Applicazioni Lineari

(1) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (k^2x + y, kx + y - (k - 1)z)$$

- Trovare i valori di k per cui f non è suriettiva.
- Si determinino, per ogni valore di k, una base per i sottospazi $Kerf$ e Imf.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(a, b, c) = (a + b, 2c, a^2 - b^2)$$

Provare che$f$ non è lineare. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle terne (x, x, z) al variare di$x$ ez in$\mathbb{R}$. Provare che la restrizione di f a Vè lineare e determinarne immagine e nucleo.

(3) Siano $S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari definite da

$$\begin{aligned} S(x, y, z, t) &= (x + y - z + t, 4x + 3y + z, 4x + y + 2z + 2at) \qquad a \in \mathbb{R} \\ T(x, y, z) &= (x - 3y + z, x + 3y + z, 4x + bz) \qquad b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Si dica per quali valori di a e b la trasformazione lineare $T \circ S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ risulta suriettiva e per quali valori è iniettiva, si determinino le matrici associate a S, T e $T \circ S$ rispetto alle basi canoniche;
- Siano $a = b = 0$ si determini:

a) una base di $KerS$, $KerT$, $Ker(T \circ S)$; e una base di ImS, ImT, $IM(T \circ S)$;
b) una base per gli autospazi di T.
c) posto $V = ImS \cap Im(T \circ S)$, si determini $(T \circ S)^{-1}(V)$.

(4) Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \mathbb{R}^4$. Stabilire per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa giustificando adeguatamente la risposta.

a) Non esistono trasformazioni lineari suriettive da V a W.
b) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da V a W.
c) Ogni insieme di 3 vettori di V è linearmente dipendente.
d) Ogni insieme di 4 vettori di W è linearmente indipendente.