariamente essere diverso da zero altrimenti risulterebbe $Y(y) = 0$, e quindi, dalla (8.50), un potenziale nullo che non ammette soluzioni. Si ha pertanto $k_y = 0$ e $k_y b = m\pi$.

Si avranno dunque soluzioni diverse da zero se

$$k_y = \frac{m\pi}{b} \quad m = 0, 1, \dots \quad (8.61)$$

Le possibili soluzioni per $Y(y)$ sono dunque:

$$Y(y) = A_y \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (8.62)$$

Per quanto riguarda $X(x)$ le condizioni al contorno forniscono:

$$\begin{aligned} X'(0) = 0 &\rightarrow k_x B_x = 0 \\ X'(a) = 0 &\rightarrow A_x k_x \sin(k_x a) = 0 \end{aligned} \quad (8.63)$$

da cui:

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.64)$$

La soluzione per $X(x)$ sarà pertanto del tipo:

$$X(x) = A_x \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (8.65)$$

Dalle (8.62) e (8.65) si ha infine:

$$\Phi_0(x, y) = X(x)Y(y) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (8.66)$$

con (8.53)

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad (8.67)$$

che sono gli autovalori trasversi.

La costante A nella (8.66) è una costante indeterminata. Introdurremo nel seguito una condizione di normalizzazione per determinare A .

Nelle (8.66) e (8.67) la coppia di indici $n = 0$ e $m = 0$ porta ad un potenziale costante e quindi, in corrispondenza, non esiste campo. Di conseguenza, per i modi TE si ha: $n \geq 0$ e $m \geq 0$ ma non contemporaneamente nulli.

8.2.2 Modi TM

Escludendo i modi TEM che non esistono in guida, l'equazione per i modi TM è la seguente:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \Psi_0 + k_t^2 \Psi_0 = 0 \\ \Psi_0|_C = 0 \end{cases} \quad (8.68)$$

Come per i modi TE poniamo:

$$\Psi_0(x, y) = X(x)Y(y)$$

La soluzione generale sarà del tipo:

$$\begin{cases} X(x) = A_x \cos(k_x x) + B_x \sin(k_x x) \\ Y(y) = A_y \cos(k_y y) + B_y \sin(k_y y) \end{cases}$$

$$\text{con } k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$$

La condizione al contorno $\Psi_0(x, y)|_C = 0$ fornisce:

$$X(0)Y(y) = 0 \quad \forall y \rightarrow X(0) = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$X(x)Y(0) = 0 \quad \forall x \rightarrow Y(0) = 0 \rightarrow A_y = 0$$

$$X(a)Y(y) = 0 \quad \forall y \rightarrow X(a) = 0 \rightarrow X(a) = B_x \sin(k_x a) = 0 \rightarrow k_x a = n\pi$$

$$X(x)Y(b) = 0 \quad \forall x \rightarrow Y(b) = 0 \rightarrow Y(b) = B_y \sin(k_y b) = 0 \rightarrow k_y b = m\pi$$

Quindi, come nel caso TE,

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

mentre:

$$\Psi_0(x, y) = X(x)Y(y) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (8.69)$$

Nella (8.69) $n > 0$ e $m > 0$, perché se anche uno solo dei due indici si annulla il potenziale è nullo.

Ricordiamo ora che (8.22):

$$k_z^2 = k^2 - k_t^2 \quad (8.70)$$

Ad ognuno dei k_t (n, m) corrisponde (almeno) una autofunzione $\Phi_0(n, m)$ [o $\Psi_0(n, m)$] e quindi almeno un modo della guida d'onda.

Modi che hanno lo stesso autovalore trasverso k_t prendono il nome di modi degeneri e si propagano con la stessa velocità di fase (8.70). Da quanto detto sopra, in una guida rettangolare, i modi TE_{nm} sono degeneri con i modi TM_{nm} per lo stesso valore della coppia (n, m).

In una guida d'onda esistono due tipi di degenerazioni:

- Degenerazioni accidentali: dovute alle proprietà delle funzioni trigonometriche. Ad esempio, in una guida rettangolare: i modi TE_{nm} sono degeneri con i TM_{nm} ; e, se $a = 2b$ il modo TE_{20} è degenero con il modo TE_{01} (infatti $k_{t,20} = k_{t,01} = (2\pi)/a$).
- Degenerazioni dovute a simmetria: presenti, ad esempio, in una guida quadrata, o in una guida circolare.

8.3 Caratteristiche della propagazione nelle guide d'onda

Abbiamo visto nel paragrafo 8.1 che la propagazione dei modi TE_{nm} in una guida d'onda metallica è rappresentata da:

$$k_{z, nm} = \sqrt{\epsilon_r k_0^2 - k_{t, nm}^2}, \quad Z_{nm} = \frac{\omega \mu}{k_{z, nm}}$$

che sono, rispettivamente, la costante di propagazione e l'impedenza caratteristica del modo n, m , con ϵ_r costante dielettrica relative del mezzo omogeneo che riempie la guida.

Per i modi TM_{nm} si ha invece:

$$k_{z, nm} = \sqrt{\epsilon_r k_0^2 - k_{t, nm}^2}, \quad Z_{nm} = \frac{k_{z, nm}}{\omega \epsilon}$$

Nel caso di una guida rettangolare abbiamo visto che $k_{t, nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$.

In **assenza** di perdite (sia nel dielettrico che nei conduttori) occorre distinguere due casi:

- $\epsilon_r k_0^2 > k_{t, nm}^2 \quad \rightarrow \quad k_{z, nm} = \sqrt{\epsilon_r k_0^2 - k_{t, nm}^2}$
- $\epsilon_r k_0^2 < k_{t, nm}^2 \quad \rightarrow \quad k_{z, nm} = -j |k_{z, nm}| = -j \sqrt{k_{t, nm}^2 - \epsilon_r k_0^2}$

Le funzioni scalari di modo $V(z)$ e $I(z)$ in guida soddisfano le equazioni delle linee (8.31) e risulta pertanto:

$$V(z) = V^+ \exp(-jk_z z) \quad (8.71)$$

Quindi nel caso a) il modo (n, m) si propaga in guida perché k_z è reale positivo, mentre nel caso b) k_z è immaginario puro e il modo si attenua come

$$V(z) = V^+ \exp(-|k_z|z) \quad (8.72)$$

In quest'ultimo caso il modo si attenua senza propagarsi e in assenza di perdite. Parleremo di modo in "cutoff". Per un modo in cutoff l'impedenza caratteristica è immaginaria pura ed è data dalla seguenti espressioni:

- $Z = \frac{\omega\mu}{-j|k_z|}$ per i modi TE
- $Z = \frac{-j|k_z|}{\omega\epsilon}$ per i modi TM

Ne consegue che non esiste potenza attiva associata ad un modo in "cutoff".

Il fatto che un determinato modo (n, m) si propaghi o sia in cutoff dipende dalla relazione tra $k_{t, nm}^2$ e $\epsilon_r k_0^2$, quindi dipende dalla frequenza (k_0^2), dal mezzo omogeneo che riempie la guida (ϵ_r) e dalla geometria della struttura ($k_{t, nm}^2$).

In genere è comodo rappresentare la costante di propagazione in funzione della frequenza (o viceversa) con delle curve che prendono il nome di diagramma di Brillouin. Limitiamoci per ora al caso di k_z reale positivo, che indichiamo con la costante β .

$$\text{Dalla (8.70) si ha: } k^2 = \omega^2 \epsilon \mu = k_z^2 + k_t^2 \quad \rightarrow \quad \omega(\beta) = \sqrt{\frac{\beta^2 + k_t^2}{\epsilon \mu}}$$

Fissato un determinato valore di k_t , per $\omega \rightarrow \infty$ si ottiene un andamento asymptotico lungo la retta $\omega = \frac{\beta}{\sqrt{\epsilon \mu}}$. In Figura 8.4 è mostrato il diagramma di Brillouin, ossia l'andamento della pulsazione ω in funzione della costante di propagazione $\beta = k_z$ (per $k_z > 0$)

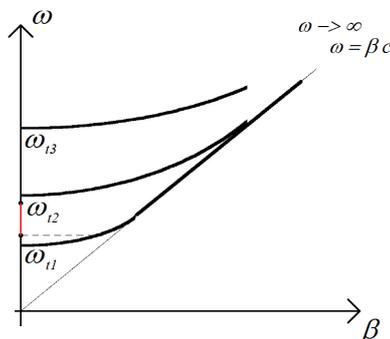


Figura 8.4: Diagramma di Brillouin.

Come detto in precedenza, nella guida il modo (n, m) si propaga se $\epsilon_r k_0^2 > k_{t, nm}^2$, ossia se

$$\omega > \frac{k_{t, nm}}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu}} = \frac{k_{t, nm} c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \omega_{t, nm} = 2\pi f_{t, nm} \quad (8.73)$$

$f_{t, nm} = \frac{k_{t, nm} c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}}$ prende il nome di frequenza di taglio (cut-off) del modo n, m . In una guida metallica

un determinato modo si propaga solo se la frequenza è superiore alla frequenza di taglio di questo modo, per frequenza inferiore alla frequenza di taglio il modo è in cutoff. Chiaramente ogni modo in guida ha una sua frequenza di taglio che dipende dall'autovalore trasverso.

- A frequenza nulla nella guida non esistono modi che si propagano. Tutti i modo sono al di sotto della frequenza di taglio, ossia in cutoff (a parte l'eventuale modo TEM che però in una guida metallica con contorno trasverso semplicemente connesso non esiste).
- La f_t più bassa corrisponde all'autovalore più piccolo. Al di sotto di questa frequenza tutti i modi in guida sono in cutoff.

E' di interesse la situazione in cui nella guida si propaga un solo modo. L'unico modo che può propagarsi da solo in un determinato intervallo di frequenza è quello con l'autovalore k_t più piccolo (Figura 8.4). Questo modo prende il nome di "modo fondamentale" della guida d'onda, mentre tutti gli altri modi sono detti "modi superiori". Chiamiamo f_{t1} la frequenza di taglio del modo fondamentale e f_{t2} la frequenza di taglio del primo modo superiore. In una guida d'onda si propaga il solo modo fondamentale se la frequenza è compresa tra f_{t1} e f_{t2} .

Esempio: guida rettangolare

Nel caso di una guida rettangolare di dimensioni $a \times b$, con $a > b$ il modo fondamentale è il TE_{10} , la sua frequenza di taglio vale:

$$f_{t, 10} = \frac{k_{t, 10} c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \left(\frac{\pi}{a} \right) \quad (8.74)$$

Poichè alla frequenza di taglio si ha $\epsilon_r k_0^2 = k_{t, 10}^2 = \left(\frac{\pi}{a} \right)^2$, risulta:

$$\frac{2\pi}{\lambda_{t, 10}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \left(\frac{\pi}{a} \right), \text{ da cui } \lambda_{t, 10} = 2a\sqrt{\epsilon_r}, \text{ ossia la lunghezza d'onda di taglio del modo fondamentale}$$

in guida è dell'ordine di grandezza delle dimensioni trasverse della guida.

Il primo modo superiore in una guida rettangolare con $a > b$ è il TE_{01} (se $a < 2b$) oppure il TE_{20} (se $a > 2b$). Si ha infatti: $k_{t, 01} = \frac{\pi}{b}$ e $k_{t, 20} = \frac{2\pi}{a} = \frac{\pi}{a/2}$.

Per evitare la dispersione "geometrica", cioè la dipendenza fortemente non lineare della relazione tra ω e β in prossimità della frequenza di taglio (Figura 8.4), le frequenze di utilizzo di una guida d'onda monomodale partono da $f_{t1} + 20\% f_{t1}$ (fino a $f_{t2} - 20\% f_{t2}$).

Oltre alla dispersione geometrica e alla dispersione cromatica (dovuta alla variazione della costante dielettrica relativa con la frequenza), in una guida d'onda metallica esiste anche la dispersione modale, che si osserva quando nella guida si propagano più modi alla stessa frequenza. In genere la guida d'onda si usa sempre nel modo fondamentale ad eccezione dei casi in cui sia richiesta solamente la trasmissione di potenza (ad esempio nel caso di Laser per lavorazioni meccaniche).

Nel diagramma di Brillouin si possono rappresentare anche le curve relative al cutoff dei modi. In questo caso, per un modo in cutoff, k_z è immaginario puro:

$$k_z^2 < 0 \rightarrow k_z = -j\alpha \text{ con } \alpha > 0$$

Il valore di α in funzione della frequenza viene riportato nel secondo quadrante del diagramma di Brillouin (Figura 8.5) e corrisponde ad un quarto di un'ellisse:

$$k_z^2 = k^2 - k_i^2 \rightarrow -\alpha^2 = k^2 - k_i^2 \rightarrow -\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon_r - k_i^2$$

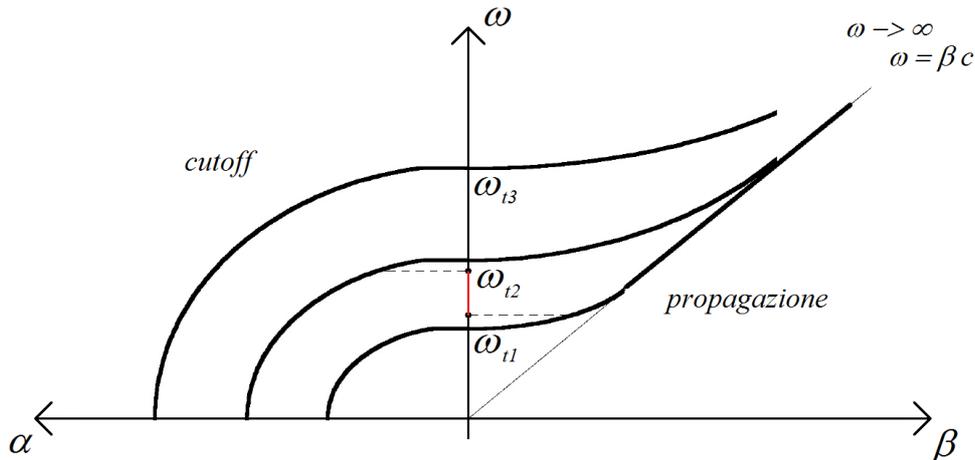


Figura 8.5: Diagramma di Brillouin. Primo quadrante: propagazione; secondo quadrante: cutoff.

Più grande è il valore di α , maggiore è l'attenuazione del modo in cutoff, pertanto, mentre la frequenza inferiore di utilizzo di una guida d'onda monomodale è $f_{i1} + 20\% f_{i1}$ per evitare la dispersione geometrica, la frequenza superiore si sceglie pari a $f_{i2} - 20\% f_{i2}$ per fare il modo che l'attenuazione del primo modo superiore sia significativa. Quest'ultima condizione è particolarmente utile in caso di difetti di costruzione.

Diagrammi come quello mostrato in Figura 8.5 possono essere disegnati per tutte le strutture guidanti. Nel caso di un cavo coassiale il modo fondamentale è il modo TEM (presente a tutte le frequenze), mentre il primo modo superiore è il primo modo TE, ossia il modo TE₁₁ che ha una lunghezza d'onda di taglio che è dell'ordine di grandezza della circonferenza media dei conduttori $\lambda_{11} \cong \pi (R_e + R_i)$. Quindi le frequenze di utilizzo del cavo coassiale nel modo fondamentale (il modo TEM) vanno da frequenza nulla fino al 20% al di sotto della frequenza di taglio del primo modo superiore, il TE₁₁.

8.4 Configurazione trasversa dei modi in guida

Nelle equazioni (8.66) e (8.69) risulta che le autofunzioni di una guida rettangolare sono definite a meno di una costante. Quindi, per ciascuna delle due equazioni precedenti si può imporre una "condizione di normalizzazione" per la scelta di questa costante. Possiamo riscrivere le (8.66) e (8.69) in una forma più esplicita:

$$\Phi_{0, nm}(x, y) = A_{nm}^{TE} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad \text{per i modi TE} \quad (8.75)$$

$$\Psi_{0, nm}(x, y) = A_{nm}^{TM} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad \text{per i modi TM} \quad (8.76)$$

e determinare la costante A , sia per il caso TE che per il caso TM, a partire dalla seguente condizione di normalizzazione sulla sezione trasversa della guida S_t :

$$\int_{S_t} |\Phi_{0, nm}(x, y)|^2 dS_t = 1 \quad (8.77)$$

per modi TE, e analogamente per le autofunzioni TM.

Sostituendo la (8.75) nella (8.77) si ottiene:

$$(A_{nm}^{TE})^2 \int_0^a \int_0^b \left| \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right|^2 dx dy = 1 \quad (8.78)$$

$$(A_{nm}^{TE})^2 \int_0^a \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \cos^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy = 1 \quad (8.79)$$

Per $m > 0$ e $n > 0$ la (8.75) fornisce:

$$(A_{nm}^{TE})^2 \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad A_{nm}^{TE} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \quad (8.80)$$

Per $m = 1$ e $n = 0$, e per $m = 0$ e $n = 1$ si ha invece:

$$(A_{nm}^{TE})^2 \left(\frac{ab}{2}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad A_{nm}^{TE} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \quad (8.81)$$

In modo analogo per i modi TM si ottiene (ricordando che le soluzioni con $m = 0$ o $n = 0$ non sono ammesse):

$$(A_{nm}^{TM})^2 \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad A_{nm}^{TM} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \quad (8.82)$$

Per il modo fondamentale in guida rettangolare, il TE₁₀, si ha:

$$A_{10}^{TE} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \quad (8.83)$$

$$\Phi_{10} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Mediante le equazioni (8.27) si ottiene il campo:

$$\underline{e}_{10} = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \Phi_{10} \times \underline{i}_z = -\frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{2}{ab}} \left(\frac{\pi}{a}\right) \left[-\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right] \underline{i}_x \times \underline{i}_z = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (-\underline{i}_y) \quad (8.84)$$

$$\underline{h}_{10} = \underline{i}_z \times \underline{e}_{10} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \underline{i}_x \quad (8.85)$$

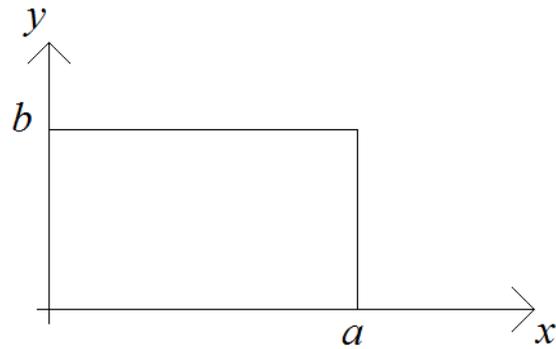


Figura 8.6: sezione trasversale di una guida d'onda rettangolare.

Il campo elettrico del modo fondamentale TE_{10} di una guida rettangolare è verticale (lungo l'asse y) con il massimo al centro, ossia per $x = a/2$ e due nulli agli estremi (per $x = 0$ e per $x = a$) ed è indipendente dalla variabile y . Il campo magnetico è invece orizzontale e presenta lo stesso tipo di variazione del campo elettrico.

In figura 8.7a sono mostrate le configurazioni trasverse di alcuni modi della guida rettangolare. Si osserva come, al crescere dell'ordine del modo, aumenta la variazione trasversa del campo.

Oltre alla guida rettangolare, un altro tipo di guida usata di frequente è la guida d'onda circolare. Il modo fondamentale della guida d'onda circolare è il TE_{11} , che tuttavia è costituito da una coppia degenera (per simmetria di rotazione). La lunghezza d'onda di taglio del modo fondamentale di guida circolare di raggio a è pari a $\lambda_{11} = 3.412 a$, ed è quindi dell'ordine di grandezza del diametro della guida. La combinazione dei due modi TE_{11} degeneri ha forma analoga a quella di un singolo modo, ma è ruotata di un angolo che può assumere qualunque valore, a seconda del rapporto tra le ampiezze delle tensioni modali. Se le tensioni dei due modi hanno la stessa ampiezza e sono sfasate di 90° si ottiene un modo rotante, utile in certe applicazioni. In genere però la degenerazione del modo fondamentale è un aspetto negativo, perché piccole imperfezioni della guida possono provocare rotazioni incontrollabili del campo. Per questo motivo la guida circolare è meno usata di quella rettangolare, nonostante la sua maggiore semplicità costruttiva.

In figura 8.7b sono mostrate le configurazioni trasverse di alcuni modi della guida circolare. Anche in questo caso, come nella guida rettangolare, è evidente che, al crescere dell'ordine del modo, aumenta la variazione trasversa e la complessità del campo.

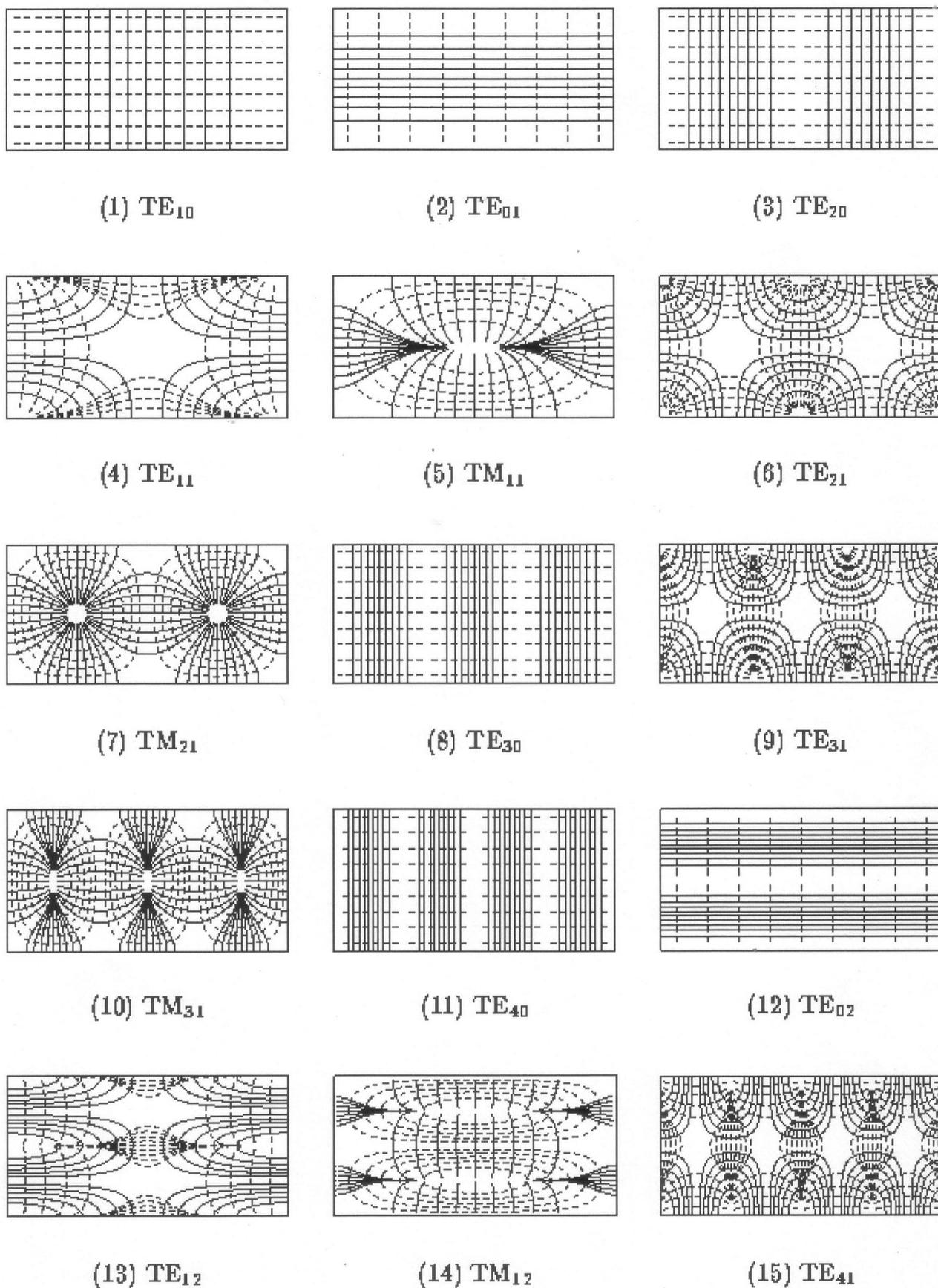


Figura 8.7a: configurazione trasversale di alcuni modi in guida rettangolare (le linee continue rappresentano il campo elettrico e le linee tratteggiate il campo magnetico).

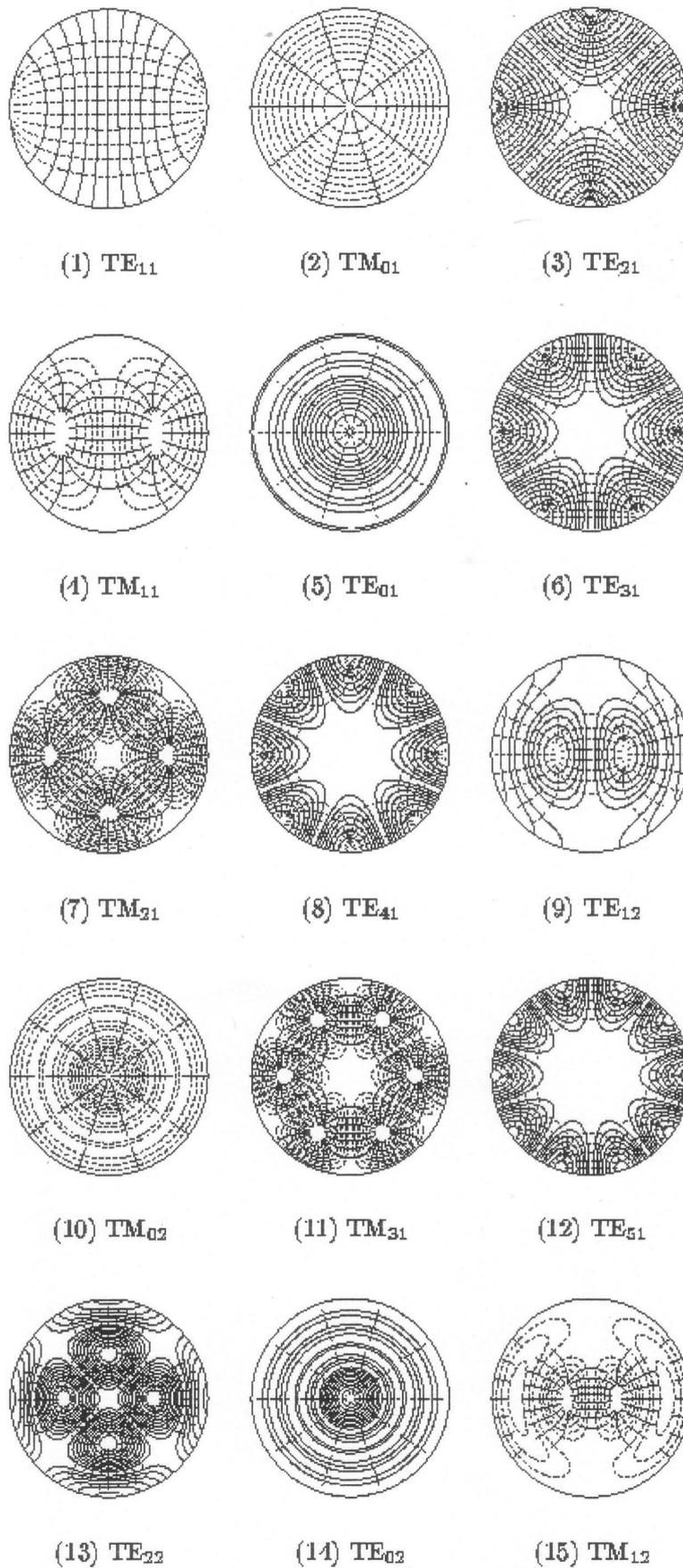


Figura 8.7b: configurazione trasversale di alcuni modi in guida circolare (le linee continue rappresentano il campo elettrico e le linee tratteggiate il campo magnetico).

8.5 Potenza nelle guide

Per calcolare la potenza in una guida d'onda occorre calcolare il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie trasversa S_t della guida (Figura 8.8).

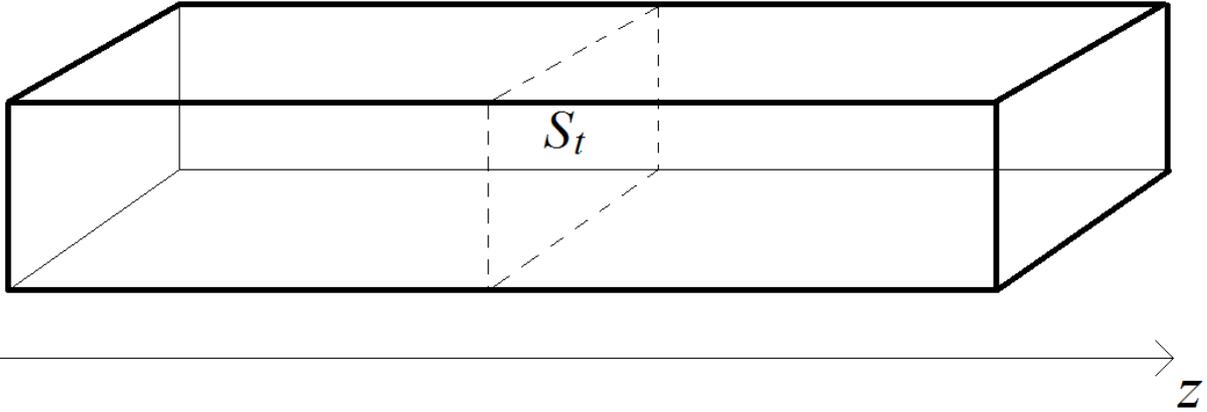


Figura 8.8.

$$P(z) = \frac{1}{2} \int_{S_t} \underline{E} \times \underline{H}^* \cdot \underline{i}_z dS \quad (8.86)$$

Poichè le componenti longitudinali non contribuiscono al flusso di potenza, la (8.86) può essere riscritta come:

$$P(z) = \frac{1}{2} \int_{S_t} \underline{E}_t \times \underline{H}_t^* \cdot \underline{i}_z dS \quad (8.87)$$

I campi trasversi in guida possono essere espressi come somma di modi, includendo ovviamente nella sommatoria tutti i modi TE e tutti i modi TM (proprietà 6 – paragrafo 8.1.1):

$$\underline{E}_t = \sum_{n=\{TE\} \cup \{TM\}} V_n(z) \underline{e}_n(t) \quad (8.88)$$

$$\underline{H}_t = \sum_{n=\{TE\} \cup \{TM\}} I_n(z) \underline{h}_n(t)$$

Sostituendo le (8.88) nella (8.87) si ottiene:

$$P(z) = \frac{1}{2} \int_{S_t} \sum_n V_n \underline{e}_n \times \sum_m I_m^* \underline{h}_m \cdot \underline{i}_z dS \quad (8.89)$$

e, poichè V_n e I_m dipendono solo da z

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} V_n I_m^* \int_{S_t} \underline{e}_n \times \underline{h}_m \cdot \underline{i}_z dS \quad (8.90)$$

Poiché i modi in guida sono ortonormali (per la proprietà 5 – paragrafo 8.1.1 e la condizione di normalizzazione imposta nel paragrafo 8.4), si può dimostrare che:

$$\int_{S_t} \underline{e}_n \times \underline{h}_m \cdot \underline{i}_z dS = \delta_{nm}$$

Di conseguenza la (8.90) diventa:

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} V_n I_m^* \delta_{nm} = \frac{1}{2} \sum_n V_n I_n^* \quad (8.91)$$

Dalla (8.91) risulta che:

- la potenza complessiva in guida è pari alla somma delle potenze trasportate da ciascun modo e calcolate, per ciascun modo, sulla linea di trasmissione equivalente.
- Non esiste accoppiamento di potenza tra i modi (purchè la guida sia ideale, ossia con pareti di C.E.P.).
- Un modo che si propaga trasporta potenza attiva, un modo in cutoff trasporta potenza reattiva.

Per una guida illimitata si ha:

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n^{TE/TM}} \quad (8.92)$$

$$V_n = V_n^+ \exp(-jk_{zn}z)$$

Sostituendo le (8.92) nella (8.91) si ha

$$P(z) = \sum_n \frac{|V_n|^2}{2Z_n^{TE/TM}} = \sum_{n_{[prop.]}} \frac{|V_n^+|^2}{2Z_n^{TE/TM}} + \sum_{n_{-TE[cutoff]}} \frac{|V_n^+|^2 e^{-2|k_{zn}|z}}{2jZ_n^{TE}} - \sum_{n_{-TM[cutoff]}} \frac{|V_n^+|^2 e^{-2|k_{zn}|z}}{2jZ_n^{TM}} \quad (8.93)$$

La potenza attiva dipende dai modi che si propagano, ed è costante, mentre la potenza reattiva dipende solo dai modi in cutoff e decade con z .

8.6 Eccitazione delle guide metalliche

Prima di tutto ricordiamo la forma dei campi in assenza di sorgenti:

Modi TE	Modi TM
$\underline{E}_t = V(z)\underline{e}(t)$	$\underline{E}_t = V(z)\underline{e}(t)$
$\underline{H}_t = I(z)\underline{h}(t)$	$\underline{H}_t = I(z)\underline{h}(t)$
$H_z = \frac{k_t}{j\omega\mu} V(z)\Phi_0(t)$	$E_z = -\frac{k_t}{j\omega\epsilon} I(z)\Psi_0(t)$

Per i modi TE H_z dipende da $V(z)$ mentre per i modi TM E_z dipende da $I(z)$.

Se nella guida è presente solamente l'onda progressiva i campi TM *in assenza di sorgenti* possono essere espressi come somma dei modi TM:

$$\begin{aligned} \underline{E}_t &= \sum_n V_n^+ \exp(-jk_{zn}z)\underline{e}_n \\ \underline{H}_t &= \sum_n I_n^+ \exp(-jk_{zn}z)\underline{h}_n \end{aligned} \quad (8.94)$$

e, considerando anche la componente z del campo elettrico, si ottiene:

$$\underline{E} = \underline{E}_t + E_z \underline{i}_z = \sum_n V_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{e}_n + E_z \underline{i}_z \quad (8.95)$$

Tenendo conto che E_z dipende dalla funzione $I(z)$ la (8.95) può essere scritta nella forma:

$$\underline{E} = \sum_n V_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{e}_n + I_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \hat{e}_{zn} \underline{i}_z \quad (8.96)$$

$$\underline{E} = \sum_n V_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \left[\underline{e}_n + \frac{I_n^+}{V_n^+} \hat{e}_{zn} \underline{i}_z \right] = \sum_n V_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \left[\underline{e}_n + \frac{1}{Z_n^{TM}} \hat{e}_{zn} \underline{i}_z \right] \quad (8.97)$$

$$\underline{E} = \sum_n V_n^+ \exp(-jk_{zn}z) [\underline{e}_n + e_{zn} \underline{i}_z] = \sum_n V_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{e}_n^+ \quad (8.98)$$

Analogamente, per i modi TE *in assenza di sorgenti* si ottiene:

$$\underline{E}_t = \sum_n V_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{e}_n \quad (8.99)$$

$$\underline{H} = \sum_n I_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{h}_n^+$$

dove \underline{h}_n^+ contiene sia una component trasversa che una componente longitudinale H_z che dipende dalla funzione $V(z)$.

In conclusione:

Modi TE	Modi TM
$\underline{E} = \sum_n V_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{e}_n^+$	$\underline{E} = \sum_n V_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{e}_n^+$
$\underline{H} = \sum_n I_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{h}_n^+$	$\underline{H} = \sum_n I_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{h}_n^+$
$\underline{e}_n^+ = \underline{e}_m$	$\underline{e}_n^+ = \underline{e}_m + e_{zn} \underline{i}_z$
$\underline{h}_n^+ = \underline{h}_{tm} + h_{zn} \underline{i}_z$	$\underline{h}_n^+ = \underline{h}_{tm}$

Tabella 8.1.

dove e_{zn} dipende dalla $I_n(z)$ e h_{zn} dipende dalla $V_n(z)$.

Una guida d'onda viene di norma alimentata tramite un cavo coassiale, la cui anima viene inserita all'interno della guida. Ma esistono anche altri modi per convogliare potenza all'interno di una guida: ad esempio attraverso un foro o una apertura praticati in una parete, o mediante delle spire di corrente. In generale, qualunque sia il tipo di "eccitazione" scelto per una guida, questo può essere sempre ricondotto al caso generale del calcolo del campo generato da una opportuna distribuzione di correnti elettriche e magnetiche presenti all'interno della guida.

Consideriamo pertanto una guida indefinita riempita con un dielettrico omogeneo e con delle sorgenti (\underline{J} , \underline{M}) note e di estensione limitata all'interno (Figura 8.9).

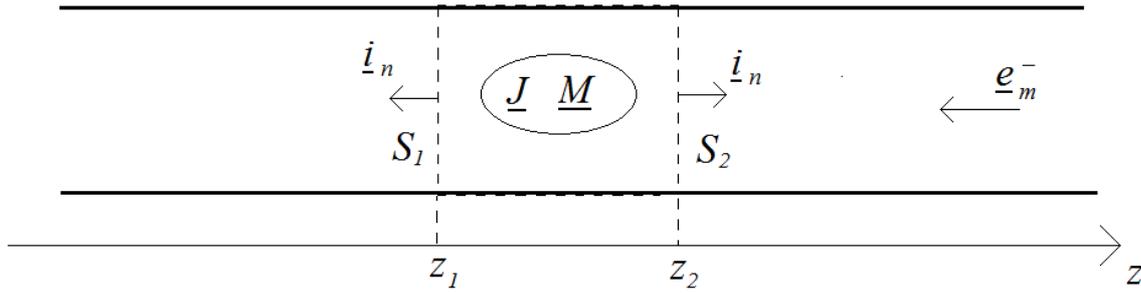


Figura 8.9: Distribuzione di sorgenti in una guida rettangolare. Le sorgenti sono racchiuse all'interno della superficie S tratteggiata.

Le sorgenti sono racchiuse all'interno della superficie S , tratteggiata in Figura 8.9, che è formata dalla parete laterali della guida di conduttore elettrico perfetto e da due superfici interne indicate con S_1 e S_2 .

Per determinare i campi generati dalle sorgenti \underline{J} , \underline{M} è necessario distinguere due regioni:

- 1) la regione in cui sono contenute le sorgenti ($z_1 < z < z_2$ in Figura 8.9);
- 2) la regione della guida senza sorgenti ($z < z_1$ e $z > z_2$ in Figura 8.9).

In questo paragrafo ci occupiamo del caso più semplice ossia il calcolo del campo generato dalle sorgenti nella regione 2) dove non ci sono sorgenti. Per quanto detto in precedenza in questa regione è possibile esprimere i campi sotto forma di espansione modale. In particolare si ha:

$$\begin{cases} \underline{E} = \sum_{n(\text{TE} \cup \text{TM})} V_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{e}_n^+ \\ \underline{H} = \sum_{n(\text{TE} \cup \text{TM})} I_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{h}_n^+ = \sum_{n(\text{TE} \cup \text{TM})} \frac{V_n^+}{Z_n^{\text{TE/TM}}} \exp(-jk_{zn}z) \underline{h}_n^+ \end{cases} \quad \text{per } z > z_2 \quad (8.100)$$

$$\begin{cases} \underline{E} = \sum_{n(\text{TE} \cup \text{TM})} V_n^- \exp(jk_{zn}z) \underline{e}_n^- \\ \underline{H} = \sum_{n(\text{TE} \cup \text{TM})} I_n^- \exp(jk_{zn}z) \underline{h}_n^- = \sum_{n(\text{TE} \cup \text{TM})} \frac{V_n^-}{Z_n^{\text{TE/TM}}} \exp(jk_{zn}z) \underline{h}_n^- \end{cases} \quad \text{per } z < z_1 \quad (8.101)$$

dove $\underline{e}_n^+ = \underline{e}_m + e_{zn} \underline{i}_z$ e $\underline{h}_n^+ = \underline{h}_m + h_{zn} \underline{i}_z$, mentre $\underline{e}_n^- = \underline{e}_m - e_{zn} \underline{i}_z$ (perchè e_{zn} dipende dalla funzione $I(z)$ e quindi cambia segno con z) e $\underline{h}_n^- = -\underline{h}_m + h_{zn} \underline{i}_z$ (perchè \underline{h}_m dipende dalla funzione $I(z)$ e cambia segno con z , mentre h_{zn} dipende dalla funzione $V(z)$ e quindi non cambia segno con z).

Nelle sommatorie in (8.100) e (8.101) sono inclusi sia i modi TE che i modi TM (tabella 8.1). Conosciamo dunque la forma dei campi (8.100 e 8.101), e dobbiamo determinare i coefficienti V_n^+ e V_n^- dell'espansione modale. Le incognite del nostro problema sono dunque i coefficienti V_n^+ e V_n^- , mentre i termini noti sono le correnti \underline{J} e \underline{M} .

Per determinare i coefficienti incogniti applico il **teorema di reciprocità** alla superficie S . Poiché la parete laterale della guida è un conduttore elettrico perfetto il suo contributo al teorema di reciprocità è nullo. Dobbiamo quindi valutare solo il contributo sulle superfici S_1 e S_2 .

Le due configurazioni di campo sono:

- a) una configurazione di campo $[\underline{E}^a, \underline{H}^a]$ priva di sorgenti $(\underline{J}^a, \underline{M}^a) = (0, 0)$ (in realtà le sorgenti sono al di fuori del volume V contenuto nella superficie S) formata da un'onda "riflessa" di modulo unitario (Figura 8.9) proveniente da $+\infty$:

$$\begin{cases} \underline{E}^a = \exp(jk_{zm}z)\underline{e}_m^- \\ \underline{H}^a = \frac{1}{Z_m} \exp(jk_{zm}z)\underline{h}_m^- \end{cases} \quad (8.102)$$

- b) una configurazione di campo $[\underline{E}^b, \underline{H}^b]$ generata dalle sorgenti $(\underline{J}^b, \underline{M}^b) = (\underline{J}, \underline{M})$ ossia dalle sorgenti note in guida. Quindi i campi $[\underline{E}^b, \underline{H}^b]$ sono quelli forniti dalle equazioni (8.100) e (8.101).

Il teorema di reciprocità fornisce la seguente relazione:

$$\oiint_S (\underline{E}^a \times \underline{H}^b - \underline{E}^b \times \underline{H}^a) \cdot d\underline{S} = \int_V (\underline{J}^a \cdot \underline{E}^b - \underline{J}^b \cdot \underline{E}^a) dV - \int_V (\underline{M}^a \cdot \underline{H}^b - \underline{M}^b \cdot \underline{H}^a) dV \quad (8.103)$$

dove il volume V è racchiuso dalla superficie S .

Ricordiamo che l'integrale a primo membro della (8.103) è nullo:

- i) se la superficie S è un conduttore elettrico perfetto;
- ii) se la superficie S è un conduttore magnetico perfetto;
- iii) se l'integrale è esteso a tutto lo spazio, ovvero la superficie S è una superficie all'infinito (per semplicità si suppone una sfera di raggio infinito);
- iv) se nel volume V non ci sono sorgenti;
- v) se la superficie S racchiude tutte le sorgenti.

Per la proprietà i) l'integrale a primo membro della (8.103) è nullo sulla superficie laterale della guida, e, poiché le sorgenti della configurazione a) di campo sono nulle, rimane:

$$\begin{aligned} \int_{S_1+S_2} (\underline{E}^a \times \underline{H}^b - \underline{E}^b \times \underline{H}^a) \cdot d\underline{S} &= \int_V (\cancel{\underline{J}^a \cdot \underline{E}^b} - \underline{J}^b \cdot \underline{E}^a) dV - \int_V (\cancel{\underline{M}^a \cdot \underline{H}^b} - \underline{M}^b \cdot \underline{H}^a) dV \\ \int_{S_1+S_2} (\underline{E}^a \times \underline{H}^b - \underline{E}^b \times \underline{H}^a) \cdot d\underline{S} &= \int_V (\underline{M}^b \cdot \underline{H}^a - \underline{J}^b \cdot \underline{E}^a) dV \end{aligned} \quad (8.104)$$

Sostituendo le (8.102) nella (8.104) si ha:

$$\int_{S_1+S_2} (\underline{E}^a \times \underline{H}^b - \underline{E}^b \times \underline{H}^a) \cdot d\underline{S} = - \int_V \left(\underline{J} \cdot \underline{e}_m^- - \frac{1}{Z_m} \underline{M} \cdot \underline{h}_m^- \right) \exp(jk_{zm}z) dV \quad (8.105)$$

Consideriamo ora separatamente i contributi all'integrale di superficie dovuti alle sezioni trasverse S_1 (per $z = z_1$) e S_2 (per $z = z_2$):

$z = z_2$: primo termine dell'integrale su superficie in (8.105).

Il campo su S_2 generato dalle sorgenti in guida è il campo che viaggia nella direzione positiva dell'asse z . Dobbiamo quindi utilizzare per \underline{H}^b l'espressione (8.100), mentre \underline{E}^a è dato dalla (8.102). La normale \underline{i}_n è uguale a \underline{i}_z . Si ha pertanto:

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} (\underline{E}^a \times \underline{H}^b) \cdot \underline{dS} &= \int_{S_2} \left(\exp(jk_{zm}z_2) \underline{e}_m^- \times \sum_n \frac{V_n^+}{Z_n} \exp(-jk_{zn}z_2) \underline{h}_n^+ \right) \cdot \underline{i}_z dS = \\
&= \sum_n \frac{V_n^+}{Z_n} \exp[j(k_{zm} - k_{zn})z_2] \int_{S_2} \underline{e}_m^- \times \underline{h}_n^+ \cdot \underline{i}_z dS = \\
&= \sum_n \frac{V_n^+}{Z_n} \exp[j(k_{zm} - k_{zn})z_2] \int_{S_2} \underline{e}_{im}^- \times \underline{h}_{in}^+ \cdot \underline{i}_z dS = \sum_n \frac{V_n^+}{Z_n} \exp[j(k_{zm} - k_{zn})z_2] \delta_{nm} = \frac{V_m^+}{Z_m}
\end{aligned} \tag{8.106}$$

$z = z_2$: secondo termine dell'integrale su superficie.

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} (\underline{E}^b \times \underline{H}^a) \cdot \underline{dS} &= \int_{S_2} \left(\sum_n V_n^+ \exp(-jk_{zn}z) \underline{e}_n^+ \times \frac{1}{Z_m} \exp(jk_{zm}z) \underline{h}_m^- \right) \cdot \underline{i}_z dS = \\
&= \sum_n \frac{V_n^+}{Z_m} \exp[-j(k_{zn} - k_{zm})z_2] \int_{S_2} \underline{e}_n^+ \times \underline{h}_m^- \cdot \underline{i}_z dS = \\
&= \sum_n \frac{V_n^+}{Z_m} \exp[-j(k_{zn} - k_{zm})z_2] \int_{S_2} \underline{e}_{in}^+ \times (-\underline{h}_{im}^-) \cdot \underline{i}_z dS = \\
&= -\sum_n \frac{V_n^+}{Z_m} \exp[-j(k_{zn} - k_{zm})z_2] \int_{S_2} \underline{e}_{in}^+ \times \underline{h}_{im}^- \cdot \underline{i}_z dS = \\
&= -\sum_n \frac{V_n^+}{Z_m} \exp[-j(k_{zn} - k_{zm})z_2] \delta_{nm} = -\frac{V_m^+}{Z_m}
\end{aligned} \tag{8.107}$$

In conclusione:

$$\int_{S_2} (\underline{E}^a \times \underline{H}^b - \underline{E}^b \times \underline{H}^a) \cdot \underline{dS} = \frac{2V_m^+}{Z_m} \tag{8.108}$$

Per quanto riguarda il contributo su S_1 , con procedimento analogo, ricordando che ora $z = z_1$, che i campi coinvolti sono quelli che viaggiano nella direzione negativa dell'asse z (forniti dalle 8.101) e che la normale \underline{i}_n è uguale a $-\underline{i}_z$ (Figura 8.9), si ottiene:

$$\int_{S_1} (\underline{E}^a \times \underline{H}^b) \cdot \underline{dS} = \frac{V_m^-}{Z_m} \exp(2jz_1k_{zm})$$

$$\int_{S_1} (\underline{E}^b \times \underline{H}^a) \cdot \underline{dS} = \frac{V_m^-}{Z_m} \exp(2jz_1k_{zm})$$

ossia

$$\int_{S_1} (\underline{E}^a \times \underline{H}^b - \underline{E}^b \times \underline{H}^a) \cdot \underline{dS} = 0 \tag{8.109}$$

Sommando le (8.108) e (8.109) si ottiene:

$$\int_{S_2+S_1} (\underline{E}^a \times \underline{H}^b - \underline{E}^b \times \underline{H}^a) \cdot \underline{dS} = \frac{2V_m^+}{Z_m}$$

e, sostituendo nella (8.105)

$$V_m^+ = -\frac{Z_m}{2} \int_V \left(\underline{J} \cdot \underline{e}_m^- - \frac{1}{Z_m} \underline{M} \cdot \underline{h}_m^- \right) \exp(jk_{zm}z) dV \quad (8.110)$$

valida per ogni “m” ossia per ogni modo.

I valori di V_m^- si ottengono utilizzando come campo di “prova” (configurazione “a” del teorema di reciprocità) un’onda “progressiva” unitaria che proviene da $-\infty$ anziché un’onda riflessa che proviene da $+\infty$:

$$V_m^- = -\frac{Z_m}{2} \int_V \left(\underline{J} \cdot \underline{e}_m^+ - \frac{1}{Z_m} \underline{M} \cdot \underline{h}_m^+ \right) \exp(-jk_{zm}z) dV \quad (8.111)$$

8.7 Transizione guida-cavo coassiale

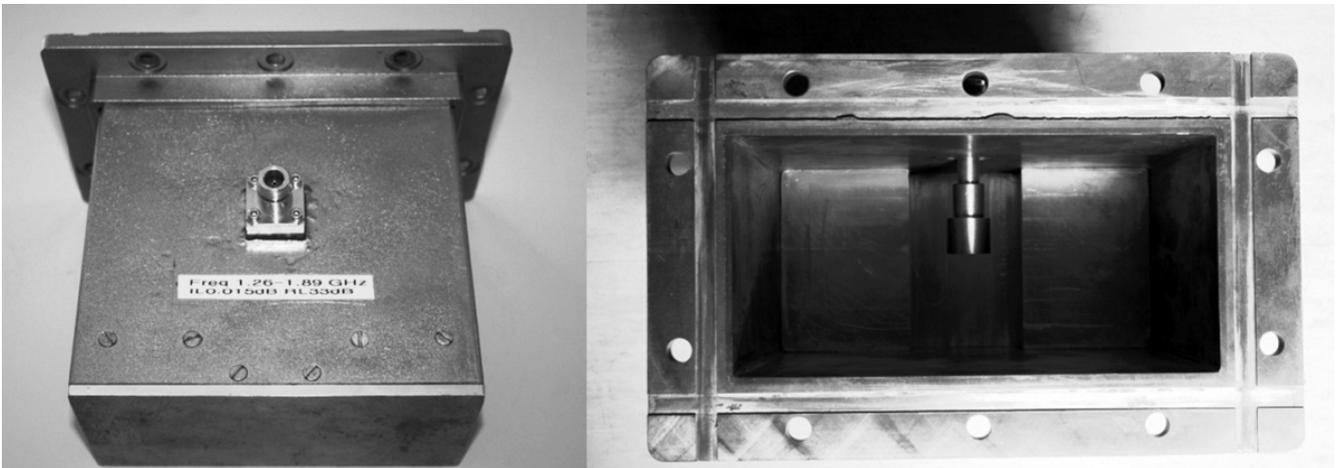


Figura 8.9: Prototipo di una transizione guida d’onda – cavo coassiale.

Consideriamo una guida d’onda con un lato chiuso su un corto circuito, alimentata da un cavo coassiale, in cui la corrente viaggia nel conduttore interno (Figura 8.10).

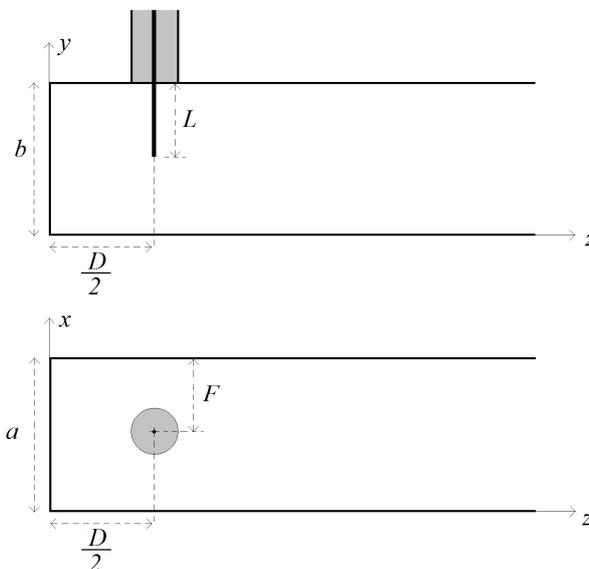


Figura 8.10: Schema di una transizione guida d’onda – cavo coassiale.

Questo tipo di transizione viene realizzata praticando un foro nella parete più larga della guida e inserendo l'anima del cavo coassiale all'interno della guida. Con riferimento allo schema in Figura 8.10, ho a disposizione tre parametri per realizzare l'adattamento di impedenza: L , D , F . Ulteriori parametri possono essere ottenuti modificando la forma del "probe" coassiale o modificando la forma del "backshort", ossia del corto circuito terminale (Figura 8.9).

In questo paragrafo verrà effettuata una analisi approssimata della transizione al fine di individuare i principali criteri di progetto.

La posizione del "probe" rispetto alla coordinata trasversa (F in Figura 8.10) può essere utilizzata per eccitare un determinato modo e/o impedire che un altro modo si ecciti.

Consideriamo per semplicità solamente i primi due modi, TE_{10} e TE_{20} , in una guida rettangolare.

Ad esempio, scegliendo $F = a/2$, possiamo eccitare il TE_{10} (che ha un massimo per $x = a/2$) ma non il TE_{20} (che ha un punto di nullo per $x = a/2$) (Figura 8.11).

Se l'alimentazione viene effettuata nel punto A o nel punto B in Figura 8.11 (o in qualunque altro punto diverso da $x = a/2$) vengono eccitati contemporaneamente sia il modo TE_{10} che il modo TE_{20} . Se si vuole eccitare il modo TE_{20} ma non il modo TE_{10} occorre alimentare nei punti A e B contemporaneamente ma con ampiezze opposte. Infatti, in quest'ultimo caso, per simmetria il modo TE_{10} non viene eccitato.

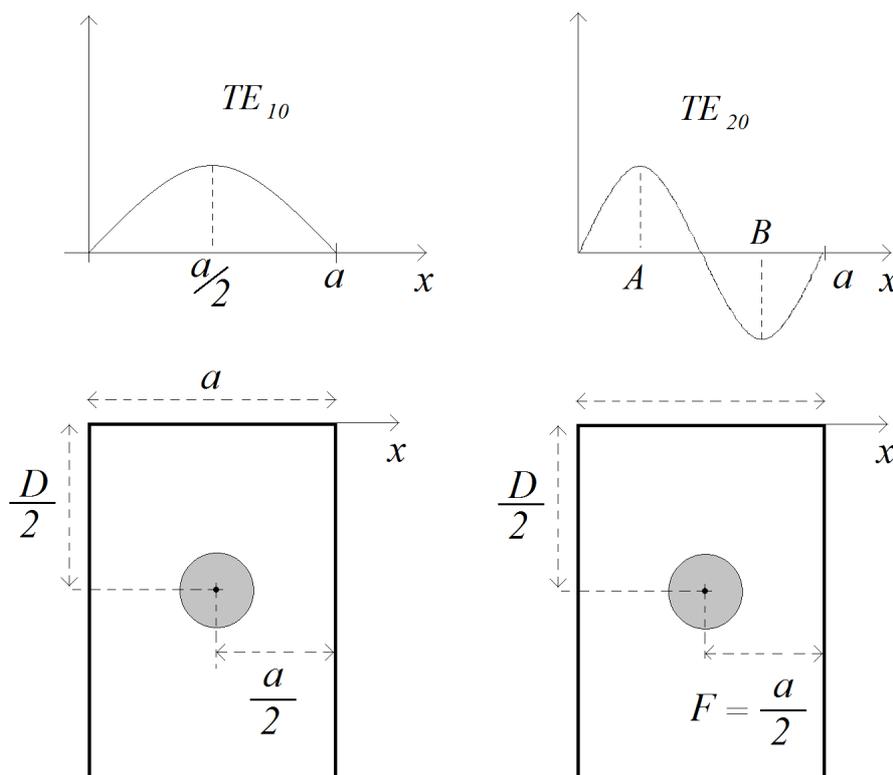


Figura 8.11.

Il tratto di cavo coassiale che entra nella guida può essere considerato come una antenna che irradia all'interno della guida, responsabile della eccitazione dei modi in guida. In altre parole, il "probe" di lunghezza L , posizionato a $x = F$ e $z = D/2$, che assumiamo per semplicità di diametro infinitesimo, è una sorgente elettrica all'interno della guida.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, per determinare i coefficienti incogniti *in una guida indefinita*, è possibile utilizzare la (8.111):

che, nel nostro caso diventa

$$V_m^+ = -\frac{Z_m}{2} \int_V \underline{J} \cdot \underline{e}_m^- \exp(jk_{zm}z) dV \quad (8.112)$$

poiché il probe coassiale corrisponde ad una corrente elettrica.

Tuttavia, nel caso della transizione guida – cavo coassiale *la guida non è indefinita*, in quanto terminata ad una estremità con un corto circuito. E' possibile comunque tenere conto del corto circuito tramite il teorema delle immagini e duplicare la sorgente elettrica all'interno della guida in posizione $z = -D/2$ come mostrato in figura 8.12. La corrente immagine, parallela al C.E.P, sarà ovviamente di segno opposto. Per il calcolo dei coefficienti incogniti in guida tramite la (8.112) la corrente \underline{J} sarà pertanto la somma di due contributi: la corrente equivalente al probe (I_0) e la sua immagine ($-I_0$).

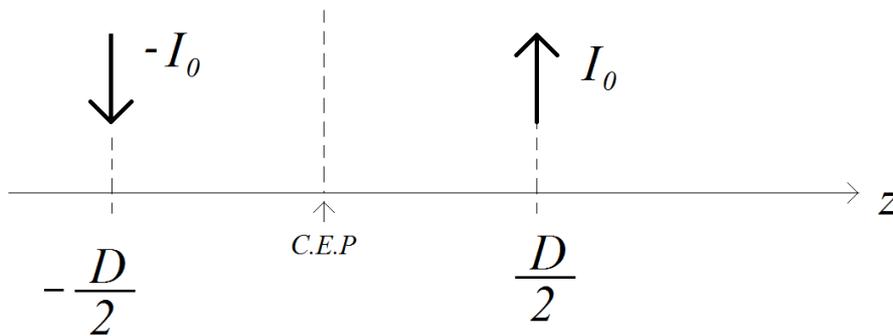


Figura 8.12.

Supponiamo inoltre di trovarci in un range di frequenze in cui nella guida si propaga solo il modo fondamentale: in questo caso il solo modo TE₁₀ generato dal “probe” coassiale si propaga all'interno della guida, mentre tutti gli altri modi sono in cutoff. Per limitare il numero di modi in cutoff eccitati dalla transizione scegliamo inoltre $F = a/2$. In questo modo escludiamo tutti i modi che hanno un nullo in $x = a/2$. Gli altri modi superiori in cutoff, che si eccitano in prossimità del probe, sono responsabili dell'accumulo di energia reattiva e contribuiscono alla parte immaginaria della impedenza di ingresso.

Mediante la (8.112) calcoliamo ora il coefficiente del modo fondamentale che è responsabile del trasporto di potenza attiva all'interno della guida. Poiché $\underline{e}_{10}^+ = \underline{e}_{10}^-$, si ha:

$$V_{10}^+ = -\frac{Z_{10}}{2} \int_V \underline{J} \cdot \underline{e}_{10}^+ \exp(jk_{z10}z) dV \quad (8.113)$$

Per semplicità, nella (8.113) consideriamo una corrente impulsiva sia lungo x che lungo z , ossia trascuriamo il diametro dell'anima del cavo coassiale, che consideriamo infinitesimo. Pertanto la (8.113) può essere riscritta come:

$$\begin{aligned}
V_{10}^+ &= -\frac{Z_{10}}{2} \int_V \underline{J} \cdot \underline{e}_{10}^+ \exp(jk_{z10}z) \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \delta\left(z - \frac{D}{2}\right) dV \\
&\quad - \frac{Z_{10}}{2} \int_V \underline{J}_{\text{immagine}} \cdot \underline{e}_{10}^+ \exp(jk_{z10}z) \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \delta\left(z + \frac{D}{2}\right) dV
\end{aligned} \tag{8.114}$$

$$\begin{aligned}
V_{10}^+ &= -\frac{Z_{10}}{2} \int_V \underline{J}\left(\frac{a}{2}, y, \frac{D}{2}\right) \cdot \underline{e}_{10}^+\left(\frac{a}{2}\right) \exp\left(jk_{z10} \frac{D}{2}\right) dy \\
&\quad - \frac{Z_{10}}{2} \int_V \underline{J}_{\text{imm}}\left(\frac{a}{2}, y, -\frac{D}{2}\right) \cdot \underline{e}_{10}^+\left(\frac{a}{2}\right) \exp\left(-jk_{z10} \frac{D}{2}\right) dy
\end{aligned} \tag{8.115}$$

Nella (8.115) la corrente \underline{J} e il campo elettrico \underline{e}_{10}^+ hanno la stessa direzione (lungo l'asse y):

$$\underline{J}\left(\frac{a}{2}, y, \frac{D}{2}\right) \cdot \underline{e}_{10}^+\left(\frac{a}{2}\right) = -J(y) \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \Big|_{x=\frac{a}{2}} = -J(y) \sqrt{\frac{2}{ab}} \tag{8.116}$$

La (8.115) diventa dunque:

$$V_{10}^+ = -\frac{Z_{10}}{2} \int_{b-L}^b \left[-\sqrt{\frac{2}{ab}} J(y) \right] \exp\left(jk_{z10} \frac{D}{2}\right) dy - \frac{Z_{10}}{2} \int_{b-L}^b \left[+\sqrt{\frac{2}{ab}} J(y) \right] \exp\left(-jk_{z10} \frac{D}{2}\right) dy \tag{8.117}$$

$$\begin{aligned}
V_{10}^+ &= \frac{Z_{10}}{2} \sqrt{\frac{2}{ab}} \int_{b-L}^b J(y) \left[\exp\left(jk_{z10} \frac{D}{2}\right) - \exp\left(-jk_{z10} \frac{D}{2}\right) \right] dy = \\
&= \frac{Z_{10}}{2} \sqrt{\frac{2}{ab}} 2j \sin\left(k_{z10} \frac{D}{2}\right) \int_{b-L}^b J(y) dy
\end{aligned} \tag{8.118}$$

In prima approssimazione possiamo assumere che la corrente $J(y)$ vari in modo sinusoidale sull'anima del cavo coassiale, che si può considerare come una antenna filiforme che irradia nello spazio interno alla guida. Ovviamente $J(y) = 0$ per $y = b-L$ perché la corrente all'estremità dell'antenna è nulla (Figura 8.10), e dunque poniamo:

$$J(y) \cong A \sin \beta_0 [y - (b-L)] \tag{8.119}$$

dove $\beta_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ipotizzando il vuoto all'interno della guida.

Per determinare l'ampiezza A nella (8.117) imponiamo che, per $y = b$, il flusso di J , $\Phi[J(b)]$, sia pari alla corrente di alimentazione I_0 .

Se il raggio r_c dell'antenna è molto più piccolo della lunghezza d'onda possiamo assumere una densità di corrente costante e superficiale e quindi il flusso di J sarà dato da:

$$\Phi[J(b)] \cong 2\pi r_c J(b) \tag{8.120}$$

Tuttavia, poiché stiamo considerando una sorgente impulsiva sia lungo x che lungo z risulta, e quindi di diametro infinitesimo, si ha:

$$\Phi[J(b)] \cong J(b) \tag{8.121}$$

Per determinare A imponiamo dunque $\Phi[J(b)] \cong J(b) = I_0$:

$$J(b) = A \sin \beta_0 L = I_0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{I_0}{\sin \beta_0 L} \quad (8.122)$$

Risulta quindi:

$$J(y) = \frac{I_0}{\sin \beta_0 L} \sin \beta_0 [y - (b - L)] \quad (8.123)$$

Sostituendo la (8.123) nella (8.118)

$$\begin{aligned} V_{10}^+ &= \frac{Z_{10}}{2} \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{I_0}{\sin \beta_0 L} 2j \sin \left(k_{z10} \frac{D}{2} \right) \int_{b-L}^b \sin \beta_0 [y - (b - L)] dy = \\ &= \frac{Z_{10}}{2} \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{I_0}{\sin \beta_0 L} 2j \sin \left(k_{z10} \frac{D}{2} \right) \left[-\frac{\cos \beta_0 [y - (b - L)]}{\beta_0} \right]_{y=b-L}^{y=b} = \\ &= \frac{Z_{10}}{2} \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{I_0}{\sin \beta_0 L} 2j \sin \left(k_{z10} \frac{D}{2} \right) \left[-\frac{\cos \beta_0 L}{\beta_0} + \frac{1}{\beta_0} \right] = \\ &= jZ_{10} I_0 \left[\frac{1 - \cos \beta_0 L}{\beta_0 \sin \beta_0 L} \right] \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \left(k_{z10} \frac{D}{2} \right) \end{aligned} \quad (8.124)$$

Dalla (8.124) risulta che, per $k_{z10} \frac{D}{2} = \pi$ l'eccitazione del modo TE_{10} è nulla (il corto circuito terminale viene "riportato" nel punto di alimentazione), mentre per $k_{z10} \frac{D}{2} = \frac{\pi}{2}$ abbiamo il massimo dell'eccitazione.

La potenza attiva che fluisce nella direzione positiva dell'asse z (Figura 8.10), dovuta al modo TE_{10} , è data da $P_{10} = \frac{1}{2Z_{10}} |V_{10}^+|^2$ e deve essere uguale alla potenza fornita dal cavo coassiale

$P_{ING} = \frac{1}{2} R_{ING} |I_0|^2$. Risulta quindi:

$$\frac{1}{2} R_{ING} |I_0|^2 = \frac{1}{2Z_{10}} |V_{10}^+|^2 \quad \rightarrow \quad R_{ING}(L, D) = \frac{1}{Z_{10}} \frac{|V_{10}^+|^2}{|I_0|^2} \quad (8.125)$$

Imponendo $R_{ING}(L, D) = Z_{0c}$, dove Z_{0c} è l'impedenza caratteristica del cavo coassiale di alimentazione, adatto (solo) la parte reale. D'altra parte nella trattazione fin qui fatta non abbiamo considerato solo il modo che si propaga, uno responsabile del trasporto di potenza attiva in guida.

8.8 Perdite nelle guide

Le perdite nelle guide d'onda possono essere di due tipi:

- le perdite nel materiale che riempie la guida;
- le perdite sulle pareti metalliche.

8.8.1 Perdite nel dielettrico

Si può tenere conto delle perdite nel dielettrico semplicemente considerando una costante dielettrica complessa, ossia sostituendo nella trattazione fatta fino ad ora $\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon''$. Avremo quindi:

$$k^2 = \omega^2 (\epsilon' - j\epsilon'') \mu_0$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_t^2}$$

$$Z^{TE} = \frac{\omega \mu_0}{k_z} \quad Z^{TM} = \frac{k_z}{\omega \epsilon}$$

Analizziamo qui il caso di piccole perdite, ossia il caso in cui $\epsilon' \gg \epsilon''$.

$$\text{Si ha: } k_z = \sqrt{\omega^2 (\epsilon' - j\epsilon'') \mu_0 - k_t^2} = \sqrt{\omega^2 \epsilon' \mu_0 - k_t^2 - j\omega^2 \epsilon'' \mu_0}$$

posto $k_{z0} = \sqrt{\omega^2 \epsilon' \mu_0 - k_t^2}$, se $\epsilon' \gg \epsilon''$ si ha:

$$k_z = k_{z0} \left[1 - j \frac{\omega^2 \epsilon'' \mu_0}{\omega^2 \epsilon' \mu_0 - k_t^2} \right]^{1/2} \cong k_{z0} \left[1 - j \frac{\omega^2 \epsilon'' \mu_0}{2(\omega^2 \epsilon' \mu_0 - k_t^2)} \right]$$

Per $\omega > \omega_t$, $k_{z0} = \sqrt{\omega^2 \epsilon' \mu_0 - k_t^2}$ è reale e il modo si propaga con piccole perdite. Il diagramma di Brillouin corrispondente è mostrato in Figura 8.13.

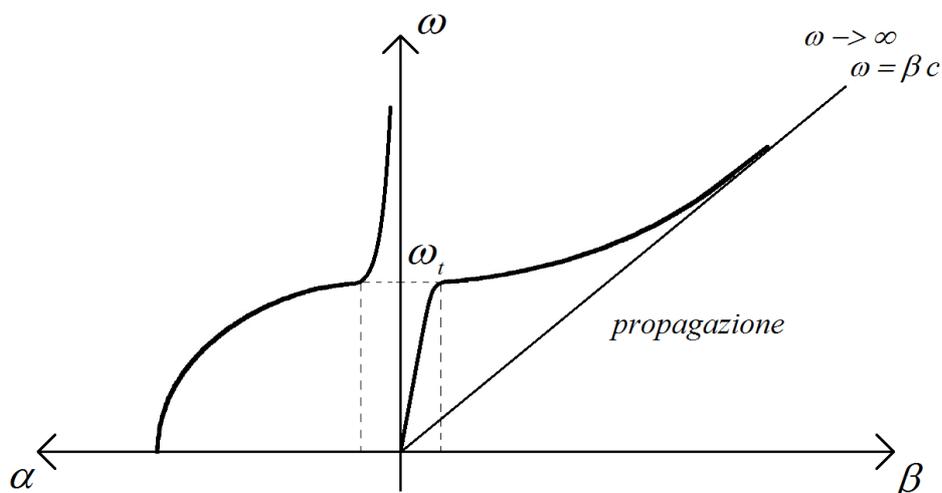


Figura 8.13: Diagramma di Brillouin di un modo generico per una guida riempita con un dielettrico con piccole perdite.

In Figura 8.13 la zona in un intorno dell'origine sull'asse delle ascisse (tra le linee tratteggiate corrispondenti alla frequenza di taglio) è "allargata" per mostrare l'andamento della curva. La parte reale del k_z rimane sostanzialmente inalterata.

Per $\omega = \omega_t$ $k_z = \sqrt{-j\omega^2 \varepsilon'' \mu_0} = \frac{1-j}{2} \sqrt{\omega^2 \varepsilon'' \mu_0}$ ovvero α e β sono uguali (Figura 8.13).

Per $\omega < \omega_t$ $k_{z0} = -j\alpha$ e $k_{z0}^2 = -k_t^2 + \omega^2 \varepsilon' \mu_0 < 0$, e ha dunque:

$$k_z \cong -j\alpha \left[1 - j \frac{\omega^2 \varepsilon'' \mu_0}{2(-\alpha^2)} \right] = -j\alpha \left[1 + j \frac{\omega^2 \varepsilon'' \mu_0}{2(k_t^2 - \omega^2 \varepsilon' \mu_0)} \right]$$

e la curva corrispondente è mostrata in Figura 8.13. Al di sotto della frequenza di taglio, in presenza di perdite, si osserva ancora una attenuazione, ma anche un fenomeno di propagazione. In questo caso l'attenuazione non è più completamente reattiva (come nel caso senza perdite), ma esiste un piccolo effetto di assorbimento di potenza attiva.

Ad eccezione che molto vicino alla frequenza di cutoff si può assumere che l'impedenza caratteristica sia quella della guida senza perdite.

8.8.2 Perdite nei conduttori

I modi TE e TM della guida priva di perdite non sono più modi della guida se il conduttore che costituisce la parete ha una conducibilità finita. Nella pratica le guide sono generalmente realizzate in rame ($\sigma = 5.88e+07$), alluminio ($\sigma = 3.53e+07$), o acciaio ($\sigma = 1e+07$).

Sappiamo che, in una guida ideale, per un campo TE risulta $E_z = 0$, mentre il campo magnetico trasverso produce una corrente elettrica superficiale longitudinale J_z sulla parte del C.E.P. Consideriamo ora una guida che presenta delle perdite ohmiche sulle pareti (conducibilità σ finita) e ipotizziamo di avere un campo TE. In prima approssimazione si può assumere di avere in questa guida lo stesso campo magnetico del caso ideale. Tuttavia, poiché la conducibilità σ non è più infinita, la corrente in questo caso non è più superficiale ma è presente anche all'interno dei conduttori ed è presente anche un campo E_z dovuto alla corrente longitudinale $J_z = \sigma E$ ossia $E_z = J_z/\sigma$. Questo contraddice l'ipotesi che in una guida con perdite possa esistere un campo TE.

Se consideriamo una guida con perdite sulle pareti è necessario estendere la soluzione del problema anche all'interno delle pareti. Si ottiene così una struttura non omogenea sul piano trasverso e il problema che ne deriva è di difficile soluzione o non risolvibile. Si può allora cercare una soluzione approssimata, ad esempio si può pensare di sostituire le condizione al contorno sul C.E.P. con una condizione differente che tenga conto delle perdite. Se le perdite sono piccole si potrebbe usare la *condizione di Leontovich* sulla parete laterale, ma anche con questa condizione al contorno si ottiene un problema non risolvibile.

Per risolvere in modo rigoroso il problema elettromagnetico relativo alla propagazione in una guida con perdite sulle pareti si può ricorrere a opportune tecniche numeriche.

In alternativa, **in caso di piccole perdite**, per determinare una soluzione approssimata soddisfacente, si può considerare la guida con pareti di buon conduttore come una piccola perturbazione del caso ideale. Ci si aspetta che le soluzioni nel caso ideale e in quello "perturbato" siano molto simili e, chiaramente, la soluzione "perturbata" tenderà a quella ideale quando la conducibilità σ tende all'infinito.

Supponiamo di inserire all'interno di una guida ideale una sorgente che ecciti solamente il modo TE₁₀. In caso di piccole perdite, la stessa sorgente produrrà nella guida "perturbata" un campo molto simile (punto per punto o comunque in zone limitate) al TE₁₀ imperturbato.

La espressione del campo elettrico del modo TE₁₀ nella guida imperturbata è la seguente:

$$\underline{E}_{t10} = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \underline{i}_y V^+ \exp(-jk_{z10}z) \quad (8.126)$$

La domanda che ci si pone a questo punto è: in cosa il campo perturbato e imperturbato sono effettivamente simili, in cosa differiscono e di quanto?

- Il campo nella guida ideale ha $E_{tang} = 0$ sulla parete mentre il campo nella guida con perdite NON può soddisfare questa condizione (in caso di piccole perdite sarà piccolo ma non nullo).
- Nella guida ideale per il modo TE₁₀ si ha $E_z = 0$. Nella guida "perturbata" $E_z \neq 0$ (in caso di piccole perdite E_z sarà piccolo ma non nullo).

Queste due differenze consentono comunque di affermare che, con ottima approssimazione, la **forma dei campi sulla sezione trasversa** nella guida perturbata può essere considerata la stessa della guida imperturbata. Esiste tuttavia una differenza molto più rilevante che consiste nel fatto che il campo nella guida con perdite si attenua nella propagazione. Ovviamente ci si riferisce principalmente ai modi che si propagano, mentre l'effetto è trascurabile per i modi in cutoff che, se eccitati, rimangono concentrati in una zona limitata della guida.

Si può tenere conto con ottima approssimazione dell'effetto delle perdite nella propagazione moltiplicando l'espressione del modo imperturbato per un fattore di attenuazione $\exp(-\alpha z)$ (per l'onda progressiva). La costante α è dovuta alla potenza che si dissipa sulle pareti della guida che non sono più di CEP. Questo suggerisce che, per il calcolo di α , è possibile effettuare un bilancio di potenza mediante il teorema di Poynting. A tal fine consideriamo un tratto di guida di lunghezza Δz e applichiamo il teorema di Poynting al volume compreso tra 0 e Δz e delimitato dalla parete laterale della guida S_L che supponiamo di buon conduttore, ossia con conducibilità finita σ , tale che $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$. La superficie S che contiene il volume V è pertanto divisa in 3 parti, $S(z = 0)$, $S(z = \Delta z)$ e S_L (Figura 8.14).

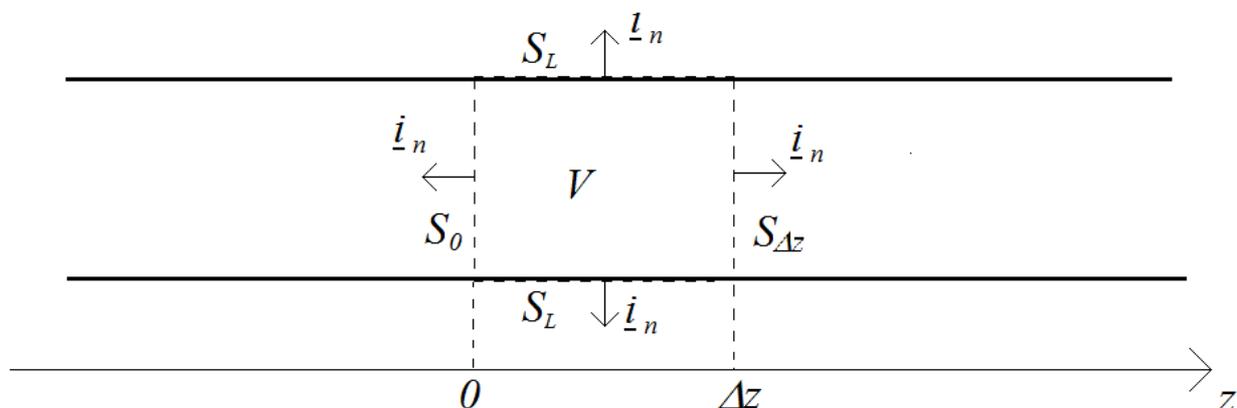


Figura 8.14.

Per il teorema di Poynting si ha dunque:

$$P(0) = P(\Delta z) + \operatorname{Re} \left[\int_{S_L} \underline{S} \cdot \underline{i}_n dS \right] \quad (8.127)$$

L'integrale a secondo membro della (8.127) rappresenta la potenza che attraversa la parete laterale della guida e cioè la potenza dissipata.

Consideriamo un modo “n” che si propaga (TE, TM o TEM non degenere) in una guida ideale in assenza di perdite, si ha:

$$\bar{P}(z) = \frac{1}{2Z_n} |V_n(z)|^2 = \frac{1}{2Z_n} |V_n^+|^2 \quad (8.128)$$

poiché $V(z) = V_n^+ \exp(-jk_{zn}z)$ con k_{zn} reale.

D'altra parte, fissato z il campo nella guida ideale e in quella con perdite sono molto simili e quindi è possibile assumere che, per una guida con perdite l'espressione della potenza $P(z)$ abbia la stessa “forma” della (8.128) ossia:

$$P(z) \equiv \bar{P}(z) = \frac{1}{2Z_n} |V_n(z)|^2 \quad (8.129)$$

Nel modello scelto (8.129) si assume la Z_n sia quella della guida ideale. Tuttavia è necessario ricordare che, nel caso di guida con perdite, $V_n(z) = V_n^+ \exp(-\alpha_c z)$ e quindi la (8.129) fornisce:

$$P(z) \approx \frac{1}{2Z_n} |V_n(z)|^2 = \frac{1}{2Z_n} |V_n(z)|^2 = \frac{1}{2Z_n} |V_n^+ \exp(-\alpha_c z)|^2 = \frac{1}{2Z_n} |V_n^+|^2 \exp(-2\alpha_c z) \quad (8.130)$$

Sostituendo la (8.130) nella (8.127) si ha:

$$\frac{1}{2Z_n} |V_n(0)|^2 = \frac{1}{2Z_n} |V_n^+|^2 \exp(-2\alpha_c \Delta z) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{S_L} \underline{E}_{\tan} \times \underline{H}_{\tan}^* \cdot \underline{i}_n dS \right] \quad (8.131)$$

dove \underline{E}_{\tan} e \underline{H}_{\tan} sono campo elettrico e magnetico tangenti alla parete laterale S_L della guida con perdite. Per calcolarli si può ricordare che il campo nella guida con perdite è molto simile al campo nella guida ideale ad eccezione del campo elettrico tangente sulle pareti, che nella guida ideale è nullo mentre nella guida con piccole perdite è piccolo ma non nullo. In altre parole, detti $\underline{E}_{\tan}^{(0)}$ e $\underline{H}_{\tan}^{(0)}$ i campi tangenti alla parete laterale in una guida ideale, possiamo assumere che $\underline{H}_{\tan} \cong \underline{H}_{\tan}^{(0)}$ mentre $\underline{E}_{\tan} \neq \underline{E}_{\tan}^{(0)}$. Per calcolare \underline{E}_{\tan} nella guida con perdite si può usare la condizione di Leontovich:

$$\underline{E}_{\tan} = \frac{1+j}{\sigma\delta} (\underline{H}_{\tan} \times \underline{i}_n) \quad (8.132)$$

Poichè, come detto, $\underline{H}_{\tan} \cong \underline{H}_{\tan}^{(0)}$ dalla (8.132) si ottiene:

$$\underline{E}_{\tan} \cong \frac{1+j}{\sigma\delta} (\underline{H}_{\tan}^{(0)} \times \underline{i}_n) \quad (8.133)$$

Abbiamo quindi collegato \underline{E}_{\tan} e \underline{H}_{\tan} della guida “perturbata” a $\underline{E}_{\tan}^{(0)}$ e $\underline{H}_{\tan}^{(0)}$ della guida ideale. La (8.131) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2Z_n} |V_n^+|^2 [1 - \exp(-2\alpha_c \Delta z)] &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1+j}{\sigma \delta} \int_{S_L} (\underline{H}_{\tan}^{(0)} \times \underline{i}_n) \times (\underline{H}_{\tan}^{(0)})^* \cdot \underline{i}_n dS \right] = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1+j}{\sigma \delta} \int_{S_L} (\underline{H}_{\tan}^{(0)} \times \underline{i}_n) \cdot (\underline{H}_{\tan}^{(0)})^* \times \underline{i}_n dS \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1+j}{\sigma \delta} \int_{S_L} |\underline{H}_{\tan}^{(0)} \times \underline{i}_n|^2 dS \right] \end{aligned} \quad (8.134)$$

$$\frac{1}{2Z_n} |V_n^+|^2 [1 - \exp(-2\alpha_c \Delta z)] = \frac{1}{2\sigma \delta} \int_{S_L} |\underline{H}_{\tan}^{(0)}|^2 dS \quad (8.135)$$

L'integrale a secondo membro della (8.135) va calcolato su tutta la superficie laterale nel tratto Δz . Se nella (8.135) $\Delta z \rightarrow 0$ si ha:

$$\exp(-2\alpha_c \Delta z) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 1 - 2\alpha_c \Delta z$$

$$\int_{S_L} |\underline{H}_{\tan}^{(0)}|^2 dS \approx \Delta z \int_C |\underline{H}_{\tan}^{(0)}|^2 dl$$

dove l'integrale a secondo membro è effettuato sulla curva C che è il contorno della superficie trasversa.

Quindi per $\Delta z \rightarrow 0$ la (8.135) diventa:

$$\frac{1}{2Z_n} |V_n^+|^2 (2\alpha_c \cancel{\Delta z}) = \frac{1}{2\sigma \delta} \cancel{\Delta z} \int_C |\underline{H}_{\tan}^{(0)}|^2 dl \quad (8.136)$$

da cui:

$$\alpha_c = \frac{1}{2\sigma \delta} \frac{\int_C |\underline{H}_{\tan}^{(0)}|^2 dl}{\frac{1}{Z_n} |V_n^+|^2} \quad (8.137)$$

Nella (8.137) $\underline{H}_{\tan}^{(0)}$ sarà proporzionale a V^+ , che è un parametro di ampiezza e quindi l'espressione trovata per α_c sarà indipendente da V^+ .

Il campo magnetico tangente $\underline{H}_{\tan}^{(0)}$ ha in generale due componenti, una trasversa e una longitudinale (presente solo per i modi TE):

$$\underline{H}_{\tan}^{(0)} = (\underline{H}_t \cdot \underline{i}_c) \underline{i}_c + H_z \underline{i}_z = I^+ (\underline{h} \cdot \underline{i}_c) \underline{i}_c + H_z \underline{i}_z \quad (8.138)$$

Per i “modi” TM (o TEM) la componente H_z è nulla, quindi:

$$\alpha_c = \frac{1}{2\sigma \delta} \frac{\int_C |I^+|^2 |\underline{h} \cdot \underline{i}_c|^2 dl}{\frac{1}{Z_n} |V_n^+|^2} = \frac{1}{2\sigma \delta} \frac{1}{Z_n} \int_C |\underline{h} \cdot \underline{i}_c|^2 dl \quad (8.139)$$

Analizziamo la variazione della (8.139) al variare della frequenza:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \rightarrow \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$$

Assumiamo che la conducibilità σ sia costante nella banda di frequenza del modo.

L'integrale $\int_C |\underline{h} \cdot \underline{i}_c|^2 dl$ è indipendente dalla frequenza.

Quindi la dipendenza di α_c dalla frequenza sarà del tipo:

$$\alpha_c \approx \frac{1}{\delta(\omega) Z_n(\omega)} \approx \frac{\omega \sqrt{\omega}}{k_z} \approx \frac{\omega \sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_t^2}} \quad (8.140)$$

Quindi, per $\omega \rightarrow \omega_t$, $\alpha_c \rightarrow \infty$ e, per $\omega \rightarrow \infty$, $\alpha_c \rightarrow \infty$ (Figura 8.15)

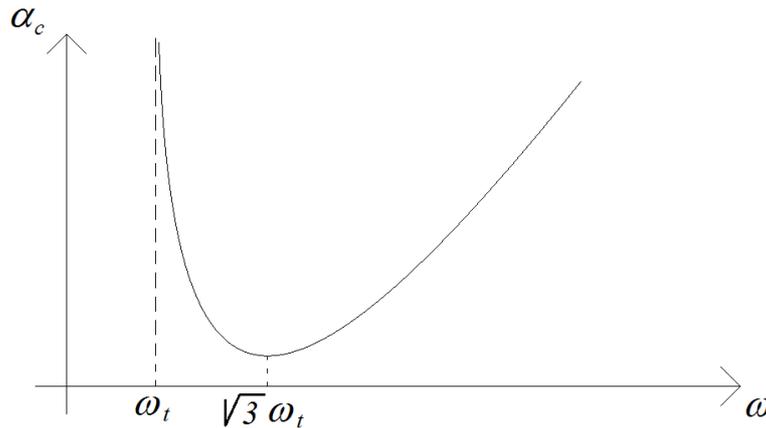


Figura 8.15. Andamento della attenuazione al variare della frequenza per i “modi” TM.

Per i “modi” TM in prossimità della frequenza di taglio l’attenuazione è molto forte e la guida è inutilizzabile mentre l’attenuazione è minima per $\omega = \sqrt{3} \omega_t$.

Per i modi TE nella (8.138) abbiamo sia la componente trasversa che quella longitudinale del campo magnetico per cui:

$$\alpha_c = \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{\int_C |I^+|^2 |\underline{h} \cdot \underline{i}_c|^2 dl + \int_C |H_z|^2 dl}{\frac{1}{Z_n} |V_n^+|^2} = \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{1}{Z_n} \left[\int_C |\underline{h} \cdot \underline{i}_c|^2 dl + \int_C \frac{|H_z|^2}{|V_n^+|^2} dl \right] \quad (8.141)$$

$$\alpha_c = \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{1}{Z_n} \left[\int_C \left| \frac{\partial \Phi_0}{\partial C} \right|^2 dl + \int_C \frac{|H_z|^2}{|V_n^+|^2} dl \right] \quad (8.142)$$

La dipendenza dalla frequenza della (8.142) è del tipo:

$$\alpha_c \approx \left[A \frac{\sqrt{\frac{\omega}{\omega_t} - 1}}{\sqrt{\frac{\omega}{\omega_t}}} + B \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega}{\omega_t}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^2 - 1}} \right] \quad (8.143)$$

con A e B costanti con la frequenza.

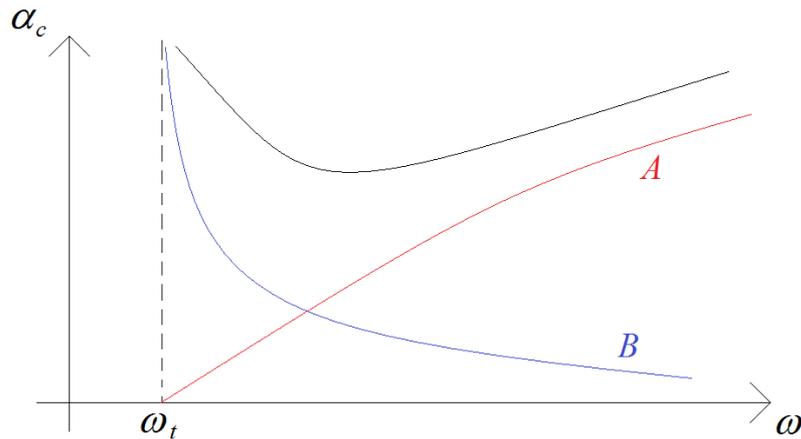


Figura 8.16. Andamento della attenuazione al variare della frequenza per i “modi” TE (curva nera).

L’andamento della attenuazione per i “modi” TE è mostrato in Figura 8.16. Il contributo “A” dipende da $\frac{\partial \Phi_0}{\partial C}$ per cui, quando $\frac{\partial \Phi_0}{\partial C} = 0$, il contributo “A” è nullo e l’attenuazione diminuisce al crescere della frequenza. Questa condizione si verifica per il modo TE₀₁ della guida circolare, della quale tuttavia non è il modo fondamentale.

Nella trattazione effettuata fino ad ora abbiamo calcolato le perdite nel dielettrico in una guida con pareti di conduttore elettrico perfetto, e abbiamo calcolato le perdite nei conduttori in una guida con un dielettrico privo di perdite. E’ però evidente che in una guida reale saranno presenti contemporaneamente sia le perdite nel dielettrico sia le perdite nei conduttori. In entrambi i casi abbiamo ipotizzato che le perdite siano piccole, ossia che per il dielettrico che riempie la guida sia $\epsilon' \gg \epsilon''$ e che le pareti laterali siano di buon conduttore (generalmente rame, alluminio, acciaio).

Nella pratica può capitare che α_{diel} e α_c abbiano valori confrontabili e, in questo caso, assumiamo che l’attenuazione complessiva α_{TOT} sia la somma delle due attenuazioni ossia $\alpha_{TOT} \approx \alpha_{diel} + \alpha_c$. Chiaramente se $\alpha_{diel} \gg \alpha_c$ possiamo assumere che $\alpha_{TOT} \approx \alpha_{diel}$, mentre se $\alpha_c \gg \alpha_{diel}$ allora $\alpha_{TOT} \approx \alpha_c$.

9.9 Identificazione di un diaframma in guida d’onda

Consideriamo un diaframma in guida d’onda rettangolare, ossia una apertura di forma generica praticata in un setto di conduttore elettrico perfetto nella parete trasversa della guida (Figura 8.17). Per semplicità ipotizziamo che il setto sia infinitamente sottile. Supponiamo che la frequenza operativa sia tale da consentire la propagazione del solo modo fondamentale TE₁₀ della guida rettangolare. Tuttavia, il solo modo TE₁₀ non può soddisfare le condizioni al contorno in corrispondenza del setto con l’apertura. In particolare, questo tipo di discontinuità produce una riflessione e una trasmissione, ma è anche “sorgente” di modi superiori in cutoff. In alte parole, sulla superficie di conduttore elettrico perfetto del diaframma si inducono delle correnti elettriche (o equivalentemente l’apertura sul setto può essere sostituito con delle correnti magnetiche equivalenti) che in generale eccitano tutti i modi.

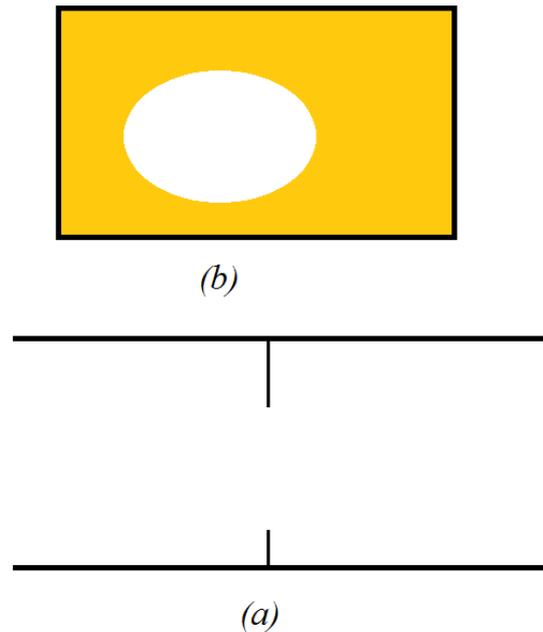


Figura 8.17. Diaframma di forma generica in guida d'onda: (a) sezione longitudinale; (b) sezione trasversa.

Sulla parete di C.E.P del diaframma il campo elettrico tangente è nullo. Sulla apertura il campo elettrico tangente sarà continuo. Di conseguenza, all'interfaccia, in corrispondenza del diaframma, il campo elettrico sulla sezione trasversa è continuo. D'altra parte, il campo magnetico è continuo sull'apertura ma, per la presenza di correnti elettriche superficiali, è discontinuo sulla parete di conduttore elettrico perfetto del diaframma.

In termini di modi, se ipotizziamo che il diaframma, infinitamente sottile, sia posizionato a $z = 0$, possiamo dire che le espansioni modali del campo elettrico immediatamente a destra (per $z = 0^+$) e immediatamente a sinistra (per $z = 0^-$) del diaframma sono uguali.

In particolare il campo elettrico del modo TE_{10} è continuo attraverso il diaframma. In questo caso una ammettenza in parallelo garantisce la continuità del campo elettrico trasverso e la discontinuità del campo magnetico trasverso. Pertanto un diaframma di conduttore elettrico perfetto (ossia in assenza di perdite) può essere rappresentato, dal punto di vista circuitale, con una ammettenza immaginaria pura in parallelo (che garantisce la stessa $V(z)$ a destra e a sinistra dell'ammettenza). L'ammettenza sarà induttiva o capacitiva a seconda della forma del diaframma (figura 8.19).

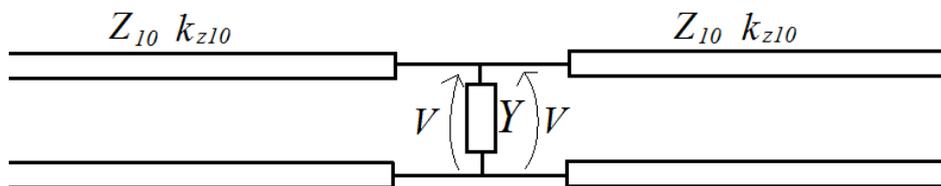


Figura 8.18. Circuito equivalente di un diaframma in guida d'onda.

Si osservi che il circuito equivalente in linea di trasmissione mostrato in figura 8.18 può essere utilizzato solamente per calcolare il modo fondamentale. Pertanto questo circuito consente di calcolare il campo elettrico in guida solamente nelle regioni dove esiste il solo modo fondamentale e cioè ad una distanza dal diaframma sufficiente da garantire che tutti i modi superiori in cutoff

eccitati dal diaframma abbiano ampiezze trascurabili. Solitamente si può assumere che a distanza maggiore di un quarto di lunghezza d'onda guidata i modi superiori si siano attenuati.

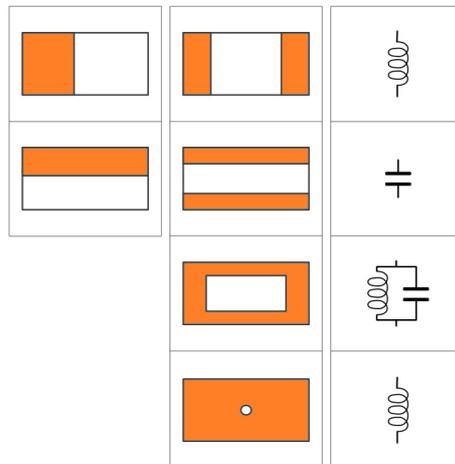


Figura 8.19. Iridi in guida d'onda e circuito equivalente.

8.10 Accoppiamento tramite fori

L'utilizzo di fori consente di trasferire potenza tra due strutture guidanti o tra una struttura guidante ed una cavità in modo "controllabile". Consideriamo un foro, o una apertura, in uno schermo infinitamente sottile di conduttore elettrico perfetto. Per il teorema di equivalenza (Appendice II) questo foro (o apertura) è equivalente a due distribuzioni opposte di corrente magnetica situate in corrispondenza del foro sulla superficie dello schermo C.E.P. (Figura 8.20). In altre parole, la situazione "equivalente" consiste nel "metallizzare il foro" e sostituirlo con delle correnti magnetiche equivalenti che irradiano in presenza dello schermo di conduttore elettrico perfetto.

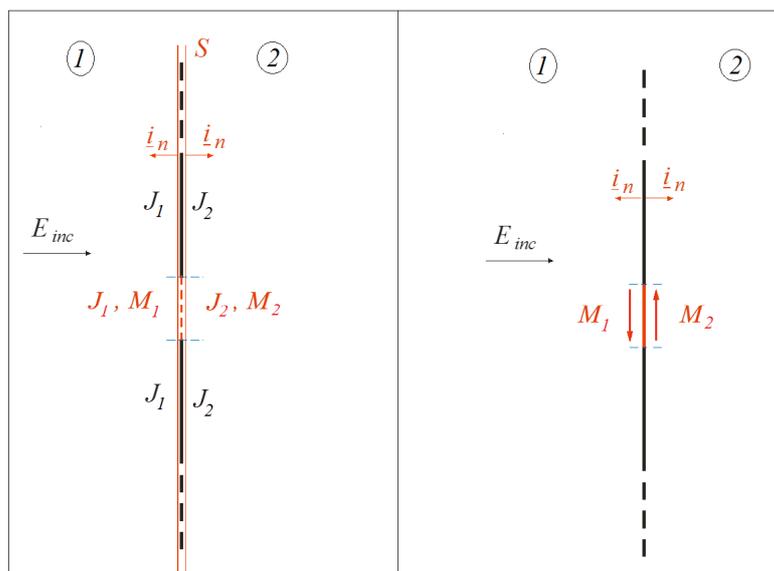


Figura 8.20. Apertura in uno schermo di conduttore elettrico perfetto: a sinistra è mostrata l'applicazione del teorema di equivalenza e a destra la situazione equivalente con il foro "metallizzato".

Le correnti magnetiche ai lati del foro sono uguali ed opposte (Figura 8.20) e dipendono dal campo elettrico tangente presente in corrispondenza del foro:

$$\underline{M}_1 = -\underline{i}_n \times \underline{E}_{tg} \quad (8.144)$$

con $\underline{M}_2 = -\underline{M}_1$ perchè la normale \underline{i}_n su lati opposti del foro è opposta mentre il campo elettrico tangente sul foro è continuo.

Se il foro è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda la distribuzione di corrente magnetica superficiale può essere sostituita da una sorgente dipolare posta al centro del foro. In particolare si ha un dipolo magnetico di ampiezza \underline{M}_0 e, in generale, un dipolo elettrico ortogonale allo schermo di ampiezza \underline{J}_0 , che tiene conto delle eventuali correnti magnetiche ad anello. Se indichiamo con "zona 1" la regione alla sinistra dello schermo in cui è presente un mezzo omogeneo di costante dielettrica ϵ_1 , e con "zona 2" la regione alla destra dello schermo in cui è presente un mezzo omogeneo di costante dielettrica ϵ_2 (Figura 8.20), si ha:

$$\underline{M}_1 = -\underline{M}_2 \quad (8.145)$$

$$\frac{\underline{J}_1}{\epsilon_1} = -\frac{\underline{J}_2}{\epsilon_2} \quad (8.146)$$

8.10.1 Teoria di Bethe

Supponiamo che nella zona "1" ci sia un campo ($\underline{E}_g, \underline{H}_g$) che "incide" sul foro. Questo campo è detto "campo generatore" ed è il campo nella regione "1" in assenza del foro (ovvero con il foro metallizzato). Se il foro è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda si suppone (approssimazione di Bethe) che le correnti equivalenti sul foro siano proporzionali al solo campo generatore. In altre parole si suppone che la presenza del foro non perturbi i campi nel mezzo "1". Questa approssimazione è l'opposto di quella di Kirchhoff che ipotizza un foro grande rispetto alla lunghezza d'onda.

La teoria di Bethe afferma che, se $\epsilon_1 = \epsilon_2$, e se il foro è circolare di raggio r_0 (o se \underline{H}_g è un vettore lungo una delle direzioni di simmetria del foro) si può porre:

$$\begin{aligned} \underline{M}_2 &= -j\omega\mu_0\alpha_m \left[\underline{H}_g \right]_{tang} \\ \underline{J}_2 &= j\omega\epsilon_0\alpha_e \left[\underline{E}_g \right]_n \end{aligned} \quad (8.147)$$

dove i pedici "tang" e "n" indicano la componente tangente e la componente normale allo schermo in cui è praticato il foro e, per un foro circolare, $\alpha_m = \frac{4}{3}r_0^3$ e $\alpha_e = -\frac{2}{3}r_0^2$.

Esempio: foro nella parete trasversa di una guida d'onda.

Consideriamo una guida rettangolare interrotta da un setto C.E.P. contenente un foro (Figura 8.21) di dimensioni piccole rispetto alla lunghezza d'onda, di raggio r_0 , posizionato in $z = 0$, e in alle coordinate (x_0, y_0) sulla sezione trasversa. Vogliamo calcolare il coefficiente di riflessione e di trasmissione per un modo TE_{10} che incide sullo schermo da sinistra (regione "1").

Possiamo sostituire il foro con una coppia di dipoli per lato. In particolare, poichè per il TE_{10} si ha $E_z = 0$, in questo caso non è presente il dipolo elettrico ma solo il dipolo magnetico \underline{M}_2 , che dipende dal campo magnetico generatore tangente al foro e, si ha $\underline{M}_1 = -\underline{M}_2$.

Se l'onda incidente ha ampiezza V^+ , il campo magnetico tangente sul foro, calcolato in assenza del foro (cioè sullo schermo di conduttore elettrico perfetto senza il foro) è dato da:

$$\underline{H}_g|_{\text{tang}} = \frac{2V^+}{Z_{10}} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \underline{i}_x \quad (8.148)$$

e dunque, per la prima delle (8.147), si ha:

$$\underline{M}_2 = -j\omega\mu_0\alpha_m \frac{2V^+}{Z_{10}} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \underline{i}_x \quad (8.149)$$

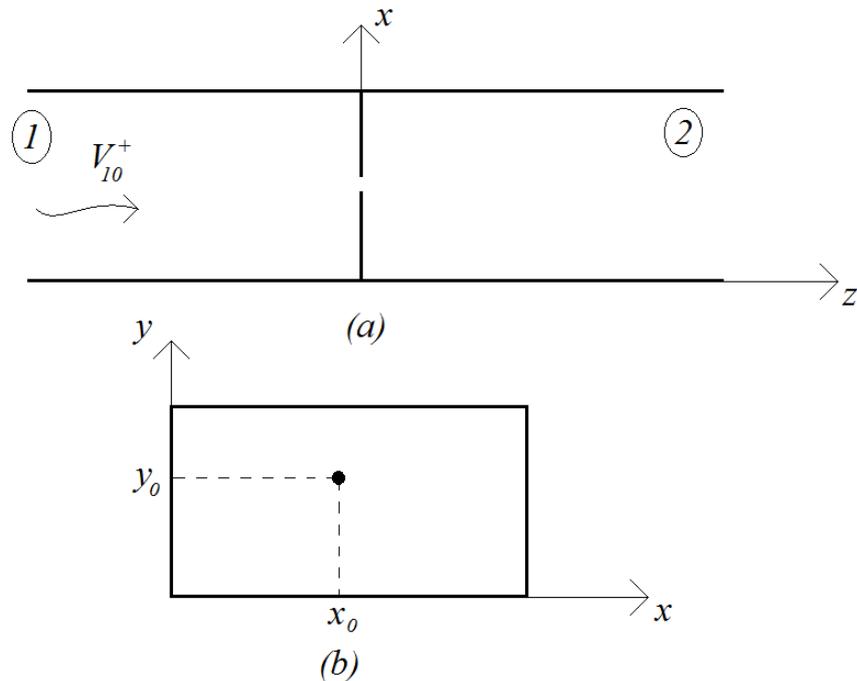


Figura 8.21. Foro nella parete trasversa di una guida d'onda rettangolare: (a) sezione longitudinale; (b) sezione trasversa.

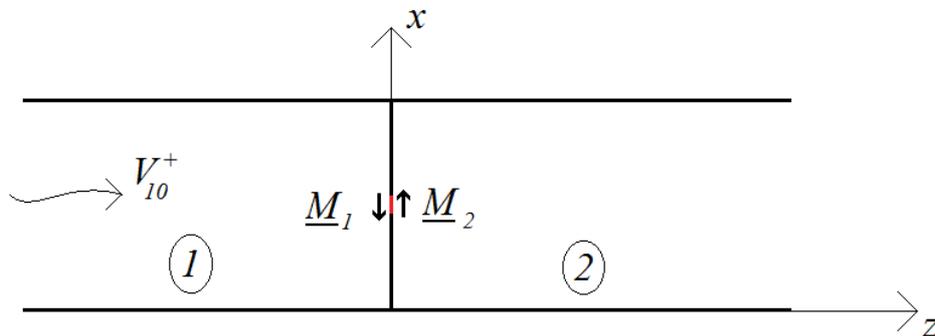


Figura 8.22. Il foro è equivalente a due correnti magnetiche opposte e di uguale ampiezza che irradiano in presenza dello schermo C.E.P.

Applicando il teorema delle immagini alla situazione mostrata in Figura 8.22, eliminiamo lo schermo di C.E.P. e raddoppiamo le correnti magnetiche (Figura 8.23). Possiamo dunque calcolare il coefficiente A_{10}^+ del TE₁₀ trasmesso nella “regione 2” tramite il dipolo magnetico $2\underline{M}_2$ che irradia in una guida indefinita e priva di ostacoli, e il coefficiente A_{10}^- del campo “diffuso dal foro” nella

“regione 1” tramite il dipolo magnetico $2\underline{M}_1$. Possiamo dunque usare le espressioni (8.110) e (8.111). Ovviamente $2\underline{M}_1$ e $2\underline{M}_2$ sono uguali in modulo e opposte.

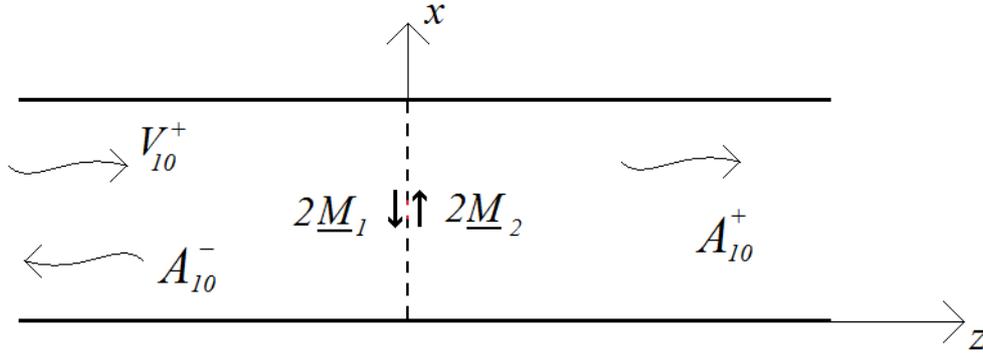


Figura 8.23. Situazione presente dopo l'applicazione del teorema delle immagini.

Quindi, per il calcolo del campo trasmesso A_{10}^+ nella regione “2” si ha come sorgente la corrente magnetica

$$\underline{M}^{(2)} = 2\underline{M}_2 = -2j\omega\mu_0\alpha_m [\underline{H}_g]_{\text{tang}} = -2j\omega\mu_0\alpha_m \frac{2V^+}{Z_{10}} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \underline{i}_x \quad (8.150)$$

L'ampiezza del TE_{10} trasmesso è pertanto (8.110):

$$\begin{aligned} A_{10}^+ &= -\frac{1}{2} \int (-\underline{M}^{(2)} \cdot \underline{h}_{10}^-) dV = \frac{1}{2} \int (\underline{M}^{(2)} \cdot \underline{h}_{10}^-) dV \\ &= \frac{1}{2} \int \underline{M}^{(2)} \cdot \underline{h}_{10}^- \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z) dV = \frac{1}{2} \underline{M}^{(2)}(x_0, y_0) \cdot \underline{h}_{10}^-(x_0, y_0) = \\ &= -\frac{1}{2} \underline{M}^{(2)}(x_0, y_0) \cdot \underline{h}_{10}^+(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (8.151)$$

Poichè il foro è molto piccolo rispetto alla lunghezza d'onda nella (8.151) abbiamo considerato una sorgente dipolare impulsiva in $(x, y, z) = (x_0, y_0, 0)$. Sostituendo la (8.150) nella (8.151) si ottiene:

$$\begin{aligned} A_{10}^+ &= -\frac{1}{2} \underline{M}^{(2)}(x_0, y_0) \cdot \underline{h}_{10}^+(x_0, y_0) = \\ &= -\frac{1}{2} \left[-2j\omega\mu_0\alpha_m \frac{2V^+}{Z_{10}} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \underline{i}_x \right] \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \underline{i}_x \right] = \\ &= \frac{j\omega\mu_0\alpha_m}{Z_{10}} \frac{4}{ab} \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) V^+ = \frac{4jk_{z10}\alpha_m}{ab} \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) V^+ \end{aligned} \quad (8.152)$$

L'ampiezza del TE_{10} retro-diffuso dal foro nella regione “1” A_{10}^- (Figura 8.202) è uguale ad A_{10}^+ , perché $\underline{M}^{(1)} = -\underline{M}^{(2)}$ e $\underline{h}_{10}^- = -\underline{h}_{10}^+$ (8.111):

$$A_{10}^- = \frac{1}{2} \int (\underline{M}^{(1)} \cdot \underline{h}_{10}^+) dV = \frac{1}{2} \int [-\underline{M}^{(2)} \cdot (-\underline{h}_{10}^+)] dV = \frac{1}{2} \int [\underline{M}^{(2)} \cdot \underline{h}_{10}^+] dV = A_{10}^+ \quad (8.153)$$

In conclusione il coefficiente di trasmissione nella regione “2” è dato da:

$$T = \frac{A_{10}^+}{V^+} = \frac{4jk_{z10}\alpha_m}{ab} \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \quad (8.154)$$

Per quanto riguarda il coefficiente di riflessione occorre aggiungere al campo retro-diffuso dal foro il campo riflesso dallo schermo di conduttore elettrico perfetto, che avrà ampiezza $-V^+$. Si ha pertanto:

$$\Gamma = \frac{-V^+}{V^+} + \frac{A_{10}^-}{V^+} = -1 + \frac{4jk_{z10}\alpha_m}{ab} \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \quad (8.155)$$

Dalla (8.155) è evidente che $|\Gamma| > 1$ ossia il modello del foro ottenuto dalla teoria di Bethe viola il principio di causalità. Questa conclusione è abbastanza ovvia alla luce dell'approssimazione introdotta nella teoria di Bethe. Infatti, il fatto di usare solamente il campo generatore, che non dipende dal foro (cioè non dipende dal campo sul foro), per calcolare la corrente magnetica sul foro (che invece per il teorema di equivalenza dipende dal campo sul foro), equivale a non tenere conto della presenza del foro al fine del trasferimento di potenza tra la regione "1" e la regione "2".

Nonostante questa approssimazione, i risultati della teoria di Bethe possono essere utilizzati per ottenere dei risultati accettabili, ma con alcune precisazioni. In effetti, il valore del coefficiente di trasmissione T ottenuto dalla teoria di Bethe (8.154), può essere utilizzato come una buona approssimazione. Inoltre, è possibile ottenere delle informazioni utili anche a partire dalla (8.155), che pure non soddisfa il principio di causalità. A tal fine osserviamo che, poiché $A_{10}^- = A_{10}^+$, il foro equivale ad una ammettenza in parallelo che indichiamo con Y (normalizzata) (Figura 8.24).

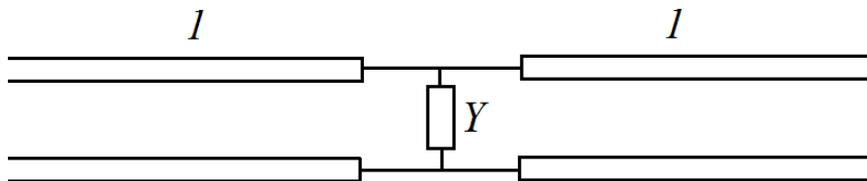


Figura 8.24. Circuito equivalente del foro in una parete trasversale di una guida rettangolare.

L'ammettenza Y è immaginaria pura perché il diaframma in cui è praticato il foro è di conduttore elettrico perfetto e quindi non genera dissipazione di potenza. Vediamo dunque qual è il significato della approssimazione introdotta con la teoria di Bethe in termini di circuito equivalente.

Il coefficiente di riflessione per il circuito in Figura 8.24 è dato da:

$$\Gamma = \frac{1 - (1+Y)}{1 + (1+Y)} = \frac{-Y}{2+Y} = \frac{-1}{1 + \frac{2}{Y}} \quad (8.156)$$

Se $|Y| \gg 1$ (prossimo ad un corto circuito) possiamo approssimare il coefficiente di riflessione al primo ordine come:

$$\Gamma = \frac{-1}{1 + \frac{2}{Y}} = -\left(1 + \frac{2}{Y}\right)^{-1} \approx -\left(1 - \frac{2}{Y}\right) = -1 + \frac{2}{Y} \quad (8.157)$$

Poichè Y è immaginaria pura otteniamo anche in questo caso che $|\Gamma| > 1$, ossia l'approssimazione al primo ordine introdotta dalla (8.157) per $|Y| \gg 1$ equivale alla approssimazione di Bethe. D'altra parte la forma della espressione (8.157) è identica alla forma della (8.155) e per confronto, ossia eguagliando i coefficienti di riflessione ottenuti con la (8.155) e con la (8.157), si ha:

$$Y = -j \frac{ab}{4k_{z10} \alpha_m \sin^2 \left(\frac{\pi x_0}{a} \right)} \quad (8.158)$$

Dalla (8.158) risulta che il foro è equivalente ad una capacità in parallelo.

Abbiamo dunque ricavato una espressione di Y a partire dal confronto tra due trattazioni ottenute facendo la stessa approssimazione. Se calcoliamo il coefficiente di riflessione mediante la formula esatta (8.156) utilizzando la Y fornita dalla (8.158), troviamo $|\Gamma| < 1$, che rispetta il principio di causalità garantendo il corretto trasporto di Potenza attraverso il foro.

8.10.2 Teoria di Collin

La teoria di Bethe non consente di rispettare la conservazione della potenza. Inoltre non tiene conto dell'ambiente in cui i dipoli irradiano e infatti richiede la perfetta simmetria delle strutture. Nella teoria di Bethe il principio di causalità non è soddisfatto perchè i dipoli dipendono solo dal campo generatore e dalla geometria del foro e, poichè il campo generatore è calcolato in assenza del foro, cioè con il foro "metallizzato", si perde il "connessione" tra le due zone collegate dal foro. Una trattazione più accurata, chiamata teoria di Collin, può essere ottenuta includendo tra le cause dei dipoli \underline{J} ed \underline{M} equivalenti al foro anche i "campi di reazione" ovvero i campi prodotti dai dipoli stessi. In altre parole, occorre tenere conto del fatto che le correnti magnetiche in corrispondenza dei dipoli dipendono anche dal campo in corrispondenza sul foro.

Nella teoria di Collin le espressioni (8.147) vengono pertanto modificate come segue:

$$\begin{aligned} \underline{M}_2 &= -j\omega\mu_0\alpha_m \left[\underline{H}_g + \underline{H}_r^{(1)}(\underline{M}_1) - \underline{H}_r^{(2)}(\underline{M}_2) \right]_{\text{tang}} \\ \underline{J}_2 &= j\omega\epsilon_0\alpha_2 \left[\underline{E}_g + \underline{E}_r^{(1)}(\underline{J}_1) - \underline{E}_r^{(2)}(\underline{J}_2) \right]_n \end{aligned} \quad (8.159)$$

Esempio: foro in una parete trasversa di una guida d'onda

Per un calcolo accurato dei dipoli elettrico e magnetico in corrispondenza del foro occorre conoscere sia il campo incidente sul foro, in assenza del foro, sia i campi di reazione prodotti dal foro. Ne consegue che la teoria di Collin, contrariamente alla teoria di Bethe, rispetta il principio di conservazione della potenza perchè ora esiste un collegamento "fisico" tra le zone "1" e "2".

Sia dunque \underline{M}_2 la corrente sul foro nella regione "2" relativa alla teoria di Collin. Ipotizzando che anche nella teoria di Collin \underline{h}_{10} sia allineato con \underline{M}_2 , otteniamo:

$$\underline{A}_{10}^+ = \frac{1}{2} \int 2\underline{M}_2 \cdot \underline{h}_{10}^- \delta(r-r_0) dV_0 = \underline{M}_2 \cdot \underline{h}_{10}^- = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \underline{M}_2 \quad (8.160)$$

A questo punto possiamo calcolare i campi di reazione:

$$\begin{aligned}\underline{H}_r^{(1)} &= \frac{A_{10}^- \underline{h}_{10}^-}{Z_{10}} = \frac{A_{10}^- (-\underline{h}_{10}^+)}{Z_{10}} = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) M_2 \frac{1}{Z_{10}} \left[-\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \right] = \\ &= \frac{2}{ab} \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \frac{M_2}{Z_{10}}\end{aligned}\quad (8.161)$$

$$\begin{aligned}\underline{H}_r^{(2)} &= \frac{A_{10}^+ \underline{h}_{10}^+}{Z_{10}} = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) M_2 \frac{1}{Z_{10}} \left[\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \right] = \\ &= -\frac{2}{ab} \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \frac{M_2}{Z_{10}}\end{aligned}\quad (8.162)$$

Ossia il campo di reazione nella regione "2" è opposto a quello nella regione "1": $\underline{H}_r^{(2)} = -\underline{H}_r^{(1)}$.

Risulta dunque:

$$\begin{aligned}\underline{M}_2 &= -j\omega\mu_0\alpha_m \left[\underline{H}_g + \underline{H}_r^{(1)}(\underline{M}_1) - \underline{H}_r^{(2)}(\underline{M}_2) \right]_{\text{tang}} = \\ &= -j\omega\mu_0\alpha_m \left[\underline{H}_g + 2\underline{H}_r^{(1)}(\underline{M}_1) \right]_{\text{tang}} = \\ &= -j\omega\mu_0\alpha_m \left[\underline{H}_g + \frac{4}{abZ_{10}} \underline{M}_2 \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \right]_{\text{tang}} = \\ &= -j\omega\mu_0\alpha_m \underline{H}_g \Big|_{\text{tang}} - \frac{4j\omega\mu_0\alpha_m}{abZ_{10}} \underline{M}_2 \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \Big|_{\text{tang}}\end{aligned}\quad (8.163)$$

da cui:

$$\underline{M}_2 = \underline{M}_2^{(Bethe)} - \frac{4j\omega\mu_0\alpha_m}{abZ_{10}} \underline{M}_2 \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right)\quad (8.164)$$

esplicitando rispetto alla corrente M_2 si ottiene:

$$\begin{aligned}\underline{M}_2 \left(1 + \frac{4jk_{z10}\alpha_m}{ab} \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \right) &= \underline{M}_2^{(Bethe)} \\ \underline{M}_2 &= \frac{\underline{M}_2^{(Bethe)}}{\left(1 + \frac{4jk_{z10}\alpha_m}{ab} \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \right)}\end{aligned}\quad (8.165)$$

Quest'ultimo valore di M_2 può essere utilizzato per calcolare il coefficiente di riflessione. Si ha:

$$\Gamma = -1 + A_{10}^- = -1 + \frac{\frac{4jk_{z10}\alpha_m}{ab} \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right)}{\left(1 + \frac{4jk_{z10}\alpha_m}{ab} \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \right)}\quad (8.166)$$

ossia $|\Gamma| < 1$.

In termini di circuito equivalente si ha invece: $\Gamma = \frac{-1}{1 + \frac{2}{Y}}$ e, per confront con la (8.166) si ottiene:

$$Y = -j \frac{ab}{4k_{z10} \alpha_m \sin^2 \left(\frac{\pi x_0}{a} \right)}$$

che è identica alla (8.158).

8.11 Componenti in guida d'onda

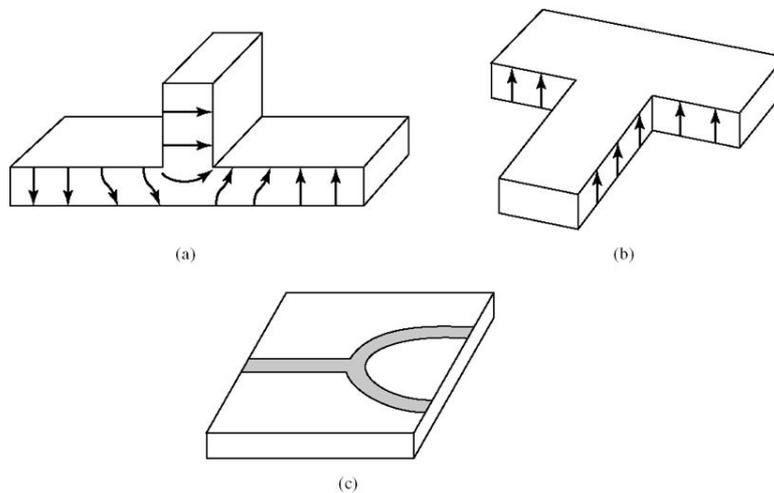


Figure 7.5 (p. 315)

Various T-junction power dividers. (a) *E* plane waveguide T. (b) *H* plane waveguide T. (c) Microstrip T-junction.

Microwave Engineering, 3rd Edition by David M. Pozar
 Copyright © 2004 John Wiley & Sons

Figura 8.25. Divisori di Potenza in guida d'onda (a) e (b).

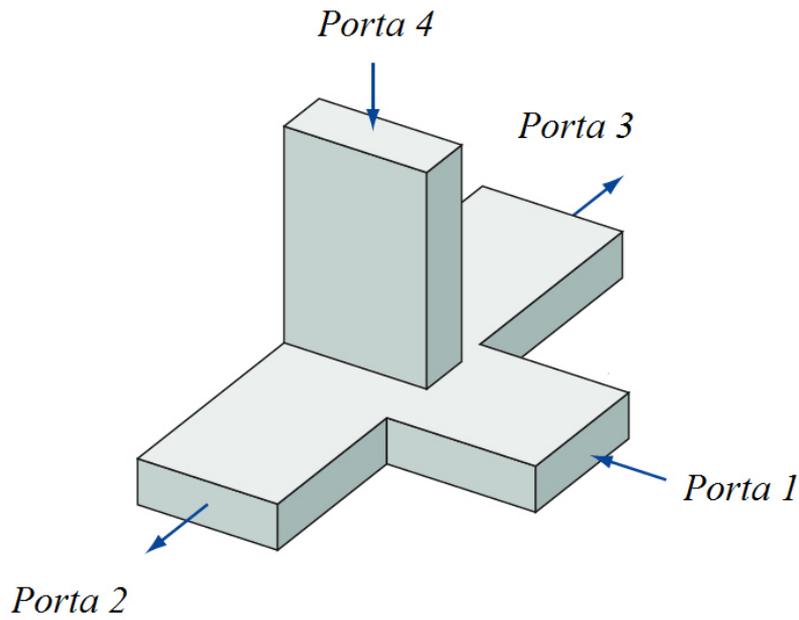


Figura 8.26. Giunzione ibrida a 180° in guida d'onda rettangolare. Configurazione senza circuito di adattamento alle porte 1 e 4.

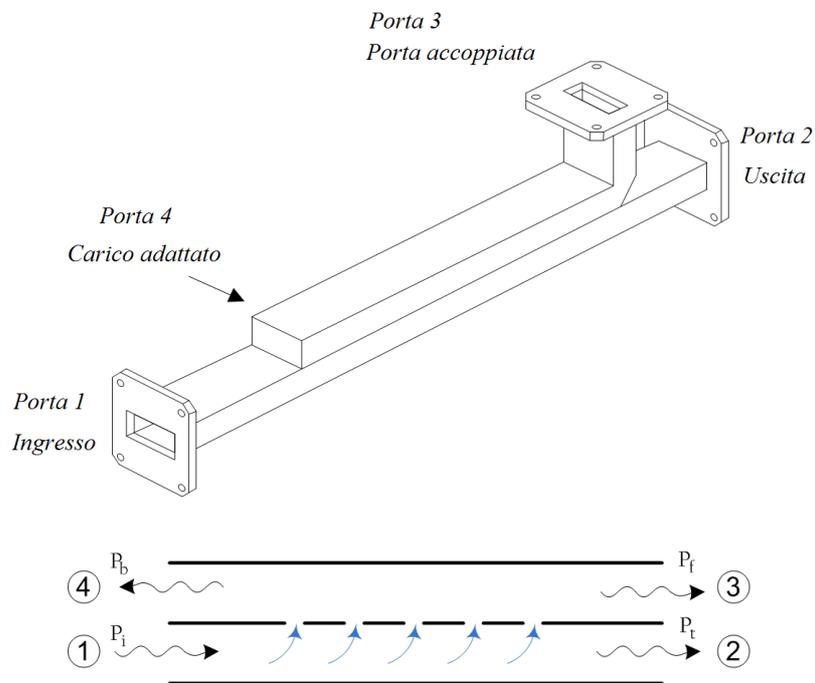


Figura 8.27. Accoppiatore direzionale in guida d'onda.

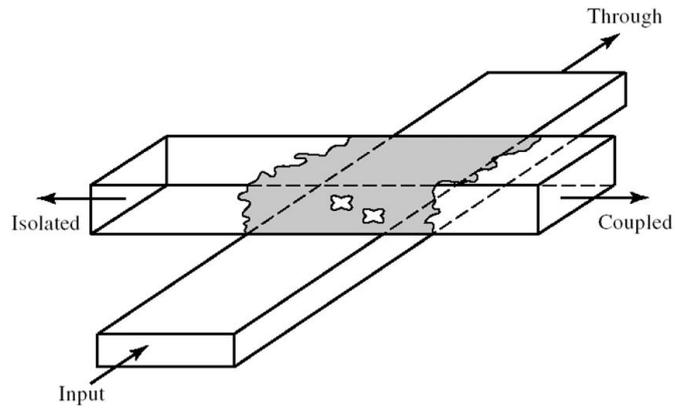


Figure 7.51 (p. 362)
The Moreno cross-guide coupler.

Microwave Engineering, 3rd Edition by David M. Pozar
Copyright © 2004 John Wiley & Sons

Figura 8.28. Accoppiatore direzionale in guida d'onda.

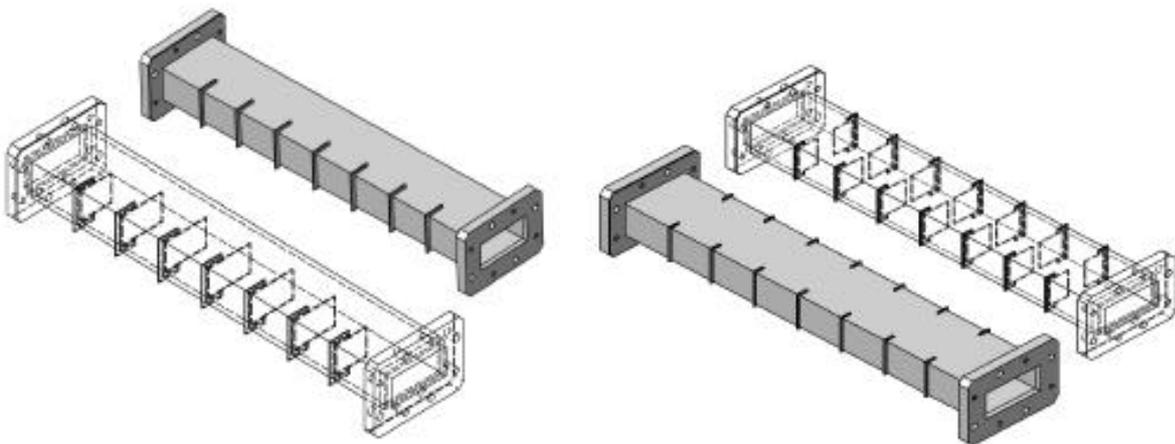


Figura 8.29. Filtro passabanda a risuonatori accoppiati tramite iridi induttivi.

8.12 Mode Matching

La tecnica del “mode matching” è una tecnica numerica per la formulazione e soluzione di problemi di valori al contorno in elettromagnetismo. Questa tecnica è utile quando la geometria della struttura può essere identificata come la composizione di due o più regioni in cui esiste una soluzione ben definita delle equazioni di Maxwell che soddisfa tutte le condizioni al contorno ad eccezione che alla giunzione di separazione tra le varie regioni. La tecnica del mode matching viene utilizzata per la soluzione di problemi legati alla presenza di discontinuità in guida d’onda (o in microstriscia) e per la soluzione di problemi agli autovalori.

Si procede essenzialmente attraverso due passi:

- 1) Si espandono i campi incogniti nelle singole regioni in termini di modi.
- 2) Si impongono le condizioni di continuità dei campi alle interfacce di separazione tra le varie regioni.

Dato che la forma funzionale dei modi è nota il problema consiste nel determinare i coefficienti modali nelle varie regioni. In particolare la tecnica del “mode matching” sfrutta l’ortogonalità dei modi nelle varie regioni e conduce ad un sistema di infinite equazioni lineari (da troncature opportunamente), la cui soluzione fornisce i coefficienti incogniti.

Il mode matching può essere applicato per l’analisi di strutture come quelle mostrate in figura 8.25 e 8.26. Di seguito sono mostrati altri esempi di strutture a cui può essere applicato il mode matching:

- 1) Cambio di altezza in guida d’onda rettangolare (le due guide hanno la stessa larghezza a), mostrato in figura 8.30a.
- 2) Cambio di larghezza in guida d’onda rettangolare (le due guide hanno la stessa altezza b), mostrato in figura 8.30b.
- 3) Biforcazione in guida d’onda rettangolare (la struttura ha larghezza a), mostrato in figura 8.30c.

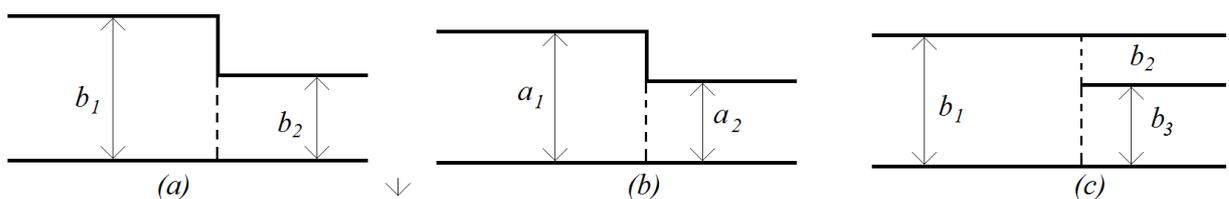


Figura 8.30.

Come esempio consideriamo il caso 2) (che prende il nome di discontinuità sul piano H). La struttura da analizzare è mostrata in figura 8.31. Consideriamo un campo incidente TE_{10} nella regione “1”.

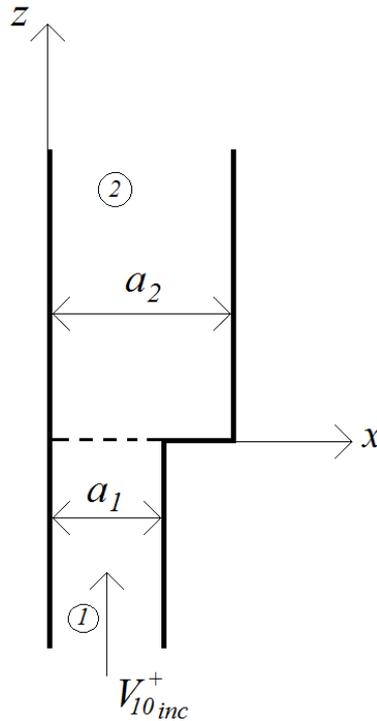


Figura 8.31. Discontinuità sul piano H in una guida d'onda rettangolare di altezza b .

Qualunque campo sia nella regione 1 che nella regione 2 può essere espresso come somma di modi. La presenza della discontinuità, come già detto nei paragrafi precedenti, comporta l'insorgenza di modi superiori:

- Nella guida "1" avrò il modo TE_{10} progressivo e "tutti" i modi riflessi in direzione $-z$.
- Nella guida "2" avrò tutti i modi progressivi in direzione $+z$.
- Il termine noto è il modo TE_{10} incidente.

Per determinare i coefficienti dell'espansione modale nelle regioni "1" e "2" (figura 8.32) si utilizzano le condizioni di continuità del campo elettrico e magnetico alla giunzione $z = 0$:

- \underline{E} ed \underline{H} devono essere continui su tutto il tratto di lunghezza " a_1 " per $z = 0^-$ e $0 \leq x \leq a_1$
- $\underline{E}_{tang} = 0$ per per $z = 0^+$ e $a_1 \leq x \leq a_2$ nella guida "2".

Possiamo osservare che il modo TE_{10} è omogeneo rispetto ad y e anche la struttura è omogenea rispetto ad y (l'altezza b nei due tratti di guida è la stessa). Poiché la sorgente (il TE_{10} incidente) è omogenea rispetto ad y in una struttura omogenea rispetto ad y , tutti i campi nella struttura saranno costanti in y perché non esiste alcun fattore che produca una variazione lungo y . Da ciò consegue che, nelle espansioni modali nelle regioni "1" e "2", si dovranno includere solamente i modi TE_{n0} (in una guida rettangolare non esistono i modi TM_{n0}) per i quali si ha:

$$\underline{e}_{n0} = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{n\pi x}{a} \underline{i}_y \quad (8.167)$$

$$\underline{h}_{n0} = \underline{i}_z \times \underline{e}_{n0} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{n\pi x}{a} \underline{i}_x \quad (8.168)$$

Il campo elettrico nella regione “1” per $z = 0^-$, è dato da:

$$\begin{aligned} \underline{E}^{(1)} &= -V_{inc(10)}^+ \sqrt{\frac{2}{a_1 b}} \sin \frac{\pi x}{a_1} \underline{i}_y - \sum_{n=1}^{\infty} V_n^- \sqrt{\frac{2}{a_1 b}} \sin \frac{n\pi x}{a_1} \exp(jk_{zn} z) \underline{i}_y \Big|_{z=0^-} = \\ &= -V_{inc(10)}^+ \sqrt{\frac{2}{a_1 b}} \sin \frac{\pi x}{a_1} \underline{i}_y - \sum_{n=1}^{\infty} V_n^- \sqrt{\frac{2}{a_1 b}} \sin \frac{n\pi x}{a_1} \underline{i}_y \end{aligned} \quad (8.169)$$

Il campo magnetico nella regione “1” all’interfaccia $z = 0^-$ fornisce:

$$\underline{H}^{(1)} = I_{inc(10)}^+ \left(\sqrt{\frac{2}{a_1 b}} \sin \frac{\pi x}{a_1} \underline{i}_x \right) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^- \sqrt{\frac{2}{a_1 b}} \sin \frac{n\pi x}{a_1} \exp(jk_{zn} z) \underline{i}_x \Big|_{z=0^-} \quad (8.170)$$

Poichè:

$$\begin{aligned} I_{inc(10)}^+ &= \frac{V_{inc(10)}^+}{Z_{10}^{(1)}} \\ I_n^- &= -\frac{V_{inc(10)}^-}{Z_n^{(1)}} \end{aligned} \quad (8.171)$$

si ha:

$$\underline{H}^{(1)} = \frac{V_{inc(10)}^+}{Z_{10}^{(1)}} \left(\sqrt{\frac{2}{a_1 b}} \sin \frac{\pi x}{a_1} \underline{i}_x \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n^-}{Z_n^{(1)}} \sqrt{\frac{2}{a_1 b}} \sin \frac{n\pi x}{a_1} \underline{i}_x \quad (8.172)$$

Nella guida “2” esiste solamente l’onda progressiva e si ha:

$$\underline{E}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} V_m^+ \left(-\sqrt{\frac{2}{a_2 b}} \sin \frac{m\pi x}{a_2} \right) \exp(jk_{zn} z) \underline{i}_y \Big|_{z=0^+} = \sum_{m=1}^{\infty} V_m^+ \left(-\sqrt{\frac{2}{a_2 b}} \sin \frac{m\pi x}{a_2} \right) \underline{i}_y \quad (8.173)$$

$$\underline{H}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_m^+}{Z_m^{(2)}} \sqrt{\frac{2}{a_2 b}} \sin \frac{m\pi x}{a_2} \underline{i}_x \quad (8.174)$$

Nelle equazioni precedenti abbiamo indicato con $Z_k^{(i)}$ l’impedenza caratteristica del modo TE_{k0} relative alla guida “i”.

Imponiamo la continuità del campo elettrico e del campo magnetico per $0 \leq x \leq a_1$:

$$E^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} V_m^+ \left(-\sqrt{\frac{\mathcal{Z}}{a_2 b}} \sin \frac{m\pi x}{a_2} \right) = -V_{inc(10)}^+ \sqrt{\frac{\mathcal{Z}}{a_1 b}} \sin \frac{\pi x}{a_1} - \sum_{n=1}^{\infty} V_n^- \sqrt{\frac{\mathcal{Z}}{a_1 b}} \sin \frac{n\pi x}{a_1} = E^{(1)} \quad (8.175)$$

$$H^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_m^+}{Z_m^{(2)}} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}}{a_2 b}} \sin \frac{m\pi x}{a_2} = \frac{V_{inc(10)}^+}{Z_{10}^{(1)}} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{Z}}{a_1 b}} \sin \frac{\pi x}{a_1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n^-}{Z_n^{(1)}} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}}{a_1 b}} \sin \frac{n\pi x}{a_1} = H^{(1)} \quad (8.176)$$

Sappiamo inoltre che il campo elettrico trasverso nella regione “2” per ($z = 0^+$) è nullo per $a_1 \leq x \leq a_2$ ossia:

$$\underline{E}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} V_m^+ \left(-\sqrt{\frac{Z}{a_2 b}} \sin \frac{m\pi x}{a_2} \right) \underline{i}_y = \mathbf{0} \quad (8.177)$$

E' possibile scrivere le (8.175) e (8.177) in forma compatta tramite la seguente equazione:

$$\sum_{m=1}^{\infty} V_m^+ \left(-\sqrt{\frac{Z}{a_2 b}} \sin \frac{m\pi x}{a_2} \right) = E'(x) \quad \text{per } 0 \leq x \leq a_2 \quad (8.178)$$

$$\text{dove } E'(x) = \begin{cases} -V_{inc(10)}^+ \frac{1}{\sqrt{a_1}} \sin \frac{\pi x}{a_1} - \sum_{n=1}^{\infty} V_n^- \frac{1}{\sqrt{a_1}} \sin \frac{n\pi x}{a_1} & \text{per } x \in [0, a_1] \\ 0 & \text{per } x \in [a_1, a_2] \end{cases} \quad (8.179)$$

Si ottengono dunque due condizioni, la continuità del campo magnetico (8.176) definita sulla larghezza della guida "1", e la continuità del campo elettrico (8.178) definita sulla larghezza della guida "2".

Sfruttando l'ortogonalità dei modi nella guida "1" moltiplichiamo l'equazione (8.176), ossia l'equazione di continuità del campo magnetico, per $\frac{1}{\sqrt{a_1}} \sin \frac{p\pi x}{a_1}$ e integriamo (per un "p" generico) lungo il tratto $x \in [0, a_1]$, visto che l'equazione (8.176) è definita per $x \in [0, a_1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{a_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_m^+}{Z_m^{(2)}} \sqrt{\frac{1}{a_2}} \sin \frac{m\pi x}{a_2} \frac{1}{\sqrt{a_1}} \sin \frac{p\pi x}{a_1} dx &= \\ = \int_0^{a_1} \left[\frac{V_{inc(10)}^+}{Z_{10}^{(1)}} \left(\sqrt{\frac{1}{a_1}} \sin \frac{\pi x}{a_1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n^-}{Z_n^{(1)}} \sqrt{\frac{1}{a_1}} \sin \frac{n\pi x}{a_1} \right] \frac{1}{\sqrt{a_1}} \sin \frac{p\pi x}{a_1} dx & \text{per ogni "p"} \end{aligned} \quad (8.180)$$

Per il calcolo della (8.180) occorre distinguere due casi: $p = 1$ e $p > 1$.

Per $p = 1$ la (8.180) fornisce:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_m^+}{Z_m^{(2)}} \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \int_0^{a_1} \overbrace{\sin \frac{m\pi x}{a_2} \sin \frac{\pi x}{a_1}}^{=k_{m1}} dx &= \\ = \frac{V_{inc(10)}^+}{Z_{10}^{(1)}} \frac{1}{a_1} \underbrace{\int_0^{a_1} \sin^2 \frac{\pi x}{a_1} dx}_{=\frac{a_1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n^-}{Z_n^{(1)}} \frac{1}{a_1} \underbrace{\int_0^{a_1} \sin \frac{n\pi x}{a_1} \sin \frac{\pi x}{a_1} dx}_{=\delta_{n1} \frac{a_1}{2}} & \end{aligned} \quad (8.181)$$

ossia:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_m^+}{Z_m^{(2)}} \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} k_{m1} = \frac{V_{inc(10)}^+}{Z_{10}^{(1)}} \frac{1}{a_1} \frac{a_1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n^-}{Z_n^{(1)}} \frac{1}{a_1} \frac{a_1}{2} \delta_{n1} \quad (8.182)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_m^+}{Z_m^{(2)}} \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} k_{m1} = \frac{V_{inc(10)}^+}{Z_{10}^{(1)}} \frac{1}{2} - \frac{V_1^-}{Z_1^{(1)}} \frac{1}{2} \quad (8.183)$$

Per $p > 1$ si ottiene invece:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_m^+}{Z_m^{(2)}} \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} k_{mp} = -\frac{V_p^-}{2Z_p^{(1)}} \quad (8.184)$$

$$\text{con } k_{mp} = \int_0^{a_1} \sin \frac{m\pi x}{a_2} \sin \frac{p\pi x}{a_1} dx \quad (8.185)$$

Per quanto riguarda l'equazione di continuità del campo elettrico (8.178), definita per $x \in [0, a_2]$,

questa viene moltiplicata per $\frac{1}{\sqrt{a_2}} \sin \frac{q\pi x}{a_2}$ (per ogni "q") e poi integrata tra 0 e a_2 . Si ottiene

quindi:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_2} V_m^+ \overbrace{\int_0^{a_2} \sin \frac{m\pi x}{a_2} \sin \frac{q\pi x}{a_2} dx}^{=\frac{a_2}{2} \delta_{mq}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_0^{a_1} E'(x) \sin \frac{q\pi x}{a_2} dx - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_{a_1}^{a_2} E'(x) \sin \frac{q\pi x}{a_2} dx}_{=0, \text{ perchè } E'(x) = 0 \text{ (D)}} \end{aligned} \quad (8.186)$$

da cui:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_2} V_m^+ \frac{a_2}{2} \delta_{mq} = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_0^{a_1} E'(x) \sin \frac{q\pi x}{a_2} dx \quad \rightarrow \quad \frac{V_q^+}{2} = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_0^{a_1} E'(x) \sin \frac{q\pi x}{a_2} dx \quad (8.187)$$

Sostituendo al posto di $E'(x)$ l'espressione fornita dalla (8.179) si ottiene infine:

$$\frac{V_q^+}{2} = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} H_{1q} V_{inc(10)}^+ + \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \sum_{n=1}^{\infty} V_n^- H_{nq} \quad (8.188)$$

con

$$H_{nq} = \int_0^{a_1} \sin \frac{n\pi x}{a_1} \sin \frac{q\pi x}{a_2} dx \quad (8.189)$$

Ricapitolando abbiamo ottenuto il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_m^+}{Z_m^{(2)}} \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} k_{m1} = \frac{V_{inc(10)}^+}{2Z_{10}^{(1)}} - \frac{V_1^-}{2Z_1^{(1)}} & p = 1 \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_m^+}{Z_m^{(2)}} \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} k_{mp} = -\frac{V_p^-}{2Z_p^{(1)}} & p = 2, \dots, \infty N \\ \frac{V_q^+}{2} = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} H_{1q} V_{inc(10)}^+ + \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \sum_{n=1}^{\infty} V_n^- H_{nq} & q = 1, \dots, \infty M \end{cases} \quad (8.190)$$

Nella (8.190) le incognite sono indicate in rosso e sono i coefficienti V_n^- e V_m^+ mentre il termine noto è il coefficiente del modo TE_{10} incidente, $V_{inc(10)}^+$. È evidente che la soluzione di questo sistema lineare è possibile solo se le due sommatorie infinite vengono “opportunamente” troncate. In particolare, la sommatoria in “ n ” viene troncata fino al termine N e la sommatoria in “ m ” fino al termine M . Avrò dunque un sistema lineare di $N+M$ equazioni, in $N+M$ incognite.

Ovviamente si dovrà determinare un criterio per effettuare il troncamento delle due sommatorie, ossia per determinare i valori di N ed M . In generale, il valore di N e M dipende dalla precisione che si vuole ottenere e dalle risorse di calcolo disponibili. Tuttavia, non è detto che la precisione della soluzione aumenti sempre all’aumentare di N ed M . Infatti, nei problemi che coinvolgono discontinuità in guida d’onda possono essere presenti soluzioni instabili legate al fenomeno della “convergenza relativa” che dipende dalla scelta di N ed M e dalla relazione tra N ed M .

Possiamo descrivere il problema della convergenza relativa con riferimento alla discontinuità sul piano H (Figura 8.32) analizzata in precedenza in questo paragrafo. Abbiamo sostanzialmente approssimato i campi nelle guide “1” e “2” con due serie di Fourier (le espansioni modali), rispettivamente con N ed M termini. Questo significa che nella guida “1” si approssima il campo vero con un campo a banda spaziale limitata pari a $B_1 = N\pi/a_1$ (il coefficiente più elevato nell’argomento del seno nella serie modale). Analogamente, nella guida “2” si approssima il campo vero con un campo a banda spaziale limitata di valore $B_2 = M\pi/a_2$.

Per “banda spaziale” si intende la velocità massima di variazione spaziale del campo sulla sezione trasversa. Imporre la continuità del campo all’interfaccia di separazione tra le due guide equivale ad imporre l’uguaglianza tra una funzione con una banda spaziale B_1 (il campo nella guida “1”) e una funzione con una banda spaziale B_2 (il campo nella guida “2”). Se le due bande spaziali non sono uguali il problema potrebbe diventare instabile (ossia il sistema lineare potrebbe avere un numero di condizione molto elevato).

Di conseguenza, per garantire la stabilità della soluzione ottenuta con il “mode matching” occorre che $B_1 = B_2$ ossia:

$$\frac{N\pi}{a_1} = \frac{M\pi}{a_2} \quad \rightarrow \quad \frac{N}{M} = \frac{a_1}{a_2} \quad (8.191)$$

Quindi se ad esempio $a_2/a_1 = 2$, $N = 10$, $M = 20$ fornisce una soluzione migliore rispetto a $N = 20$ e $M = 20$.

8.13 Guida a pareti magnetiche

È possibile descrivere la propagazione in una microstriscia di larghezza W , su un substrato di altezza h e di costante dielettrica ϵ_r , mediante una guida a pareti magnetiche equivalente di altezza h , larghezza W_{eff} e costante dielettrica ϵ_{eff} , costituita da due pareti di C.E.P (sopra e sotto) delimitate da due pareti laterali di C.M.P. (Figura 8.32).

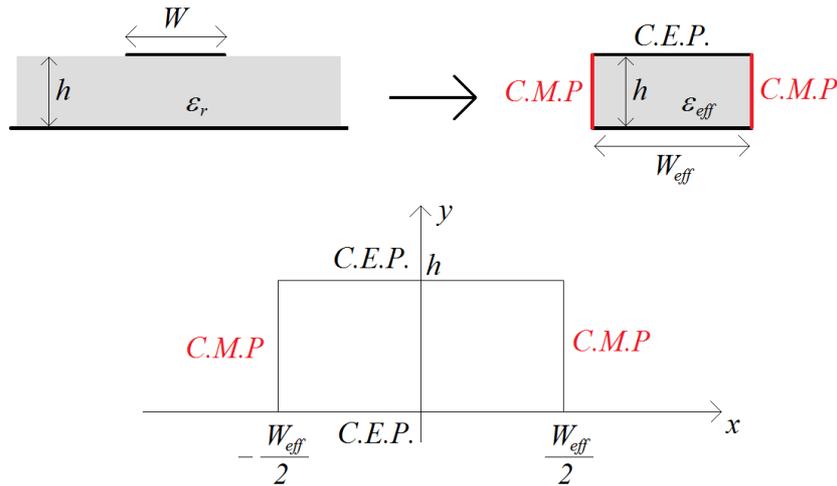


Figura 8.32. Guida a pareti magnetiche equivalente ad una microstriscia.

La guida a pareti magnetiche ha come modo fondamentale un modo TEM, i suoi modi superiori (TE e TM) sono molti simili ai modi superiori della microstriscia. Pertanto, la massima frequenza a cui la propagazione in microstriscia è monomodale è molto vicina alla frequenza di taglio del primo modo superiore nella guida a pareti magnetiche.

La guida a pareti magnetiche può essere utilizzata anche per analizzare, tramite la tecnica del “mode matching” le discontinuità in microstriscia, che possono essere ricondotte a discontinuità in guida.

La geometria della guida a pareti magnetiche è mostrata in Figura 8.32. Per studiare l’equivalenza con la microstriscia, determiniamo i modi della guida a pareti magnetiche le cui funzioni modali sono indipendenti da y (poiché in una microstriscia l’altezza h è molto minore della lunghezza d’onda, si può assumere che il campo in microstriscia sia indipendente da y).

Per i modi TEM si ha:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (8.192)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \phi = 0 & y = 0 \\ \phi = 1 & y = h \end{cases} \quad \text{sul C.E.P.} \quad (8.193)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad x = \pm \frac{W_{eff}}{2} \quad \text{sul C.M.P.} \quad (8.194)$$

Poiché stiamo considerando campi costanti rispetto a y si ha $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ e quindi, per la (8.192), si ha

anche $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$, da cui segue $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \text{costante}$. Tuttavia, per le condizioni al contorno (8.194) risulta

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$. L’equazione $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$, con le condizioni al contorno (8.193), ha come soluzione una

funzione $\phi(y)$ lineare rispetto ad y . In particolare risulta $\phi(y) = y/h$ che soddisfa le condizioni (8.193).

Quindi per il campo TEM si ha:

$$\underline{E} = -\frac{V}{h} \underline{i}_y$$

$$\underline{H} = \frac{I}{W_{eff}} \underline{i}_y$$

mentre l'impedenza caratteristica è data da: $Z_0 = \zeta_0 \frac{h}{W_{eff} \sqrt{\epsilon_{eff}}}$ che coincide con la (2.23).

Per i modi TM si ha:

$$\begin{aligned} \nabla_t^2 \Psi_t + k_t^2 \Psi_t &= 0 \\ \Psi_t(x, 0) = \Psi_t(x, h) &= 0 & \underline{E}_t \cdot \underline{i}_c = 0 \text{ e } E_z = 0 \text{ sulle pareti C.E.P.} & (8.195) \\ \frac{\partial \Psi_t}{\partial x} \Big|_{x=\pm \frac{W_{eff}}{2}} &= 0 & \underline{H}_t \cdot \underline{i}_c = \underline{H}_t \cdot \underline{i}_y = 0 \text{ sulle pareti C.M.P.} \end{aligned}$$

Poiché stiamo considerando campi costanti rispetto a y si ha $\frac{\partial \Psi_t}{\partial y} = \text{costante}$ ossia Ψ_t è una funzione lineare di y . Le soluzioni della (8.195) sono del tipo:

$$\Psi_t(x, y) = A(y) \cos(k_x x), A(y) \sin(k_x x)$$

$A(y)$ è necessariamente una funzione lineare di y , ma poiché deve annullarsi in $y = 0$ e $y = h$ (8.195) si ha $A(y) = \text{costante} = 0$, ossia $\Psi_t = 0$. Questo significa che nella guida a pareti magnetiche non vi sono modi TM indipendenti da y .

Per i modi TE si ha:

$$\begin{aligned} \nabla_t^2 \Phi_t + k_t^2 \Phi_t &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_t}{\partial y} \Big|_{y=0, h} &= 0 & \underline{E}_t \cdot \underline{i}_c = 0 \text{ sulle pareti C.E.P.} & (8.196) \\ \Phi_t \left(x = \pm \frac{W_{eff}}{2}, y \right) &= 0 & \underline{H}_t \cdot \underline{i}_c = \underline{H}_t \cdot \underline{i}_y = 0 \text{ e } H_z = 0 \text{ sulle pareti C.M.P.} \end{aligned}$$

Poiché stiamo considerando campi costanti rispetto a y si ha $\frac{\partial \Phi_t}{\partial y} = \text{costante}$, ossia Φ_t è una funzione lineare di y . Le soluzioni della (8.196a) sono ancora del tipo:

$$\Phi_t(x, y) = A(y) \cos(k_x x), A(y) \sin(k_x x)$$

con $A(y)$ funzione lineare di y . In questo caso la (8.196b) fornisce $A'(0) = A'(h) = 0$. Pertanto, poiché $A(y)$ è lineare, $A'(y)$ è costante e vale 0, ossia $A(y) = \text{costante} \neq 0$.

Imponendo le condizioni al contorno (8.196c) si ottiene:

$$\cos\left(k_x \frac{W_{eff}}{2}\right) = 0 \Rightarrow k_x \frac{W_{eff}}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow k_x W_{eff} = \pi + 2n\pi \Rightarrow k_x = \frac{(2n+1)\pi}{W_{eff}} \quad (8.197)$$

$$\sin\left(k_x \frac{W_{eff}}{2}\right) = 0 \Rightarrow k_x \frac{W_{eff}}{2} = n\pi \Rightarrow k_x W_{eff} = 2n\pi \Rightarrow k_x = \frac{2n\pi}{W_{eff}}$$

Quindi gli autovalori sono $k_x = \frac{n\pi}{W_{eff}}$ e, a seconda che n sia pari o dispari si ha una funzione seno oppure coseno. A noi interessa solamente il caso in cui i campi trasversi sono pari in x e quindi Φ_t deve essere dispari. In tal caso si ha:

$$\underline{e} = \sqrt{\frac{2}{hW_{eff}}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{W_{eff}}\right) \quad (8.198)$$

$$\underline{h} = -\sqrt{\frac{2}{hW_{eff}}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{W_{eff}}\right)$$

10. RISUONATORI IN LINEA DI TRASMISSIONE

I risonatori sono circuiti in grado di supportare soluzioni risonanti ossia soluzioni a regime sinusoidale in assenza di sorgenti. I risonatori vengono largamente utilizzati negli oscillatori sinusoidali e nei filtri. Inoltre molti dispositivi elettromagnetici (alcuni tipi di antenne ad esempio) possono essere analizzati considerandoli analoghi a risonatori. L'obiettivo di questo paragrafo è quello di individuare quali circuiti in linea di trasmissione presentano soluzioni risonanti. Questi circuiti devono essere necessariamente privi di perdite (perché la definizione di "risonanza" prevede l'assenza di sorgenti). Successivamente si vedrà cosa accade alle soluzioni risonanti quando si tiene conto che in un circuito reale sono presenti perdite.

La caratteristica dei circuiti risonanti è quella di avere dei componenti in grado di accumulare energia elettrica e magnetica e di scambiarle nel tempo. Poiché su una "linea di trasmissione" è possibile avere accumulo di energia elettrica e magnetica, evidentemente una linea di trasmissione può essere utilizzata per realizzare un risonatore, ovviamente sotto opportune condizioni.

Per valutare se e quando una linea di trasmissione è un risonatore consideriamo una linea di trasmissione **priva di perdite** alimentata da un generatore (di tensione) variabile nel tempo (Figura 9.1).

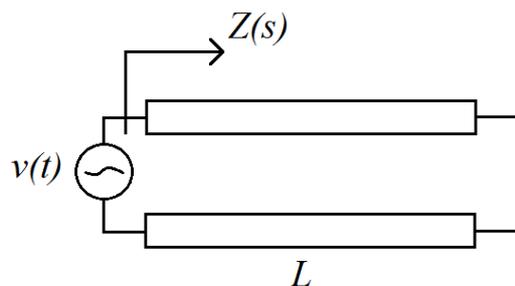


Figura 9.1. Linea di trasmissione alimentata da un generatore di tensione variabile nel tempo.

Supponiamo che il generatore venga acceso per $t = 0$, istante in cui la linea è a riposo. Se il forzamento è sinusoidale è semplice calcolare tensione e corrente sulla linea. D'altra parte, qualunque segnale $v(t)$ può essere sempre espresso come somma di segnali sinusoidali mediante la trasformata di Fourier. Quindi è possibile calcolare la soluzione anche in caso di $v(t)$ generico.

Le risonanze fanno parte della soluzione transitoria delle equazioni delle linee di trasmissione nel dominio del tempo. Per questo motivo conviene considerare il circuito in Figura 9.1 come un sistema descritto mediante la sua funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(s)$, dove s è la variabile della trasformata di Laplace.

$$v(s) = \int_0^{\infty} v(t) \exp(-st) dt \quad (9.1)$$

$$v(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

Il passaggio dalla variabile s alla variabile ω avviene secondo la nota trasformazione $s = j\omega$

Per il circuito in Figura 9.1 si ha:

$$V(s) = Z(s)I(s)$$

$$Z(\omega) = jZ_0 \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad \omega \rightarrow \frac{s}{j} \quad (9.2)$$

$$Z(s) = jZ_0 \tan\left(\frac{s}{jc} L\right)$$

Supponiamo che $V(s)$ sia la causa e $I(s)$ l'effetto nella relazione (9.2a), che riscriviamo dunque nella forma:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} \quad (9.3)$$

Con riferimento alla (9.3), negli zeri di $Z(s)$ si verificano le seguenti situazioni:

- In assenza di tensione è possibile avere un corrente diversa da zero (si ha cioè risposta del sistema in assenza di ingresso). Questa situazione che si può verificare solo in assenza di perdite.
- Se la tensione in ingresso ha ampiezza finita, l'uscita $I(s)$ ha ampiezza infinita.

Avere una "uscita" finita senza ingresso oppure uscita infinita con ingresso finito significa trovarsi in condizioni di risonanza.

D'altra parte, dalla analisi dei sistemi, sappiamo che i poli della funzione di trasferimento (ovvero gli zeri del suo denominatore) forniscono la variazione temporale dei cosiddetti "modi caratteristici" del sistema, soluzioni in assenza di forzamento, che sono le risonanze.

Quindi l'equazione che determina la condizione di risonanza per il circuito in Figura 9.1 è

$$Z(s) = jZ_0 \tan\left(\frac{s}{jc} L\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{s}{jc} L = n\pi \quad \rightarrow \quad s = \frac{jc}{L} n\pi \quad \rightarrow \quad \omega_{nr} = \frac{c}{L} n\pi \quad (9.4)$$

Ovviamente in assenza di perdite le frequenze di risonanza ω_{nr} sono reali.

La condizione (9.4) equivale a $\beta L = n\pi$ che è la condizione di risonanza per una linea chiusa in corto circuito da entrambi i lati (in quanto $V(s) = 0$, Figura 9.1). In pratica la linea risona a tutte le frequenze per cui la lunghezza L è un multiplo intero di semilunghezze d'onda. Ovviamente nella 9.4 $n > 0$ perché non hanno senso frequenze negative (o nulle).

Consideriamo ora una rete più complessa come quella mostrata in Figura 9.2.

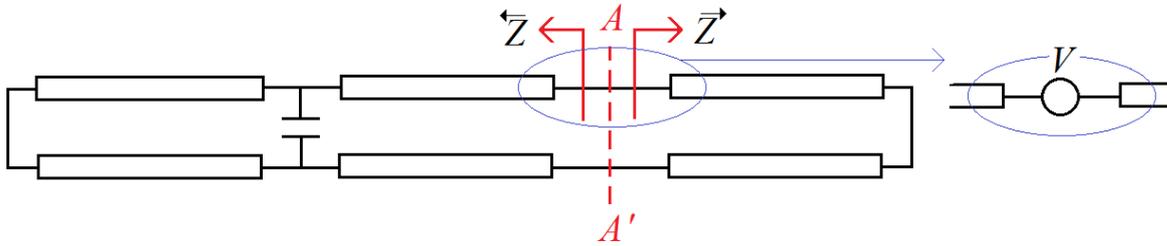


Figura 9.2.

Per determinare la risonanza di questa struttura *scegliamo una sezione arbitraria* (ad esempio quella tratteggiata in Figura 9.2). Se applichiamo un generatore di tensione in serie la corrente complessiva vale:

$$I = \frac{V}{\bar{Z} + \bar{Z}} \quad (9.5)$$

dove \bar{Z} e \bar{Z} sono calcolate con la convenzione dell'utilizzatore. Di conseguenza, una condizione che fornisce risonanza è:

$$\bar{Z} + \bar{Z} = 0 \quad (9.6)$$

Le soluzioni della (9.6) non sono le uniche soluzioni possibili. Infatti utilizzando un generatore di corrente al posto di un generatore di tensione, la tensione diventa l'uscita e la relazione

$$V = \frac{I}{\bar{Y} + \bar{Y}} \quad (9.7)$$

e un'altra condizione di risonanza è

$$\bar{Y} + \bar{Y} = 0 \quad (9.8)$$

Le risonanze del sistema sono le soluzioni della (9.6) e della (9.8). D'altra parte risulta:

$$\bar{Y} + \bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{\bar{Z} + \bar{Z}}{\bar{Z}\bar{Z}} \quad (9.9)$$

Pertanto, ogni zero di $\bar{Z} + \bar{Z} = 0$ è anche zero di $\bar{Y} + \bar{Y} = 0$, purchè queste due impedenze non vadano mai all'infinito (e viceversa). In questo caso si potrà (e si dovrà) usare una sola delle due condizioni. Ad esempio, per il circuito in Figura 9.3a, scegliendo la sezione AA', dovrò usare la condizione $\bar{Z} + \bar{Z} = 0$ perchè a questa sezione la \bar{Y} è infinita; mentre per il circuito in Figura 9.3b, se scelgo la sezione BB', dovrò usare la condizione $\bar{Y} + \bar{Y} = 0$ perchè a questa sezione la \bar{Z} è infinita. Se scelgo qualunque altra sezione (per entrambi i circuiti in Figura 9), per determinare tutte le frequenze di risonanza dovrò usare entrambe le condizioni (9.8) e (9.9).

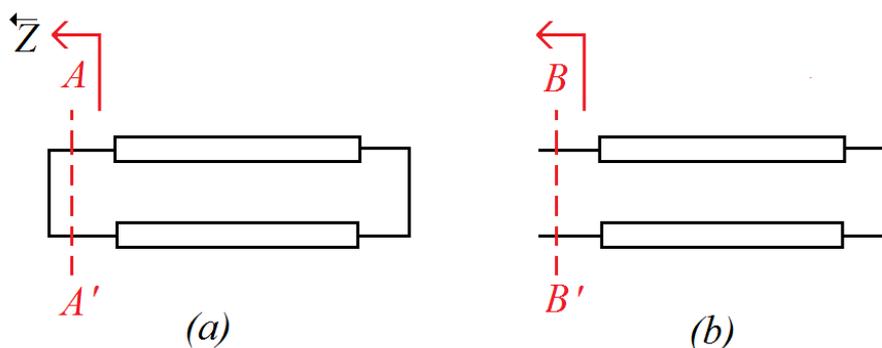


Figura 9.3. Esempi di risonatori in linea di trasmissione.

Ovviamente, i valori delle risonanze non dipendono dalla sezione che scegliamo. Possiamo facilmente dimostrarlo considerando una sezione generica AA' di un risonatore (Figura 9.4).

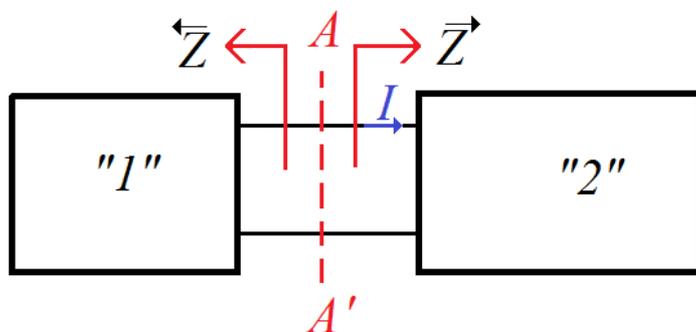


Figura 9.4. La sezione AA' *arbitraria* divide il risonatore in due reti prive di perdite.

Applichiamo il teorema di Poynting (in assenza di perdite) al circuito in Figura 9.4:

$$\frac{1}{2} \bar{Z} |I|^2 = 2j\omega(W_{m1} - W_{e1})$$

$$\frac{1}{2} \bar{Z} |I|^2 = 2j\omega(W_{m2} - W_{e2})$$
(9.10)

dove W_{m1} e W_{e1} sono energia magnetica ed elettrica immagazzinate nella rete "1" con riferimento alla figura 9.4, mentre W_{m2} e W_{e2} sono energia magnetica ed elettrica immagazzinate nella rete "2".

Sommando membro a membro le 9.10 si ottiene:

$$\frac{1}{2} (\bar{Z} + \bar{Z}) |I|^2 = 2j\omega(W_m - W_e)$$
(9.11)

Dove $W_m = W_{m1} + W_{m2}$ è l'energia magnetica totale immagazzinata nel risonatore, e $W_e = W_{e1} + W_{e2}$ è l'energia elettrica totale immagazzinata nel risonatore.

Se alla sezione arbitraria AA' si ha $\bar{Z} + \bar{Z} = 0$, allora la quantità a secondo membro della 9.11, calcolata su tutto il risonatore, è nulla.

Tuttavia si può notare che il termine a secondo membro della 9.11 non dipende dalla sezione scelta. In altre parole, se si cambia la sezione, si avranno impedenze diverse, una corrente I diversa, ma la quantità $2j\omega(W_m - W_e)$, che dipende solamente dal risonatore, sarà sempre nulla.

Per una sezione BB' a cui si “misurano” \bar{Z}' e \bar{Z}'' e una corrente I' si ha ovviamente:

$$0 = 2j\omega(W_m - W_e) = \frac{1}{2}(\bar{Z}'' + \bar{Z}')|I'|^2$$

ossia anche alla sezione BB' si ha $\bar{Z}'' + \bar{Z}' = 0$.

Da quanto detto in precedenza risulta che, in condizioni di risonanza, le energie magnetica ed elettrica complessive all'interno del risuonatore sono uguali: $W_m = W_e$ e dunque $W_{em} = W_e + W_m = 2W_e = 2W_m$. Ad esempio per il circuito in Figura 9.5, l'energia elettrica complessiva è quella immagazzinata nella linea sommata a quella del condensatore, mentre l'energia magnetica complessiva è solo quella immagazzinata nella linea. In condizioni di risonanza si ha dunque: $W_m = W_{m,linea} = W_{e,linea} + W_{e,condensatore} = W_e$.

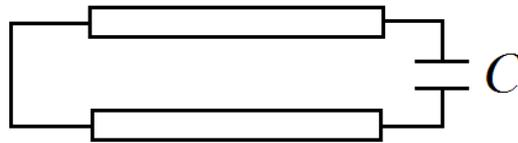


Figura 9.5. Risuonatore in linea di trasmissione.

In assenza di perdite abbiamo trovato soluzioni risonanti del tipo $s = j\omega$. In queste condizioni il campo nel risuonatore varia nel tempo come: $\text{Re}(e^{st}) = \text{Re}(e^{j\omega t}) = \cos(\omega_0 t)$. Supponiamo invece che s non sia immaginario puro, ovvero vi siano delle perdite nel risuonatore: $s = j\omega_0 - \omega_1$. In questo caso il campo varierà nel tempo come: $\text{Re}(e^{st}) = \cos(\omega_0 t)e^{-\omega_1 t}$. Quindi, in presenza di perdite, il campo nel risuonatore si attenua in modo esponenziale e

$$s/j = \omega_0 + j\omega_1 \tag{9.12}$$

prende il nome di *frequenza di risonanza complessa*. Di conseguenza l'energia nel risuonatore diminuirà esponenzialmente nel tempo: $W_{em}(t) = W_{em}(0)e^{-2\omega_1 t}$ per effetto della dissipazione di

Potenza. La potenza dissipata vale: $P_d(t) = -\frac{dW_{em}}{dt} = 2\omega_1 W_{em}(t)$.

Nella (9.12) la parte reale della frequenza complessa “ ω_0 ” è la frequenza delle oscillazioni smorzate, mentre “ ω_1 ” è l'inverso della costante di tempo dello smorzamento del campo. Per una soluzione di tipo oscillatorio smorzato, l'energia varia nel tempo e, a rigori, non si può più parlare di energia media in un periodo. Se però si assume che $\omega_1 \ll \omega_0$ allora sia il campo elettromagnetico che l'energia all'interno del risuonatore sono delle funzioni a banda stretta. In questo caso è ancora possibile parlare di energia media valutata su un periodo, in quanto all'interno di ogni periodo della oscillazione è possibile trascurare lo smorzamento. Quindi, la potenza dissipata in un periodo di durata $T = 2\pi/\omega_0$ è:

$$TP_d = \frac{2\pi}{\omega_0} 2\omega_1 W_{em} \quad \rightarrow \quad \frac{2\omega_1}{\omega_0} = \frac{T}{2\pi} \frac{P_d}{W_{em}} \tag{9.13}$$

Il rapporto $2\omega_l/\omega_0$ è la misura della potenza dissipata in un periodo, ovvero della attenuazione del campo nel risonatore.

In una visione adimensionale del problema consideriamo la potenza dissipata in un periodo rispetto alla energia “media” nello stesso periodo. Dalla (9.13) si ha:

$$\frac{TP_d}{W_{em}} = \frac{2\pi}{\omega_0} 2\omega_l = \frac{4\pi\omega_l}{\omega_0} = \frac{2\pi}{Q} \quad (9.14)$$

“ Q ” prende il nome di fattore di merito del risonatore ed è definito (9.14) come:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\omega_l} = \frac{\omega_0 W_{em}}{P_d} \quad (9.15)$$

Dalla (9.15) è evidente che, quanto più alto è il fattore di merito del risonatore, tanto più piccole sono le perdite e maggiore è il tempo che il campo permane all’interno del risonatore. Per calcolare il fattore di merito Q mediante la (9.15) occorre determinare sia ω_0 che ω_l , ossia risolvere la equazione di risonanza con le perdite e cioè inserendo la frequenza complessa $s/j = \omega_0 + j\omega_l$. Tuttavia se $Q \gg 1$ (ossia abbiamo un risonatore con piccole perdite) è possibile utilizzare un approccio “perturbativo” per l’analisi del risonatore. Si procede cioè come segue:

- Si calcolano ω_0 , W_{em} e i campi a partire dal risonatore ideale (imperturbato) più simile possibile al risonatore con perdite.
- Si calcolano le perdite inserendo nelle espressioni dei campi i valori calcolati per il risonatore imperturbato (Figura 9.6).

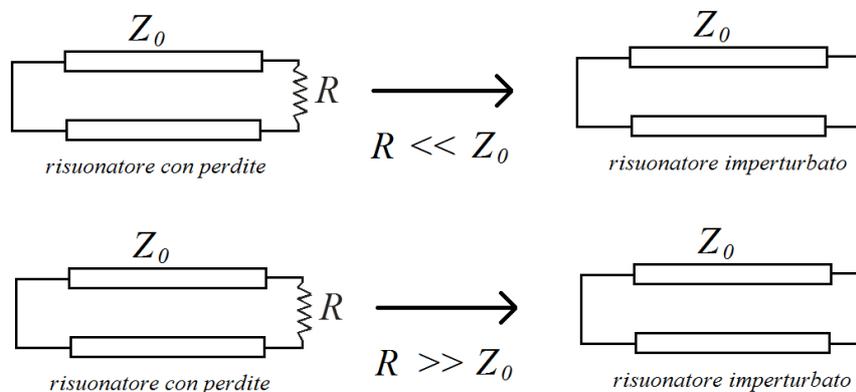


Figura 9.6.

Supponiamo di avere un risonatore con una conducibilità piccola σ . Per il calcolo del fattore di merito procedo come segue:

elimino la conducibilità σ e calcolo ω_0 , W_{em} e i campi (ossia, nel nostro caso, tensione e corrente sulla linea di trasmissione equivalente) nel risonatore ideale. Dopodichè la potenza dissipata P_d può essere calcolata dalla seguente espressione:

$$P_d = \frac{1}{2} G \int |V(z)|^2 dz \quad (9.16)$$

Nel calcolo di P_d (9.16), la G è quella del risuonatore con perdite, mentre la V viene calcolata nel risuonatore ideale (tecnica perturbativa).

L'errore che si commette con la *tecnica perturbativa* è dell'ordine di $1/(2Q)$, pertanto il procedimento va verificato a posteriori.

Esempio:

L'esempio (b) in Figura 9.3 può essere utilizzato per rappresentare una microstriscia terminata agli estremi con terminazioni aperte. La condizione di risonanza, da applicare alla sezione BB' in Figura 9.3 è $\bar{Y} + \bar{Y} = 0$. Si ha:

$$\bar{Y} = 0$$

$$\bar{Y} = -jY_0 \cot(\beta L)$$

Quindi la condizione di risonanza è

$$-jY_0 \cot(\beta L) = 0 \rightarrow \beta L = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\beta_0 \sqrt{\epsilon_{eff}} L = \frac{\pi}{2} + n\pi \rightarrow \frac{\omega_0}{c_0} \sqrt{\epsilon_{eff}} L = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\omega_{0,n} = \frac{\frac{\pi}{2} + n\pi}{\sqrt{\epsilon_{eff}} L} c_0$$

Le perdite in microstriscia sono abbastanza elevate e possono essere perdite nel dielettrico, perdite nei conduttori, o perdite per irradiazione delle terminazioni aperte. Ne consegue che il fattore di merito di un risuonatore in microstriscia è solitamente piuttosto basso (dell'ordine di 50-100). Fattori di merito più elevati possono essere ottenuti utilizzando delle cavità risonanti metalliche: un risuonatore in guida d'onda è ad esempio una cavità risonante metallica. In generale, le cavità risonanti sono costituite da un volume V racchiuso da una superficie metallica S . Le perdite in una cavità risonante sono molto basse e si possono facilmente ottenere fattori di merito fino a 10^5 .

Esempio: cavità risonante in guida rettangolare

Consideriamo una cavità risonante realizzata troncando una guida rettangolare di sezione $a \times b$ con due pareti di C.E.P. Per determinare le risonanze dei modi di questa cavità, scegliamo una direzione di propagazione arbitraria e identifichiamo questa direzione con l'asse z (Figura 9.7).

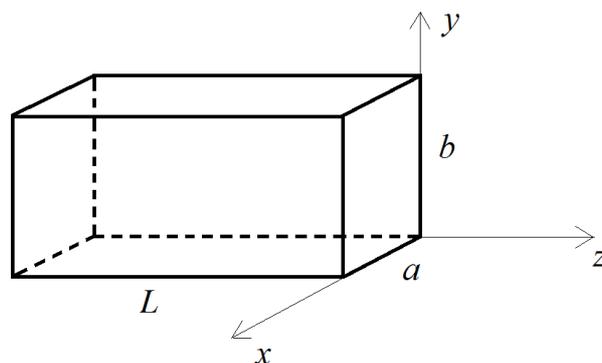


Figura 9.7. Cavità risonante in guida d'onda.

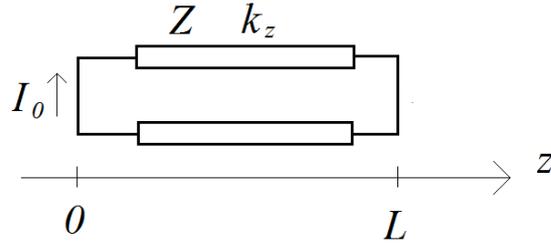


Figura 9.8. Circuito equivalente in linea di trasmissione per il generico modo (n, m) della cavità rettangolare.

Sappiamo che sia per i modi TE_{nm} che per i modi TM_{nm} si ha:

$$k_{z, nm}^2 = \omega^2 \epsilon \mu - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \quad (9.17)$$

Il circuito equivalente in linea di trasmissione per ciascun modo della guida è mostrato in Figura 9.8. La condizione di risonanza per questo circuito fornisce:

$$\tan(k_{z, nm} L) = 0 \rightarrow k_{z, nm} L = p\pi \quad (9.18)$$

Sostituendo la (9.18) nella (9.17) si ottiene:

$$\omega_{n, m, p}^2 \epsilon \mu = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 \quad (9.19)$$

che fornisce le frequenze di risonanza per i modi della cavità. Dalla equazione (9.19) si osserva inoltre che a , b , ed L sono tra loro interscambiabili, ossia si ottengono le stesse frequenze di risonanza anche con una scelta differente del sistema di riferimento.

Nella equazione (9.19) solo uno degli indici può essere diverso da zero, in caso contrario il campo all'interno della cavità sarebbe nullo. Infatti, nel caso TE (rispetto alla direzione di propagazione z scelta in Figura 9.7), in cui sono possibili le configurazioni $(n = 1, m = 0)$ e $(n = 0, m = 1)$, non si può avere $p = 0$, in quanto all'interno della cavità avrei $V(z) = 0$ ossia $\underline{E}_t = 0$ e, poiché per il caso TE $E_z = 0$, il campo elettrico \underline{E} sarebbe nullo. Nel caso TM sono possibili le configurazioni $(n = 1, m = 1)$ e $(n = 1, m = 0)$. Per $p = 0$, $V(z) = 0$ e quindi $\underline{E}_t = 0$, tuttavia ora $E_z \neq 0$ e quindi è possibile avere $p = 0$.

La frequenza di risonanza più bassa è detta risonanza fondamentale e, nell'ipotesi che $L > a > b$, corrisponde a $(n, m, p) = (1, 0, 1)$.

APPENDICE I: Teorema di reciprocità

Consideriamo un mezzo in cui sono presenti le sorgenti (J_1, M_1) che producono un campo (E_1, H_1) e le sorgenti (J_2, M_2) che producono un campo (E_2, H_2) .

Determineremo una relazione di tipo integrale tra i due campi. Il dominio di interesse è lo stesso, l'unica cosa che differenzia i campi sono le sorgenti.

Le equazioni di Maxwell in un mezzo lineare, omogeneo nel tempo, non dispersivo nello spazio e isotropo (per semplicità) forniscono:

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= -j\omega\mu H - M \\ \nabla \times H &= +j\omega\varepsilon E + J\end{aligned}\tag{1}$$

Per formulare il teorema di reciprocità si considera l'espressione $[E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1]$ e si calcola la divergenza:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1] &= \nabla \cdot (E_1 \times H_2) - \nabla \cdot (E_2 \times H_1) = \\ &= H_2 \cdot \nabla \times E_1 - E_1 \cdot \nabla \times H_2 - H_1 \cdot \nabla \times E_2 + E_2 \cdot \nabla \times H_1\end{aligned}\tag{2}$$

Sostituendo le equazioni di Maxwell (1) nella (2) si ottiene:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1] &= \\ &H_2 \cdot (-j\omega\mu H_1 - M_1) - E_1 \cdot (-j\omega\varepsilon E_2 + J_2) + \\ &-H_1 \cdot (-j\omega\mu H_2 - M_2) + E_2 \cdot (-j\omega\varepsilon E_1 + J_1)\end{aligned}\tag{3}$$

Poiché in un mezzo isotropo ε e μ sono scalari

$$\begin{aligned}H_2 \cdot \mu H_1 &= H_1 \cdot \mu H_2 \\ E_2 \cdot \varepsilon E_1 &= E_1 \cdot \varepsilon E_2\end{aligned}$$

e la (3) diventa:

$$\nabla \cdot [E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1] = -H_2 \cdot M_1 - E_1 \cdot J_2 + H_1 \cdot M_2 + E_2 \cdot J_1\tag{4}$$

Si osservi che la (4) può essere ricavata in modo analogo anche nell'ipotesi di mezzi anisotropi e reciproci, e cioè tali che:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{\varepsilon}}^T \\ \underline{\underline{\mu}} &= \underline{\underline{\mu}}^T\end{aligned}$$

In questo caso si ha infatti

$$\begin{aligned}H_2 \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot H_1 &= H_1 \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot H_2 \\ E_2 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot E_1 &= E_1 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot E_2\end{aligned}$$

che consentono di semplificare la (3) per ottenere in modo analogo la (4).

A questo punto si integra la (4) su un volume V , limitato da una superficie S con normale uscente \underline{i}_n (Fig. 1)

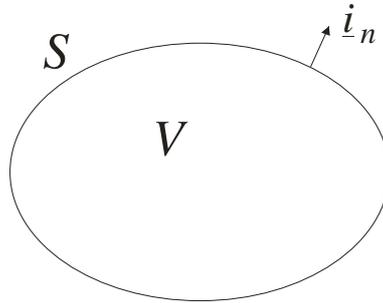


Fig. 1

$$\int_V \nabla \cdot [E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1] dV = \int_V (-H_2 \cdot M_1 - E_1 \cdot J_2 + H_1 \cdot M_2 + E_2 \cdot J_1) dV \quad (5)$$

Applicando il teorema della divergenza si ha:

$$\int_S (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) \cdot \underline{i}_n dS = \int_V (-H_2 \cdot M_1 - E_1 \cdot J_2 + H_1 \cdot M_2 + E_2 \cdot J_1) dV \quad (6)$$

La (6) fornisce la forma più generale del teorema di reciprocità.

L'integrale di volume a secondo membro è esteso a tutto il volume V , anche se in realtà lo posso considerare esteso solamente alla parte di V che contiene le sorgenti.

Il teorema di reciprocità costituisce uno strumento molto potente della teoria dell'elettromagnetismo. Può essere utilizzato per dedurre altri teoremi, ovvero per calcolare i campi generati da certe sorgenti in una certa regione, partendo da altri campi già noti, prodotti nella stessa regione da sorgenti diverse (si veda ad esempio G. Conciauro: Introduzione alle Onde Elettromagnetiche, Par. 4.5: "Simmetria della matrice di ammettenza di una giunzione").

Nella (6) si può notare che, se l'integrale di superficie a primo membro è nullo, si ottiene la seguente espressione:

$$\int_V (E_1 \cdot J_2 - H_1 \cdot M_2) dV = \int_V (E_2 \cdot J_1 - H_2 \cdot M_1) dV \quad (7)$$

Ciascuno degli integrali in (7) prende il nome di *integrale di reazione*. Il teorema di reciprocità nella formulazione (7) afferma che le reazioni dei campi sulle sorgenti sono uguali.

A questo punto ha senso valutare l'integrale a primo membro della (6) per verificare se, e sotto quali condizioni, è nullo.

L'integrale a primo membro del teorema di reciprocità è nullo

a) se la superficie S è un conduttore elettrico perfetto

Infatti:

$$E_1 \times H_2 \cdot \underline{i}_n = (\underline{i}_n \times E_1) \cdot H_2 = 0$$

$$E_2 \times H_1 \cdot \underline{i}_n = (\underline{i}_n \times E_2) \cdot H_1 = 0$$

perchè la componente tangente del campo elettrico è nulla sulla superficie di un C.E.P.

b) se la superficie S è un conduttore magnetico perfetto

$$E_1 \times H_2 \cdot \underline{i}_n = (\underline{i}_n \times H_2) \cdot E_1 = 0$$

$$E_2 \times H_1 \cdot \underline{i}_n = (\underline{i}_n \times H_1) \cdot E_2 = 0$$

perchè la componente tangente del campo magnetico è nulla sulla superficie di un C.M.P.

c) se l'integrale è esteso a tutto lo spazio, ovvero la superficie S è una superficie all'infinito (per semplicità si suppone una sfera di raggio infinito)

La funzione integranda a primo membro è:

$$E_1 \times H_2 \cdot \underline{i}_r - E_2 \times H_1 \cdot \underline{i}_r \tag{8}$$

Su una sfera all'infinito vale la condizione di Sommerfeld:

$$E = \zeta H \times \underline{i}_r + o\left(\frac{1}{r}\right) \tag{9}$$

Sostituendo la (9) nella (8) e ricordando che i campi sono $O\left(\frac{1}{r}\right)$, si ha:

$$\begin{aligned} E_1 \times H_2 \cdot \underline{i}_r - E_2 \times H_1 \cdot \underline{i}_r &= E_1 \cdot H_2 \times \underline{i}_r - E_2 \cdot H_1 \times \underline{i}_r = \\ &= E_1 \cdot \left(\frac{1}{\zeta} E_2 + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) - E_2 \cdot \left(\frac{1}{\zeta} E_1 + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}$$

cioè l'integrando a primo membro della (6) va a zero più rapidamente di $\left(\frac{1}{r^2}\right)$ e dunque l'integrale è nullo perché la superficie di integrazione (la superficie della sfera all'infinito) va all'infinito come r^2 :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 o\left(\frac{1}{r^2}\right) = 0$$

d) se nel volume V non ci sono sorgenti

e) se la superficie S racchiude tutte le sorgenti

si suppone di avere delle sorgenti al finito e che queste siano racchiuse entro un volume V' all'interno del volume V delimitato dalla superficie chiusa S (fig. 2)

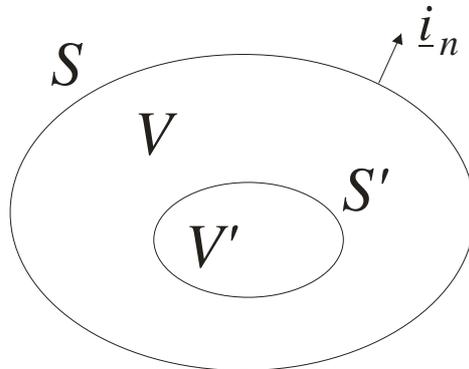


Fig. 2

In c) è stato dimostrato che $\oint_{S_\infty} (\dots) = 0$, quindi $\oint_{S_\infty} (\dots) = \int_{V_\infty} (\dots) = 0$ ma, poiché

l'integrale di volume dà contributo solamente nella zona dove ci sono le sorgenti e le sorgenti sono presenti solo all'interno di V' , si ha:

$$0 = \int_{V_\infty} (\dots) = \int_{V'} (\dots).$$

In conclusione $\oint_S (\dots) = \int_V (\dots) = \int_{V'} (\dots) = 0$, ovvero $\oint_S (\dots) = 0$ se S contiene tutte le sorgenti.

In altre parole, se si deforma la superficie S senza incontrare sorgenti (a partire da una superficie all'infinito), l'integrale esteso ad S vale sempre zero. Questo avviene perché la funzione integranda nella zona in cui non ci sono sorgenti è una funzione solenoidale.

f) se la superficie S è una superficie di impedenza

su S vale una condizione di impedenza del tipo

$$E = Z \underline{i}_n \times H \quad \rightarrow \quad \underline{i}_n \times H = \frac{E}{Z}$$

$$\begin{aligned} E_1 \times H_2 \cdot \underline{i}_n - E_2 \times H_1 \cdot \underline{i}_n &= E_1 \cdot H_2 \times \underline{i}_n - E_2 \cdot H_1 \times \underline{i}_n = \\ &= E_1 \cdot \left(-\frac{1}{Z} E_2 \right) - E_2 \cdot \left(-\frac{1}{Z} E_1 \right) = 0 \end{aligned}$$

I.2 Applicazione del teorema di reciprocità

Si consideri un conduttore elettrico perfetto di superficie S . Se sulla superficie S si mettono delle correnti superficiali impresse \mathbf{J}_s , il campo generato da queste correnti è identicamente nullo.

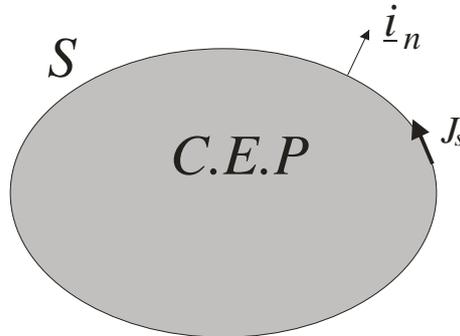


Fig. 3

Per la dimostrazione di quanto detto sopra si utilizza il teorema di reciprocità. Il volume V è costituito da tutto lo spazio ad eccezione del volume occupato dal C.E.P. La superficie S che racchiude il volume V è la superficie all'infinito con normale uscente più la superficie del C.E.P. con normale opposta ad \underline{i}_n .

Sia il campo "1" quello generato dalle correnti superficiali \mathbf{J}_s e il campo "2" quello di un dipolo elementare arbitrario (\underline{r}_0 e \underline{i}_D qualunque):

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{J}_2 = I \Delta z \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) \underline{i}_D$$

L'integrale di superficie a primo membro del teorema di reciprocità (6) è nullo (è nullo sulla superficie all'infinito ed è nullo sulla superficie del C.E.P.). Si ha dunque:

$$\int_V (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1) dV = 0$$

Ma $\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 = 0$, infatti il campo del dipolo sulla superficie del C.E.P. è ad esso normale, mentre $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_s$ è tangente alla superficie del C.E.P. Rimane pertanto

$$\int_V \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 dV = 0 \text{ ossia } \mathbf{E}_1(\underline{r}_0) \cdot \underline{i}_D = 0 \text{ per qualunque valore di } \underline{r}_0 \text{ e di } \underline{i}_D.$$

In conclusione $\mathbf{E}_1 \equiv 0$ in tutto lo spazio.

APPENDICE II: Teorema di equivalenza

Il teorema di equivalenza consente di sostituire, ai fini del calcolo del campo in una determinata regione, la distribuzione di sorgenti vera (J, M) con una distribuzione superficiale equivalente.

Si consideri una superficie generica e regolare S che racchiude, tipicamente ma non necessariamente, una distribuzione generica di sorgenti (J, M) . Sia (E, H) il campo generato da queste sorgenti.

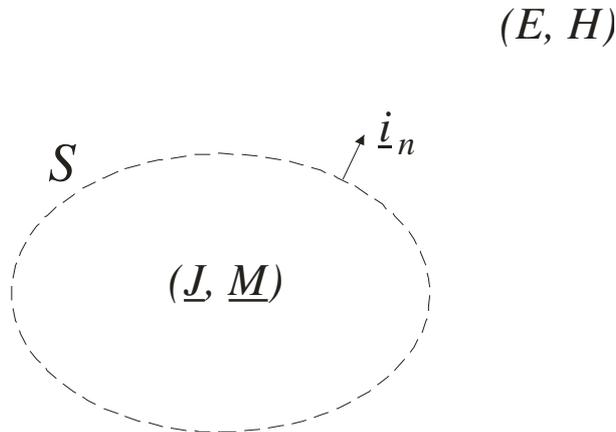


Fig. 4

Si vuole dimostrare che all'esterno di S (zona verso cui punta la normale \underline{i}_n) si ottiene lo stesso campo (E, H) , se si eliminano le sorgenti (J, M) all'interno di S e si sostituiscono con delle opportune correnti superficiali

$$\begin{aligned} J_s &= \underline{i}_n \times H = \underline{i}_n \times H_{tg} \\ M_s &= -\underline{i}_n \times E = -\underline{i}_n \times E_{tg} \end{aligned} \tag{10}$$

dove E ed H in (10) sono i campi di partenza sulla superficie S . Inoltre tali sorgenti forniscono un campo nullo all'interno di S .

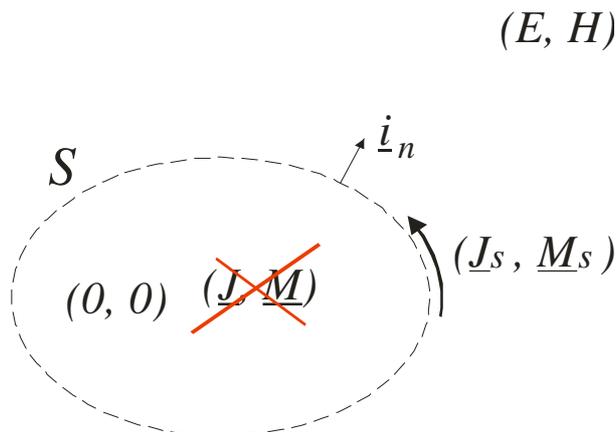


Fig. 5

Dimostrazione

Si consideri la seguente funzione vettoriale

$$(\underline{f}, \underline{g}) = \begin{cases} (0, 0) & \text{all'interno di } S \\ (E, H) & \text{all'esterno di } S \end{cases} \quad (11)$$

Si deve dimostrare che la (11) è il campo elettromagnetico prodotto dalle sorgenti equivalenti. La dimostrazione segue due passi:

- 1) si dimostra che la (11) è un campo elettromagnetico;
- 2) si dimostra che questo campo elettromagnetico soddisfa le condizioni del teorema di unicità ed è pertanto l'unico campo elettromagnetico compatibile con le sorgenti equivalenti.

Una coppia di funzioni vettoriali è un campo elettromagnetico se soddisfa le equazioni di Maxwell. All'interno di S la coppia $(f, g) = (0, 0)$ soddisfa le equazioni di Maxwell omogenee (in assenza di sorgenti); all'esterno di S la coppia (f, g) , per costruzione, soddisfa le equazioni di Maxwell, le eventuali condizioni al contorno e la condizione di Sommerfeld. Rimane da verificare se (f, g) è un campo elettromagnetico anche sulla superficie S , cioè se soddisfa le condizioni di raccordo su S :

$$\begin{cases} \underline{i}_n \times (H_{est} - H_{int}) = J_s \\ -\underline{i}_n \times (E_{est} - E_{int}) = M_s \end{cases} \quad (12)$$

Poiché $H_{int} = 0$ e $E_{int} = 0$ per ipotesi, le (12) sono soddisfatte dalla definizione (10).

In conclusione la coppia (11) è effettivamente un campo elettromagnetico compatibile con le sorgenti equivalenti (10).

Si deve ora dimostrare che questo campo elettromagnetico è anche l'unico che le sorgenti equivalenti producono. La dimostrazione è banale perché con le sorgenti equivalenti si ha un problema esterno nel dominio della frequenza. Il campo in oggetto soddisfa le equazioni di Maxwell e la condizione di irradiazione all'infinito e quindi, per il teorema di unicità, è l'unico campo che risolve il problema.

II.1 Applicazioni del teorema di equivalenza (a)

Per il teorema di equivalenza, se si sostituiscono le sorgenti vere (J, M) con una distribuzione superficiale equivalente (J_s, M_s) , all'interno di S il campo è nullo e all'esterno è uguale al campo di partenza (E, H) .

Se il campo all'interno di S è nullo, qualunque modifica del materiale dentro S non modifica il campo: $(0, 0)$ rimane la soluzione all'interno di S e il mezzo presente dentro la superficie S non modifica le condizioni di raccordo alla superficie. Questo significa che qualunque cosa faccia all'interno di S non perturba il campo all'esterno.

Quello che viene alterato è invece, come si vedrà, il contributo al campo delle correnti superficiali equivalenti impresse (J_s, M_s) .

Si può pensare, ad esempio, di mettere all'interno di S un C.E.P. Il campo al di fuori di S non cambia e all'interno rimane nullo.

(E, H)

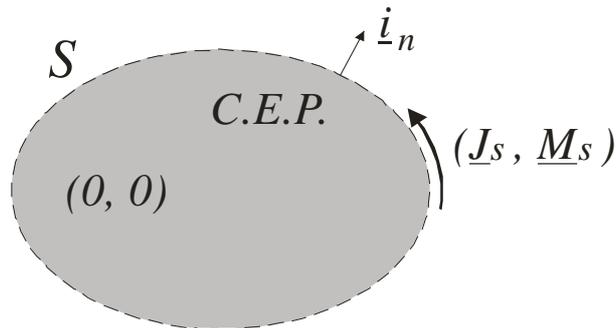


Fig. 6

All'esterno di S dovrà essere pertanto, per il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$(E, H)_{J_s}^{(vuoto)} + (E, H)_{M_s}^{(vuoto)} = (E, H)_{J_s}^{(C.E.P.)} + (E, H)_{M_s}^{(C.E.P.)}$$

D'altra parte in 1.1 è stato dimostrato che il contributo delle J_s è nullo perché si tratta di correnti impresse sulla superficie di un C.E.P., e quindi la sola corrente magnetica M_s genera il campo all'esterno purchè posta sulla superficie di un C.E.P. (Fig. 7).

In modo duale la sola corrente elettrica J_s dà contributo al campo all'esterno se all'interno di S inserisco un C.M.P.

(E, H)

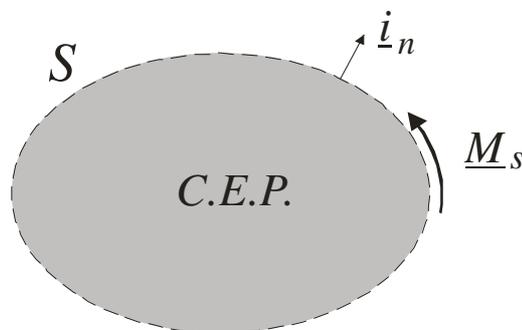


Fig. 7

Come detto, nella situazione di Fig. 7, il campo all'esterno di S è rimasto inalterato e il campo all'interno è ancora nullo. Quindi attraverso la superficie S del C.E.P. sono ancora discontinui sia il campo elettrico sia quello magnetico tangenti (E_{tg}, H_{tg}) . Da ciò segue che sulla superficie S ci sarà una corrente elettrica pari a $\underline{i}_n \times H_{tg}$, **indotta** sul conduttore dalla corrente magnetica M_s , e tale da garantire la corretta discontinuità del campo magnetico all'interfaccia S .

In sostanza la corrente magnetica **impressa** M_s **induce** sulla superficie del C.E.P. una corrente elettrica $\underline{i}_n \times H_{tg}$ che è uguale alla corrente elettrica equivalente impressa ed proprio quella necessaria a produrre il campo corretto all'esterno.

Per quanto detto si hanno a disposizione le seguenti scelte: si mettono su S sia la corrente elettrica che quella magnetica, oppure si mette la sola corrente magnetica e la si fa irradiare in presenza di un C.E.P., con la conseguenza che il C.E.P. fornisce la corrente elettrica indotta necessaria a garantire la discontinuità del campo magnetico.

A questo punto è possibile dare una interpretazione alternativa alla dimostrazione 1.1: una corrente elettrica impressa su un C.E.P. induce una corrente elettrica superficiale esattamente uguale ed opposta in modo tale che il campo totale irradiato sia nullo.

II.2 Applicazioni del teorema di equivalenza (b)

Si osservi che nella applicazione del teorema di equivalenza si devono eliminare solamente le sorgenti poste all'interno di S . Le eventuali sorgenti poste all'esterno devono essere conservate se si vuole mantenere lo stesso campo all'esterno.

A tal proposito si consideri l'esempio in Fig. 8.

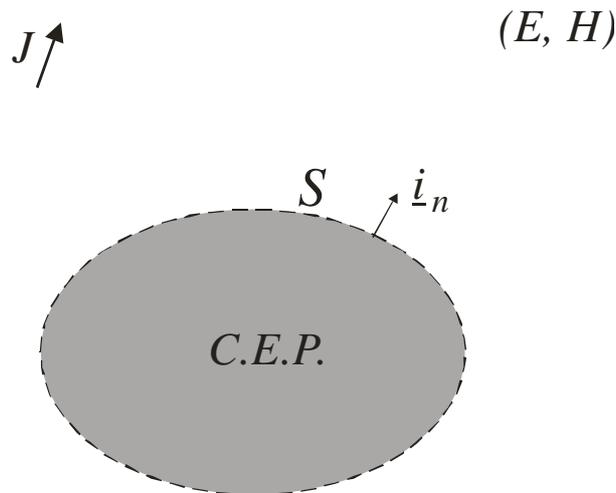


Fig. 8

La **situazione di partenza** consiste di una corrente J che irradia in presenza di un C.E.P. Si applica dunque a questa situazione il teorema di equivalenza e, a tal fine, si sceglie una superficie S che coincide con la superficie del C.E.P. Occorre fare attenzione alla direzione della normale ad S che distingue tra volume interno ed esterno ad S . La corrente J è dunque situata all'esterno di S .

L'applicazione del teorema di equivalenza porta ad eliminare le *eventuali* sorgenti poste all'interno di S e sostituirle con delle correnti superficiali equivalenti

$$J_s = \underline{i}_n \times H$$

$M_s = -\underline{i}_n \times E = 0$ (perché il campo tangente sulla superficie del C.E.P. è nullo). In questo caso non sono presenti sorgenti all'interno di S .

La situazione equivalente è dunque la seguente

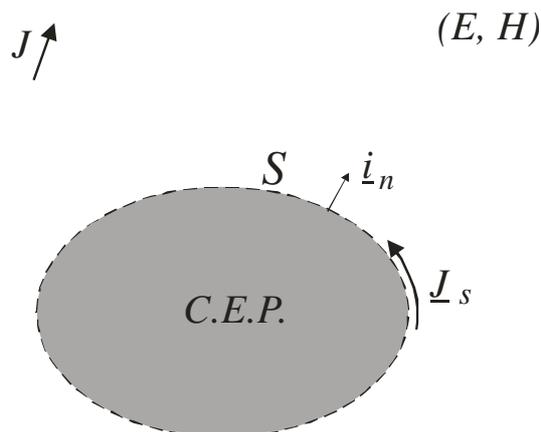


Fig. 9

Ovviamente le correnti J_s impresse sul C.E.P. producono campo nullo all'esterno. Dato che le J_s non producono campo si può pensare di eliminarle e la discontinuità del campo magnetico tangenziale sarà garantita da correnti indotte sul C.E.P. esattamente uguali alle correnti impresse che ho eliminato³.

A questo punto, come detto in precedenza, è possibile modificare il materiale all'interno di S senza alterare il campo all'esterno. Di conseguenza, è possibile sostituire al C.E.P. il vuoto senza che il campo all'esterno cambi e con il campo all'interno che si mantiene nullo (Fig. 10). In quest'ultimo caso le correnti elettriche J_s impresse producono campo all'esterno, e saranno queste correnti a garantire la corretta discontinuità del campo magnetico alla superficie.

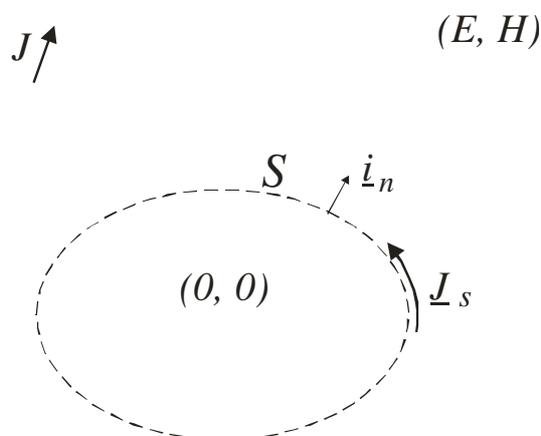


Fig. 10

Poiché le correnti impresse J_s nella situazione mostrata in Fig. 10 sono uguali alle correnti indotte nella situazione mostrata in Fig. 9, si può concludere che è possibile sostituire un C.E.P. con le correnti elettriche superficiali indotte su di esso.

II.3 Applicazioni del teorema di equivalenza (c)

Tenendo presente la definizione di (J_s, M_s) (10) è evidente che, per determinare le sorgenti equivalenti è necessario conoscere il campo tangente sulla superficie e cioè occorre aver già risolto il problema elettromagnetico.

Quindi si potrebbe pensare che il teorema di equivalenza sia inutilizzabile in quanto per poterlo

³ Le correnti sono indotte sul C.E.P per la presenza della corrente esterna J .

utilizzare è necessario conoscere il campo vero sulla superficie S .

In realtà il teorema di equivalenza viene usato in elettromagnetismo per risolvere una notevole varietà di problemi e ad esempio può essere usato nei seguenti casi:

(a)

si conosce il campo sulla superficie S ma non al di fuori di S . Ad esempio perché è possibile misurare il campo su S oppure approssimarne il valore.

E' il caso della approssimazione di Kirchoff per fori di grandi dimensioni rispetto alla lunghezza d'onda praticati in uno schermo C.E.P. L'approssimazione di Kirchoff consiste nel valutare il campo elettrico sul foro come se lo schermo metallico non ci fosse. Infatti, se il foro è grande l'interazione del campo incidente con gli spigoli del foro è limitata ad una zona vicina al foro e di dimensioni piccole o confrontabili con la lunghezza d'onda (Fig. 11).

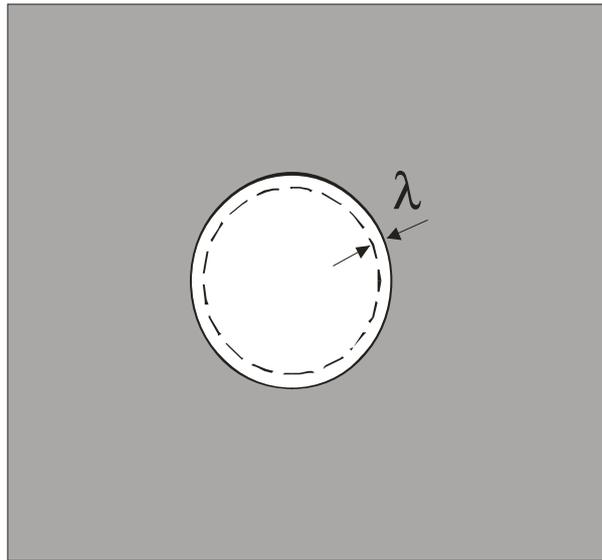


Fig. 11

A questo punto si può pensare di studiare il caso di un campo incidente su uno schermo metallico infinito sul quale è praticato un foro di grandi dimensioni rispetto alla lunghezza d'onda. Si applica dunque l'approssimazione di Kirchoff.

Una volta nota l'approssimazione di Kirchoff per il campo vero sul foro è possibile applicare il teorema di equivalenza per risolvere il problema relativo al calcolo del campo trasmesso oltre il foro (Fig. 12).

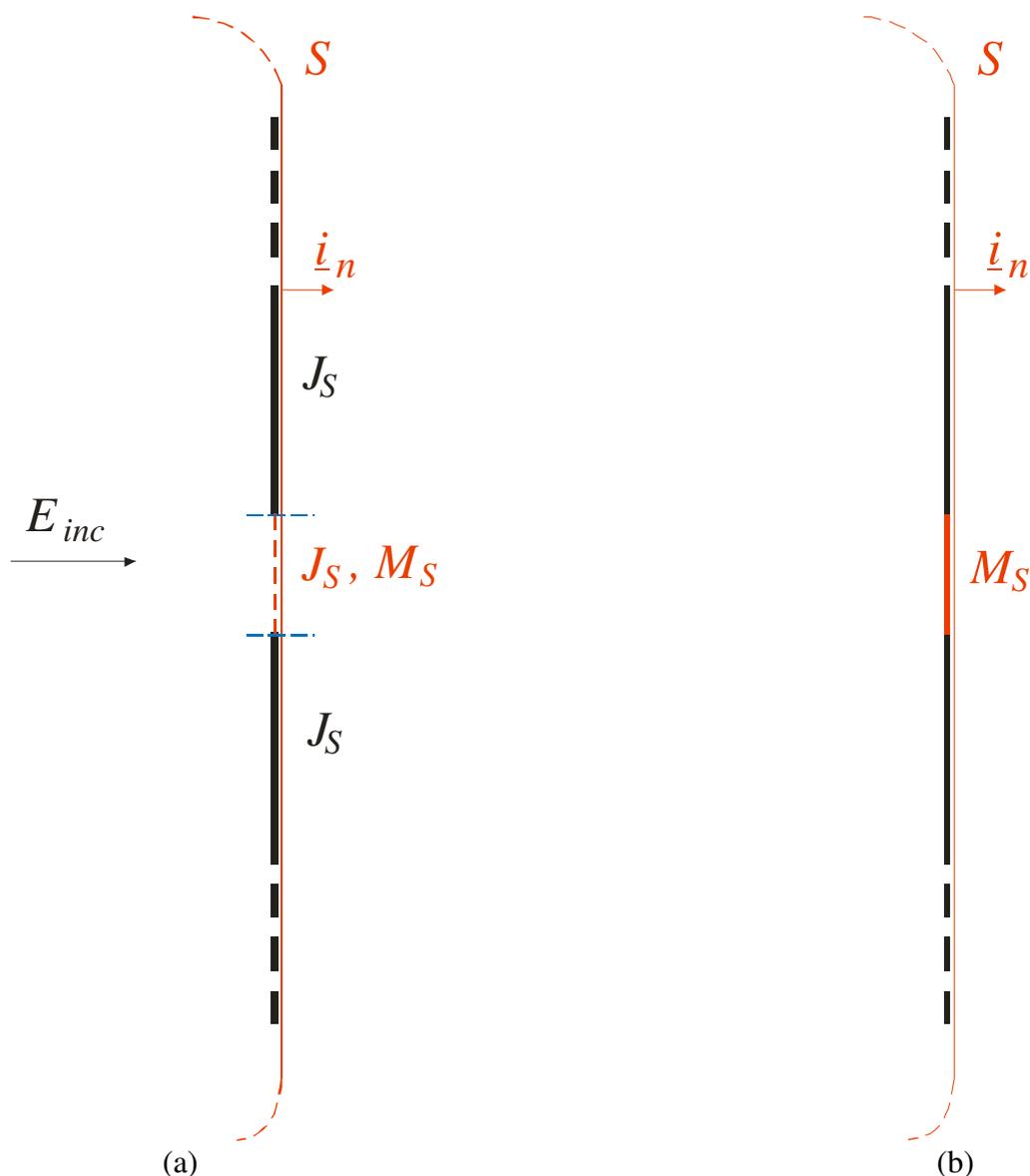


Fig. 12

A questo punto si applica il teorema di equivalenza alla superficie S che si appoggia sullo schermo conduttore e si chiude all'infinito (Fig. 12a). Si possono distinguere due regioni sulla superficie S :

- la regione del foro, dove sia il campo elettrico che il campo magnetico sono diversi da zero, e si ha:

$$J_s = \underline{i}_n \times H$$

$$M_s = -\underline{i}_n \times E$$

dove E ed H sono i campi in corrispondenza del foro ma calcolati come se lo schermo C.E.P non ci fosse.

- la regione al di fuori del foro che è C.E.P. ed è quindi caratterizzata da campo elettrico tangente nullo, e si ha:

$$J_s = \underline{i}_n \times H$$

$$M_s = -\underline{i}_n \times E = 0$$

dove H è il campo magnetico vero (incognito) tangente allo schermo.

Poiché dall'approssimazione di Kirchoff si conosce solamente il campo in corrispondenza del foro, la soluzione più ragionevole è quella di metallizzare il foro (par. 2.1) ed eliminare le correnti

elettriche superficiali impresse J_s che ora generano campo nullo all'esterno di S . In conclusione, per il calcolo del campo trasmesso oltre il foro, è possibile studiare il problema elettromagnetico mostrato in Fig. 12b ossia con le sole correnti magnetiche equivalenti M_s presenti solo in corrispondenza del foro e che irradiano in presenza di uno schermo C.E.P infinito.

(b)

Ovviamente se il foro è confrontabile con la lunghezza d'onda l'approssimazione di Kirchoff non è più valida. In questo caso è comunque possibile usare il teorema di equivalenza utilizzando una strada differente. Come detto, il foro è completamente caratterizzato dalla conoscenza del campo tangente *vero* sul foro. In questo caso non conosco questo campo e non lo posso approssimare.

Come primo passo si applica il teorema di equivalenza alla superficie S che poggia sullo schermo metallico, sia nella regione a sinistra, sia nella regione a destra del foro, e si chiude all'infinito (Fig. 13a).

Analogamente a quanto fatto nel caso **(a)** si può considerare la situazione equivalente mostrata in Fig. 13b. La corrente magnetica equivalente $M_s = -\underline{i}_n \times E_{tg}$ in corrispondenza del foro, irradia in presenza di un C.E.P infinito sia nella regione A che nella regione B . M_s è opposta nelle due regioni perché la normale alla superficie S è opposta.

Per determinare il campo elettrico in corrispondenza del foro, e quindi la corrente magnetica equivalente che consente di calcolare il campo in tutto lo spazio, si possono applicare le condizioni di continuità del campo magnetico⁴ tangente sul foro:

$$\underline{H}^{(A)} = \underline{H}_{inc} + \int \underline{G}_m^{(A)} \cdot (-\underline{M}_s) dS$$

$$\underline{H}^{(B)} = \int \underline{G}_m^{(B)} \cdot \underline{M}_s dS$$

$$\underline{i}_n \times \underline{H}^{(A)} = \underline{i}_n \times \underline{H}^{(B)} \quad (\text{Magnetic Field Integral Equation})$$

$\underline{G}_m^{(A)}$ e $\underline{G}_m^{(B)}$ sono le funzioni di Green per il campo magnetico rispettivamente nelle regioni A e B . In pratica esse forniscono il campo magnetico generato da un dipolo elementare magnetico posizionato in corrispondenza del foro.

⁴ La continuità del campo elettrico tangente sul foro è garantita per costruzione.

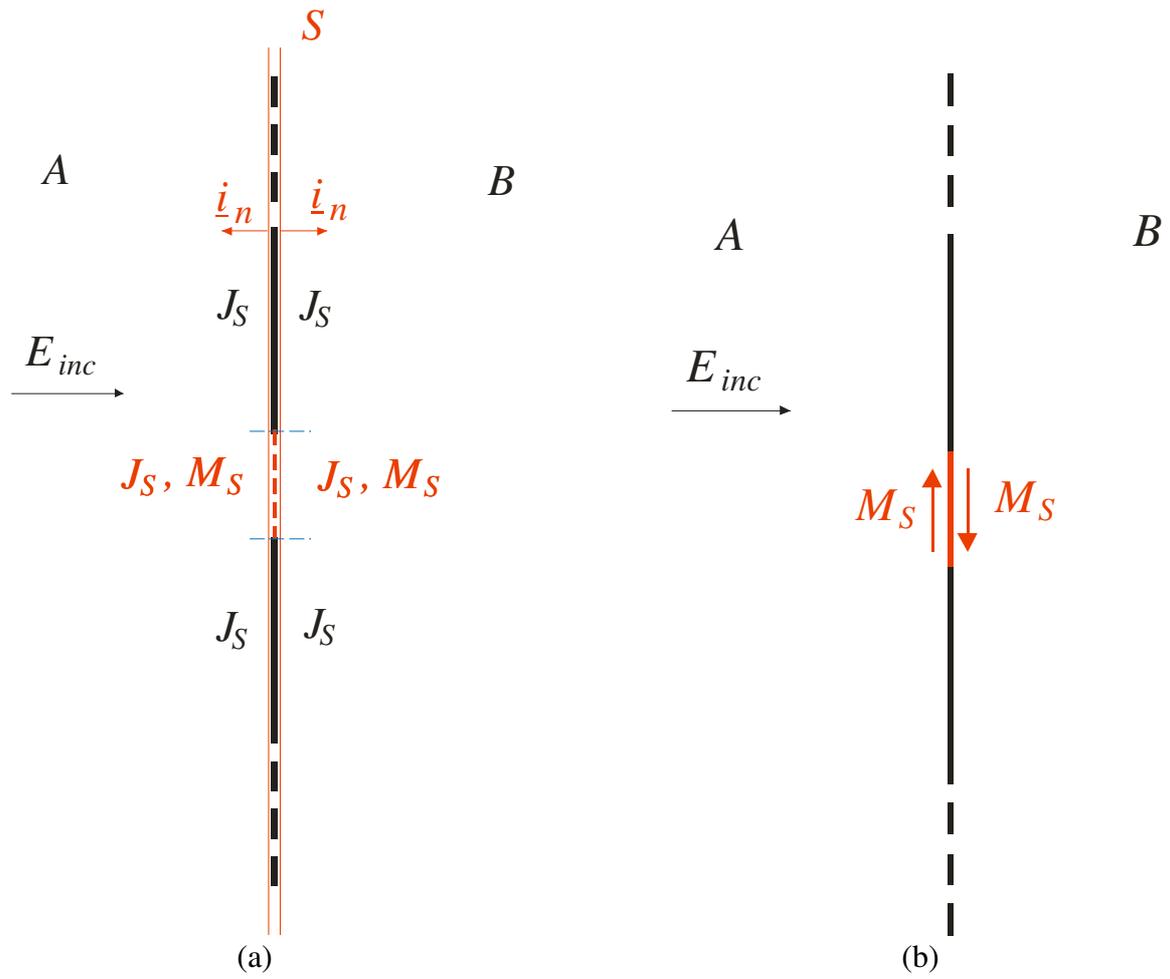


Fig. 13